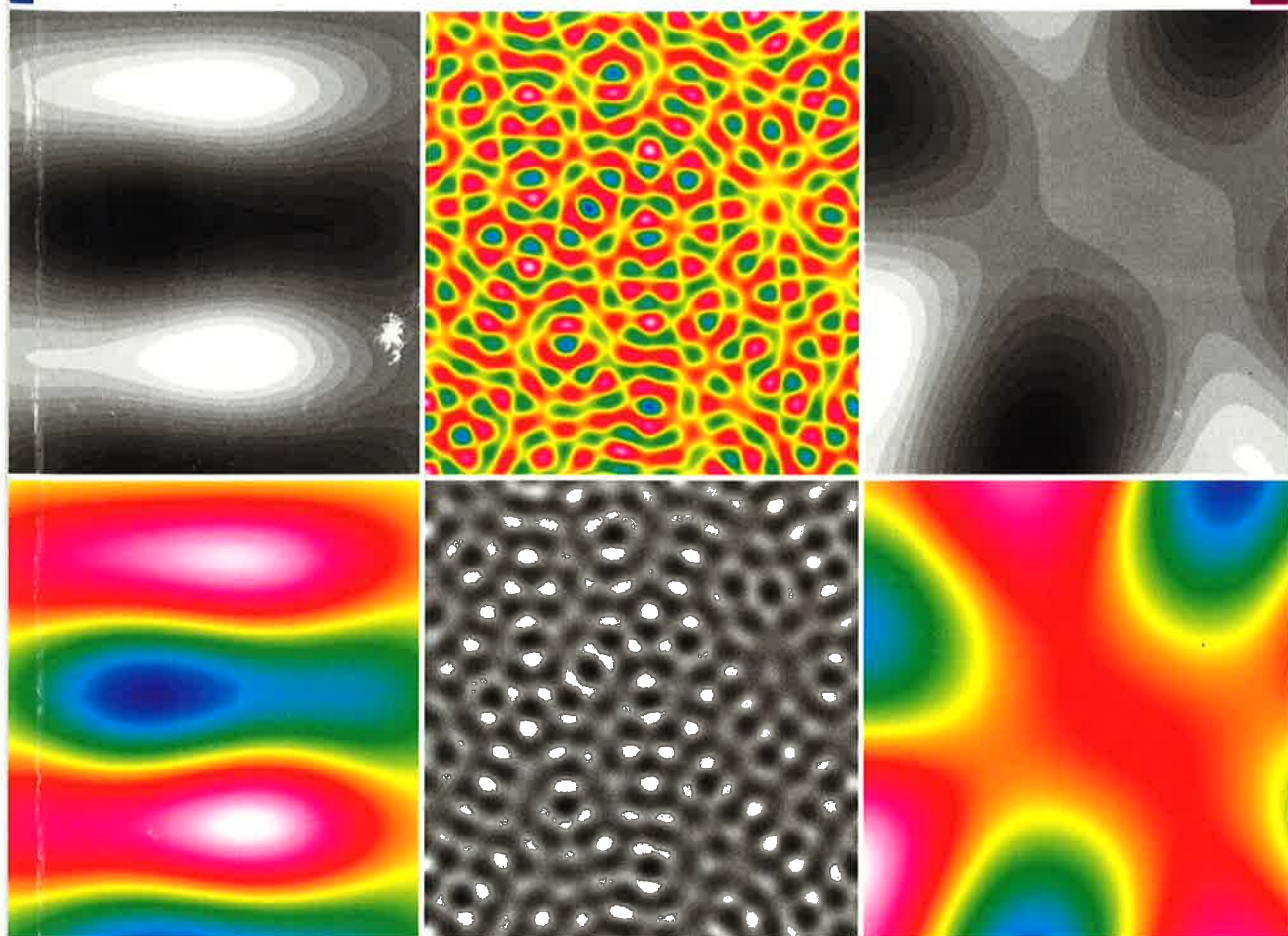




VIII Suomen mekaniikkapäivät

Espoossa 12.-13. kesäkuuta 2003

2. Kokouspäivän esitelmät

Peter Råback, Kari Santaoja ja Rolf Stenberg (toim.)

VIII SUOMEN MEKANIKKAPÄIVÄT

Espoossa 12.-13.6.2003

NIDE 2

2. Kokouspäivän esitelmät

Toimittajat

Peter Råback, Kari Santaoja ja Rolf Stenberg



TEKNILLINEN KORKEAKOULU
TEKNISKA HÖGSKOLAN
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
TECHNISCHE UNIVERSITÄT HELSINKI
UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE D'HELSINKI

Tieteellinen neuvosto

Jukka Aalto, TKK
Tuomo Kärnä, VTT
Juha Paavola, TKK
Mauri Määttänen, TKK
Peter Råback, CSC
Kari Santaoja, TKK
Timo Siikonen, TKK
Rolf Stenberg, TKK
Jukka Tuhkuri, TKK

Järjestelytoimikunta

Tuula Donskoi
Irina Forsman
Kirsi Hepolehto
Katri Luostarinen
Peter Råback
Kari Santaoja
Rolf Stenberg
Heli Tuomela

TEKNILLINEN KORKEAKOULU

Lujuusopin laboratorio
PL 4100
02015 TKK

Puh. (09) 451 3445
fax. (09) 451 3443

ISBN 951-22-6569-9

SISÄLLYSLUETTELO

Esipuhe

English summary

Kuva: Professori emeritus Martti Mikkola

Kuva: Professori emeritus Eero-Matti Salonen

NIDE 1

Kutsutut esitelmät

<i>Leimkuhler B.</i> Things that go “bump”	7
<i>Rizzi A., Görtz S. and Le Moigne Y.</i> Unsteady CFD simulations of vortex interactions over delta wings	19
<i>Koski J.</i> Sensitivity analysis in structural optimization	23

Optimointi I

<i>Kere P., Lyly M. and Ojala J.</i> Minimum weight design of composite lamination with an interactive descent method	31
<i>Kautto M. ja Pajunen S.</i> Optimointialgoritmien käyttö epälineaarisen tasapainopolun määrittämisessä	43
<i>Lu W. and Mäkeläinen P.</i> Optimum design of cold-formed Σ -shape steel purlin using genetic algorithms	53
<i>Martikka H. and Kuosa M.</i> Optimum design of a power transmission using electro-rheological, viscous and hydrodynamic fluid control of torque and speed for machines	61

Virtauslaskenta I

<i>Hammarström D., Hämäläinen J. P. and Dahlkild A.</i> CFD simulation of fiber suspensions	71
--	----

<i>Mikkola T.</i> Numerical simulation of free surface flows in 2D with unstructured finite volume based pressure correction method	77
--	----

<i>Rahman M. M. and Siikonen T.</i> Turbulent Prandtl number that matters	89
--	----

<i>Karvinen A. and Ahlstedt H.</i> A comparison of turbulence models and the calculation of the near-wall area in the case of a jet in a crossflow	99
---	----

Värähtelymekaniikka

<i>Jorkama M. and von Herten R.</i> Delay phenomena in roll vibrations	111
---	-----

<i>Nurkkala P., Haapaniemi H, Luukkanen P. ja Saarenheimo A.</i> Output-only moodianalyysi	123
---	-----

<i>Kiviluoma R.</i> Applications of frequency-domain approach for vortex-induced vibration of bridges	135
--	-----

Kokeellinen mekaniikka

<i>Koskinen S., von Herten R. ja Sepponen R.</i> Ballistokardiografia sydämen kunnon seurannassa	145
---	-----

<i>Kinnunen J.</i> Measurement of the anisotropic elastic properties of the paper web in plane stress case	155
---	-----

<i>Vuorinen T.-P., Kempainen M., Tantt M. and Pykäläinen P.</i> Channel composite material properties determination	167
--	-----

Virtauksen ja rakenteen vuorovaikutus

<i>Fronelius T., Laukkanen J. ja Pramila A.</i> Rajakerroksen vaikutus aksiaalisesti liikkuvan nauhan ominaistajuuksiin	179
--	-----

<i>Calonius K., Pättikangas T. and Saarenheimo A.</i> Numerical analyses of a water pool under loading caused by large air and steam bubbles	191
---	-----

<i>Pursula A. and Råback P.</i> Computationally economical coupled simulations of a gas damped micromechanical resonator	203
---	-----

Kämäräinen J.

- A numerical calculation method for the investigation of shear driven flow between the hull surface of a vessel and ice floes in the ice sliding phase 215

Murtumismekaniikka

Fortino S. and Bilotta A.

- A coupled displacement-crack growth analysis without remeshing for 2D problems of LEFM 229

Marquis G.

- Aspects of crack propagation of small cracks during variable amplitude fatigue 237

Talja H., Keinänen H., Hosio E., Pankakoski P. and Rahka K.

- Failure strain determination using rupture tests with reactor pressure vessel head models 249

Cronvall O.

- Risk and lifetime analysis methods for structural systems and components of power plants 261

Rakenteiden mekaniikka I

Miettinen A. and Parland H.

- From straight arches to segmental beams 273

Halme T.

- New eigenvalue formulation for stability analysis using second order generalised beam theory 285

Perälä M.

- Improved SPR method for plane arch problem 297

Koivula R.

- Derivation of the Kollbrunner-Hajdin theory of the thin-walled rectangular box beam under torsion by dividing the beam into guided Vlasov beams with open cross-section 307

Marjamäki H. ja Mäkinen J.

- Teleskooppipuomin mallintaminen elementtimenetelmällä 317

Maa- ja jäämekaniikka

Zwinger T. and Forsström P.-L.

- New challenges in ice sheet simulation 329

Hartikainen J.

- On freezing and thawing of ground with implications of glaciers 341

Korhonen O. ja Lojander M.

- Kuormitusnopeuden vaikutus saven painumaparametreihin 343

<i>Aalto A., Ravaska O. ja Lojander M.</i> Murron saven painumaparametrit	349
--	-----

<i>Saksala T.</i> Finite element modeling of stress wave propagation due to contact-impact in rock drilling	361
--	-----

Laskentamenetelmiä opetukseen

<i>Salonen E.-M. and Holopainen R.</i> A simple numerical solution method for plane cables	371
---	-----

<i>Aalto J.</i> Kulmanmuutosmenetelmästä ja sen implementoinnista	383
--	-----

Mekaniikan ohjelmistokehitys

<i>Majander P. and Siikonen T.</i> A parallel multi-block Navier-Stokes solver for large-eddy simulation in complex flows	395
--	-----

<i>Hiltunen K., Laitinen M., Niemistö A. and Tarvainen P.</i> Using mathematical concepts in software design of computational mechanics	407
--	-----

<i>Mäkinen R. A. E., Hiltunen K., Laitinen M. and Niemistö A.</i> Exact linearization in numerical simulation and optimization	419
---	-----

NIDE 2

Optimointi II

<i>Ranta M. A. ja von Hertzen R.</i> Optimaalinen kohtauskulmajakauma mäkihypyn lentovaiheessa	435
---	-----

<i>Jalkanen J.</i> Putkipalkkikehän optimointi	443
---	-----

<i>Turkkila T.</i> Tasokehärakenteen topologian monitavoitteinen optimointi	455
--	-----

Rakenteiden mekaniikka II

<i>Varpasuo P.</i> The 3D displacement analysis of Plavinas hydro power plant powerhouse and 2D stress and stability analysis	465
--	-----

Holopainen P.

Graphic-analytical method to determine the initial state of suspension bridge with inclined hangers

479

Materiaalien käyttäytyminen

Kolari K., Kouhia R. and Kärnä T.

On viscoplastic regularization of strain softening solids

489

Korhonen O., Korhonen K.-H. ja Lojander M. .

Hiekan mekaaninen käyttäytyminen kolmiaksaalikokeessa

497

Jussila P.

Thermomechanical model for compacted bentonite

509

Keski-Rahkonen O. ja Mangs J.

Ikkunaruudun lämpenemisen ja rikkoutumisen malli

521

Elementtimenetelmän teoria

Havu V. ja Hakula H.

MITC4-kuorielementin konvergenssiominaisuudet

533

Lyly M., Niiranen J. ja Stenberg R.

Jälkikäsittelemenetelmä MITC-laattaelementeille

541

Mäkipelto J.

Rationaaliset Beziér-käyrät korkea-asteisen tasokolmioelementin geometrian kuvauksessa

553

Mäkinen J.

Eulerin differentiaaliyhtälön kuvaus kiertymismonistolta lineaariseen avaruuteen

565

Mekaniikan erityisongelmia

von Herten R. and Jorkama M.

An orthotropic nonlinear roll model accounting for finite strain

577

Ärölä K. and von Herten R.

Increase of sheet tension under a rolling nip

589

Lahtinen T., Lyly M., Ruokolainen J. ja Stenberg R.

Ydinjätteen kapselisijoituksen mekaanisen stabiiliuden laskentamenetelmä

601

Leskelä M. V.

Zip-flyer effect and its appearance in composite structures

607

Toiva J. ja von Herten R.

Roottorin vasteista erilaisilla rakenteen epäideaalisuuksilla

615

Virtauslaskenta II

Hellsten A.

Behaviour of linear and nonlinear two-equation turbulence models near interfaces of turbulent and laminar flow

627

Brandt T.

Direct numerical simulation of turbulent channel flow using finite difference scheme

639

Salo K. and Hellsten A.

A simple Reynolds stress turbulence model for validating its algebraic truncations

651

Öström J.

Lennon simulointi

663

Keikko K.

Elektroniikan jäähdytyksen haasteita virtauslaskennalle

673

OPTIMAALINEN KOHTAUSKULMAJAKAUMA MÄKIHYPPYN LENTOVAIHEESSA

Matti A Ranta ja Raimo von Hertzen
Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laitos
PL 1100, 02015 TKK

TIIVISTELMÄ

Mäkihyppääjään vaikuttaa hypyn lentovaiheessa painovoiman lisäksi hyppääjän asennosta riippuvat aerodynaaminen nostovoima, vastusvoima ja pituusmomentti. Hypyn kohtauskulman jakaumalla on huomattava vaikutus hypyn pituuteen. Työssä johdetaan Pontryaginin ääriarvoperiaatetta käyttäen matemaattiset yhtälöt hypyn optimaalisen kohtauskulmajakauman määrittämiseksi. Numeeriset tarkastelut suoritetaan Japanin Hakuban normaalimäen (K100) tapauksessa. Pontryaginin mukaan optimoitua hyppyä verrataan yksinkertaisempaan perushyppyyn sekä osittain optimoituihin hyppyyhin. Yhteenvedon voidaan todeta, että yksi suurimpia virheitä on liian suuri kohtauskulma hypyn alkuvaiheessa ja että optimaalinen kohtauskulmajakauma voi lisätä hypyn pituutta yli 10 m.

JOHDANTO

Mäkihyppy on hyppymäessä suoritettava hiihtourheilulaji, joka sai alkunsa Norjassa 1800-luvun alkupuolella. Hyppy suoritettiin luonnonmäissä ja alastulo tapahtui lähes vaakasuoralle tasolle. Suomessa pidettiin ensimmäiset mestaruuskilpailut 1886 ja ensimmäinen varsinainen mäki valmistui Helsingin Alppilaan 1905. Kun kansainvälinen hiihtoliitto FIS perustettiin 1924, alkoi hiihto- ja mäenlasku-urheilun voimakas kehittyminen talviolympialaisineen, Holmenkollenin ja Lahden kisoineen sekä Keski-Euroopan mäkiweekkoineen.

Käsitykset mäkihypyn suoritustulokseen vaikuttavista tekijöistä ovat vuosien kuluessa vaihdelleet. Viisikymmentäluvun alkupuolella prof. Strautman Sveitsistä oli sitä mieltä, että aerodynamiikka eli asento ilmalennon aikana oli tärkein. Saatua vauhti piti säilyttää mahdollisimman hyvin ja siksi ponnistus hyppyrin nokalla oli vain juohea lähtö ilmaan. Vuosikymmen myöhemmin prof. Hochmut Saksasta oli täysin päinvastaista mieltä. Hän korosti ballistiikan eli ilmalennon lähtönopeuden ja lähtökulman merkitystä. Nykytutkimus jakaa mäkihyppysuorituksen osiin seuraavasti: lähtö, liuku, ponnistus, ilmalento ja alastulo. Ponnistus muodostaa hypyn kriittisimmän vaiheen ja määrää pitkälti hypyn pituuden. On huomattava, että pystysuoran nopeuskomponentin lisäksi ponnistus vaikuttaa myös hyppääjän asentoon varsinkin ilmalennon alkuvaiheessa. Kilpailuhyppäjien tilastollinen faktorianalyysi osoittaa, että hyppääjän lentoasentoon liittyvät tekijät ovat tärkein hypyn pituutta selittävä tekijä, selvästi jopa nopeustekijöitä tärkeämpiä [1]. Tästä johtuen on erityisen tärkeää tutkia lentoasennon vaikutusta hypyn pituuteen ja pyrkiä määrittämään optimaalinen asento hypyn aikana.

Optimaalisen säätöteorian pohjalta on hypyn lentovaiheen kohtauskulmaa tiettävästi ensimmäisenä tutkinut L. Remizov [2], joka Pontryaginin ääriarvoperiaatetta käyttäen pyrki määrittämään hyppääjän kohtauskulman optimaalista jakaumaa. Remizov käsitteli kuitenkin radan loppupäätä

vapaana, mikä ei vastaa todellisuutta, sillä lentoradan loppupiste on sidottu alastulorinteeseen. Tässä työssä laajennetaan Remizovin käsittelyä ja määritetään optimaalisen kohtauskulma-jakauman lisäksi erilaisia osittain optimoituja hyppystrategioita.

PONTRYAGIN-OPTIMOITU HYPPY

Tarkastellaan hyppääjän massakeskipisteen lentorataa kuvan 1 mukaisesti. Hyppääjän liikeyhtälöt radan tangentin ja normaalin suunnalla ovat

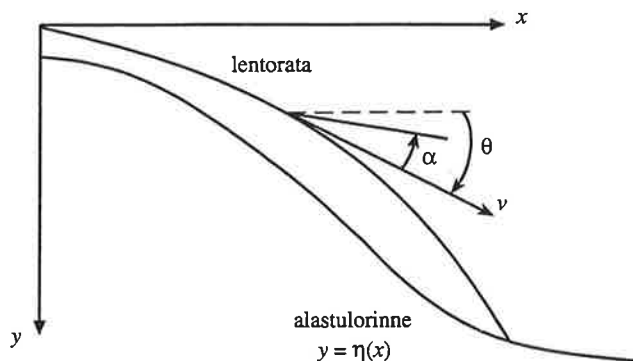
$$\frac{dv}{dt} = g[\sin\theta - kC_D(\alpha)(v-V)^2], \quad v(0) = v_0, \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{v}[\cos\theta - kC_L(\alpha)(v-V)^2], \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (2)$$

missä v on hyppääjän vauhti radan tangentin suunnassa, θ tangentin kaltevuuskulma vaakasuorasta mitattuna, V tuulen nopeus ratatangentin suunnalla, α hyppääjän kohtauskulma suksista mitattuna, $C_D(\alpha)$ ja $C_L(\alpha)$ hyppääjän aerodynaamiset vastus- ja nostovoimakertoimet ja g painovoiman aiheuttama kiihtyvyys. Kerroin k on määritelty kaavalla

$$k = \frac{\rho A}{2mg}, \quad (3)$$

missä ρ on ilman tiheys, A hyppääjän referenssipinta-ala ja m hyppääjän ja varusteiden massa.



Kuva 1. Mäkihyppääjän massakeskipisteen lentorata ja alastulorinne. Massakeskipisteen vauhti on v , radan tangentin kaltevuuskulma θ ja hyppääjän kohtauskulma suksista mitattuna α .

Hypyn alastulopisteen koordinaatit ovat

$$x(T) = \int_0^T v \cos\theta dt, \quad y(T) = \int_0^T v \sin\theta dt, \quad (4), (5)$$

missä $T = T[\alpha]$ on kohtauskulmahistoriasta $\alpha = \alpha(t)$ riippuva hypyn kesto-aika. Jos alastulorinteen yhtälö on muotoa

$$m(x, y) \equiv \eta(x) - y = 0, \quad (6)$$

toteuttaa hypyn päätepiste rajoite-ehdon

$$m(x(T), y(T)) = 0. \quad (7)$$

Todetaan vielä, että pisin hyppy saavutetaan silloin kun loppupisteen vaakakoordinaatti (4) on maksimoitu. Optimointitehtävä voidaan ratkaista Pontryagin minimiperiaatetta käyttäen [3]. Hypyn loppupisteen vaakakoordinaatti saavuttaa maksiminsa silloin, kun funktionaali

$$J[\alpha] = -\int_0^T v(\alpha(t)) \cos \theta(\alpha(t)) dt \quad (8)$$

saavuttaa miniminsä. Optimointitehtävää vastaava Hamiltonin funktio on

$$H = -v \cos \theta + p_x v \cos \theta + p_y v \sin \theta + p_v g [\sin \theta - k C_D(\alpha)(v-V)^2] + p_\theta \frac{g}{v} [\cos \theta - k C_L(\alpha)(v-V)^2]. \quad (9)$$

Optimoinnissa loppuaika T on vapaa ja päätepiste liikkuu käyrällä (7). Liittotilamuuttujat p_x , p_y , p_v ja p_θ toteuttavat kanoniset liittoyhtälöt

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dp_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (10)$$

Koska $\partial H / \partial x = \partial H / \partial y = 0$, ovat muuttujat p_x ja p_y vakioita. Hypyn päätepisteessä on voimassa pääte-ehdot

$$p_x(T) = -d\eta'(x(T)), \quad p_y(T) = d, \quad p_v(T) = 0, \quad p_\theta(T) = 0 \quad (11)$$

sekä

$$H(T) = 0. \quad (12)$$

Yhtälöistä (11) ja (12) seuraa vakiolle d arvo

$$d = \frac{\cos \Theta \cos \beta}{\sin(\Theta - \beta)}, \quad (13)$$

missä $\Theta = \theta(T)$ ja $\tan \beta = \eta'(x(T))$ eli Θ on lentoradan ja β rinteeseen kaltevuus hypyn päätepisteessä. Nyt Hamiltonin funktio saadaan muotoon

$$H = p_v g [\sin \theta - k C_D(\alpha)(v-V)^2] + p_\theta \frac{g}{v} [\cos \theta - k C_L(\alpha)(v-V)^2] - v \frac{\sin(\Theta - \theta) \cos \beta}{\sin(\Theta - \beta)}. \quad (14)$$

Liittoyhtälöistä (10) ja Hamiltonin funktiosta (14) saadaan muuttujille p_v ja p_θ yhtälöt

$$\frac{dp_v}{dt} = 2p_v g k C_D(\alpha)(v-V) + p_\theta \frac{g}{v^2} [\cos \theta + k C_L(\alpha)(v^2 - V^2)] + \frac{\sin(\Theta - \theta) \cos \beta}{\sin(\Theta - \beta)}, \quad p_v(T) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -p_v g \cos \theta + p_\theta \frac{g}{v} \sin \theta - v \frac{\cos(\Theta - \theta) \cos \beta}{\sin(\Theta - \beta)}, \quad p_\theta(T) = 0, \quad (16)$$

missä pääte-ehdot ovat kaavojen (11) mukaiset.

Tarkastellaan seuraavaksi optimaalisen säädön $\alpha = \alpha(t)$ määrittämistä. Pontryaginin minimiperiaatteen mukaan optimaalinen säätö minimoi Hamiltonin funktion radan jokaisessa pisteessä. Hamiltonin funktion minimi löytyvät joko ohjausalueen sisäpisteistä, jolloin

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{eli} \quad v p_v + p_\theta \frac{C_{L,\alpha}(\alpha)}{C_{D,\alpha}(\alpha)} = 0 \quad (17)$$

tai ohjauksen rajoilta, jolloin

$$\alpha = \alpha_{\min} \quad \text{tai} \quad \alpha_{\max} . \quad (18)$$

Ohjauksen alaraja $\alpha_{\min}$ määräytyy ehdosta, että hyppääjän sukset eivät saa haukata ilmaa. Käytännössä $\alpha_{\min} = 0$ on ehdoton alaraja. Yläraja $\alpha_{\max}$ määräytyy taas ehdosta, että virtaus ei saa irrota liian suuren kohtauskulman takia eli hyppääjä ei saa "sakata". Käytännössä tämä raja saadaan ehdosta $C_{L,\alpha}(\alpha_{\max}) = 0$. Kun määritellään funktio f kaavalla

$$f(\alpha) \equiv \frac{C_{L,\alpha}(\alpha)}{C_{D,\alpha}(\alpha)} , \quad (19)$$

voidaan optimaaliselle kohtauskulmalle pitkin lentorataa kirjoittaa

$$a(t) = \begin{cases} \alpha_{\min} & , \quad \text{kun} \quad -v p_v / p_\theta \geq f(\alpha_{\min}) \\ f^{-1}(-v p_v / p_\theta) & , \quad \text{kun} \quad f(\alpha_{\min}) > -v p_v / p_\theta > f(\alpha_{\max}) \\ \alpha_{\max} & , \quad \text{kun} \quad f(\alpha_{\max}) \geq -v p_v / p_\theta . \end{cases} \quad (20)$$

Yllä on kirjoitettu lyhyesti $v(t)p_v(t)/p_\theta(t) = v p_v / p_\theta$. Todetaan vielä, että Hamiltonin funktio $H = H(t, z_i, p_i, \alpha)$, missä on merkitty $z_i \equiv x, y, v, \theta$ ja $p_i \equiv p_x, p_y, p_v, p_\theta$, häviää pitkin optimirataa. Hamiltonin funktion aikaderivaatta pitkin lentorataa on

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} , \quad (21)$$

sillä summan termit häviävät liikeyhtälöiden (10) nojalla. Kun ohjaussuure α on määritetty optimaalisesti, on voimassa joko $\partial H / \partial \alpha = 0$ tai $d\alpha / dt = 0$. Koska Hamiltonin funktio (14) ei myöskään riipu eksplisiittisesti ajasta, on $\partial H / \partial t = 0$. Näin ollen myös $dH / dt = 0$ eli Hamiltonin funktio on vakio pitkin optimirataa. Koska pääte-ehdon (12) mukaan H häviää päätepisteessä, tulee sen hävitä pitkin koko optimirataa eli $H \equiv 0$. Tästä seuraa, että pitkin optimirataa on voimassa yhtälö

$$p_v [\sin \theta - k C_D(\alpha)(v - V)^2] + \frac{p_\theta}{v} [\cos \theta - k C_L(\alpha)(v - V)^2] = v \frac{\sin(\Theta - \theta) \cos \beta}{g \sin(\Theta - \beta)} . \quad (22)$$

Optimointiongelman ratkaisemiseksi on ratkaistava yhtäaikaaisesti liikeyhtälöt (1), (2) ja liikeyhtälöt (15), (16) ohjauksella (20) ja rajoitteella (7). Havaitaan, että kyseessä on kahden pisteen reuna-arvotehtävä. Ratkaisua voidaan tunnetusti hakea ampumis- tai relaksaatiomenetelmillä (*shooting and relaxation methods* [4]). Vaihtoehtoinen tapa on edetä seuraavasti. Ratkaistaan yhtälöistä (17) ja (22) liikeyhtälömuuttujat alkuhetkellä $p_v(0)$ ja $p_\theta(0)$. Näiden lausekkeet sisältävät tuntemattomat suuret $\alpha(0)$, Θ ja β . Ongelmaa voidaan nyt käsitellä alkuarvotehtävänä ja peräkkäisillä approksimaatioilla saadaan edellä mainituille suureille yhä parempia approksimaatioita. Iterointi voidaan lopettaa, kun lasketut loppuarvot $p_v(T)$ ja $p_\theta(T)$ ovat riittävän lähellä nollaa.

OSITTAIN OPTIMOIDUT HYPYT

Seuraavassa tarkastellaan erilaisia osittain optimoituja hyppystrategioita. Lähtökohtana on parametrisoitu kohtauskulman α esitys. Parametrit määritetään siten, että hypyn pituus maksimoituu. Valitaan lisäksi perushyppy, johon optimoituja hyppyjä tullaan vertaamaan. Perushypyksi voidaan valita esimerkiksi hyppy vakiokohtauskulmalla α_0 , joka vastaa parasta liitosuhdetta ($C_L / C_D = \max$) tai suurinta nostovoimaa ($C_L = \max$). Eri hyppystrategioiden hyvyyden mittana käytetään Hamiltonin funktion neliön aikakeskiarvon neliöjuurta

$$\varepsilon_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T H(t)^2 dt} . \quad (23)$$

Täysin optimoidulla hypyllä pätee $H(t) \equiv 0$, jolloin myös ε_{RMS} häviää. Tarkastellaan seuraavassa viittä erilaista strategiaa.

I Optimoitu vakiokohtauskulma

Vakiona pidettävä kohtauskulma α_0 valitaan siten, että hypystä tulee mahdollisimman pitkä.

II Vakasuora kiihtyvyys vakiona

Viitteessä [5] on esitetty, että hyvässä hypyssä vaakasuoran kiihtyvyyden tulisi säilyä vakiona mahdollisimman pitkään. Derivoidaan vaakasuoran kiihtyvyyden lauseke

$$\ddot{x} = k [C_L(\alpha) \sin \theta - C_D(\alpha) \cos \theta] (v - V)^2 \quad (24)$$

ja asetetaan se nolaksi. Tästä saadaan kohtauskulmalle ehto

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & - \frac{C_L(\alpha) \cos \theta + C_D(\alpha) \sin \theta}{C_{L,\alpha}(\alpha) \sin \theta - C_{D,\alpha}(\alpha) \cos \theta} \frac{g}{v} [\cos \theta - k C_L(\alpha) (v - V)^2] \\ & - \frac{C_L(\alpha) \sin \theta + C_D(\alpha) \cos \theta}{C_{L,\alpha}(\alpha) \sin \theta - C_{D,\alpha}(\alpha) \cos \theta} \frac{2g}{v - V} [\sin \theta - k C_D(\alpha) (v - V)^2] . \end{aligned} \quad (25)$$

Tämä voidaan integroida suoraan liikeyhtälöiden (1) ja (2) kanssa. Alkukulma $\alpha(0) = \alpha_0$ jää optimoitavaksi parametriksi.

III Optimoitu lineaarisesti muuttuva kohtauskulma

Annetaan kohtauskulman muuttua lineaarisesti kaavan

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{T} t \quad (26)$$

mukaan. Alku- ja loppukulmat $\alpha(0) = \alpha_0$ ja $\alpha(T) = \alpha_1$ jäävät optimoitaviksi parametreiksi.

IV Pituusmomentti nollana

Vastus- ja nostovoiman lisäksi hyppääjään vaikuttaa kaatava (tai nostava) pituusmomentti M . Hyppääjän kulma-asema vaakatasoon nähden on $\delta = \theta - \alpha$. Jos hyppääjän hitausmomentti kuvan 1 tasoa vastaan kohtisuoran ja massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen on J , voidaan hyppääjän rotaatioyhtälö kirjoittaa muodossa

$$J d^2(\theta - \alpha) / dt^2 = \frac{1}{2} C_M(\alpha) \rho A l (v - V)^2, \quad (27)$$

missä $C_M(\alpha)$ on pituusmomenttikerroin ja l vastaava referenssipituus. Jos hyppyä ohjataan siten, että $C_M(\alpha) = 0$, saadaan yhtälöstä (27) kohtauskulmalle lauseke

$$\alpha(t) = \alpha_0 - \theta_0 + (\dot{\alpha}_0 - \dot{\theta}_0)t + \theta(t). \quad (28)$$

Optimoitaviksi parametreiksi jäävät suureet $\alpha(0) = \alpha_0$ ja $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$, sillä suure $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$ voidaan laskea yhtälöstä (2).

V Optimoitu parabolisesti muuttuva kohtauskulma

Kohtauskulman lauseke sisältää nyt kolme parametria ja se voidaan esittää muodossa

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{T} \left(2 - \frac{t}{T}\right)t - \dot{\alpha}_1 \left(1 - \frac{t}{T}\right)t. \quad (29)$$

Optimoitaviksi parametreiksi jäävät suureet $\alpha(0) = \alpha_0$, $\alpha(T) = \alpha_1$ ja $\dot{\alpha}(T) = \dot{\alpha}_1$.

NUMEERISET TULOKSET

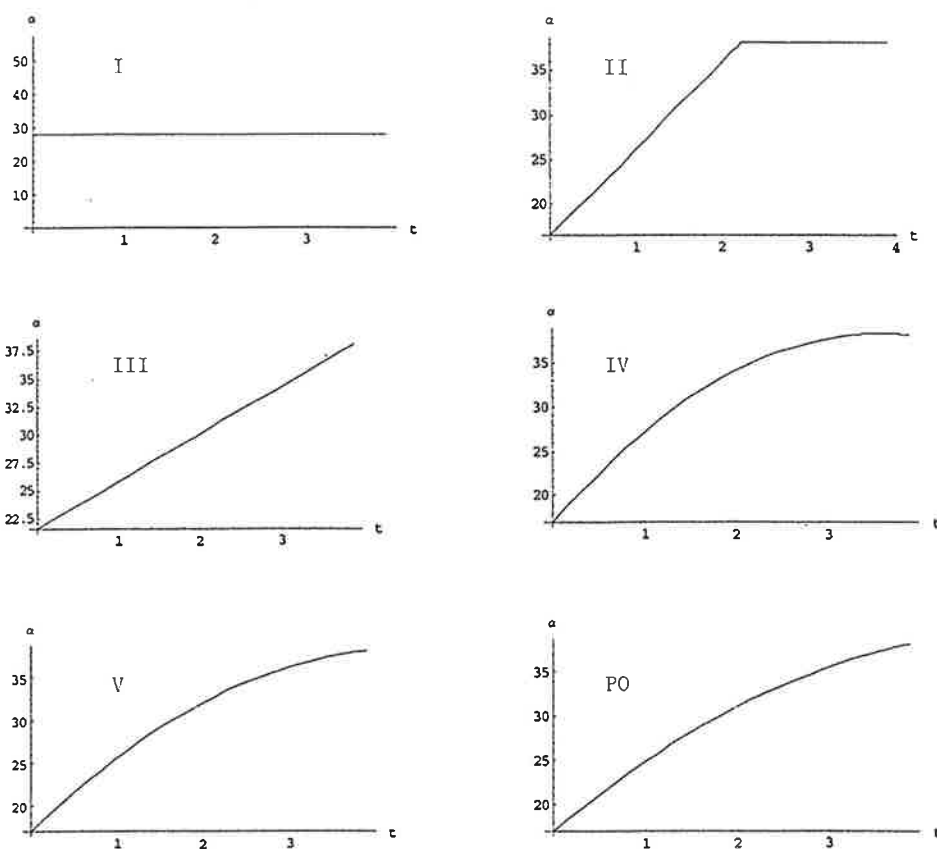
Numeeriset tarkastelut suoritettiin Japanin Hakuban normaalimäen (K100) tapauksessa [6]. Hyppyrin nokalla käytettiin alkuarvoja $v_0 = 24.50 \text{ ms}^{-1}$ ja $\theta_0 = 4.64^\circ$, jotka vastaavat Hakuban mäen suunniteltua "inrun"-nopeutta 24 ms^{-1} ja tyypillistä jalkaponnistusta. Aerodynaamiset kertoimet $C_D(\alpha)$ ja $C_L(\alpha)$ on otettu Watanaben [7] kokeellisten tulosten mukaan, joissa suksien V-kulma oli 14° . Kohtauskulma α on laskettu suksista. Siihen on lisättävä 10° , jos tarkastellaan vartaloa. Ohjauksen raja-arvoiksi saatiin $\alpha_{\min} = 0^\circ$ ja $\alpha_{\max} = 38.2^\circ$. Kaavan (3) määrittelemälle kertoimelle käytettiin tyypillistä arvoa $k = 9.15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2} \text{ s}^2$. Lisäksi oletettiin, että hyppy tapahtuivat tyynessä säässä, jolloin $V = 0 \text{ ms}^{-1}$. Optimoitujen hyppyjen parametrit on esitetty Taulukossa 1, johon on liitetty myös perushyppyjen ja Pontryagin-optimoitujen eli kokonaan

TAULUKKO 1. Hyppyjen optimoidut parametrit $(\alpha_0, \alpha_1, \dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_1)$, RMS-jäännösvirhe (ε_{RMS}) , hypyn pituus (L) ja pituuden prosentuaalinen lisäys toiseen perushyppyyn verrattuna (Δ) . PH1 = ensimmäinen perushyppy ($C_L / C_D = \max$), PH2 = toinen perushyppy ($C_L = \max$), I-V osaoptimoitujen hypyt ja PO = Pontryagin-optimoitu hyppy.

	PH1	PH2	I	II	III	IV	V	PO
$\alpha_0 (^\circ)$	17.3	38.2	28.0	16.5	21.5	14.0	16.9	16.8
$\alpha_1 (^\circ)$					38.2		38.2	38.2
$\dot{\alpha}_0 (^\circ \text{s}^{-1})$						14.7		
$\dot{\alpha}_1 (^\circ \text{s}^{-1})$							1.15	
$\varepsilon_{RMS} (J)$			3.54	1.21	0.42	0.21	0.069	0.066
$L (m)$	85.01	90.00	98.07	100.71	101.20	101.40	101.50	101.51
$\Delta (\%)$	-5.54	0.00	8.97	11.90	12.45	12.66	12.78	12.79

optimoidun hypyn vastaavia kulmien arvoja. Lisäksi on esitetty eri hyppyjen pituudet ja kohtauskulmahistorian "virhettä" kuvaavat RMS-arvot sekä kunkin hypyn pituuden prosentuaalinen lisäys toiseen perushyppyyn verrattuna. Havaitaan, että Pontryaginin mukaan

optimoitu kohtauskulmahistoria tuottaa ensimmäiseen perushyppyyn verrattuna jopa 19.4 % paremman tuloksen ja toiseen perushyppyyn verrattuna 12.8 % paremman tuloksen. Optimaalinen kohtauskulma α_0 hypyn alussa on tapauksissa II, IV, V ja PO luokkaa $14^\circ - 17^\circ$. Tapauksessa IV hypyn pituus ei paljoakaan vaihtelee kulman α_0 ollessa välillä $12^\circ - 16^\circ$, kunhan α_0 valitaan sopivasti. Tapauksissa I ja III, joissa optimointi on yksinkertaisempi, on alkukohtauskulma selvästi suurempi. Ainakin tapauksissa IV, V ja PO, jotka hypyn pituuden kannalta ovat lähes samanarvoiset, on optimia vastaava maksimi kohtuullisen laakea, joten pieni poikkeaminen parhaasta kohtauskulmahistoriasta ei paljoa huononna hypyn pituutta. Kohtauskulmajakaumat on esitetty ajan funktiona kuvassa 2. Hypyn kesto asettuu välille $T = 3.81 - 3.93$ s kaikissa optimoiduissa tapauksissa.



Kuva 2. Osaoptimoitujen hyppyjen I-V ja Pontryagin-optimoidun hypyn kohtauskulmajakaumat ajan funktiona.

Pontryagin-optimoidun hypyn tarkastelu osoittaa, että hyppääjän kulmakiihtyvyydellä vaakatasoon nähden $\ddot{\delta} = \ddot{\theta} - \ddot{\alpha}$ on maksimi 6.13s^{-2} hypyn alussa ja minimi -3.02s^{-2} hetkellä $t = 2.3$ s. Koska hyppääjän hitausmomentti on luokkaa $J \approx 20\text{ kgm}^2$, vaihtelee optimiohjaukseen vaadittava pituusmomentti välillä $2.15\text{ Nm} > M > -1.06\text{ Nm}$. Pituusmomentin tulee kaataa hyppääjää alussa voimakkaasti eteenpäin ja hetken $t = 0.85$ s jälkeen taaksepäin kuitenkin vähenevästi hetken $t = 2.3$ s jälkeen. On helppo todeta, että luokkaa 2 Nm olevia pituusmomentteja voidaan kehittää esimerkiksi käden pinta-alan kohdistuvan aerodynaamisen voiman avulla. Hyppääjän vaakasuoraan nähden mitatun kulmanopeuden keskiarvo koko hypyn yli integroituna on 4.44s^{-1} ,

mikä on varsin lähellä pituusmomentilla nolla (tapaus IV) tapahtuvan hypyn vakioarvoa 4.24s^{-1} . Näin ollen hyppääjän asento kiertyy keskimäärin lähes samalla kulmanopeudella näissä hyppyissä.

SUOSITUS

Teknillisesti lienee helpointa toteuttaa tapaus IV eli hyppy, jossa *pituusmomentti on nolla* koko hypyn ajan. Mäen koko, hyppyripöydän kallistus, laskuasento sekä ponnistus tuottavat alkunopeuden, alkukulman ja hyppääjää kiertävän vakiona säilyvän kulmanopeuden. Optimoinnin tälle tapaukselle asettamat numeeriset vaatimukset ovat

$$\begin{aligned} v_0 &= 24.50\text{ m s}^{-1} & \dot{v}_0 &= -0.36\text{ m s}^{-2} \\ \theta_0 &= 4.64^\circ & \dot{\theta}_0 &= 18.91^\circ\text{ s}^{-1} \\ \alpha_0 &= 14.00^\circ & \dot{\alpha}_0 &= 14.67^\circ\text{ s}^{-1} \\ \delta_0 &= -9.36^\circ & \dot{\delta}_0 &= 4.24^\circ\text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (30)$$

Vertaamalla näitä Pontryagin-optimoidun hypyn taulukkoarvoihin havaitaan selviä eroja, mutta silti hypyn pituus on vain 0.11% lyhyempi kuin kokonaisoptimoitu hyppy. Huomattakoon, että ponnistuksen aiheuttama normaalivoiman lisäys ΔN lisää suksien taakse päin suuntautuvaa kitkavoimaa määrällä $\mu\Delta N$, mikä tekee mahdolliseksi impulssimaisen muutoksen hyppääjän kulmaliikemäärään ja kulmanopeuteen. Jos käytetään arvoja $\Delta N = 300\text{ N}$ (normaalivoiman lisäys), $l = 0.7\text{ m}$ (massakeskipisteen etäisyys hyppyripöydän pinnasta), $J = 20\text{ kg m}^2$ (hyppääjän hitausmomentti), $t = 0.2\text{ s}$ (ponnistuksen kesto) ja $\mu = 0.06$ (suksien ja lumen välinen kitakerroin), saadaan kulmanopeuden muutokseksi $\Delta\omega = \mu\Delta N l t / J = 7^\circ\text{s}^{-1}$. Mikäli hyppääjä antaa hypyn kiertyä nilkoista kohtalaisen vapaasti, voidaan hyvinkin saavuttaa edellä mainittu optimihypyltä vaadittava eteenpäin kaatava kulmanopeus 4.24°s^{-1} . Vaikeinta on kuitenkin saada alkuehdot käytännössä toteutumaan. Pienikin virhe ponnistuksessa ja ilmalennon alussa voi pilata koko hypyn. Todettakoon lopuksi, että "optimaalinen ilmalento" on lennon ensimmäisten 17 m matkalla onnistuttu kokeellisesti määrittämään ja tulokset [1] tukevat voimakkaasti tässä työssä esitettyjä laskelmia.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] A. Arndt, G.-P. Brüggemann, M. Virravirta and P. Komi, The biomechanics of the transition from take-off to early flight in ski-jumping. *XVth Congress of the International Society of Biomechanics, Book of Abstracts*, p. 68-69. July 2-6, 1995, Jyväskylä, Finland.
- [2] L.P. Remizov, Biomechanics of optimal flight in ski-jumping. *J. Biomechanics* Vol. 17, No. 3, 1984.
- [3] D.E. Kirk, *Optimal Control Theory*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1970.
- [4] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [5] B. Brudar, *Physik des Skisprunges*. Kranjska gora, marca 1994, p. 1-30.
- [6] FIS-Certificate of Jumping Hill, No. 306/JPN 8, *Hakuba Normal Hill in Hakuba*, Japan. Data of issue 1.1.1993, Valid till 31.12.1998.
- [7] K. Watanabe and I. Watanabe, Aerodynamics of Ski-Jumping: Effect of "V-Style" to Distance. *XIVth Congress of the International Society of Biomechanics, Book of Abstracts II* (M-Z), p. 1452-1453. July 4-8, 1993, Paris, France.

PUTKIPALKKIKEHÄN OPTIMOINTI

J. JALKANEN

Teknillinen mekaniikka ja optimointi

Tampereen teknillinen yliopisto

PL 589

33101 TAMPERE

jussi.jalkanen@tut.fi

TIIVISTELMÄ

Tässä työssä on tarkasteltu standardivalikoimasta otetuista putkipalkeista valmistettujen avaruuskehien optimointia geneettistä algoritmia (genetic algorithm, GA) käyttäen. Minimoitavana kohdefunktiona on kehän massa ja rajoitusehdot huolehtivat siitä, että rakenteen siirtymät säilyvät sallituissa rajoissa, vertailujännitys ei ylitä suurinta sallittua arvoa, koko kehä tai sen yksittäiset palkit eivät menetä stabiilisuuttaan ja rakenteen ominaistajuudet pysyvät pois kielletyiltä väleiltä. Kehän topologia ja muoto ovat ennalta kiinnitetyt. Putkipalkkikehien optimointia on lopussa havainnollistettu kahdella laskuesimerkillä. Geneettisen algoritmin antamia tuloksia on verrattu muilla keinoin saatuihin tuloksiin.

JOHDANTO

Putkipalkit ovat hyvin yleisiä rakenneosia erilaisissa kone- ja rakennustekniikan sovelluksissa. Niillä on painoon nähden suuri taivutus- ja vääntöjäykkyys ja ne sopivat hyvin myös puristussauvoiksi. Putkipalkkien saatavissa oleva kokovalikoima on laaja, jolloin kuhunkin sovellukseen voidaan valita tarkoitukseen kooltaan parhaiten sopiva profiili. Jotta rakenteesta saataisiin mahdollisimman hyvä, voi suunnittelija käyttää hyväkseen optimointia. Optimoinnilla tarkoitetaan asetetun ongelman ratkaisemista parhaalla mahdollisella tavalla. Tämä tarkoittaa hyvien ratkaisuvaihtoehtojen systemaattista hakua optimointiteorian tarjoamien keinojen avulla. Kyseessä ei ole siis tavalliseen tuotekehitykseen kuuluva konstruktion parantelu suunnittelijan intuition, kokemuksen ja erilaisten kokeilujen tai prototyyppien testien kautta.

Tässä esityksessä käsitellään putkipalkeista tehdyn avaruuskehän optimointia. Ideana on valita kehän palkit annetusta mielivaltaisesta putkipalkkien joukosta niin, että kohdefunktiona oleva kehän massa minimoituu ja vaaditut rajoitusehdot toteutuvat. Pyrittäessä mahdollisimman keveään ratkaisuun päästään samalla myös tavallisesti taloudellisesti edulliseen lopputulokseen. Rajoitusehtojen tarkoitus on huolehtia siitä, että optimoinnin tulos on käyttökelpoinen rakenne. Rakenteeseen mukaan tulevien palkkien lukumäärää ja sijoittelua tai kehän muotoa ei muutella optimoinnin kuluessa, jolloin kyseessä on kantavien rakenteiden optimoinnin ns. mitoitusongelma.

Kun kehän kullekin palkille on vain tietty rajattu määrä mahdollisia profileita, on optimointiongelmassa mahdollisia kandidaattirakenteita myös äärellinen määrä. Avaruuskehän massan minimointiongelma on siis luonteeltaan kombinatorinen tehtävä, jossa kysytään parasta vaihtoehtoa tietyistä mahdollisten ratkaisujen joukosta. Jo melko pienellä kehällä ja rajoitetulla valikoimalla profileita kandidaattirakenteiden lukumäärä kasvaa hyvin suureksi. Tällöin kaikkien vaihtoehtojen läpikäyminen eli ns. totaalinen enumeraatio ei ole käytännön kokoluokan tehtävissä mahdollista. Vaikka osa periaatteessa mahdollisista ratkaisuista karsittaisiin etukäteen pois selvästikin epäkäypinä eli rajoitusehtoja rikkovina, jää todennäköisesti tai mahdollisesti käypä ratkaisuehdokkaita vielä aivan liian paljon, jotta ne kaikki voitaisiin tarkistaa ja valita näistä paras käypä. Ratkaisuvaihtoehtojen suuri määrä johtaa siihen, että usein intuition ja kokemuksen perusteella valittu rakenne on huonompi kuin optimoinnin avulla löydetty. Ratkaisuvaihtoehtojen määrän ja enumeraatioon kuluvan ajan eksponentiaalista kasvua kehän palkkien määrän lisääntyessä on havainnollistettu oheisessa taulukossa 1.

Taulukko 1. Palkkien lukumäärän vaikutus laskenta-aikaan enumeraatiossa, kun kullekin palkille on 10 mahdollista profiilia ja yhden kandidaattirakenteen analysointi kestää 0,001 s.

Palkkeja	Kandidaattiratkaisuja	Laskenta-aika
2	10^2	0,1 s
4	10^4	10 s
6	10^6	16 min 40 s
8	10^8	~ 27 h 47 min
10	10^{10}	~ 115 d 18 h
12	10^{12}	~ 31 a 259 d
14	10^{14}	~ 3170 a 357 d
16	10^{16}	~ 317097 a 336 d

Putkipalkkikehän massan minimointiongelma on hyvin vaativa epälineaarinen, rajoitettu ja suunnittelumuuttujiltaan diskreetti optimointiongelma. Tällä hetkellä sen ratkaisemiseksi yleisessä tapauksessa kohtuullisella laskentatyöllä ei ole olemassa luotettavaa algoritmia tai menetelmää. Siten kaikkein keveimmän rakenteen löytäminen putkipalkkikehän massan minimointiongelmassa on usein mahdotonta. Jos globaalia optimia ei ole mahdollista löytää, täytyy tyytyä liki-optimaaliseen ratkaisuun. Monissa sovelluksissa tällaiset melko lähellä globaalia optimia olevat ratkaisut ovat kuitenkin riittävän hyviä tuloksia.

Tässä työssä avaruuskehän massan minimointiongelman ratkaisumenetelmäksi on valittu geneettinen algoritmi, GA. Se on eräs lukuisista heuristisista menetelmistä ja on tullut viime vuosina varsin suosituksi algoritmiksi kantavien rakenteiden optimoinnissa. Ideana geneettisessä algoritmossa on matkia luonnon evoluutiota pitämällä yllä tiettyä ratkaisujen populaatiota, josta valittuja keskimääräistä parempia vanhempia risteyttämällä saadaan aina seuraava populaation sukupolvi. Prosessissa voi pienellä todennäköisyydellä tapahtua mutaatio, joka lisää satunnaisesti populaation monimuotoisuutta. Toiveena on, että sukupolvien kuluessa populaatio sisältää yhä parempia ratkaisuita, kunnes se sisältää myös tehtävän globaalim optimin.

MASSAN MINIMOINTIONGELMA

Yksikriteeristä optimointiongelmaa muodostettaessa täytyy ottaa kantaa ainakin seuraaviin kysymyksiin:

- Mitkä suureet otetaan ongelman suunnittelumuuttujiksi, joita muuttelemalla pyritään pääsemään optimaaliseen lopputulokseen?
- Mikä suure valitaan kohdefunktioksi eli mikä asia halutaan saada mahdollisimman suureksi tai pieneksi optimoinnin tuloksena?
- Mitä rajoituksia asetetaan optimiratkaisulle eli mitä rajoitusehtoja sen täytyy toteuttaa?

Kohdefunktion ja rajoitusehtojen täytyy luonnollisesti jotenkin riippua valituista suunnittelumuuttujista. Tietty optimointiongelma voidaan usein formuloida usealla eri tavalla ja valittu tapa vaikuttaa merkittävästi mahdollisuuksiin onnistua optimointiongelman ratkaisussa.

Suunnittelumuuttujat

Tarkastellaan seuraavassa tapausta, jossa kaikille kehän palkeille, joita on n kpl, valitaan profiilit samasta m kpl erilaisia profileita sisältävästä joukosta. Profiilit ovat keskenään samaa tyyppiä, esimerkiksi poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisia, mutta niiden lukumäärä tai kokojakauma on mielivaltainen. Putkipalkkikehän massan minimointiongelmassa suunnittelumuuttujiksi x_i voidaan nyt valita palkkien profiilien järjestysluvut niiden muodostamassa sarjassa. Tällöin siis suunnittelumuuttujien vektori $\mathbf{x}$, missä $x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ja $i = 1, 2, \dots, n$, ilmoittaa kehän kunkin palkin poikkileikkauksen "suuruuden". Profiilit voidaan esimerkiksi järjestää jonkinlaiseen suuruusjärjestykseen niin, että kun siirrytään profiilien sarjassa yhtä pienempään tai suurempaan, muuttuu palkki mahdollisimman vähän kevyemmäksi tai järeämmäksi. Kehän analysoinnissa tarvittavat palkkien poikkipintasuurteet saadaan poimittua suoraan terästehtaan toimittamasta taulukosta, kun tiedetään, monesko profiili kullakin palkilla on.

Kohdefunktio

Perimmäiseksi tavoitteeksi putkipalkkikehän optimoinnissa on luonnollista ottaa kustannusten minimoiminen. Kehän kokonaiskustannuksiin vaikuttavat materiaalin kulutuksen lisäksi myös esimerkiksi valmistuskustannukset. Valmistuksen aiheuttamien kustannusten suuruus riippuu puolestaan työmenetelmistä ja hinta voi olla erilainen eri konepajoissa. Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan valmistuskustannukset kuitenkin jättää pois ja keskittyä vain materiaalin kulutuksen minimointiin. Tällöin optimointiongelman kohdefunktioksi valitaan kehän massa. Kun kaikkien palkkien materiaali on sama, voidaan minimoinnin kohteeksi ottaa yhtä hyvin myös materiaalityyppi. Kohdefunktion arvo on laskettavissa helposti, kunhan vain tiedetään, mikä on kutakin palkkia vastaavan suunnittelumuuttujan arvo.

Rajoitusehdot

Rajoitusehtojen tehtävä on huolehtia siitä, että optimoinnin tuloksena saatava kehä on käyttökelpoinen. Tässä työssä tämä tarkoittaa, että putkipalkkikehän siirtymät eivät saa kasvaa liian suuriksi, vertailujännitys ei ylitä suurinta sallittua arvoa, kehän stabiilisuus säilyy ja sen ominaisaajuudet eivät satu jollekin kielletylle välille. Joskus voi olla lisäksi tarpeen ottaa huomioon myös esimerkiksi väsymiseen liittyvät rajoitusehdot tai pakottaa kehän eri palkit riippumaan jollakin tietyllä tavalla toisistaan.

Rajoitusehdot voidaan muotoilla olemassa olevien normien pohjalta niin, että optimoinnin antama lopputulos täyttää teräsrakenteille asetetut vaatimukset. Tällöin edellä luetellun kaltaiset vaatimukset siirtymille, jännityksille jne. täyttyvät sitä kautta, että halutaan rakenteen olevan normien mukainen. Toinen tapa on muodostaa rajoitusehdot suoraan ilman, että käytetään hyväksi teräsrakennenneormeja. Tässä työssä on valittu tämä jälkimmäinen tapa asettaa rajoitusehdot.

Jotta rajoitusehtojen arvot voitaisiin laskea, tulee kehä analysoida esimerkiksi elementtimenetelmällä. Siirtymien, jännitysten ja ominaistajuuksien laskemisen vaatima työmäärä riippuu tällöin oleellisesti analysointiin käytetyn laskentamallin tarkkuudesta. Jos FEM-malli huomioi esimerkiksi suuret siirtymät ja epälineaarisen materiaalmallin, tulee siitä laskennallisesti raskas. Laskenta-aika kasvaa tällöin luonteeltaan iteratiivisilla optimointialgoritmeilla helposti liian suureksi. Koska myös geneettisissä algoritmissa joudutaan laskemaan kohdefunktion ja rajoitusehtojen arvot hyvin monta kertaa, käytetään tässä työssä kunkin palkin mallintamiseen yhtä yksinkertaista lineaarisen kimmoteorian mukaista 12 vapausasteen avaruuspalkkielementtiä. Kaikkien liitosten oletetaan olevan täysin jäykkiä, ja poikkipintapainuma pääsee vapaasti tapahtumaan väännön yhteydessä.

Optimointiongelma standardimuodossa

Putkipalkkikehän massan minimointiongelma on standardimuodossa esitettynä

$$\begin{aligned}
 & \min W(\mathbf{x}) \\
 & g_i^u(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_u \\
 & g_i^\sigma(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_\sigma \\
 & g_i^{bl}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_{bl} \quad , \\
 & g^{bg}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & g_i^f(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_f \\
 & \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{\bar{n}}\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

missä $W(\mathbf{x})$ on kehän massa, $g_i^u(\mathbf{x}) \leq 0$ ovat siirtymärajoitusehdot, $g_i^\sigma(\mathbf{x}) \leq 0$ ovat jännitysrajoitusehdot, $g_i^{bl}(\mathbf{x}) \leq 0$ ovat yksittäisten palkkien nurjahdusrajoitusehdot, $g^{bg}(\mathbf{x}) \leq 0$ on koko kehän nurjahdusrajoitusehto ja $g_i^f(\mathbf{x}) \leq 0$ ovat ominaistajuuksirajoitukset. n_u, n_σ, n_{bl} ja n_f ovat siirtymä- ja jännitysrajoitusehtojen, lokaalien nurjahdusrajoitusehtojen ja ominaistajuuksirajoitusehtojen lukumäärät sekä $\bar{n}$ ongelman kaikkien epäkäypien tai käypien ratkaisukandidaatien lukumäärä.

Siirtymärajoitusehdot $g^u(\mathbf{x}) \leq 0$ rajoittavat FEM-mallin haluttujen vapausasteiden i siirtymät $u_i(\mathbf{x})$ alarajojen $u_i^{\min}$ ja ylärajojen $u_i^{\max}$ välille, jolloin normeeratuiksi rajoitusehdoiksi saadaan

$$1 - \frac{u_i(\mathbf{x})}{u_i^{\min}} \leq 0 \quad \text{ja} \quad \frac{u_i(\mathbf{x})}{u_i^{\max}} - 1 \leq 0. \tag{2}$$

Jännitysrajoitusehdot $g^{\sigma}(\mathbf{x}) \leq 0$ rajoittavat vakiovääristymisenergiyahypoteesin (VVEH) mukaisen vertailujännityksen $\sigma^{\text{red}}(\mathbf{x})$ alle suurimman sallitun arvon σ^{max} kaikkialla kehässä. Normeeratuksi rajoitusehdoksi kutakin jännityksen laskentapistettä i kohden saadaan

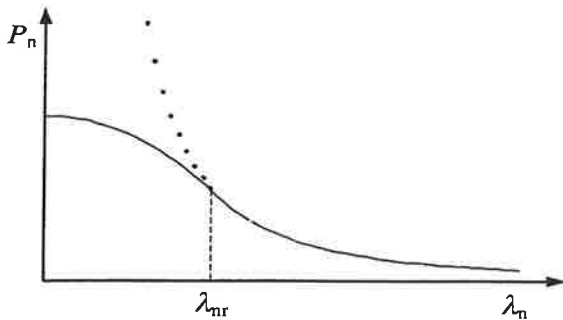
$$\frac{\sigma_i^{\text{red}}(\mathbf{x})}{\sigma^{\text{max}}} - 1 \leq 0. \quad (3)$$

Laskentapistettä tulee olla riittävästi ja sellaisissa paikoissa kehässä, että voidaan olla varmoja vertailujännityksen pysymisestä alle suurimman sallitun arvon.

Nurjahdusrajoitusehdot $g^{\text{bl}}(\mathbf{x}) \leq 0$ estävät kehän yksittäisiä palkkeja nurjahtamasta. Palkin i nurjahdusvoiman P_{n_i} lausekkeeksi redusoidun hoikkuusluvun λ_{n_i} funktiona on otettu

$$P_{n_i} = \begin{cases} \frac{\pi^2 E_i A_i}{\lambda_{n_i}^2} & , \lambda_{n_i} \geq \lambda_{n_{r_i}} \\ R_{-e_i} A_i \left(1 - \frac{1-\gamma}{\lambda_{n_{r_i}}^2} \lambda_{n_i}^2 \right) & , \lambda_{n_i} < \lambda_{n_{r_i}} \end{cases} \quad (4)$$

missä E_i on kimmomoduli, A_i poikkipinta-ala, R_{-e_i} puristuspuolen myötöraja, γ puristuspuolen suhteellisuus- ja myötörajan suhde ja $\lambda_{n_{r_i}}$ rajahoikkuusluku.



Kuva 1. Nurjahdusvoima P_n on redusoidun hoikkuusluvun λ_n funktio ja yhtyy Eulerin hyperbeliin rajahoikkuuslukua λ_{nr} suuremmilla arvoilla.

Nurjahdusrajoitusehdoissa vaaditaan, että kunkin palkin i normaalivoiman $N_i(\mathbf{x})$ vastaluku on pienempi kuin nurjahdusvoima $P_{n_i}(\mathbf{x})$ jaettuna lokaalin nurjahduksen varmuusluvulla N_{bl} eli normeerattuna

$$-\frac{N_{\text{bl}} N_i(\mathbf{x})}{P_{n_i}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0. \quad (5)$$

Globaali nurjahdusrajoitusehto $g^{bg}(\mathbf{x}) \leq 0$ huolehtii siitä, että useampi palkki tai koko kehä ei pääse yhtäaikaaisesti nurjahtamaan. Tätä varten lasketaan lineaarisen stabiilisuusteorian mukaisen kahden matriisin ominaisarvotehtävän alin positiivinen ominaisarvo λ_{kr} yhtälöstä

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = -\lambda \mathbf{K}_g \mathbf{u} , \quad (6)$$

missä $\mathbf{K}$ on jäykkyysmatriisi ja $\mathbf{K}_g$ geometrinen jäykkyysmatriisi. Tämä ns. kriittinen kuormituskerroin $\lambda_{kr} = \lambda_{kr}(\mathbf{x})$ on samalla suoraan varmuus kehän globaalin nurjahtamisen suhteen, jolloin normeeratussa globaalissa nurjahdusrajoitusehdossa vaaditaan

$$1 - \frac{\lambda_{kr}(\mathbf{x})}{N_{bg}} \leq 0 , \quad (7)$$

missä N_{bg} on globaalin nurjahduksen suhteen haluttu varmuusluku.

Ominaisaajuusrajoitusehdoissa $g^f(\mathbf{x}) \leq 0$ on ideana estää rakenteen ominaisaajuuksia f_i joutumasta kielletyille väleille $[f_j^{\min}, f_j^{\max}]$, joita on $\bar{n}_f$ kpl eli $j=1, 2, \dots, \bar{n}_f$. Kehän ominaiskulmataajuudet ω_i saadaan ratkaistua ominaisarvotehtävästä

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{u} , \quad (8)$$

missä $\mathbf{K}$ on jäykkyysmatriisi ja $\mathbf{M}$ (konsistentti) massamatriisi. Ominaisaajuus f_i saadaan ominaiskulmataajuudesta ω_i jakamalla termillä 2π . Standardimuodon normeerautuksi rajoitusehdoiksi saadaan tällöin

$$\begin{aligned} 1 - \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j^{\min}} &\leq 0 & \forall i=1, 2, \dots, n_{df} , j=1, 2, \dots, \bar{n}_f \\ \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j^{\max}} - 1 &\leq 0 & \forall i=1, 2, \dots, n_{df} , j=1, 2, \dots, \bar{n}_f \end{aligned} \quad (9)$$

n_{df} on FEM-mallin vapausasteiden lukumäärä, joka on samalla kehän ominaisaajuuksien lukumäärä.

Mikäli optimointiongelmassa on useita kuormitustapauksia, tulee kutakin kuormitustapausta kohden omat siirtymä-, jännitys- ja stabiilisuusrajoitusehdot. Käytetyllä laskentamenetelmällä kehän ominaisaajuudet, ja siten ominaisaajuusrajoitusehdot, eivät riipu kuormituksista.

GENEETTINEN ALGORITMI

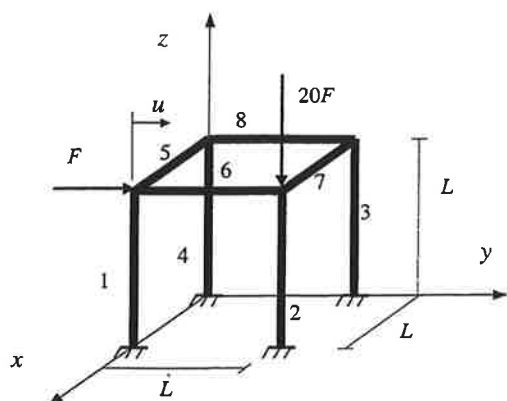
Geneettinen algoritmi on heuristinen ja stokastinen optimointimenetelmä, jossa matkitaan luonnon evoluutiota. Se on melko yksinkertainen algoritmi, joka sopii hyvin vaikeiden kombinatoristen optimointiongelmien ratkaisemiseen. Tällaisten tehtävien käsittely muilla perinteisimmillä menetelmillä voi olla hyvin hankalaa ja hidasta. Vaikka GA ei löytäisikään globaalia optimia, tarjoaa se kuitenkin hyviä likioptimaalisia ratkaisuja, jotka ovat monissa käytännön ongelmissa riittävän hyviä tuloksia.

Geneettisen algoritmissa koodataan aluksi satunnaisesti valitut optimointiongelman ratkaisuehdokkaat populaation yksilöiksi. Yleisimmin käytössä on binäärikoodaus, missä kutakin ratkaisuvektoria x vastaa tietty binääriluku. Binääriluvun bittejä kutsutaan geeneiksi. Tämän jälkeen populaatiosta valitaan joukko yksilöitä vanhemmiksi, joista aina kahta vuorollaan risteyttämällä saadaan seuraavan sukupolven yksilöt. Risteytys tapahtuu kullakin parilla todennäköisyydellä p_c ja todennäköisyydellä $1 - p_c$ nämä kopioituvat sellaisenaan seuraavaan sukupolveen. Vanhempien valinta tapahtuu yksilöiden ns. kelpoisuusfunktion arvojen perusteella. Kelpoisuusfunktio on optimointiongelman kohdefunktiosta johdettu positiivisia arvoja saava funktio. Sen arvo on sitä suurempi, mitä parempi ratkaisu on kyseessä ja mitä vähemmän se rikkoo rajoitusehtoja. Rajoitusehtojen rikkoutuminen huomioidaan yleensä sakottamalla kelpoisuusfunktio suhteessa rajoitusten rikkomisen suuruuteen nähden. Risteytyksen jälkeen uusi populaatio altistuu vielä pienellä todennäköisyydellä p_m tapahtuvalle mutaatiolle, missä yksilöiden geenejä muutetaan satunnaisesti vastakkaisiksi. Mutaatiota seuraa jälleen uudelleen vanhempien valinta, risteytys jne., kunnes tietty sukupolvien määrä on täynnä ja optimointi lopetetaan. Tarkempi tutustuminen geneettiseen algoritmiin onnistuu esimerkiksi teosten [1] ja [3] avulla.

Tässä työssä käytetty geneettisen algoritmin versio poikkeaa perusmuodosta siten, että siinä ei käytetä koodausta. Tällöin suunnittelumuuttujien vektori x kelpaa suoraan populaation yksilöksi. Yksilöiden kukin geeni voi saada minkä tahansa lukuarvon joukosta $\{1, 2, \dots, m\}$, missä m on erilaisten profiilien lukumäärä. Valinta tapahtuu ns. turnausvalintana, missä kahdesta populaation satunnaisesti valitusta yksilöstä pääsee vanhemmaksi kohdefunktion arvoltaan parempi, jos molemmat ovat käypä. Jos molemmat ovat epäkäypä, valitaan rajoitusehtoja vähemmän rikkova, ja jos vain toinen on käypä, valitaan aina se. Risteytys tapahtuu kahden pisteen risteytyksenä, jossa vanhemmat katkaistaan kahdesta satunnaisesti valitusta kohtaa ja katkaisukohtien väliset osat vaihdetaan keskenään. Mutaatiossa yksilön geeni voi muuttua miksi tahansa sille mahdollisista vaihtoehtoista. Kohdefunktion arvon tasaisen paranemisen varmistamiseksi käytetään elitismia, jossa aina kaksi populaation parasta yksilöä kopioidaan automaattisesti seuraavaan sukupolveen. Risteytys- ja mutaatiotodennäköisyyksinä on käytetty arvoja $p_c = 0,8$ ja $p_m = 0,05$. Populaatiossa on ollut 50 kpl yksilöitä ja sukupolvien on käyty läpi kaikkiaan 200.

ESIMERKKIONGELMA 1

Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkiongelman kuvan 2 mukaista yksinkertaista 8 palkin avaruuskehää. Minimoitavana kohdefunktiona on kehän massa ja rajoitusehdot pakottavat voiman F suuntaisen siirtymän u pienemmäksi kuin suurin sallittu arvo $u^{\text{sall}} = 70$ mm, palkkien VVEH:n mukaisen vertailujännityksen kaikkialla kehässä pienemmäksi kuin maksimi-arvo $\sigma^{\text{max}} = 237$ MPa ja huolehtivat siitä, että kukin palkki erikseen ei menetä stabiilisuuttaan varmuudella yksi.

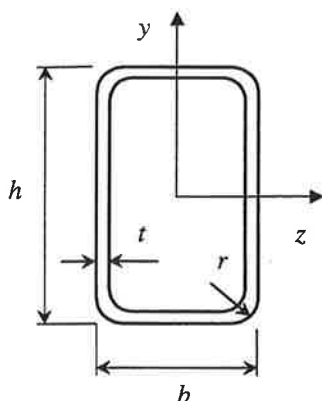


$$F=30 \text{ kN}$$

$$L=6 \text{ m}$$

Kuva 2. Esimerkkiongelman 1 putkipalkkikehä.

Kehän palkit tulee valita kuvan 3 mukaisista Rautaruukin poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisista putkipalkeista, joita on valmistajan suositussarjassa kaikkiaan 84 kpl [4]. Suositussarjan järjestys toimii suoraan tarvittavana profiilien suuruusjärjestyksenä. Kehän palkit on sijoitettu niin päin, että pystysuorissa palkeissa (1, 2, 3, ja 4) kuvan 3 mukainen y-akseli on globaalin y-akselin suuntainen ja vaakasuorissa palkeissa (5, 6, 7 ja 8) kuvan 3 y-akseli on globaalin z-akselin suuntainen.



Kuva 3. Poikkileikkaukseltaan suorakaide putkipalkki.

Jotta voitaisiin olla varmoja, ettei vertailujännitys ylitä optimoinnin kuluessa missään kohdin kehää arvoa $\sigma^{\max}$, valitaan kaikkien palkkien alku- ja loppupään poikkileikkauksista ulkoreunalta 8 pistettä ja vaaditaan, että kaikissa näissä pisteissä vertailujännitys jää alle suurimman sallitun arvon. Valituista pisteistä 4 sijaitsee poikkileikkauksen nurkissa ja 4 sen symmetria-akseleilla. Tällöin 8 palkin tehtävässä jännitysrajoitusehtoja tulee kaikkiaan 128 kpl. Nurjahdusrajoitusehtoja tarvitaan puolestaan yksi kutakin palkkia kohden, jolloin niitä on yhteensä 8 kpl.

Standardimuodossa esitettyä esimerkkiongelman 1 on muotoa

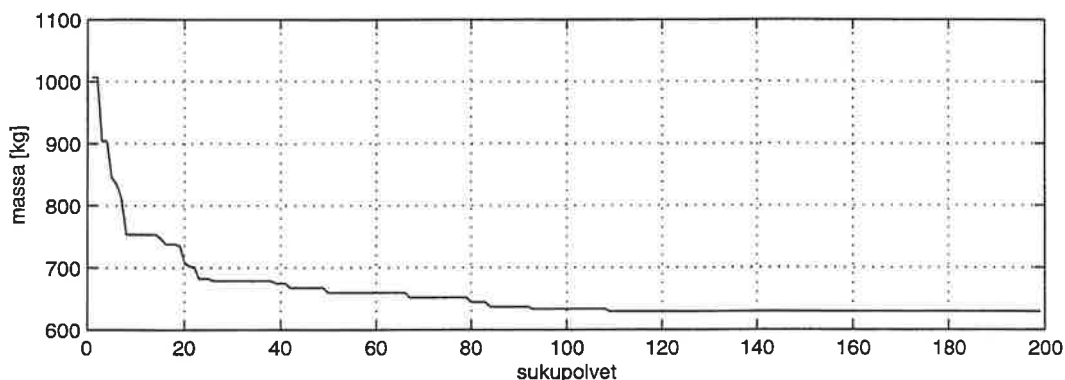
$$\begin{aligned}
 &\min W(\mathbf{x}) \\
 &\frac{u(\mathbf{x})}{u^{\text{sall}}} - 1 \leq 0 \\
 &\frac{\sigma_i^{\text{red}}(\mathbf{x})}{\sigma^{\text{max}}} - 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 128 \\
 &-\frac{N_i(\mathbf{x})}{P_{n_i}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8 \\
 &\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{\bar{n}}\}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Ongelman käypien ja epäkäypien ratkaisukandidaattien lukumäärä on nyt $\bar{n} = 84^8$.

Koska geneettinen algoritmi on stokastinen optimointimenetelmä, ei optimoinnissa sitä käytettäessä saada joka kerta samaa tulosta. Taulukossa 2 on esitetty GA:lla löydetty paras tulos 3 optimointikerran jälkeen. Samassa taulukossa on myös vertailuratkaisuna lähteessä [2] esitetty tulos, joka on saatu valitsemalla suunnittelumuuttujat tähän työhön nähden hieman eri tavalla, relaxsoimalla ongelma jatkuvamuuttujaiseksi ja ratkaisemalla jatkuva ongelma sekä pyöristämällä tämä jatkuvan ongelman ratkaisu jälleen diskreetiksi. Kuvassa 4 on puolestaan esitetty kehän massan kehittyminen optimoinnin kuluessa taulukon 2 ratkaisun tapauksessa.

Taulukko 2. Esimerkkiongelmassa 1 geneettisellä algoritmilla löydetty ratkaisu ja lähteessä [2] esitetty vertailuratkaisu.

Palkki	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Massa [kg]
Profili, GA	81	58	1	1	1	1	1	1	629,7
Profili, [2]	1	83	1	1	1	4	1	1	634,6



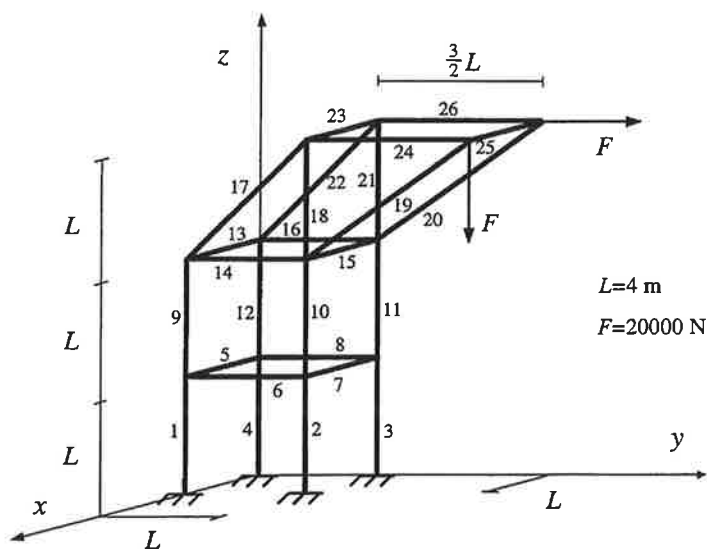
Kuva 4. Kohdefunktion arvon kehittyminen optimoinnin kuluessa esimerkkiongelmassa 1.

Taulukon 2 perusteella nähdään, että geneettisellä algoritmilla onnistuttiin löytämään parempi tulos kuin mitä käytettävissä oleva vertailuratkaisu on. Kuvan 4 perusteella voidaan puolestaan todeta, että kohdefunktion kehitys on nopeinta ensimmäisten sukupolvien aikana ja se tasaantuu loppua kohden. Tämä on melko tyypillistä geneettisen algoritmin kohdalla.

ESIMERKKIONGELMA 2

Toisena esimerkkiongelmana on kuvan 5 mukainen 26 palkin avaruuskehä. Jälleen minimoidaan kehän massaa rajoitusehtojen huolehtiessa, ettei VVEH:n mukainen vertailujännitys kasva missään kohdin suuremmaksi kuin suurin sallittu arvo $\sigma^{\max} = 237 \text{ MPa}$, kehän yksittäiset palkit tai koko kehä ei menetä stabiilisuuttaan varmuudella $N_{bg} = N_{bl} = 3$ ja kehän kaikki ominaistajuuudet f_i pysyvät pois kielletyltä väliltä $38 \text{ Hz} \leq f_i \leq 42 \text{ Hz}$.

Optimoinnissa mahdollisia palkkikokoja ovat esimerkkiongelman 1 tapaan kaikki 84 Rautaruukin suositusarjan suorakaiteen muotoista profiilia [4]. Palkit on sijoitettu mallissa niin päin, että pystysuorien palkkien (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 18 ja 21) kuvan 3 mukainen y-akseli on globaalin y-akselin suuntainen, vaakasuorien palkkien (5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25 ja 26) y-akseli on globaalin z-akselin suuntainen ja vinossa olevien palkkien (17, 19, 20, 22) y-akseli on globaalin yz-tason suuntainen.



Kuva 5. Esimerkkiongelman 2 putkipalkkikehä.

Myös jännitysrajoitusehtojen osalta käytetään samaa lähestymistapaa kuin esimerkkiongelmassa 1 eli pakotetaan vertailujännitys kunkin elementin alku- ja loppupointikileikkauksen ulkoreunalla kahdeksassa eri pisteessä enintään $\sigma^{\max}$:n suuruisiksi. Tällöin voidaan olla varmoja, että vertailujännitys ei ylitä suurinta sallittua arvoa, joskin jännitysrajoitusehtoja tulee kaikkiaan 416 kpl. Nurjahdusrajoitusehtoja on yksi kutakin palkkia kohden ja ominaistajuuksia 2 kutakin tuntematonta FEM-mallin vapausastetta kohden eli yhteensä 144 kpl.

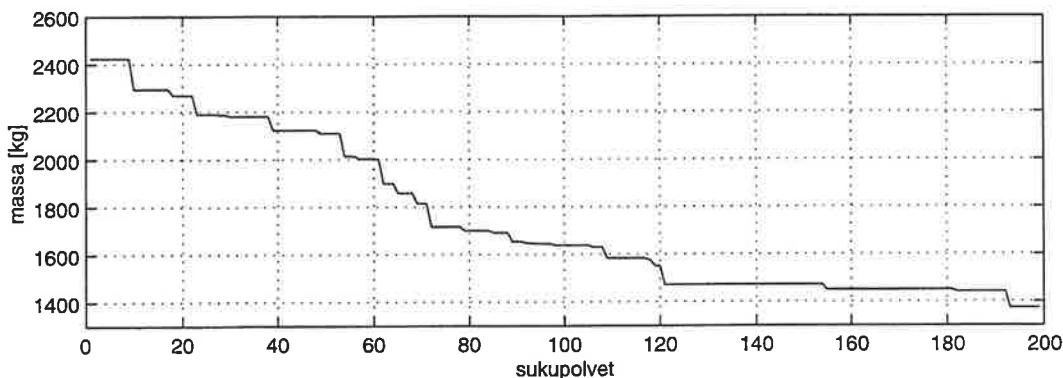
Standardimuodossa esimerkkiongelman 2 on

$$\begin{aligned}
 & \min W(\mathbf{x}) \\
 & \frac{\sigma_i^{\text{red}}(\mathbf{x})}{\sigma_{\max}} - 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 416 \\
 & -\frac{N_{\text{bl}} N_i(\mathbf{x})}{P_{n_i}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 26 \\
 & 1 - \frac{\lambda_{\text{kr}}(\mathbf{x})}{N_{\text{bg}}} \leq 0 \\
 & 1 - \frac{f_i(\mathbf{x})}{f^{\min}} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 72 \\
 & \frac{f_i(\mathbf{x})}{f^{\max}} - 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 72 \\
 & \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{\bar{n}}\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Käypien ja epäkäypien ratkaisukandidaattien lukumäärä on tällä kertaa $\bar{n} = 84^{26}$ kpl.

Taulukko 3. Esimerkkiongelmassa 2 geneettisellä algoritmilla löydetty ratkaisu.

Massa	1372,8 kg												
Palkki	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Profiili	8	53	32	61	1	63	8	74	1	13	63	13	7
Palkki	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.
Profiili	4	38	17	5	11	21	5	51	47	14	13	1	17



Kuva 5. Kohdefunktion arvon kehittyminen optimoinnin kuluessa esimerkkiongelmassa 2.

Esimerkkiongelmassa 2 kehän massan kehitys ei hidastu optimoinnin kuluessa yhtä paljon kuin ensimmäisessä esimerkissä. Jos sukupolvien määrää olisi lisätty, olisi todennäköisesti saavutettu

myös parempi tulos. Taulukon 3 tuloksista voidaan todeta, että käytännössä ei ole mahdollista hyväksyä rakennetta, jossa lähes kaikki palkit olisivat keskenään erilaisia. Tällöin joudutaan asettamaan lisärajoitusehtoja, jotka pakottavat esimerkiksi pystypalkit keskenään samanlaisiksi. Tämä ei kuitenkaan tuo optimointiin varsinaisesti mitään uutta.

YHTEENVETO

Optimointi on hyvin luonnollinen jatke kantavien rakenteiden tietokoneavusteiselle analysoinnille. Suunnittelijan ei kannata tyytyä pelkästään muutaman vaihtoehdon keskinäiseen vertailuun FEM-laskelmien perusteella. Tietokoneiden kasvava laskentakapasiteetti ja kehittyvät optimointi-algoritmit mahdollistavat yhä suurempien ongelmien ratkaisemisen kohtuullisessa ajassa. Nykytilaan johtanut kehitys on tapahtunut melko lyhyessä ajassa, eikä ole mitään syytä uskoa, etteikö samanlainen kehitys olisi todennäköistä myös tulevaisuudessa.

Putkipalkkikehän massan minimointiongelmassa on mahdollista valita geneettistä algoritmia käytettäessä monenlaisia rajoitusehtoja ilman, että niiden epäjatkuvuuteen, epälineaarisuuteen tai derivoitumattomuuteen tarvitsee kiinnittää huomiota. Algoritmia käytettäessä riittää, että osataan laskea kohdefunktion ja rajoitusehtojen arvot halutussa suunnitteluavaruuden pisteessä.

Tarvittava FEM-analyysien suuri määrä saattaa nousta ongelmaksi suurempien kehien optimoinnissa. Mikäli yksi analyysi ja kohdefunktion sekä rajoitusehtojen arvojen laskeminen kestää muutamaa kymmentä sekuntia kauemmin, tulee kokonaislaskenta-aika pitkäksi. Kohdefunktion ja rajoitusehtojen arvot täytyy tyypillisesti laskea optimoinnin kuluessa tuhansia kertoja. Lisäksi sama tehtävä olisi hyvä ratkaista useampaan kertaan, sillä GA on stokastinen menetelmä ja saattaa siten antaa huonolla tuurilla ensimmäisellä optimointikerralla heikon tuloksen.

Geneettistä algoritmia käytettäessä ei tiedetä, onko tuloksena saatava kehä optimointiongelman optimiratkaisu. Jos se ei ole paras mahdollinen ratkaisu ongelmaan, ei ole myöskään olemassa yksinkertaista keinoa selvittää, miten kaukana löydetty ratkaisu on todellisesta optimista. Toisaalta geneettisellä algoritmilla on mahdollista löytää jonkinlainen ratkaisu jo suhteellisen pienellä laskentatyöllä, mikä on arvokas ominaisuus.

Geneettinen algoritmi näyttäisi olevan käyttökelpoinen menetelmä esimerkkiongelmien kaltaisten putkipalkkikehien optimoinnissa. Sillä on toki puutteensa, mutta myös selvät edut.

LÄHTEET

- [1] Goldberg D. E. 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison Wesley publishing company.
- [2] Jalkanen J. 2003. Space frame optimization using continuous solution and simulated annealing. Teoksessa Jarmai K., Farkas, J. (toimittajat) *Metal Structures: Design, Fabrication, Economy*. Proceedings of the International Conference on Metal Structures 3.-5.4.2003 Miskolc, Unkari.
- [3] Michalewicz Z. 1994. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag.
- [4] Rautaruukki Metform 1997. *Rautaruukin putkipalkkikäsikirja*. Hämeenlinna.

TASOKEHÄRAKENTEN TOPOLOGIAN MONITAVOITTEINEN OPTIMOINTI

Timo Turkila
Tampereen teknillinen yliopisto
Teknillisen mekaniikan ja optimoinnin laitos
PL 589
33101 Tampere

TIIVISTELMÄ

Tämän artikkelin ideana on laajentaa ristikoiden topologian optimointia tasokehärakenteisiin. Optimointitehtävässä käytetään kahdentyyppisiä diskreettejä suunnittelumuuttujia, joiden avulla tasokehärakenteelle pyritään valitsemaan paras mahdollinen topologia ja mitoitus. Optimointitehtävä on diskreetti ja monitavoitteinen. Aluksi monitavoitteinen optimointitehtävä muunnetaan sarjaksi yksitavoitteisia tehtäviä, jotka ratkaistaan hybridimenetelmällä. Siinä käytetään sekä heuristista evoluutiostrategiaa että kohdefunktion ja rajoitusehtojen gradientteja käyttäviä MMA- ja branch and bound algoritmeja.

JOHDANTO

Rakenteiden topologian optimoinnin lähtökohtana on yleensä perusrakenne, joka sisältää kaiken mahdollisen materiaalin sekä rakenteen kuormituksen ja tuennan [1]. Topologian optimointi jaetaan usein yleiseen muodon optimointiin ja layout-optimointiin. Yleisessä muodon optimoinnissa perusrakenteena on levy- tai solidirakenne, joka on jaettu pienempiin osiin. Suunnittelumuuttujalla päätetään, täytetäänkö yksittäinen osa materiaalilla vai ei, joten suunnittelumuuttujat ovat binäärimuuttujia ja lopputuloksena saadaan sekä rakenteen topologia että karkea hahmotelma optimaalisesta muodosta. Tyypillisiä tehtävän ratkaisustrategioita ovat erilaiset relaksointimenetelmät [1], [2], duaalioptimointialgoritmit [3] tai erilaiset heuristiset algoritmit, kuten esimerkiksi ESO-algoritmi [4].

Toinen topologian optimoinnin haara, layout-optimointi, käsittelee ristikoiden ja kehien topologian optimointia. Perusrakenne sisältää kaikki mahdolliset sauvat tai palkit ja suunnittelumuuttujilla päätetään yksittäisen perusrakenteen osan kohtalosta, joten myös layout-optimointitehtävä on diskreetti. Yleensä testiesimerkit ovat olleet ristikoita, jolloin suunnittelumuuttujina usein käytetään sauvojen poikkipinta-aloja. Esimerkkejä ristikon topologian optimoinnista löytyy mm. lähteistä [1] ja [5].

Tässä tutkimuksessa topologian optimointia laajennetaan tasoristikoista tasokehärakenteisiin siten, että jokaiselle perusrakenteen osalle on kolme vaihtoehtoa: osan poisto sekä sauva tai palkki. Sauvalle ei synny taivutusmomenttia, joten se on kiinnitetty molemmista päistään nivelillä. Sallittuja kuormituksia ovat pistevoimat rakenteen solmuille ja tasainen kuormitus perusrakenteen osalle. Jos käytetään tasaista kuormitusta, kyseisen osan on oltava palkki.

Topologian lisäksi tehtävässä haetaan optimaalisia palkkiprofiileja valitulle topologialle. Profiilit valitaan diskreetistä joukosta, joten niiden lukumäärä on rajallinen. Tehtävässä käytetään kahta diskreettiä suunnittelumuuttujaa, joista toisella valitaan rakenneosan topologia ja toisella palkki- tai sauvaprofiili.

MONITAVOITTEINEN OPTIMOINTITEHTÄVÄ

Optimointitehtävänä on minimoida rakenteen massa sekä ennalta valitut solmusiirtymäkomponentit, kun rakenteen osien normaalijännityksiä ja stabiilisuuden nurjahduskuormituskerrointa käytetään rajoitusehtoina. Rakenne analysoidaan elementtimenetelmällä. Laskentamallissa jokainen rakenneosia mallinnetaan yhdellä palkki- tai sauvaelementillä, jolloin solmusiirtymät ja -voimat voidaan laskea tarkasti. Käyttämällä tasaiselle kuormitukselle yksityisratkaisua myös normaalijännitykset saadaan tarkkoina. Stabiilisuusrajoitusehdossa käytettävä nurjahduskuormituskerroin lasketaan ominaisarvotehtävästä, mutta tämän suureen tarkkuus on keuhohko, jos rakenteen palkit tai sauvat mallinnetaan vain yhdellä elementillä. Niinpä ominaisarvotehtävän jäykkyysmatriisit muodostetaan käyttämällä elementtiä, jossa interpolointifunktion asteluku on korotettu kolmesta neljään. Toinen vaihtoehto on mallintaa kukin palkki tai sauva useammalla palkkielementillä.

Optimointitehtävä on

$$\begin{aligned} \min [m \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_r]^T \\ \sigma_{\max} \leq \sigma_U \\ \lambda \geq \lambda_L \\ b_i \in \{0,1,2\} \\ s_i \in \{1,2,\dots,n_p\}, \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (1)$$

missä m on rakenteen massa, δ_j on solmusiirtymäkomponentti, $\sigma_{\max}$ rakenteen suurin normaalijännitys, σ_U normaalijännityksen suurin sallittu arvo, λ nurjahduskuormituskerroin ja λ_L sen alaraja. Suunnittelumuuttujista topologiamuuttujaa merkitään symbolilla b_i ja mitoitusmuuttujaa s_i . Perusrakenteessa oletetaan olevan n osaa ja erilaisten profiilien lukumäärä on n_p . Samoja profiileja käytetään sekä sauvoille että palkeille.

Optimointitehtävän (1) ratkaisut ovat Pareto-optimeja. Vektori $\bar{x}$ on Pareto-optimaalinen, jos ei löydy käypää suunnittelumuuttujavektoria x , joka parantaa jonkin kriteerin arvoa aiheuttamatta samanaikaisesti jonkin toisen kriteerin arvon heikkenemisen. Vastaavasti vektori $\tilde{x}$ on heikosti Pareto-optimaalinen, jos ei ole olemassa käypää vektoria x , joka samanaikaisesti parantaa kaikkien kriteerien arvoja. On selvää, että kaikki Pareto-optimaaliset pisteet ovat myös heikosti Pareto-optimaalisia.

Lähteessä [6] on esitetty menetelmä, jossa optimointiongelma (1) muutetaan kaksitavoitteiseksi ongelmaksi

$$\begin{aligned} \min [m \quad \Delta]^T \\ \sigma_{\max} \leq \sigma_U \\ \lambda \geq \lambda_L \\ b_i \in \{0,1,2\} \\ s_i \in \{1,2,\dots,n_p\}, \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (2)$$

missä solmusiirtymät on korvattu niiden painotetulla summalla

$$\Delta = w_1\delta_1 + w_2\delta_2 + \dots + w_r\delta_r. \quad (3)$$

Tehtävän (2) optimiratkaisut ovat alkuperäisen tehtävän Pareto-optimeja, mutta kaikkia tehtävän (1) Pareto-optimeja ei välttämättä löydetä tehtävän (2) avulla. Tehtävä (2) ratkaistaan rajoitusmenetelmää [7] käyttäen, jolloin monitavoitteinen optimointitehtävä muunnetaan yksitavoitteiseksi optimointitehtäväksi

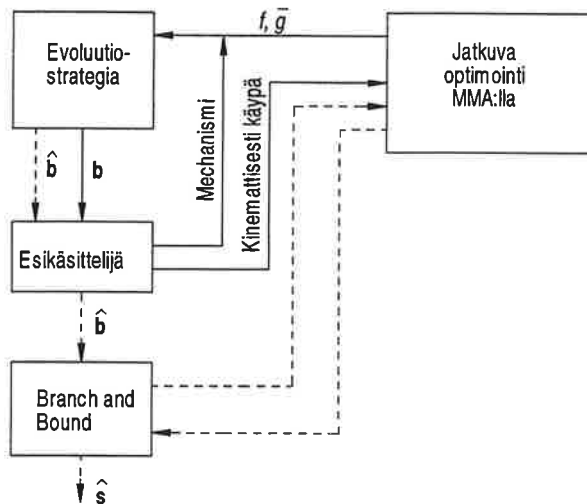
$$\begin{aligned}
& \min \Delta \\
& m \leq m_U \\
& \sigma_{\max} \leq \sigma_U \\
& \lambda \geq \lambda_L \\
& b_i \in \{0,1,2\} \\
& s_i \in \{1,2,\dots,n_p\}, \quad i = 1,2,\dots,n
\end{aligned} \tag{4}$$

missä massan ylärajaa m_U käytetään parametrinä. Tehtävän (4) ratkaisut ovat tehtävän (1) heikosti Pareto-optimaalisia pisteitä.

OPTIMOINTITEHTÄVÄN RATKAISUMENETELMÄ

Lähteessä [8] on esitelty perusideat kolmesta eri ratkaisumenetelmästä, jotka ovat: suora menetelmä, hybridimenetelmä ja relaxointimenetelmä. Suorassa menetelmässä kaikki suunnittelumuuttujat pidetään diskreetteinä. Hybridimenetelmässä topologiamuuttujat pidetään diskreetteinä mutta mitoitusmuuttujat relaxoidaan jatkuviksi. Relaxointimenetelmässä sekä topologia- että mitoitusmuuttujat relaxoidaan jatkuviksi.

Tässä tutkimuksessa optimointitehtävän (4) ratkaisuun käytetään hybridimenetelmää. Menetelmän keskeinen idea on etsiä perusrakenteelle paras mahdollinen topologia käyttäen optimointialgoritmina geneettisen algoritmin muunnosta, jota tässä esityksessä kutsutaan evoluutiostrategiaksi. Erilaisia topologioita tulisi vertailla parhailla mahdollisilla palkkiprofiileilla eli jokaisen topologian tutkiminen sisältää periaatteessa diskreetin optimointiongelman. Tässä vaiheessa ongelmaa kuitenkin yksinkertaistetaan tyytymällä jatkuvan optimoinnin antamaan tulokseen, joka useimmiten antaa erilaisille topologioille oikean paremmuusjärjestyksen. Jatkuva tehtävä ratkaistaan MMA-algoritmillä [9]. Kun paras topologia on löydetty, mitoitusmuuttujille etsitään diskreetit arvot käyttäen branch and bound algoritmia. Hybridimenetelmän lohkokaavio on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1. Hybridimenetelmän lohkokaavio

Yleensä topologian optimoinnissa rakenneosan poisto tehdään käyttämällä pieniä poikkipinta-areoiden arvoja, mutta tässä tutkimuksessa mallinnetaan todellinen rakenne eli, jos topolo-

giamuuttujien arvot kertovat, että jokin rakenneosa pitäisi poistaa, se todellakin poistetaan laskentamallista. Menetelmän hyötynä on laskentamallin pieneneminen. Toisaalta on mahdollista, että rakenteesta tulee mekanismi, jolloin ei voida laskea siirtymiä, jännityksiä eikä optimoida mitoitustuuttujien arvoja. Tämä ongelma on ratkaistu käyttämällä mekanismi rakenteiden kohdefunktiolle ja pahiten rikkovalle rajoitusehdolle suurehkoja vakioarvoja.

Evoluutiostrategiassa käytetään järjestysvalintaa, jossa paremmuusjärjestykseen asettaminen perustuu kahden rakenteen vertailuun. Jos molemmat ovat käyviä tai niillä on suunnilleen yhtä suuri pahiten rikkovan rajoitusehdon arvo, niin rakenteiden keskinäisen järjestyksen ratkaisee kohdefunktion arvo. Jos taas toisella on selvästi pienempi pahiten rikkovan rajoitusehdon arvo, niin se on parempi.

Seuraavaksi esitellään mitoitustuuttujien relaxointia. Kustakin palkkiprofiilista tarvitaan kolme suuretta: poikkipinta-ala A , neliömomenti I ja korkeus h . Sauvalle korkeutta ei tarvita. Käytettävissä olevat profiilit järjestetään poikkipinta-alan mukaiseen suuruusjärjestykseen ja tätä järjestysnumeroa käytetään diskreettinä mitoitustuuttujan arvona. Relaxoinnissa kullekin suurelle (A , I ja h) tehdään oma kuutiöspliniikäyrä, jolloin kullekin pintasuurelle saadaan jatkuva ja derivoituva käyrä välille $1 \leq s \leq n_p$. Näitä käyriä ja niiden derivaattoja käytetään mitoitustuuttujien optimoinnissa.

On selvää, että käyrien arvot eivät saa olla mielivaltaisia. Kunkin suureen arvon on oltava positiivinen. Lisäksi neliömomentin yläraja saadaan keskittämällä poikkipinta-alat korkeuksille $\pm h$, jolloin pintasuureiden välttämättömiksi ehdoiksi saadaan

$$\begin{aligned} A &> 0 \\ I &> 0 \\ h &> 0 \\ Ah^2 / 4 &> I \end{aligned} \tag{5}$$

Yksinkertaisella I-profiililla on varsin helppo todeta, että yllä olevat ehdot ovat myös riittävät eli jokaiselle ehdot (5) toteuttavalle pisteelle voidaan esittää ainakin yksi palkkiprofiili. Ääritapauksissa nämä ”profiilit” eivät kuitenkaan enää ole palkkeja eikä niitä voi laskea palkkiteorialla.

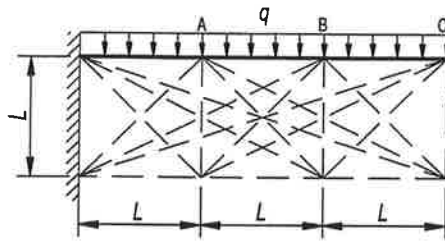
Spliniikäyrämallinnus onnistuu parhaiten, jos käytettävät palkkiprofiilit ovat samankaltaisia ja ne ovat selvästi erikokoisia, jolloin pintasuureiden spliniikäyrät ovat siistejä. Negatiiviset pintasuureiden arvot ovat mahdollisia, jos esimerkiksi yhdistetään putkipalkki- ja I-profiileja. Tällöin hybridimenetelmää ei voi käyttää. Myös spliniikäyrien lokaalit minimi- tai maksimipisteet aiheuttavat hankaluuksia.

ESIMERKKI

Esimerkkinä käytetään kuvan 2 perusrakennetta, jossa on 21 osaa. Niistä kolmea kuormitetaan tasaisella kuormalla, joten topologiamuuttujien lukumäärä on 18 ja mitoitustuuttujien 21. Materiaalina käytetään terästä $E = 205$ GPa, $\sigma_U = 170$ MPa ja $\rho = 7850$ kg/m³. Pituus $L = 2$ m, tasainen viivakuorma $q = 30$ kN/m ja kuormituskertoinen alaraja $\lambda_L = 2,5$. Rakenteen omaa painoa ei huomioida kuormituksissa.

Kuvaan on merkitty pisteet A, B ja C. Näiden pisteiden siirtymien pystykomponentit ovat kohdefunktion solmusiirtymiä δ_A , δ_B ja δ_C , joiden positiivinen suunta oletetaan olevan alaspäin.

Kaavan (3) painokertoimia merkitään vastaavasti symboleilla w_A , w_B ja w_C .



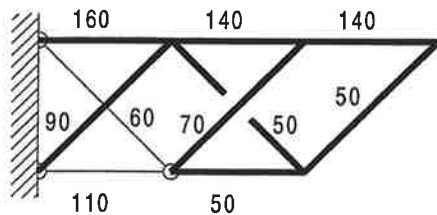
Kuva 2. Testiesimerkin perusrakenne

Valittavissa olevat palkki- ja sauvaprofiilit ovat neliöputkia ja niiden ominaisuudet esitetään taulukossa 1. Profiilin nimi kertoo sen ulkomitat ja seinämänpaksuuden.

Taulukko 1. Käytettävät palkki- ja sauvaprofiilit [10]

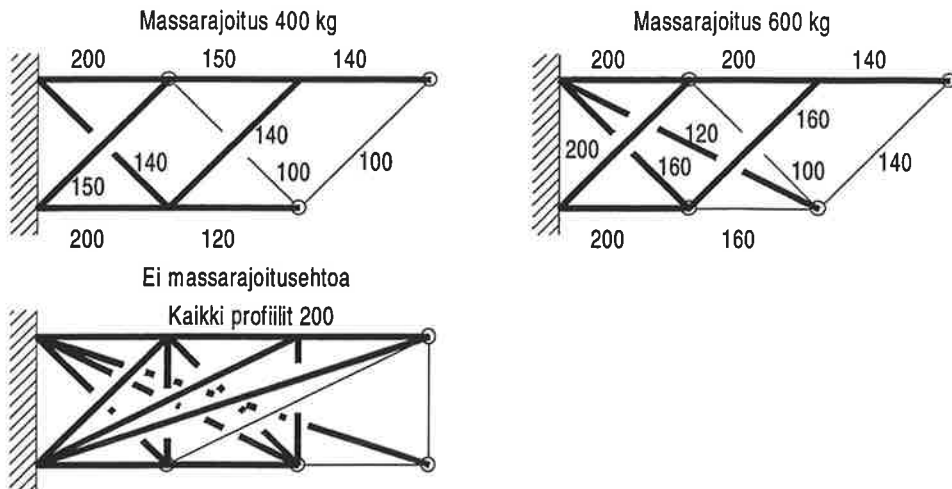
	Nimi	$A / (10^3 \text{ mm}^2)$	$I / (10^6 \text{ mm}^4)$	h / mm
1	40 x 40 / 2	0,294	0,0694	40
2	50 x 50 / 2	0,374	0,1415	50
3	60 x 60 / 2,5	0,559	0,3034	60
4	70 x 70 / 2,5	0,659	0,4941	70
5	80 x 80 / 2,5	0,759	0,7515	80
6	90 x 90 / 2,5	0,859	1,086	90
7	100 x 100 / 2,5	0,959	1,506	100
8	110 x 110 / 3	1,261	2,383	110
9	120 x 120 / 3	1,381	3,123	120
10	140 x 140 / 4	2,135	6,516	140
11	150 x 150 / 4	2,295	8,080	150
12	160 x 160 / 5	3,036	12,02	160
13	180 x 180 / 5	3,436	17,37	180
14	200 x 200 / 5	3,836	24,10	200

Aluksi lasketaan kevin rakenne, joka toteuttaa jännitys- ja stabiiliusrajoitusehdot. Pienimmäksi massan arvoksi saadaan $m = 203,1 \text{ kg}$. Tämä rakenne on esitetty kuvassa 3. Rakennekuvissa palkki on esitetty paksulla viivalla ja sauva ohuella. Valittu profiili on merkitty kuvaan ulkomitalaan.



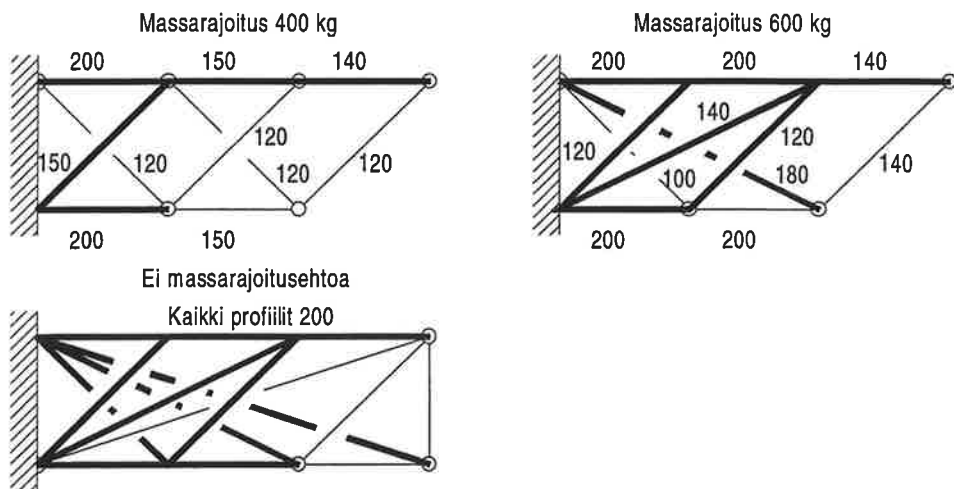
Kuva 3. Massan minimi

Seuraavaksi ryhdytään ratkaisemaan optimointitehtävää (4). Muodostetaan ensimmäinen siirtymäsumma Δ_1 käyttäen yhtä suuria painokertoimien arvoja $w_A = w_B = w_C = 1/3$. Tällä kohdefunktiolla lasketaan kolme eri pistettä: käyttäen massarajoituksia 400 kg ja 600 kg sekä ilman massarajoitusta. Saadut rakenteet on esitetty kuvassa 4 ja rakenteiden tiedot taulukossa 2.



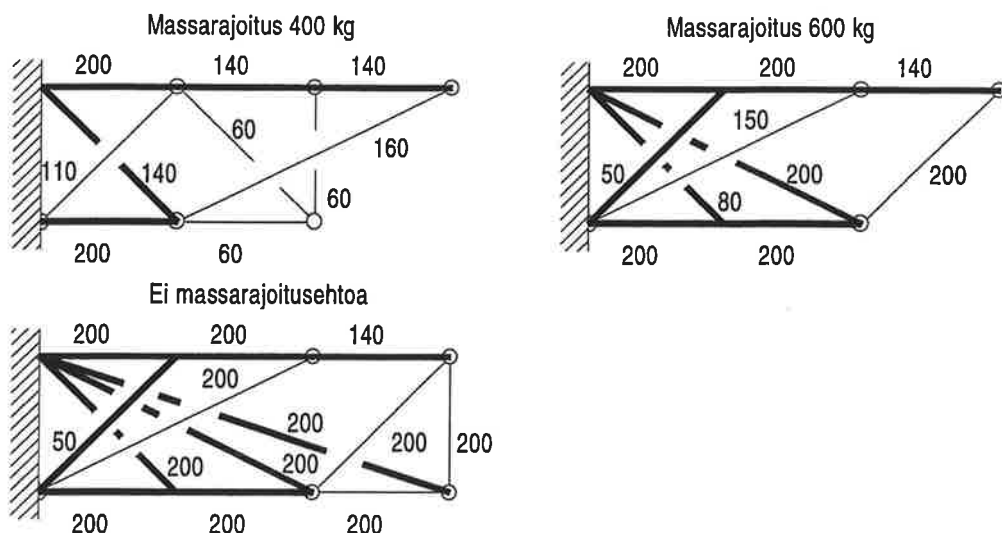
Kuva 4. Parhaat rakenteet, kun kohdefunktiona käytetään siirtymäsummaa Δ_1 .

Toisessa solmuisiirtymien summassa Δ_2 halutaan painottaa enemmän pistettä C, jolloin painokertoimiksi valitaan $w_A = 0,1$, $w_B = 0,3$ ja $w_C = 0,6$. Tällekin siirtymäsummalle optimoidaan parhaat rakenteet sekä ilman massarajoitusehtoa että käyttämällä massarajoituksia 400 kg ja 600 kg. Rakenteet esitetään kuvassa 5 ja niiden ominaisuudet taulukossa 2.



Kuva 5. Parhaat rakenteet, kun kohdefunktiona käytetään toista siirtymäsummaa Δ_2 .

Kolmanneksi siirtymäsummaksi valitaan pisteen C pystysiirtymä, joten painokertoimet ovat $w_A = w_B = 0$, $w_C = 1$. Jälleen lasketaan siirtymän minimi ilman massarajoitusta sekä massarajoituksilla 400 kg ja 600 kg. Parhaat rakenteet on esitetty kuvassa 6 ja rakenteiden ominaisuudet taulukossa 2.

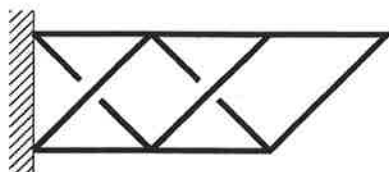


Kuva 6. Parhaat rakenteet, kun kohdefunktiona on pisteen C pystysiirtymä

Taulukko 2. Optimoitujen rakenteiden ominaisuuksia. Minimoidut suureet on esitetty lihavoituina.

	m	Δ_1			Δ_2			Δ_3		
m / kg	203,1	400,0	599,0	1802	399,6	600,0	1412	399,4	600,0	1033
δ_A / mm	3,266	1,430	0,9264	0,7052	1,465	1,515	0,8362	3,200	3,615	3,369
δ_B / mm	9,805	3,541	2,842	1,770	4,381	3,191	2,050	9,255	5,274	3,902
δ_C / mm	14,01	5,815	4,089	2,855	5,241	3,521	2,655	4,512	2,971	2,351
Δ_1 / mm	9,03	3,60	2,62	1,78	3,70	2,74	1,85	5,66	3,95	3,21
Δ_2 / mm	11,7	4,69	3,40	2,31	4,61	3,22	2,29	5,80	3,73	2,92
Δ_3 / mm	14,0	5,82	4,09	2,86	5,24	3,52	2,66	4,51	2,97	2,35
λ	2,55	3,70	50,3	145	8,41	36,4	86,3	2,55	2,57	2,77

Topologian optimoinnin vaikutuksen selvittämiseksi etsitään parhaat mahdolliset palkkiprofiilit, kun kaikkia kolmea siirtymäsummaa minimoidaan massarajoituksilla 400 kg ja 600 kg käyttäen kuvassa 7 esitettyä kiinteää topologiaa. Tulokset esitetään taulukossa 3.



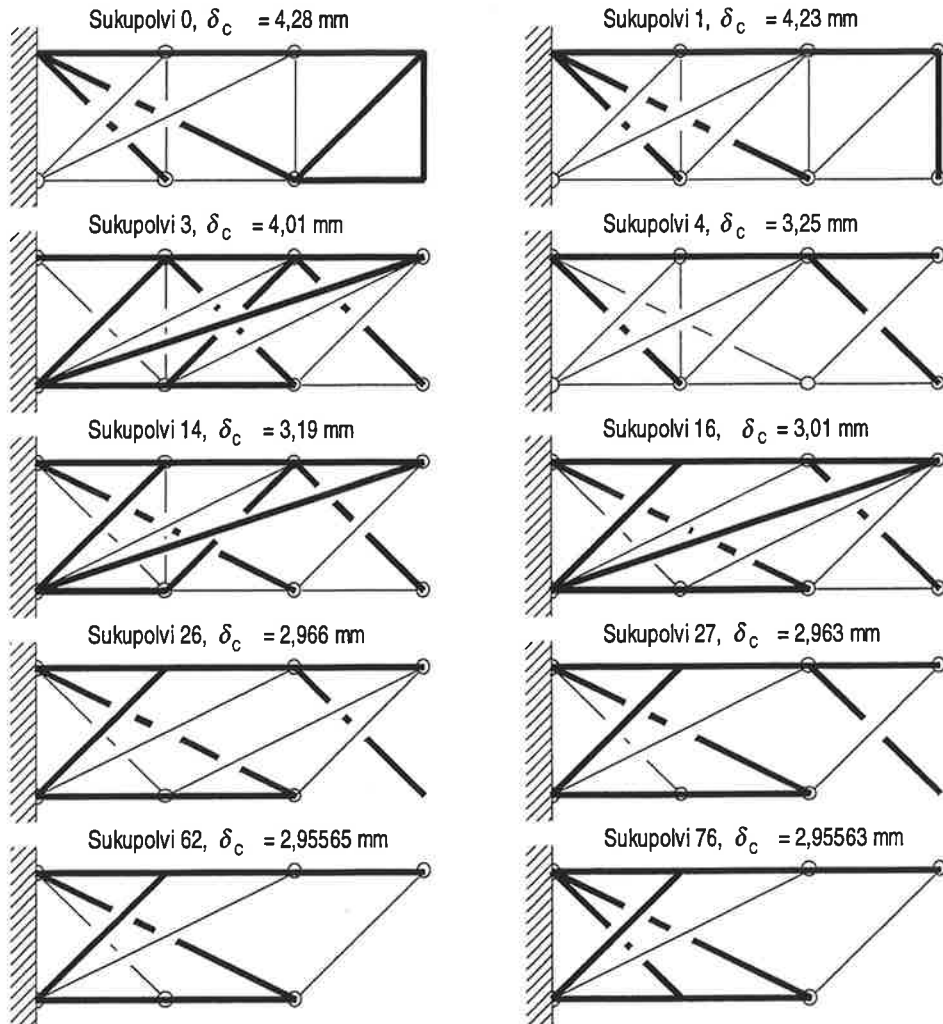
Kuva 7. Vertailutopologia

Taulukko 3. Vertailutopologialla saadut siirtymäsummien arvot

	$m \leq 400 \text{ kg}$	$m \leq 600 \text{ kg}$
Δ_1 / mm	3,61 (+0,3 %)	2,67 (+1,9 %)
Δ_2 / mm	4,67 (+1,3 %)	3,46 (+7,5 %)
Δ_3 / mm	5,21 (+16 %)	4,11 (+38%)

Tuloksista nähdään, että rakenteen topologia muuttuu, jos joko massarajoituksen arvoa tai kohdefunktiona olevan siirtymäsumman painokertoimia muutetaan. Toinen mielenkiintoinen havainto on, että kaikissa topologioissa on käytetty sekä palkkeja että sauvoja. Jossain määrin yllättävää on myös, että solmusiirtymien minimeissä ei ole käytetty kaikki mahdollisia palkkeja, mikä ainakin tässä esimerkissä osoittaa vääräksi lisäämällä rautaa siirtymät pienenevät –uskomuksen. Jos jokainen perusrakenteen osa valitaan palkiksi ja käytetään suurinta profiilia, niin rakenteen massaksi saadaan 1972 kg ja solmusiirtymiksi $\delta_A = 0,7015$ mm, $\delta_B = 1,714$ mm ja $\delta_C = 2,928$ mm. Näistä siirtymäsummiksi saadaan $\Delta_1 = 1,781$ mm ja $\Delta_2 = 2,341$ mm, jotka ovat taulukossa 2 esitetyjä arvoja suurempia. Vastaavasti tutkittaessa vertailutopologialla saatuja tuloksia havaitaan, että ero parhaisiin tuloksiin kasvaa, kun pisteen C pystysiirtymän painotusta lisätään.

Kuvassa 8. esitellään optimointiprosessin etenemistä piirtämällä kullakin hetkellä paras tunnettu topologia. Taipuman arvot saatu jatkuvilla poikkipintamuuttujien arvoilla ja 0:n:n sukupolven topologiat on luotu arpomalla. Kuvan esimerkkinä käytetään solmun C pystysiirtymän minimointia massarajoituksella 600 kg.



Kuva 8. Paras tunnettu topologia optimoinnin edetessä

LÄHTEET

1. Bendsøe, M.P., Optimization of structural topology, shape and material, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1995
2. Rozvany, G.I.N., Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer aided topology optimization in structural mechanics, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 21, 2001, ss. 90-108
3. Beckers, M., Dual methods for discrete structural optimization problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, 2000, ss. 1761-1784
4. Xie, Y.M.; Steven, G.P., A simple evolutionary procedure for structural optimization, Computers and Structures, Vol. 49, 1993, ss. 885-896
5. Kirsch, U., Structural optimization: Fundamentals and applications, Springer Verlag, Berlin, 1993
6. Koski, J.; Silvennoinen, R., Norm methods and partial weights in multicriterion optimization of structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, ss. 1101-1121
7. Carmichael, D.G., Computation of Pareto optima in structural design. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1980, ss. 925-929
8. Turkkila, T., Kehärakenteen topologian optimoinnista, In: Koski, J.; Virtanen, S., VII Suomen mekaniikkapäivät Tampereella 25-26.5.2000, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere, 2000, ss. 71-80
9. Svanberg, K., The method of moving asymptotes – A new method for structural analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, ss. 359-373
10. Vainio, H., Rautaruukin putkipalkkikäsikirja, Rautaruukki Oy Metform, Hämeenlinna, 1997

THE 3D DISPLACEMENT ANALYSIS OF PLAVINAS HYDRO POWER PLANT POWERHOUSE AND 2D STRESS AND STABILITY ANALYSIS

PENTTI VARPASUO
Fortum Nuclear Services Ltd.
POB 10, 00048 FORTUM

ABSTRACT

This paper reports the research conducted in framework of the rehabilitation project of Plavinas hydropower plant complex in Daugava river cascade in Latvia. The aim of the current task is to model the bitumen filled joints of the Plavinas powerhouse element model with the aid of gap elements and analyse the obtained model for load conditions beginning from the impounding of the upper reservoir of the dam and extending to the current state of the dam - powerhouse complex. In particular, the joint deformations and powerhouse settlements are calculated as of the status of the plant in the year 1967 and in the year 1998. Furthermore, the joint deformations and machine house settlements of the plant are calculated in the state where design improvements in drainage wells and soil stabilisation measures have taken place.

The results of stability analysis are the safety coefficients of the powerhouse complex against the soil failure either in sliding or in overturning mode. The safety is evaluated by increasing the load proportionally until the deformation in soil indicate the imminence of the failure.

The 3D analysis results are presented in the form of color plots and animations (video clips) for joint movements and for machine house settlements.

1. INTRODUCTION

This report describes the modeling and computational analyses of the powerhouse –soil system of Plavinas HHP. For carrying out 2d analyses of the powerhouse - soil system different program containing various version of Cam-Clay model were utilized. Following four codes were used: GeoFEAP [1], FLAC [2], MSC/MARC [3] and ABAQUS [4].

2. SOIL MODELING

2.1 Geometry of the 2d model

The 2d model was chosen to correspond to the deep section according to the Imperial College report [5]. The origin of the system of coordinates has been chosen to lie at elevation +0.00 on the middle axis of the powerhouse. The bottom boundary of the model lies at depth of -27.00. The model is divided in two soil layers. The dividing line between these two soil layers is located at elevation +0.00. The upper edge of the soil part of the model is in the upstream side at elevation +30.00 and at the downstream side at elevation +23.00. The upper edge of the soil part of the model has a 16 meters

long and 4 meters deep triangular recess adjoining the powerhouse in the downstream side. The width of the powerhouse in the model is 40 meters. The width of the heel of power house in the model is 65 meters and the width of the apron plate is 40 meters. The width of downstream apron in the model is 142 meters. The total width of the model is 352 meters. The bottom soil layer below elevation +0.00 has quadrilateral elements from 1 to 375. The upper soil layer below elevation +30.00 has elements from 376 to 910. The powerhouse and apron plates have elements from 911 to 1063.

The location of the 'deep section' is shown as section B-B in the following Figure 1:

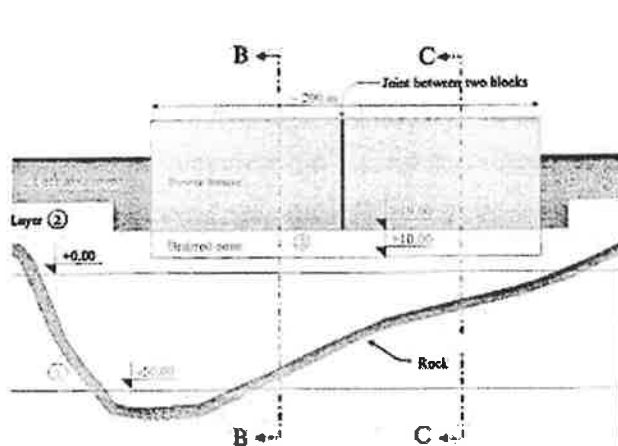


Figure 1 The location of the 2d model section in the longitudinal section of the powerhouse

3. ABAQUS ANALYSES

All ABAQUS analyses were carried out in Silicon Graphics Indigo-2 workstation with R10000 processor. The cam-clay formulation in ABAQUS [6] will be presented in following sections.

3.1. Formulation of cam-clay constitutive model in ABAQUS

The effective stress principle for porous media is used in ABAQUS to derive the equilibrium equations. The total stress, s , acting at a point is assumed to be made up of the fluid pressure, called in ABAQUS the pressure stress, and of the effective stress s^* in soil skeleton.

The effective stress is defined by

$$(1) \quad \sigma^* = \sigma + \chi u_w I$$

where χ is the coefficient that depends on saturation and u_w pressure stress in fluid.

To measure the pore content of the medium ABAQUS the void ratio instead of porosity. The relation between void ratio and porosity is as follows $e_0 = n/(1-n)$, where e_0 is void ratio and n is porosity. The volumetric behaviour of the porous soil material is modelled by assuming that the elastic part of the change in volume of the material is proportional to the logarithm of the pressure stress

$$(2) \quad (\kappa/(1+e_0)) \ln[(p_0 + p_t^e)/(p + p_t^e)] = J^e - 1$$

where κ is the logarithmic bulk modulus of the material, e_0 is the initial void ratio, p is the equivalent pressure stress defined by

$$(3) \quad p = -1/3 \operatorname{tr} \sigma = -(1/3) (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

p_0 is the initial value of equivalent pressure stress; J^e is the elastic part of the volume ratio between current and reference configurations and p_t^e is the "elastic tensile strength" of the material in the sense that J^e approaches infinity as p approaches $-p_t^e$.

In addition to the logarithmic bulk modulus Poisson's ratio or shear modulus can be given to specify the instantaneous elastic response of the soil medium.

The porous elasticity model in ABAQUS is coupled with the critical state clay plasticity model. The clay plasticity model provided in ABAQUS is an extension of the Modified Cam-Clay model presented in previous sections. The inelastic behaviour of the material is described by a yield function, which depends on the three stress invariants of the material, an associated flow rule defines the plastic strain state, and a strain hardening theory that changes the size of the yield surface according to inelastic volumetric strain. The hardening law can be either piecewise linear or exponential. The equation of the yield surface in the model is as follows:

$$(4) \quad (1/\beta^2)[(p/a)-1]^2 + (t/M/a)^2 - 1 = 0$$

where $p = -1/3 \operatorname{tr} \sigma$ is the equivalent pressure stress; $t = (1/2) q [1 + 1/K - (1-1/K)(r/q)^3]$; q is the von Mises stress; r is the third invariant of the stress tensor; M is the slope of the critical state line, β is "cap" size parameter (see Figure 14); a_0 is the hardening parameter defining the initial size of the yield surface; K is the triangular shape parameter describing the shape of yield surface in the octahedral plane (see Figure 15). The meaning of parameters a_0 , β is best described by the following two Figures:

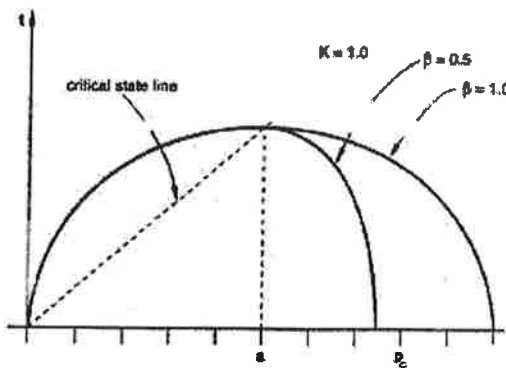


Figure 2. Clay yield surfaces in the p - t plane with two values of the cap parameter β

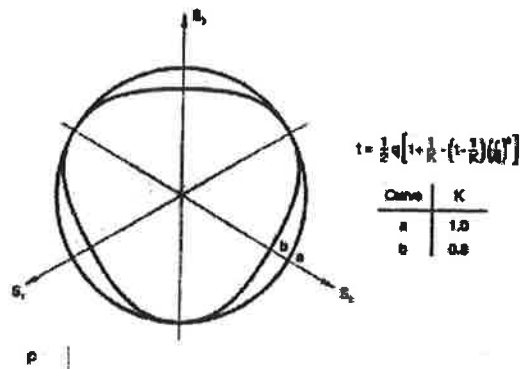


Figure 3. Clay yield surface in octahedral plane of principal stress coordinates with two values of the triangular shape parameter K

The hardening law in ABAQUS clay model can be either exponential or piecewise linear. The exponential form of the hardening law is formulated with the aid of the parameters defining porous elasticity and can therefore be used only in conjunction with the porous elasticity option. The size of the yield

surface at any time is determined by the initial value of the hardening parameter a_0 and the amount of inelastic volume change that occurs according to the equation

$$(5) \quad a = a_0 \exp[(1+e_0)(1-J^p)/(\lambda-\kappa J^p)]$$

where J^p is the inelastic volume change, κ is the logarithmic bulk modulus, λ is the logarithmic hardening constant, e_0 is the initial void ratio. Instead of parameter a_0 explained in Figure 14 the initial size of the yield surface in ABAQUS can be specified with intercept parameter e_1 , which is the intercept of the virgin consolidation line with the void ratio axis. The relationship between a_0 and e_1 parameters is as follows:

$$(6) \quad a_0 = (1/2)\exp[(e_1 - e_0 - \kappa \ln p_0)/(\lambda - \kappa)]$$

where p_0 is the initial value of equivalent hydrostatic pressure given by the initial field of excess pore pressures.

At least two experiments are needed to calibrate the ABAQUS cam-clay model: a hydrostatic compression test and a triaxial compression test. In hydrostatic compression test the sample is pressurized equally in all three directions and the volume change is recorded. The onset of yielding in hydrostatic compression test gives the initial position of the yield surface, a_0 . The logarithmic bulk moduli κ and λ are recorded in hydrostatic compression test by plotting the logarithm of pressure versus void ratio. The void ratio is related to measured volume change by equation

$$(7) \quad J = \exp(\epsilon_{vol}) = (1+e)/(1+e_0)$$

The slope obtained for elastic range is $-\kappa$ and the slope obtained for inelastic range is $-\lambda$. The tri-axial compression test has a fixed confining pressure while differential stress is applied. The tri-axial compression is suitable for calibration of parameter M and β . M is the ratio of shear stress q to the pressure stress p at critical state and can be obtained from stress values when the material has become perfectly plastic. β represents the curvature of the cap part of the yield surface and can be calibrated from a number of tri-axial tests at high confining pressures.

3.2. Application of the ABAQUS Cam-clay model

To define ABAQUS cam-clay model the following material parameters were applied to both soil layers in 2d model:

Density = 0.0023 Gg/m³, $\kappa=0.03$, $\nu=0.3$, $\lambda=0.3$, $M=1.3$, $e_1 = 1.293$, $\beta=1$, $K=1$, $e_0=0.348$ and the initial hydrostatic pressure of $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -0.5$ MPa was applied to all soil elements in the model. The obtained vertical displacement plot in meters is presented in Figure 4.

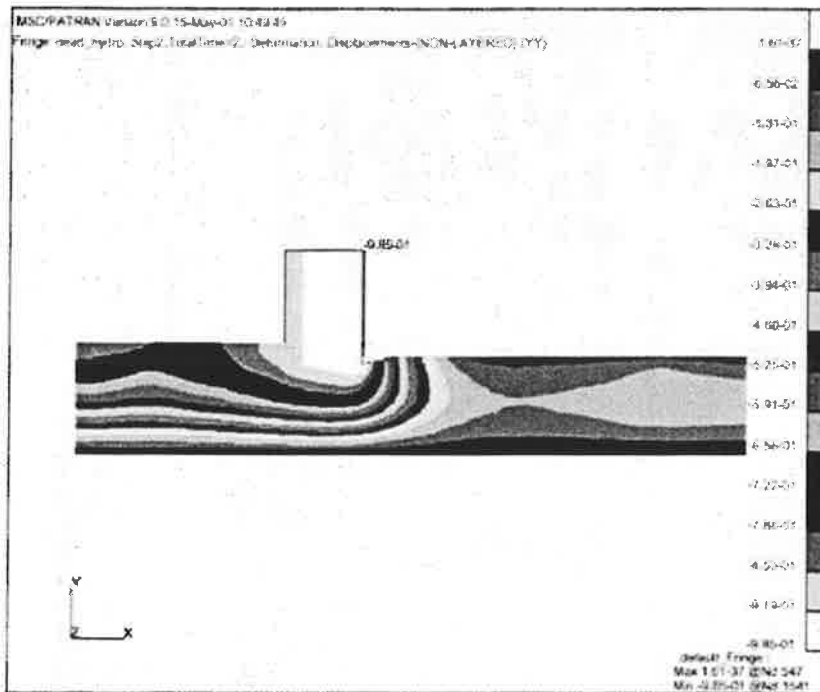


Figure 4. The vertical displacements computed by ABAQUS 2d model. Units [m].

4. 3D ANALYSES

The geometry of the 3D model reported here is based on 3D model developed in Hydroproject and described in reference [7]. The original data transfer consisted of following items: (1) The table of nodal coordinates of the model consisting of 67674 nodal points and calculated piezometric heads at nodal points corresponding years 1967 and 1998; (2) The connectivity table for 46203 8-node solid elements and their material code; (3) The table explaining the meaning of material code, (4) Table assigning properties to virgin soil materials with codes 1-20. In addition to these data also the following results of the triaxial soil test on reconstituted samples were transferred.

The 7 material parameters characterizing the cam-clay model in ABAQUS were given for various soil types as follows:

No	κ	ν	λ	M	e_1	β	K
1	0.06	0.3	0.3	1.3	1.293	1.0	1.0
2	0.06	0.3	0.3	1.3	1.293	1.0	1.0
3	0.06	0.3	0.3	1.3	1.293	1.0	1.0
4-20	0.03	0.3	0.3	1.3	1.293	1.0	1.0

Table 1 Cam-Clay material parametrs used in ABAQUS 3d analysis

Four different analyses were carried out. The first analysis used the excess pore pressures computed by the seepage model of the Hydroproject and decreased the volume weight of the soil under the phreatic line to take into account the buoyancy forces. The analysis was carried out by applying the 1MPa compressive initial stress to all soil elements in groups from 1 to 20. Then the vertical pressure load was applied on the model upper surface to set the displacements to zero in the model. This first step in the analysis involving initial stress and surface pressure is called the geostatic step. It usually took about 6 equilibrium iterations to find the equilibrium in geostatic step. After geostatic step the all other loads like mechanical loads, gravity loads and the field of excess pore pressures are applied to the model in a linear ramp with 20 increments. Each increment usually took from 2 to 4 equilibrium iterations to converge. The second load case investigated was the same as the first load case only the time point investigated corresponded to year 1979.

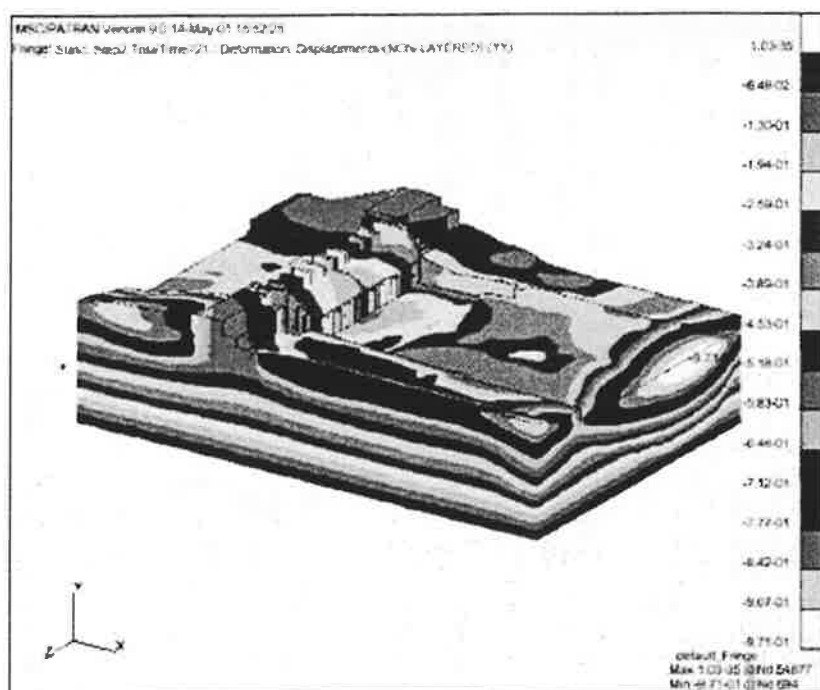


Figure 5 Vertical displacements for the year 1998 from ABAQUS 3d model computed from the nodal forces of piezometric heads. Units [m].

In the load cases 3 and 4 the treatment of the loads from piezometric head measurements was treated differently. The water elevation values measured in piezometers can be expressed with the aid of the following equation

$$(8) \quad H = p_w / \gamma_w + h$$

where H is the piezometric head p_w is the excess pressure in the pores of soil and h is the elevation of the investigated point in soil. In analyses 3 and 4 the analyses 1 and 2 were repeated by using the fields of nodal forces calculated directly from piezometric head fields by forming the gradients. These fields were provided for years 1998 and 1979 by Hydroproject. The load case 3 is calculated from

piezometric heads corresponding to year 1998 and load case 4 is calculated from piezometric heads corresponding to year 1979. The vertical displacement results for load cases 3 are given in Figure 5:

5. JOINT MOVEMENTS CALCULATED BY NASTRAN [8]

The joint between the two blocks of the powerhouse in the middle and the joint between the upstream apron were described with gap elements, representing the stiffness of bitumen in the joint. The properties of gap elements are so that they take the compressive stresses only but do not have any strength for tension. The overall displacement fields for three time years in the operational history of the plant were obtained from Hydroproject for years 1967, 1979 and 1998. Using these fields as prescribed displacements the movements in the joints were determined from the model containing gap elements.

The scheme showing the locations of modelled joints as well as the notation convention for the plots describing the joint movements is given in Figure 6. The obtained movements in vertical joint N 23 are given in Figure 7:

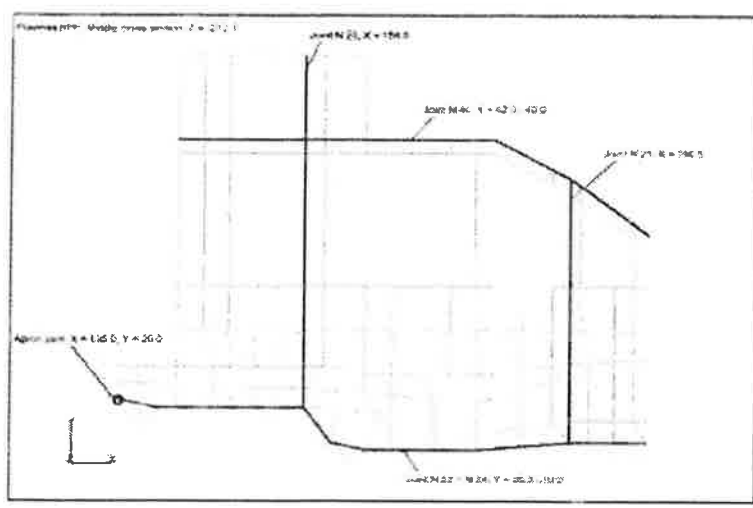


Figure 6 Scheme for location of joints where movements were calculated

6. GEOFEAP ANALYSIS

6.1. Cam-Clay in GeoFEAP

The significance of the Cam-Clay model lies in the unified treatment of the volumetric and shearing response of saturated soils. The main feature of the model is the critical state concept. This concept is based on the experimental observation that a soil undergoing shear eventually reaches a critical state in which the soil maintains constant volume under unlimited shear distortion while the effective stresses are stationary. In addition, the critical state point is considered to be a function of effective stresses and void ratio (e). The model also assumes the existence of an unique state boundary surface, which represents the limit of possible states of a soil. The soil behaves elastically if a soil's state lies below the state boundary surface. When the soil's state is on the state boundary surface, the soil yields and

responds as an elasto-plastic material. In this case, the plastic strains are computed using a hardening law and associated flow rule. There are two Cam-clay models: the "original" Cam-clay model and the "modified" Cam-clay model. Both models assume the existence of the critical state concept, but they differ in the assumption of dissipated energy during plastic deformation. There is no direct experimental evidence that confirms the validity of the assumptions made in either model. Thus, the choice between the two models depends on judgment. In GeoFEAP, the modified Cam-clay was selected for implementation because it has been more widely used in FE applications. To define a soil's state, three parameters are used: the mean pressure, p' , the deviatoric stress, q , and the specific volume, v , where $v=1+e$, which is the volume composed of an unit volume of soil material with surrounding voids. The soil's state is said to be at a critical state when a soil deforms continuously under stationary effective stresses (i.e. $dp'=dq=0$) at constant volume (i. e. $d\epsilon_p=0$). There are two "lines" that are particularly important in the development of the critical state concept: (1) the isotropic virgin compression line (VCL) and (2) the critical state line (CSL).

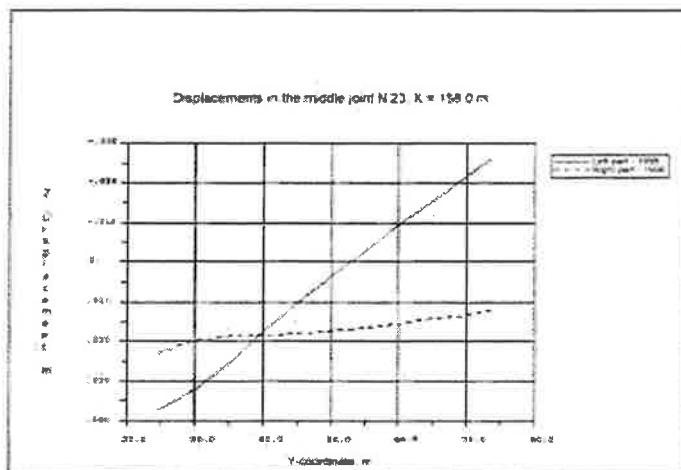


Figure 7 Displacements in the middle joint N 23 X = 158 m for year 1998.

The governing equation in a matrix form for the modified Cam-clay model can be written in incremental formulation as:

$$(9) \begin{bmatrix} d\epsilon_p \\ d\epsilon_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/B' & 0 \\ 0 & 1/3G' \end{bmatrix} + \left\langle (\lambda - \kappa)/[(1+e)p'(M^2 - \eta^2)] \right\rangle \begin{bmatrix} M^2 - \eta^2 & 2\eta \\ 2\eta & 4\eta^2/(M^2 - \eta^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp' \\ dq \end{bmatrix}$$

where $\langle x \rangle$ is the Macauley brackets and is defined as $\langle x \rangle = x$ if elasto-plastic, 0 if elastic.

M is the slope of critical state line; λ is the slope of virgin consolidation line; κ is the swelling/compression line; e is void ratio and $\eta = \text{stress ratio} = q/p'$. The elastic parameter G' in Eq. (1) is related to the elastic Poisson's ratio, ν' , and the bulk modulus, B' , (primes are used to emphasize that these are effective stress parameters) by the following equation:

$$(10) \quad G' = 3(1-2\nu')B'/[2(1+\nu')] \quad \text{where } B' = (1+e)p'/\kappa$$

6.2. Material definition in GeoFEAP

The modified Cam-Clay model has been implemented using both Displacement and Mixed formulation approaches. This soil element is implemented in a FORTRAN subroutine called ELMT47. Three rows of input data are required for this element. The first row of data contains the modified Cam-clay model parameters: slope of the failure line in compression (M_c), slope of the virgin compression line (Λ), slope of the recompression line (Λ), specific volume at unit pressure on the isotropic virgin compression line (N), elastic Poisson's ratio (XNO), initial overconsolidation ratio ($OCRI$), and shape parameter for failure criteria ($fLode$) and the penalty bulk modulus (PB) (if other than the water bulk modulus is to be used). The second row of data requires initial coefficient of lateral stress at rest (K_0) and the soil unit weight (Γ). Additionally, body forces per unit volume (B_x , B_y) and element thickness (D) may be input. The third row of parameters contains the number of Gauss points per direction for geometric representation (N_{gauss}), the number of Gauss points per direction for stress representation (S_{gauss}), the drainage conditions (drained or undrained) is indicated by the parameter $drain$ (0 or 1 respectively). For consolidation analysis ($drain=2$), the following additional parameters are input: permeability in the x-direction (K_x), permeability in the y-direction (K_y), and the time integration parameter (β), number of nodes representing the excess pore pressures (E_{pnode}). The integration parameter (β) ranges from zero (euler-explicit) to one (euler-implicit).

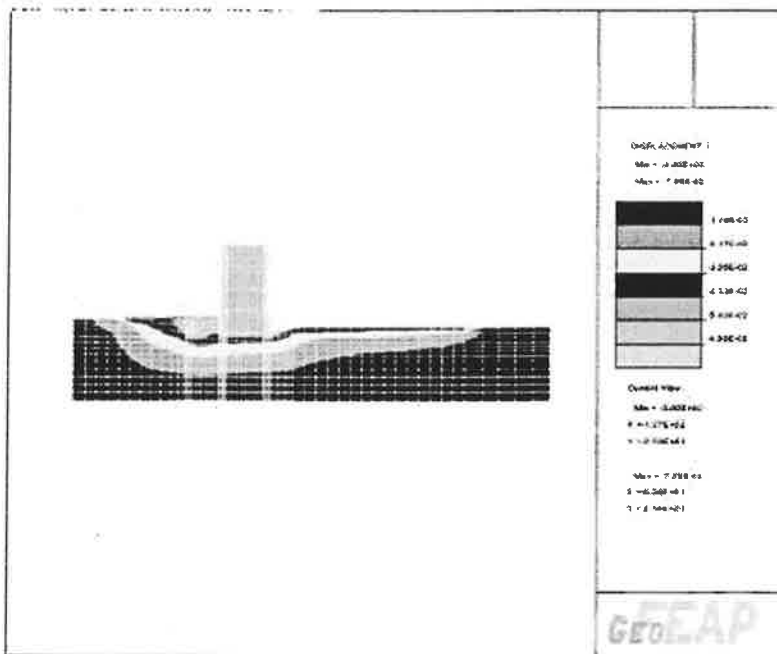


Figure 8 The horizontal displacement results from GeoFEAP analysis.
The maximum displacement is 7.5 cm. Units [m].

6.3. Geometry of the 2d model

The 2d model model was chosen to correspond to the deep section according to the Imperial College report [9]. The origin of the system of coordinates has been chosen to lie at elevation +0.00 on the

middle axis of the powerhouse. The bottom boundary of the model lies at depth of -27.00 . The model is divided in two soil layers. The dividing line between these two soil layers is located at elevation $+0.00$. The upper edge of the soil part of the model is in the upstream side at elevation $+30.00$ and at the downstream side at elevation $+23.00$. The upper edge of the soil part of the model has a 16 meters long and 4 meters deep triangular recess adjoining the powerhouse in the downstream side. The width of the powerhouse in the model is 40 meters. The width of the heel of power house in the model is 65 meters and the width of the apron plate is 40 meters. The width of downstream apron in the model is 142 meters. The total width of the model is 352 meters. The bottom soil layer below elevation $+0.00$ has quadrilateral elements from 1 to 375. The upper soil layer below elevation $+30.00$ has elements from 376 to 910. The powerhouse and apron plates have elements from 911 to 1063. The material parameters used for GeoFEAP model were for both soil layers as follows: $M_c = 1.2$, $\lambda = 0.3$, $\kappa = 0.03$, $N = 1.293$, $X_{nu} = 0.3$, $OCRI = 1.2$, $K_o = 0.5$, $\gamma_{mas} = 0.023 \text{ Ggr/m}^3$. Initial confining stress was applied by increasing the weight of soil elements tenfold. For powerhouse the following elastic parameters were applied $E = 30 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2$ and density $= 2.5 \text{ Mg/m}^3$. The obtained horizontal displacement results for 2d GeoFEAP analysis are shown in Figure 8.

7. FLAC ANALYSIS

7.1. The definition of the soil model in FLAC

FLAC code is the finite difference for solving ground water flow and geo-mechanical problems. The modified Cam-clay model in FLAC is an incremental hardening or softening elasto-plastic model. Its features include a particular form of non-linear elasticity and a hardening or softening behavior governed by volumetric plastic strain. The failure envelopes are self-similar in shape and correspond to ellipsoids of rotation about the mean stress axis in the principal stress space. The shear flow rule is associated; no resistance to tensile mean stress is offered in this model. The model is expressed in terms of effective stresses. In particular, all pressures referred are effective pressures. The model is expressed in terms of three variables: the mean effective pressure p , the deviator stress q and the specific volume v . Principal stresses σ_1 , σ_2 , σ_3 are used, the out-of-plane stress, σ_z being recognized as principal stress σ_3 . The sign conventions in FLAC follows the continuum mechanics sign convention for solids tensile stresses, traction and dilation are positive. The following discussion will follow the notation and sign conventions of reference [10]. The generalized stress components p and q are functions of first and second invariant of the effective stress tensor.

The soil material parameters used for FLAC analysis were for both soil layers as follows:

$M = 1.3$, $\lambda = 0.3$, $\kappa = 0.03$, initial specific volume $v_\lambda = 1.348$, reference pressure $p_1' = 1 \text{ MPa}$, coefficient of pre-consolidation $m_{pc} = 1$, Poisson's ratio $= 0.3$, saturated density $= 0.0023 \text{ gigr/m}^3$, initial confining compressive stress $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -1 \text{ MPa}$ was applied through the soil medium

For concrete part of the FLAC model following material parameters were applied: $E = 30 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2$

The geometry for the computational grid in FLAC analysis was as follows: The overall size of the grid was exactly the same as in the GeoFEAP analysis and first it was divided in horizontal direction to 70 computational cells and in vertical direction into 35 computational cells making the total number of 2450 cells. Two sub-areas of the model corresponding to horizontal index i from 1 to 20 and vertical index j from 31 to 35 and $i = 41, 70$; $j = 27, 35$ were nullified. These sub-areas contained 370 cells leaving to actual analysis domain $2450 - 370 = 2080$ computational cells. Cells corresponding indices $i = 1, 10$; $j = 1, 30$ and $i = 11, 20$; $j = 1, 28$ and $i = 21, 40$; $j = 1, 24$ and $i = 41, 60$; $j = 1, 24$ and $i = 61, 70$; $j = 1, 26$ were soil cells. Cells corresponding indices $i = 11, 20$; $j = 29, 30$ and $i = 21, 40$ $j = 25, 35$ and

$i=41,60$; $j=25,26$ were concrete cells representing the powerhouse and apron structures. Plain strain analysis was carried out in explicit finite differences using the grid explained above. Boundary conditions were same as in the GeoFEAP analysis meaning that both ends of the model were restrained in horizontal direction and the bottom edge of the model was restrained in both horizontal and vertical directions. During first 2000 computational cycles the initial stress and gravitational forces were applied and the during subsequent 2000 computational cycles the hydrostatic pressure was applied using linear ramp. The failure index contours from FLAC are given in the following Figure:

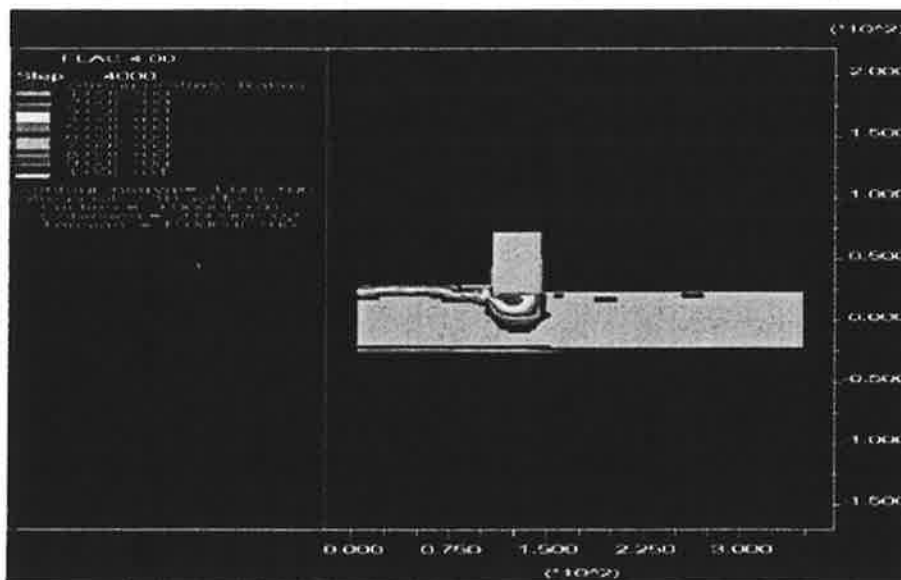


Figure 9 Mohr-Coulomb failure index in 2d model computed by FLAC.

8. MARC ANALYSES

The following material soil properties were input for MARC 2d analysis:

Bottom soil layer (elements 1-375): $E = 100 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, density = 0.0023 Ggr/m^3 , cohesion $c = 0.02 \text{ MPa}$, virgin compression logarithmic bulk modulus $\lambda = 0.3$, logarithmic bulk modulus for swelling $\kappa = 0.03$, $M = \text{slope of the critical state line} = 0.882$

Upper soil layer (elements 376-910): $E = 50 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, density = 0.0023 Ggr/m^3 , cohesion $c = 0.02 \text{ MPa}$, virgin compression logarithmic bulk modulus $\lambda = 0.3$, logarithmic bulk modulus for swelling $\kappa = 0.03$, $M = \text{slope of the critical state line} = 0.882$

Concrete (elements 911-1063): $E = 30000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$, density = 0.0025 Ggr/m^3

Initial pre-consolidation pressure for all soil elements (1-910) 0.5 MPa , initial stress for all soil elements $\sigma_{xx} = -0.5 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = -0.5 \text{ MPa}$, $\sigma_{zz} = -0.5 \text{ MPa}$, initial void ratio for all soil elements 0.74 .

MARC analyses were heavy even in 2d geometrical configuration. The duration of a typical run were about 10 hours in wall clock time in a PC with a 650 MHz processor. This is because of the large strain

capability of MARC and because of the update of the stiffness matrix at every increment of the solution. However, it seems that the sparse solver in MARC is not as effective as that in ABAQUS.

The vertical displacements obtained from the MARC analysis are presented in following Figure:

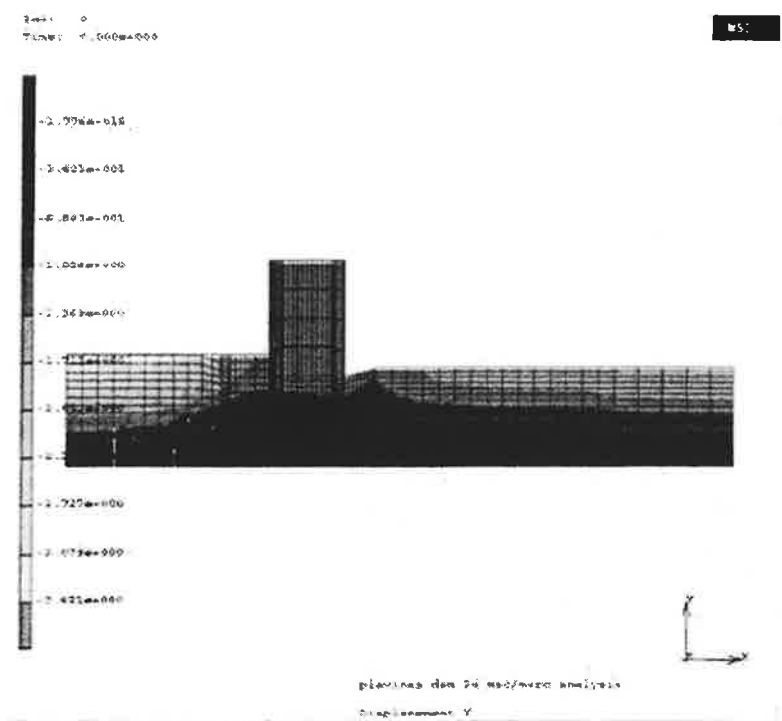


Figure 10. Vertical displacements of 2d model computed by MARC. Units [m].

9. CONCLUSION

In the current report the derivation of the Cam-clay model and the meaning of the cam-clay model parameters were explained. The seven parameter cam-clay model included ABAQUS program was chosen for modeling the soil in 3D finite element analyses and the parameter values were chosen.

The displacements and the stresses in joint powerhouse-soil model were calculated for years 1979 and 1998 corresponding to different ways to input the loads a caused by phreatic ground water surface and excess pore pressure in the soil.

The joint movements of the middle joint and upstream apron-powerhouse joint were calculated for years 1967, 1979 and 1998 and predicted for the year 2010 on the basis of observed settlement history.

The dispersion in the results of performed 2D analyses is large. It seems very difficult to develop a 2D model that would give consistent results for the same problem formulation using different analysis

codes for computation and that would give results that agree reasonably with the measured settlement field

REFERENCES

- [1] Espinoza, R. D., Bray, J. D., Taylor, R. L. and Soga K. (1995) GeoFEAP: Geotechnical Finite Element Analysis Program, Version 1.2, Report no. UCB/GT/95-05, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, California.
- [2] FLAC, (1998) Fast Lagrangian Analysis of Continua, Theory and Background & Example Applications, Itasca Consulting Group Inc, Minneapolis, Minnesota.
- [3] MARC, (1997) Theory and User Information, Version K7, Marc Analysis Research Corporation, Palo Alto, California.
- [4] ABAQUS, (2000) Version 6.1, Theory Manual & Benchmark Manual I-II, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., Pawtucket, Rhode Island.
- [5] Potts, D. M., Dravkovic, L, Finite Element Analysis of Plavinas Powerhouse, GCG Computing Ltd., February, 1999.
- [6] ABAQUS, (2000) Version 6.1, Theory Manual & Benchmark Manual I-II, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., Pawtucket, Rhode Island.
- [7] Yu. K. Zaretsky, M. I. Karabaev, Plavinas HPP, Measures for providing safety of structures, Mathematical model of soil-powerhouse system, Computational analysis of the stress-strain state of the system during construction and operation and assessment of current state of the system, Final report, International Institute of Geomechanics and Hydrostructures, Moscow, 2000. (in Russian)
- [8] M. Reymond, M. Miller, MSC/NASTRAN, Quick Reference Guide, Version 70.7, MacNeal-Schwendler Corp., (2000) Los Angeles, California.
- [9] Potts, D. M., Dravkovic, L, Finite Element Analysis of Plavinas Powerhouse, GCG Computing Ltd., February, 1999.
- [10] Malvern L. E. (1969) Mechanics of Continuous Medium, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.

GRAPHIC-ANALYTICAL METHOD TO DETERMINE THE INITIAL STATE OF SUSPENSION BRIDGE WITH INCLINED HANGERS

P. HOLOPAINEN
Tampere University of Technology
P.O.Box 527
FIN-33101 TUT, FINLAND

ABSTRACT

The initial geometry of a suspension bridge with fairly arbitrary inclined hangers is determined making use of the funicular polygon. The certain angles of initial geometry can be determined from the polygon of forces. The lengths of hangers and cable segments can be calculated from the bridge scheme obtained by the funicular polygon. The previous problem is the same as the forward intersection in the geodesy. The forces in the hangers and cable segments can be calculated from the polygon of forces. With this in mind the lengths of vertical components of the hanger forces determine the scale of the force polygon.

The initial state of some bridges have in different ways inclined hangers that are compared with bridges with vertical hangers.

Especially the initial state of a bridge with hangers perpendicular to the cable in initial state, is considered. Further, the case where the hangers perpendicular to the cable are densely located, is considered. A differential equation $y'' = f(S, y, y')$ of the continuously curved cable is derived. S is the constant cable force. The previous differential equation is an equilibrium equation of a differential cable element in the direction perpendicular to the cable line. The horizontal supporting of the stiffening beam is discussed briefly.

INTRODUCTION

When fitting hangers in an inclined position the purpose is add the stiffness of suspension bridge towards vertical loads. Especially this may be necessary in pedestrian suspension bridges, whose own weight is small and on whose the live load is 'more alive' than on highway suspension bridges.

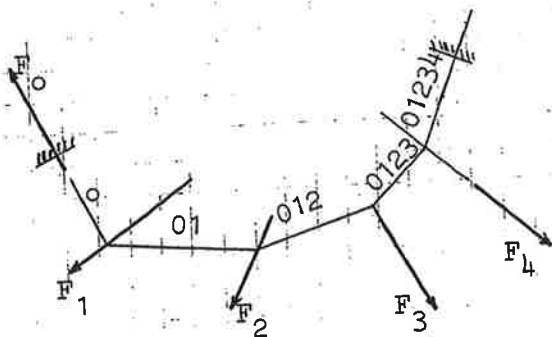
FUNICULAR POLYGON

When we add the forces $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ each in its own action line, we chose an arbitrary force $\bar{F}_0$. When we add in order $\bar{F}_0, \bar{F}_0 + \bar{F}_1, \bar{F}_0 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_0 + \dots + \bar{F}_n$ the funicular polygon is obtained (Fig. 1a).

When we take not into account the action lines of forces $\bar{F}_0, \dots, \bar{F}_n$ and if we place the forces one after another, we obtain the polygon of forces (Fig. 1b).

The funicular polygon and the polygon of forces can be used in many aims.

(a) Funicular polygon



(b) Polygon of forces

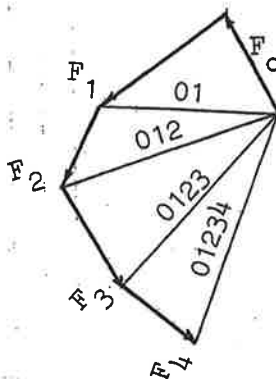
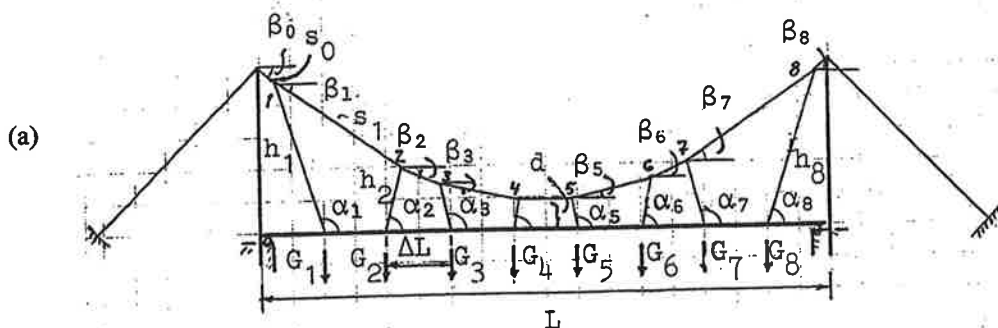


Fig. 1

SUSPENSION BRIDGE WITH INCLINED HANGERS

It is assumed, that the own weight of the horizontal stiffening beam and roadway is g and the hangers are fixed on the beam with equal distances and at inclinations α_i (Fig. 2a). The stiffening beam is at rest suspended from hangers. The vertical components H_{iy} of hanger forces are equal to the support reactions G_i of the continuous stiffening beam. The beam is prepared straight or lightly arched. It is assumed, that in the middle of the bridge the distance of the cable from the beam or roadway is d and the hangers are fitted in inclined positions as shown in Fig. 2a. It shall determine the direction angles β_i of the cable segments, the turning-points points of cable line and the forces in the cable segments and hangers.

First draw the horizontal lines 1...9 by distance H_{iy} from each other. These distances define the scale of the force polygon (Fig. 2b). When the bridge is symmetric, the O is chosen in the middle of lines 1...9 as in Fig 2b. Then some cable force is chosen, for example S_0 or direction angle β_0 . Then as in funicular polygon (Fig. 1) the hanger force H_1 and following cable segment force S_1 is obtained. In the same way continuing the triples $(H_2, S_2, \beta_2) \dots (H_8, S_8, \beta_8)$ can be obtained.



(b)

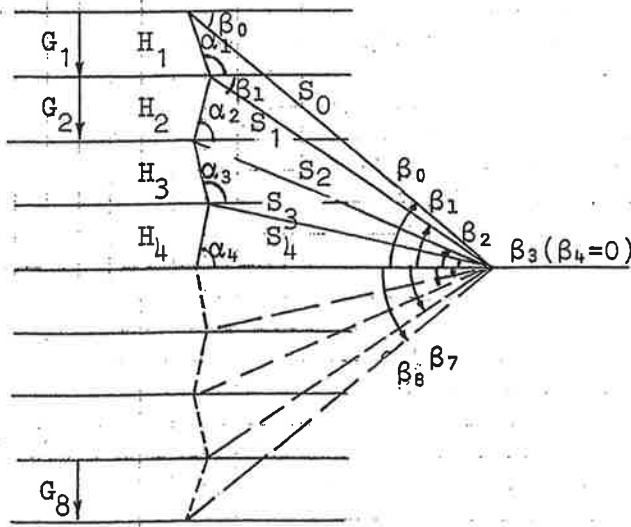


Fig.2

The triples before can be calculated as follows. When S_0 is chosen from the geometry of the force polygon (Fig.2b). Then

$$\beta_0 = \arcsin\left(\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{S_0}\right) \quad (1)$$

can be obtained. Further from the geometry of the force polygon obtains hanger forces

$$H_i = \frac{G_i}{\sin \alpha_i}, \quad (i = 1 \dots 8). \quad (2)$$

When $\bar{S}_{i-1} - \bar{S}_i - \bar{H}_i = \bar{0}$ the

$$\beta_i = \arctan\left(\frac{S_{i-1,y} - G_i}{S_{i-1,x} + G_i \cot \alpha_i}\right). \quad (3)$$

Further

$$S_i = \frac{S_{iy}}{\sin \beta_i}, \quad (i = 1 \dots 8). \quad (4)$$

Note, that when β_i is calculated from Formula (3), $\beta_i \geq 0$ when $i = 0 \dots 4$ and $\beta_i < 0$ when $i = 5 \dots 8$.

CALCULATION OF THE LENGTHS AND INTERSECTION POINTS OF CABLE SEGMENTS AND HANGERS

The calculation begins in the middle of bridge, where the distance of the cable from the beam (or from the roadway) is known d . Only the direction angles of the cable segments and the hangers are known. The problem is the same as the forward intersection used in geodesy, e.g. [2, p.155], where the calculations are presented keeping an eye on the manual calculator. Here this feature is not taken into account.

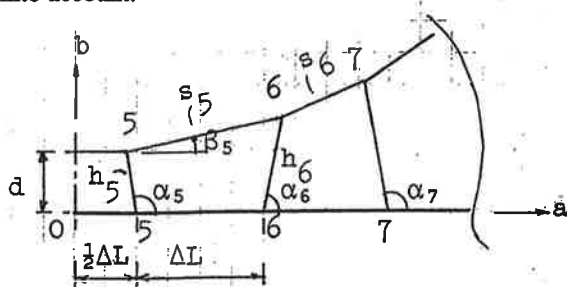


Fig. 3

It is below denoted by lower case i the intersection points of cable and hangers and capital I the fixing points of the hangers on the beam. Using the notation of Fig. 3 then

$$a_5 = \frac{\Delta L}{2} + d \cot \alpha_5, \quad b_5 = d. \quad (5)$$

Here keeps angles $\beta_i > 0$, ($i = 5 \dots 8$). Begins from the known points $i = 5$ and $I = 6$. The lengths s_i , h_{i+1} can be solved from

$$\begin{bmatrix} \cos \beta_i & -\cos \alpha_{I+1} \\ \sin \beta_i & -\sin \alpha_{I+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_i \\ h_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_i + \frac{1}{2}\Delta L + (i+1-5)\Delta L \\ -b_i \end{Bmatrix} \quad (6)$$

The left hand half of the bridge is here assumed symmetric to right half. The intersection points (turning-points of cable line)

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= a_i + s_i \cos \beta_i \\ b_{i+1} &= b_i + s_i \sin \beta_i, \quad (i = 5 \dots 8). \end{aligned} \quad (7)$$

If the pylon head ($i = 9$) is vertically placed at the beam end

$$\begin{aligned} a_9 &= L/2 \\ b_9 &= b_8 + \tan \beta_8 \cdot \left(\frac{l}{2} - a_8\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Vertical hangers. It assumes, that the hangers of the suspension bridge presented in Fig: 2a are turned in vertical position. Therefore $\alpha_1 = \dots = \alpha_8 = \pi/2$. Drawing the force polygon

horizontal lines as in Fig. 2b remains unchanged. The cable force S_0 is chosen here. After this the drawing is continued on principle in the same way as presented in Fig. 2b. The hanger forces $H_i = G_i$ are here vertical. Then Equations (1) ... (8) can be used.

HANGERS ARE PERPENDICULAR TO THE CABLE

When the hangers of the bridge presented in Fig. 2a are turned around their fixing points on the beam into the position 'perpendicular to the cable', are except the direction angles β_i of the cable segments also the direction angles α_i of the hangers unknowns. The 'perpendicular to the cable' means here, that the angle between hanger and cable are equal on the both sides of hanger. Thus cable force S is constant along the cable. Instead of Fig. 2a the structure looks as presented in Fig. 4a.

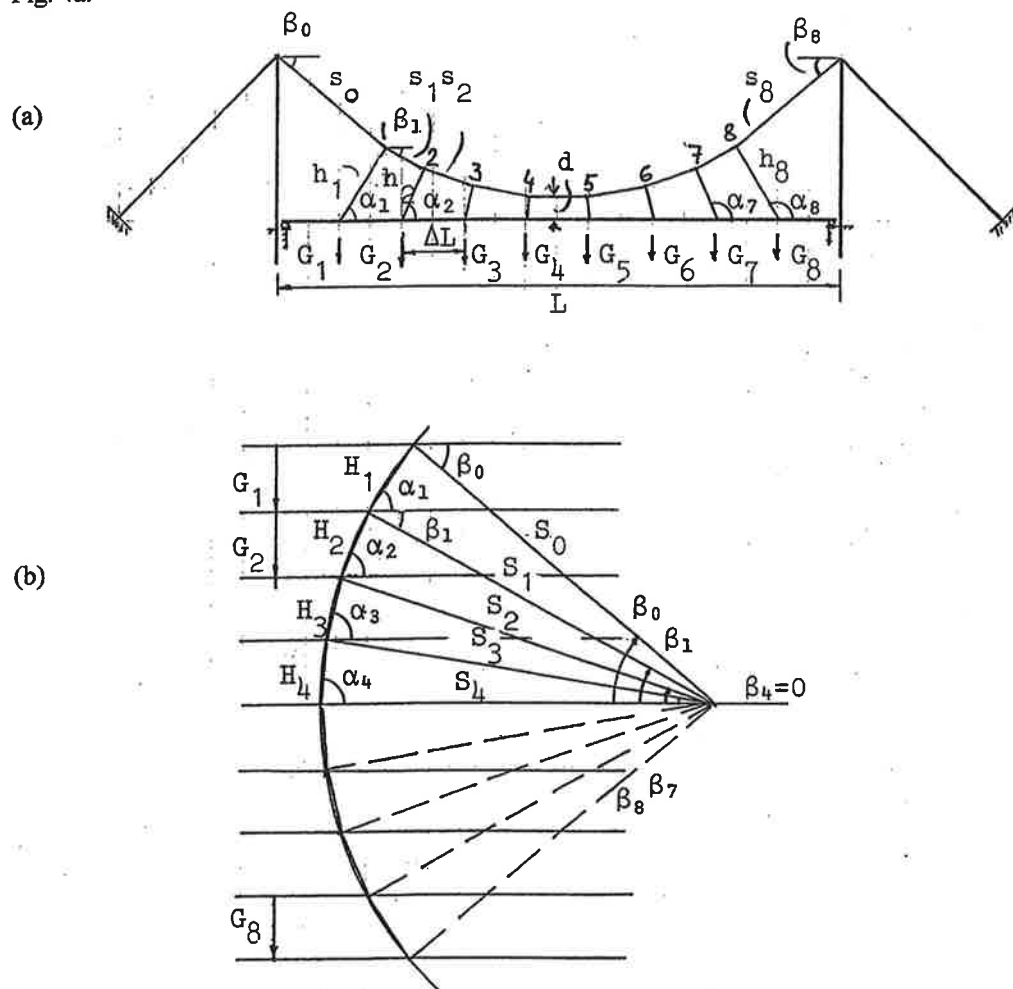


Fig. 4

Cable force $S_0 (= S_1 = \dots = S_8)$ is chosen again.

$$\beta_i = \arcsin\left(\frac{G_{i+1} + \dots + G_4}{S}\right), \quad (i = 0 \dots 3) \quad (9)$$

$$\beta_4 = 0.$$

When the sum of the angles of the triangle is π

$$\alpha_i = \frac{\pi - \beta_{i-1} - \beta_i}{2}, \quad (i = 1 \dots 4) \quad (10)$$

can be obtained. The hanger forces

$$H_i = \frac{G_i}{\sin \alpha_i}, \quad (i = 1 \dots 8). \quad (11)$$

To calculate the lengths of cable segments and hangers and their intersection points Formulas (5) ... (9) and Fig. 3 can be applied.

A determination of the initial state of a suspension bridge of this type is presented by Cichocki [3]. He made not use of funicular polygon in his consideration.

HANGERS PERPENDICULAR TO THE CABLE ARE DENSELY LOCATED

The hangers load continuously the suspension cable. The differential equation of the cable line will be derived. Using the notations presented in Fig. 5 the following derivation is presented.

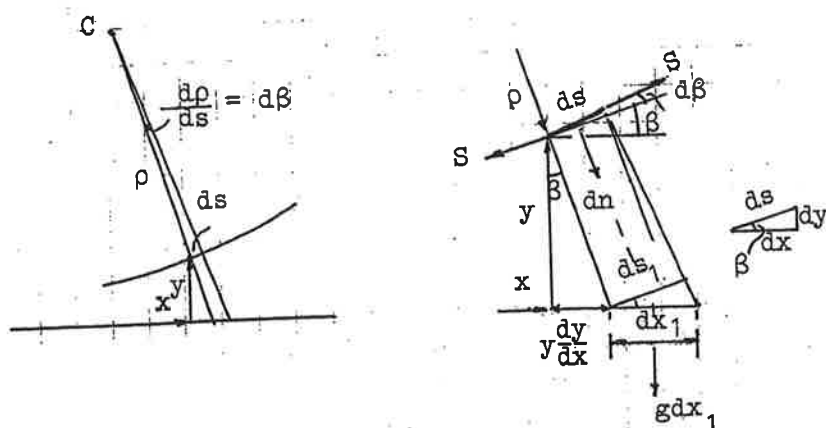


Fig. 5

$$dn = \frac{ds}{\rho} S = dx \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} S}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = g dx_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (12)$$

$$ds_1 = ds + \frac{y}{\cos \beta} \frac{ds}{\rho} = ds \left[1 + \frac{y}{\rho} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right], \quad (13)$$

$$dx_1 = \frac{ds_1}{\cos \beta} = dx \left[1 + \frac{y}{\rho} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right], \quad (14)$$

$$dn = g dx \left[1 + \frac{y \frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (15)$$

(12) and (15) $\Rightarrow$

$$g \left\{ \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + y \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = S \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (16)$$

This Equation (16) is a non-linear differential equation of the cable line. It is an equilibrium equation of cable elements in perpendicular direction to the cable line.

Another differential equation for the cable line can be obtained as follows using the notation in Fig. 6.

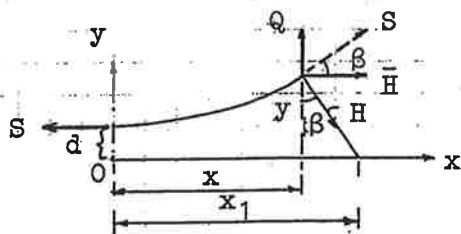


Fig. 6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x)}{\bar{H}(x)}. \quad (17)$$

$$Q(x) = g \left(x + y \frac{dy}{dx} \right),$$

$$\bar{H}(x) = S - \int_0^x g \frac{dy}{dx} dx = S - gy,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gx + gy \frac{dy}{dx}}{S - gy}. \quad (18)$$

When the differential equation (18) of the cable line can be separated and then integrated

$$S(y - d) - g(y^2 - d^2) = \frac{1}{2}gx^2 \quad (19)$$

be obtained. Then the equation of cable line

$$y = \frac{S}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2g}\right)^2 - \frac{Sd}{g} + d^2 - \frac{x^2}{2}} \quad (20)$$

be obtained. Using boundary conditions $x = L/2$, $y = y_P$ (the height of the pylon) the cable force

$$S = \frac{g\left(\frac{L^2}{8} + y_P^2 - d^2\right)}{y_P - d} \quad (21)$$

It is assumed here that the hangers are fitted on the cable from pylon to pylon and that the beam is correspondingly longer.

NUMERICAL APPLICATIONS

The following types of suspension bridges are calculated. A. Inclined hangers (looks nearly as in Fig. 2a). B. Vertical hangers. C. Hangers perpendicular to cable line (looks nearly as in Fig. 4a). D. Hangers perpendicular to the cable line are located infinitely dense

In all types A,B,C, the values $L = 90 \text{ m}$, $\Delta L = 10 \text{ m}$, $d = 0.5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ kN/m}$, $i = 0,1 \dots 8$ $I = 1 \dots 8$. First $S_0 = 1000 \text{ kN}$ is chosen in force polygon in Fig. 2b or 4b.

Type A.	i,I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Given	α_i	P	108	76	101	80	100	79	104	72	P
Given	G_i		113	100	100	100	100	100	100	113	kN
	β_i	24.39	18.94	12.54	6.49	0	6.49	12.54	18.94	24.39°	
	s_i	symmetric				9.82	10.48	8.98	14.38	8.02	m
	h_i	"					0.51	1.72	3.75	8.73	m
	S_i	"				897	885	921	924	1000	kN
	H_i	"					101.5	101.9	103.1	118.8	kN

Type B $S_0 = 1000 \text{ kN}$, $\alpha_i = 90^\circ$ ($i = 1 \dots 8$), G_i ($i = 1 \dots 8$) as previous. $H_i = G_i$

β_i	24.39	18.23	12.39	6.27	0	6.27	12.39	18.23	24.39°
s_i	symmetric				10	10.06	10.24	10.53	10.98 m
h_i	"					0.5	1.60	3.80	7.09 m
S_i	"				911	916	932	959	1000 kN

Type C $S_0 = 1000 \text{ kN} = S_i$ ($i = 1 \dots 8$). G_i ($i = 1 \dots 8$) as previous.

α_i		69.07	75.50	81.36	87.13	92.87	98.64	104.50	110.93°
β_i	24.39	17.46	11.54	5.74	0	5.74	11.54	17.46	24.39°

s_i	symmetric	9.95	9.85	9.54	9.96	13.54 m
h_i	"	0.5006	1.50	3.50	6.51	m
H_i	"	100.1	101.2	103.3	121.0	kN

Type D I present and compare it with types A,B and C in my lecture in 13.6.03

Lengths s_i , h_i calculated previously includes the elastic strains due to the own weight of the structure. Before manufacture the elastic strains shall be reduced from the strained lengths to the non-strained lengths especially when preparing the elements of large suspension bridges.

The horizontal supporting of the beam. To the beam acts horizontal loads so as the inertia forces of live mass and the horizontal effects of static vertical live loads because of inclined hangers. Further, the thermal extension (compression) for example of steel beam length 200 m and the change of temperature 30 C is 7.2 cm. A good horizontal support of the stiffening beam makes it possible for the thermal displacement of both ends, but supports the beam toward the horizontal force loads.

An application of the force method in the analysis of suspension bridge with inclined hangers (Type C), where also the stiffening beam acts in geometrically non-linear way, is presented in [4]. A numerical solving of this type suspension bridge is presented in [5].

LITERATURE

- [1] Timoshenko, S.P., Young, D.H. Theory of structures. McGraw-Hill, New York.
- [2] Tikka, M., Käytännön geodesia, mittausmenetelmät. Otapaino, Espoo 1997 (In Finnish).
- [3] Cichocki, F. Eine neue Hängebrückenform, Der Stahlbau, 20(1951)1, pp. 3-5.
- [4] Holopainen, P., Mikkola, M. Application of the principle of Stationary Complementary Work to the Analysis of Suspension Bridges. Variational Methods in Engineering, (ed. C. Brebbia and H. Tottenham). Southampton University Press, Surrey 1973.
- [5] Salmi, T. ja Holopainen, P. Vinotankaisen riippusillan numeerinen analyysi voimamenetelmällä, TTKK, Teknillinen mekaniikka, Raportti 21(1983) (In Finnish).

ON VISCOPLASTIC REGULARIZATION OF STRAIN SOFTENING SOLIDS

Kari KOLARI¹, Reijo KOUHIA², Tuomo KÄRNÄ¹

¹VTT Building and Transport
PO Box 1806, FIN-02044 VTT
e-mail: kari.kolari@vtt.fi, tuomo.karna@vtt.fi

²Helsinki University of Technology, Structural Mechanics
PO Box 2100, FIN-02015 HUT
e-mail: reijo.kouhia@hut.fi

Dedicated to our mentors in mechanics Martti Mikkola and Eero-Matti Salonen

ABSTRACT

Some consequences of using viscoplastic material models in the failure analysis of strain softening solids are examined. Especially factors affecting the localisation band width under quasi-static loading conditions are studied.

1 INTRODUCTION

Strain localisation can be observed in the mechanical behaviour and failure of various materials. The origin of localisation lies at the micro-level of the material action. At a macroscopic level a softening response is observed. Classical, i.e. local continuum models embody an implicit assumption that the deformation of a body varies in a sufficiently smooth manner. This assumption is not valid when strain localisation occurs.

Application of descending relation between stress and strain in a rate independent solid within the classical continuum description results in the loss of well-posedness of the governing initial-boundary value problem. The governing hyperbolic equations of motion ceases to be hyperbolic and became elliptic in the softening regime. Therefore, the domain is split into an elliptic part, in which the waves have imaginary wave speeds and are not able to propagate (standing waves) and into a hyperbolic part with propagating waves. As a consequence, a spurious sensitivity to discretizations is observed in numerical simulations of localisation problems. Several approaches to resolve this problem have been introduced in the literature. Perhaps the simplest one which preserves well-posedness of the governing equations is incorporation of the strain rate dependence to the constitutive model. The viscosity contribution introduces a material length scale even though the constitutive equations do not explicitly contain a parameter with the dimension of length. Other strategies like using micropolar continuum (or more generally microcontinuum) or higher-order gradient continuum models result in much more complicated equations and their numerical treatment is also more involved.

2 VISCOPLASTIC MATERIAL MODELS

Two major categories in formulating rate-dependent or viscoplastic material models exist: the overstress format and the consistency approach. Today, two mostly used overstress models are the Perzyna and the Duvaut-Lions models. In the Perzyna model [1], the direction of viscoplastic flow is determined by the gradient of a plastic potential function calculated at the current stress point. In the Duvaut-Lions [2] model the viscoplastic flow is determined by the difference between the current stress point and the closest point projection onto a static yield surface, also called as the back-bone model. For Perzyna viscoplastic model, use of the postulate of maximum dissipation is rather involved. In the consistency models, a dynamic rate-dependent yield surface is defined which allows the use of the postulate of maximum dissipation in a straightforward manner, as shown by Ristinmaa and Ottosen [3].

Sluys has analysed the properties of several regularizing techniques for strain softening solids in his dissertation [4]. He has concluded that the viscoplastic models regularize the governing equations of motion at deformation states in fracture zones (mode-I localisation) and in shear bands (mode-II localisation). Wave propagation in viscoplastic solid is dispersive, which is necessary to capture localisation phenomena.

In the Perzyna model the viscoplastic strain rate is defined by

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{1}{\eta} \phi(f) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1)$$

where η is the viscosity parameter and ϕ is some function of the yield function f and g is the plastic potential. Common choices for the overstress function ϕ are the power laws

$$\phi(f) = \left\langle \frac{f}{\sigma_0} \right\rangle^p \quad \text{or} \quad \phi(f) = \left\langle \frac{f}{\bar{\sigma}} \right\rangle^p, \quad (2)$$

in which p is a material parameter and $\bar{\sigma}, \sigma_0$ are the current yield stress and the initial value of it, respectively. The notation $\langle y \rangle$ refers to $yH(y)$ where H is the Heaviside unit step function.

3 ANALYSIS OF LOCALISATION – ONE-DIMENSIONAL PROBLEM

Needleman [5] studied the material rate dependency in localisation problems. He concluded that the imperfection or inhomogeneity completely determines the localisation length scale in quasi-static problems and in dynamic problems it is a characteristic length of propagation of elastic waves. As it will be seen in the following sections, this conclusion holds on only partially for quasi-static cases.

Wang investigated the width of the localisation zone in viscoplastic von Mises solid under dynamic loading [6]. In the absence of imperfections the key parameters which determine the width of the localisation band are the viscosity η and the softening modulus h . However, in imperfect cases the imperfection size l_{imp} dominates the width of the localisation band when the value l_{imp} is smaller than the material length scale l_{mat} . On the other hand the influence of the imperfection disappears when the imperfection size is larger than the material length scale [6], thus

$$l_{loc} = \min(l_{mat}, l_{imp}). \quad (3)$$

Wang investigated the localisation bandwidth in the case of pure shearing under dynamic loading. Approximation to the width of the localisation zone is (linearized from eq. (6.42)

in Ref. [6])

$$l_{\text{mat}} \approx \frac{c\eta\sigma_0}{\frac{3}{4}G - h}, \quad (4)$$

where G is the shear modulus and $c = \sqrt{G/\rho}$ is the elastic shear wave velocity.

From the numerical experiments it can be concluded, that the average strain rate has an influence on the localisation length scale in quasi-static cases. To investigate this phenomenon a simple tensile bar of length L under quasi static loading is considered. The other end of the bar is clamped and the axial displacement is prescribed at the other end with a constant rate. Since there are no body forces and the modulus of elasticity is assumed to be constant, the equilibrium equation is simply

$$\sigma_{,x} = E(\epsilon_{,x} - \epsilon_{,x}^{\text{vp}}) = 0. \quad (5)$$

Taking the kinematical equation into account, the equilibrium equation can be written as

$$u_{,xx} = \epsilon_{,x}^{\text{vp}}, \quad (6)$$

where u is the axial displacement. The viscoplastic strain can be solved from the rate equation

$$\dot{\epsilon}^{\text{vp}} = \frac{1}{\eta} \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sigma_0} \quad \text{where} \quad \bar{\sigma} = \sigma_0 + h\epsilon^{\text{vp}}, \quad (7)$$

and h is the hardening/softening modulus. It is assumed for simplicity, that the exponent p has the value $p = 1$. The initial yield stress σ_0 is a function of the position x

$$\sigma_0(x) = \bar{\sigma}_0(1 - \theta(x)), \quad (8)$$

where the perturbation $\theta(x)$ is small, i.e. $\theta(x) \ll 1$. Substituting the constitutive equation $\sigma = E(\epsilon - \epsilon^{\text{vp}})$ into (7) gives a first order ordinary differential equation for the viscoplastic strain

$$\dot{\epsilon}^{\text{vp}} + \frac{E+h}{\eta\sigma_0}\epsilon^{\text{vp}} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{E}{\sigma_0}\epsilon - 1 \right). \quad (9)$$

Solution of this equation can be written as

$$\epsilon^{\text{vp}}(x, t) = e^{-a(x)t} \epsilon^{\text{vp}}(x, t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(a(x)t - a(x)s)} \frac{1}{\eta} \left(\frac{E}{\sigma_0(x)} \epsilon(x, s) - 1 \right) ds, \quad (10)$$

where

$$a(x) = \frac{E+h}{\eta\sigma_0(x)}. \quad (11)$$

Substituting this expression into the equilibrium equation (6) gives an integro-differential equation

$$u_{,xx}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-a(x)t} \epsilon^{\text{vp}}(x, t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(a(x)t - a(x)s)} \frac{1}{\eta} \left(\frac{E}{\sigma_0(x)} u_{,x}(x, s) - 1 \right) ds \right] \quad (12)$$

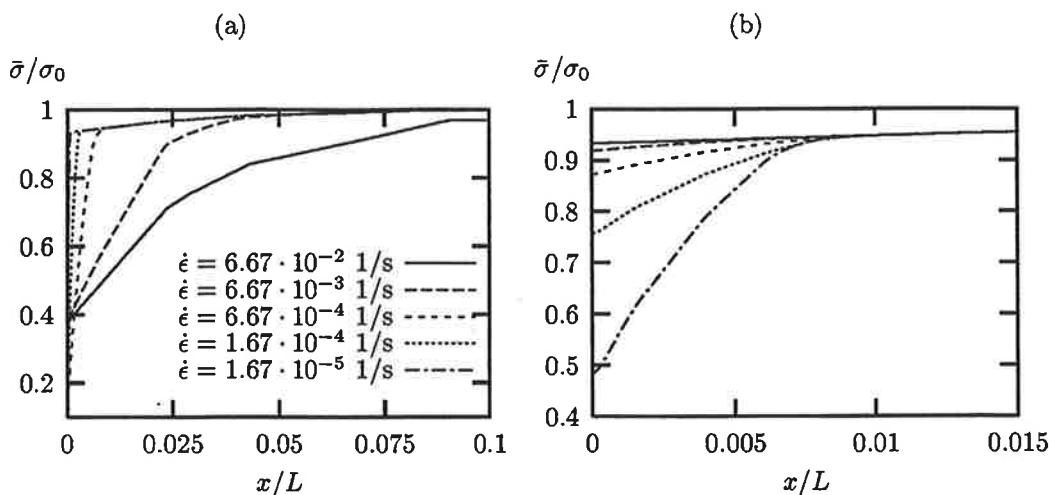


Figure 1: One-dimensional problem; current yield stress as a function of position: (a) band development with different strain rates, (b) evaluation of a localisation band, average strain rate $\dot{\epsilon} = 6.67 \cdot 10^{-4}$ 1/s.

which has to be solved in the viscoplastic domain. In the elastic unloading part the right hand side of equation (12) vanishes. The boundary conditions are

$$u(0, t) = 0 \quad \text{and} \quad u(L, t) = \dot{u}_L t, \quad (13)$$

where $\dot{u}_L$ is the prescribed constant velocity of the right end of the bar.

From equation (12) it seems more tractable to assume the initial yield stress to be constant over the bar and to consider the imperfection in the form of initial viscoplastic strain. Wang [6] used constant reduction of the yield strength in the imperfect part of the domain in analysing the width of the localisation zone in dynamic case. Numerical quasi-static test cases reveal that in the case of a constant reduction of the yield stress the size of the imperfect domain totally determines the localisation zone in the one-dimensional case. However, this can be considered to be in accordance to the results of Wang [6], see equation (3), since the material length scale in the quasi-static case is infinite.

However, if the reduction of the yield stress is not constant, the width of the localisation band depends on the loading rate, see Fig. 1a, where the current yield stress $\bar{\sigma}$ is plotted along the imperfect part of the bar. The imperfection has been an initial viscoplastic strain near the clamped end of the bar reaching to the point $x = 9L/100$. The initial viscoplastic strain distribution is obtained from an *a priori* analysis in which the bar is loaded with a linearly varying distributed force. Uniform mesh with 4000 linear elements is used in the computations.

In Fig. 2a the localisation band width is shown as a function of average strain rate as observed in the numerical computations. Dependency on the strain rate is almost linear, except near origin at very low strain rates. It seems that the loading rate in quasi-static problems functions as a stress wave speed in the dynamic case, see equation 3.

Also the effect of the stress exponent p on the localisation band width has been studied and the result is shown in Fig. 2b for values $p \in (1, 2.25)$. For larger p -values the viscoplastic strain spread out the imperfect zone. However, in these cases the rate of the viscoplastic

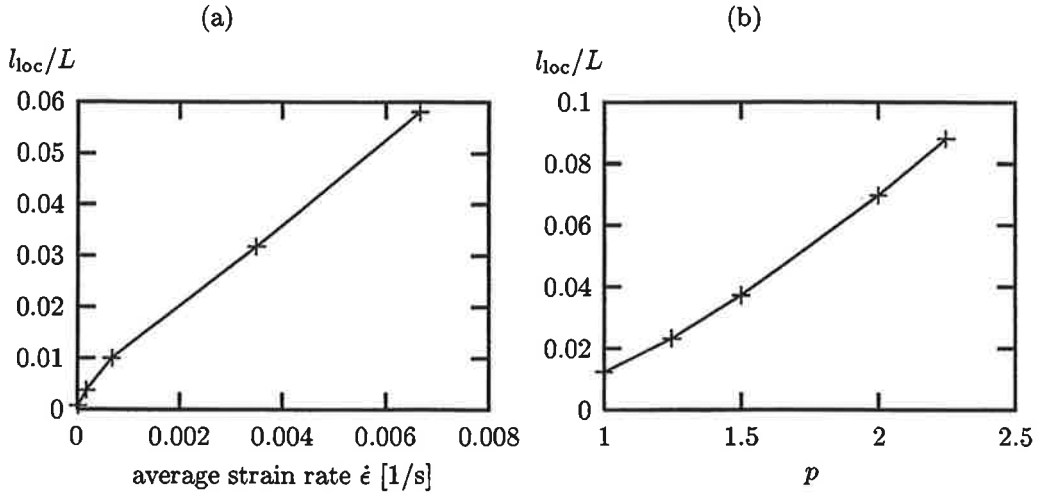


Figure 2: (a) Width of the localisation zone as a function of average strain rate and (b) as a function of the exponent p (loading rate $\dot{\epsilon} = 6.67 \cdot 10^{-4}$).

strain is larger in the imperfect area of the bar. The imperfection has been a linear reduction (10 % reduction at the clamped end) of the initial yield stress in the part $x \in (0, 0.09L)$.

4 ALGORITHMIC TREATMENT

For rate-dependent solids implicit time integrators are preferable. The critical time step of explicit methods for the Perzyna type viscoplastic model is of order $\Delta t_{cr} \sim \eta \sigma_0 / (pE)$, which results in a value of order 10^{-3} s for the material parameters used in the example in section 5. Especially for quasi-static cases it is intolerably small. In this study the backward Euler scheme is used to integrate the viscoplastic constitutive models.

Incremental relation for stress and strain can be written as

$$\Delta \sigma = C^{el}(\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^{vp}) \quad (14)$$

where the viscoplastic strain increment is

$$\Delta \epsilon^{vp} = \Delta \lambda \mathbf{m}, \quad \text{where} \quad \mathbf{m} = \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad \text{and} \quad \Delta \lambda = \frac{\Delta t}{\eta} \phi(f). \quad (15)$$

The algorithmically consistent tangent matrix, which is needed in the global equilibrium equations, can be derived from the iterative counterpart of (15) and the iterative change of the viscoplastic strain is

$$\delta \epsilon^{vp} = \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma} \delta \sigma + (\Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \lambda} + \mathbf{m}) \delta \lambda \quad (16)$$

Substituting expression (16) into the iterative counterpart of equation (14) results in

$$\delta \sigma = \mathbf{H} \delta \epsilon - \mathbf{H} \left(\mathbf{m} + \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \lambda} \right) \delta \lambda, \quad \text{where} \quad \mathbf{H} = \left((C^{el})^{-1} + \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma} \right)^{-1} \quad (17)$$

The change in the viscoplastic multiplier can be solved from a scalar non-linear equation

$$r(\sigma, \lambda) = \Delta\lambda - \frac{\Delta t}{\eta} \phi(\sigma, \lambda) = 0. \quad (18)$$

By using the Newton's method the iterative change $\delta\lambda$ can be solved, giving

$$\delta\lambda = -\frac{r}{a} + \frac{\Delta t}{a\eta} \mathbf{n}^T \mathbf{H} \delta\epsilon, \quad (19)$$

where

$$a = 1 + \frac{\Delta t}{\eta} \left[\mathbf{n}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{m} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right] \quad \text{and} \quad \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \quad (20)$$

Substituting the iterative change of the viscoplastic multiplier (19) back to the equation (17) gives the desired Jacobian matrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{H} - \frac{\Delta t}{a\eta} \mathbf{H} \left(\mathbf{m} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \lambda} \right) \mathbf{n}^T \mathbf{H}. \quad (21)$$

This algorithmic tangent matrix is necessary for the Newton's method to obtain asymptotically quadratic convergence of the global equilibrium equations.

The local nonlinear problem (18) is also solved by the Newton's method. Increasing the power p in the constitutive model, makes the local problem more difficult and more iterations are needed in the Newton process to reach the asymptotic convergence domain.

5 NUMERICAL EXAMPLE

A biaxial compressed specimen is analysed where strain localisation into a shear band takes place at the onset of softening. The vertical displacement at the upper edge is prescribed at constant rate and constrained to remain horizontal. Associative viscoplastic flow is assumed with von Mises "yield function" f . The constitutive parameters have the following values: elastic shear modulus $G = 4000$ MPa, Poisson's ratio $\nu = 0.49$, initial yield stress $\sigma_0 = 100$ MPa, the linear softening modulus $h = -G/10$, the viscosity $\eta = 0.1$ s, the exponent $p = 1$. The width and height of the specimen are 60 mm and 240 mm, respectively. In Ref. [7] the same specimen is analysed as a rate independent solid by using both classical and gradient continuum formulations. To trigger the unstable localisation an imperfection is introduced with a 10 % reduction of the yield stress in one element at the bottom left-hand corner of the specimen. Four noded bilinear elements with mean dilatation formulation [8] are used in the computations.

In Fig. 3 deformed shapes of the specimen are shown from computations with average strain rate $\dot{\epsilon} = 10^{-2}$ s (Fig. 3a) and 10^{-3} s (Fig. 3b). It is clearly seen that the localisation band is wider for the higher strain rate case. Also the width of the localisation band near the imperfection is dominated by the size of the imperfect domain, but gradually widens when moving away from the imperfection. The behaviour is thus similar to the dynamic case [6].

Deformed states shown in Fig. 3 correspond to the computations where uniform meshes are used. However, there is no visible difference in the load-deflection curves if highly irregular meshes (internal nodal positions disturbed randomly) are used.

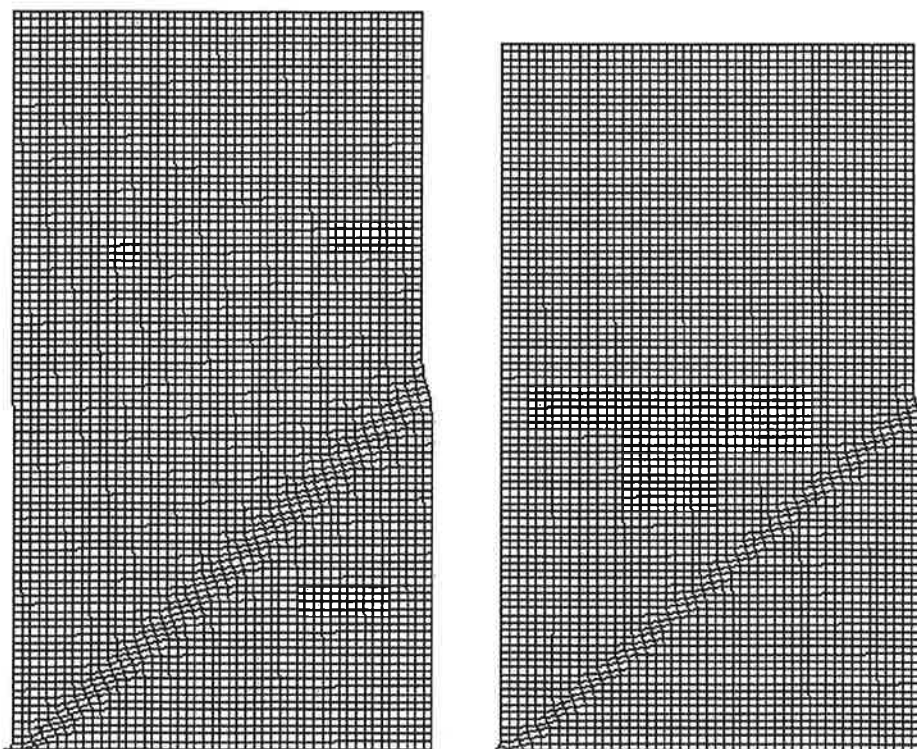


Figure 3: Deformed states: (a) average strain rate $\dot{\epsilon} = 10^{-2}$ (displacements magnified 5 times) (b) $\dot{\epsilon} = 10^{-3}$ (magnification 7 times).

6 CONCLUDING REMARKS

Localisation of deformation of viscoplastic solid under quasi-static loading conditions has been studied. Size of the imperfection completely determines the localisation band width if the imperfection is distributed uniformly. However, if the imperfection is non-uniform, the width of the localisation zone is almost linearly dependent on the loading rate. Also the localisation band width grows linearly with the stress exponent p in the interval $p \in (1, 2.25)$. Naturally, at vanishing loading rate the localisation takes place at a point/line or plane depending on the dimension of the problem.

ACKNOWLEDGEMENTS

This research has been supported in part by Tekes - the National Technology Agency of Finland [project ARKI, Contract No 40857/99] and in part by the European FP5 EESD project STRICE [Contract No EVG1-CT-2000-00024]

REFERENCES

- [1] P. Perzyna. *Fundamental problems in viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **9**, 243–377 (1966).
- [2] G. Duvaut and L.J. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, 1972.
- [3] M. Ristinmaa and N.S. Ottosen. *Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity*, Int. J. Solids Structures, **37**, 4601–4622 (2000).
- [4] L.J. Sluys. *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*, PhD thesis, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, 1992.
- [5] A. Needleman. *Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **67**, 69–85 (1988).
- [6] W. Wang. *Stationary and propagative instabilities in metals – a computational point of view*, PhD thesis, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, 1997.
- [7] J. Pamin. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*, PhD thesis, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, 1994.
- [8] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1987.

HIEKAN MEKAANINEN KÄYTTÄYTYMINEN KOLMIAKSIAALIKOKEESSA

O. KORHONEN
Helsingin kaupunki

K.-H. KORHONEN & M. LOJANDER
Teknillinen korkeakoulu. Rakennus ja ympäristötekniikan osasto.

TIIVISTELMÄ

Hiekan jännitys- ja muodonmuutoskäyttäytymistä perinteellisen kolmiaksiaalilaitteen sellissä vallitsevassa tilassa simuloidaan mitattujen jännityskomponenttien ja niitä vastaavien muodonmuutoskomponenttien relaatioiden perusteella empiirisillä muodonmuutosyhtälöillä, jotka on kehitetty, niin että ne muodostavat populaatiomekaniikassa yleisesti sovelletun lineaarisen systeemin. Muodonmuutosyhtälöistä kehitetään plastisuusteorian mukainen jännitys-dilataatioyhtälö ja plastisen potentiaalin yhtälö.

Hiekan kolmiakselikokeet on tehty Teknillisen Korkeakoulun pohjarakennuslaboratoriossa, maamekaniikan ja pohjarakennuksen pääaineopiskelijoiden toimesta laboratorion henkilökunnan valvonnassa.

1. TUTKIMUKSET JA SYMBOLIT

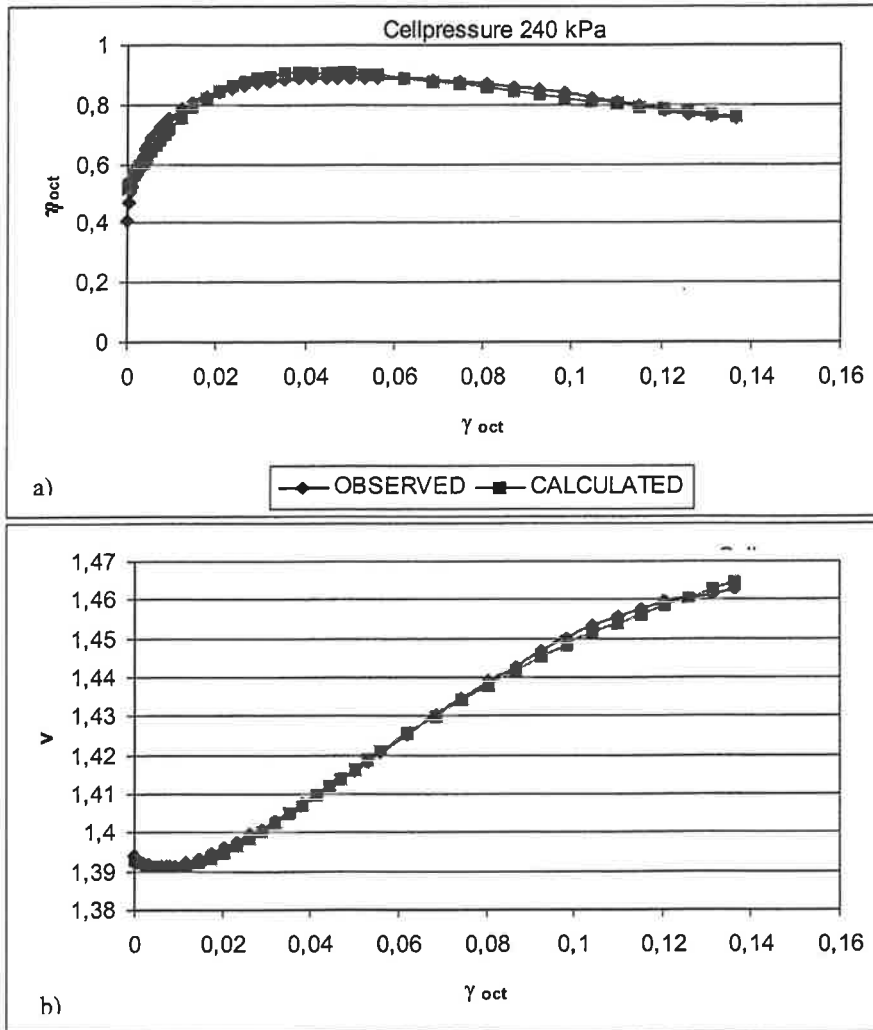
Teknillisen Korkeakoulun pohjarakennuslaboratoriossa on 1980-luvulta alkaen tutkittu koheesio- ja kitkamaalajien sekä murskeen ja kevytsoran muodonmuutos- ja lujuusomaisuuksia em. materiaalien mekaanista käyttäytymistä simuloivien matemaattisten mallien kehittämistä varten. Tässä yhteydessä käsitellään tavallisella kolmiakselilaitteella tutkitun Ahlbäckin hiekan koetuloksia [Kantee 1983].

Muodonmuutosyhtälöiden kehittämistä varten tehtyihin kokeisiin valittuja maalajeja on tutkittu lähinnä ns. tavallisella kolmiakselilaitteella. Ahlbäckin hiekka tutkittiin kuitenkin myös todellisella kolmiakselilaitteella [Laaksonen 1983, Milen 1987]. Tavallisella kolmiakselilaitteella tutkittujen näytteiden halkaisija oli 100 mm ja korkeus 100 tai 200 mm. Tässä yhteydessä käsitellään Kanteen [1983] tekemien kokeiden tulokset, joissa näytteen korkeus oli 200 mm ja halkaisija 100 mm. Muodonmuutosnopeus suurimman pääjännityksen suunnassa oli; $de/dt = 1,5\%/h$.

Ahlbäckin hiekalla tehtyjen kokeiden tulokset on esitetty oktaedrijännitysten ja vastaavien muodonmuutosten avulla, koska tuloksia on verrattu todellisella kolmiakselilaitteella tehtyjen kokeiden tuloksiin [Milen 1987]. Koetuloksia ovat Laitinen, Laaksonen ja Milen [1980, 1983, 1988] approksimoineet useilla empiirisillä yhtälöillä. Koetulokset käsiteltiin uudelleen vaikka Laitisen, Laaksonen ja Milenin soveltamat empiiriset muodonmuutosyhtälöt [Korhonen 1982] approksimoivat hyvin koetuloksia. Koetulosten uudelleen käsittelyllä pyrittiin selvittämään voidaanko mitattujen jännitysten ja muodonmuutosten relaatioita approksimoida jollakin yleisesti tunnetulla "kokonaisuuden" muodostamalla matemaattisella mallilla. Laskelmien perusteella todettiin, että leikkausmuodonmuutos ja vastaava tilavuuden muutos sekä leikkausmuodonmuutos

ja jännityssuhde τ_{oct}/σ_{oct} kuuluvat aina edellä tarkoitettuun ”kokonaisuuteen”. Kolmannessa muodonmuutosrelaatiossa; $v-v$, esiintyi poikkeamia laskettujen ja havaittujen arvojen kesken.

Ahlbäckin hiekan kolmiakselikokeiden tulokset on esitetty kuvissa 1 – 2. Kuvissa on esitetty myös koetuloksia approksimoivat empiiriset muodonmuutosyhtälöt. Koska Ahlbäckin hiekka on tutkittu perinteisellä kolmiakselilaitteella on teksti kirjoitettu kriittisen tilan mallin [CSM; Schofield, Wroth 1968] jännitys-muodonmuutosinvarianteilla. Mallin jännitys- ja muodonmuutosinvariantit voidaan ilmaista pääjännitysten ja vastaavien muodon muutosten sekä oktaedristen invarianttien avulla yhtälöillä (1) ja (2) [Atkinson, Bransby 1978].



Kuva 1. Ahlbäckin hiekka. Avoin kolmiakselikoe. CADC, $e_0 = 0,43$.

a) $\gamma_{oct} - \eta_{oct}$

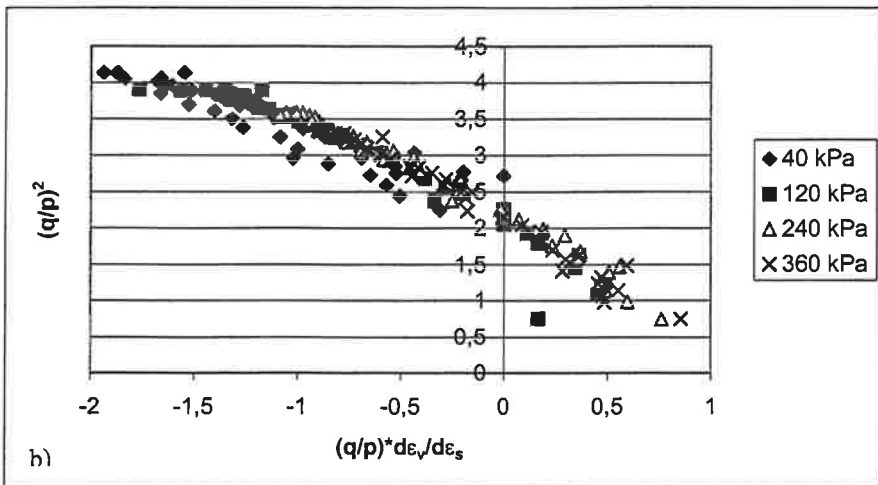
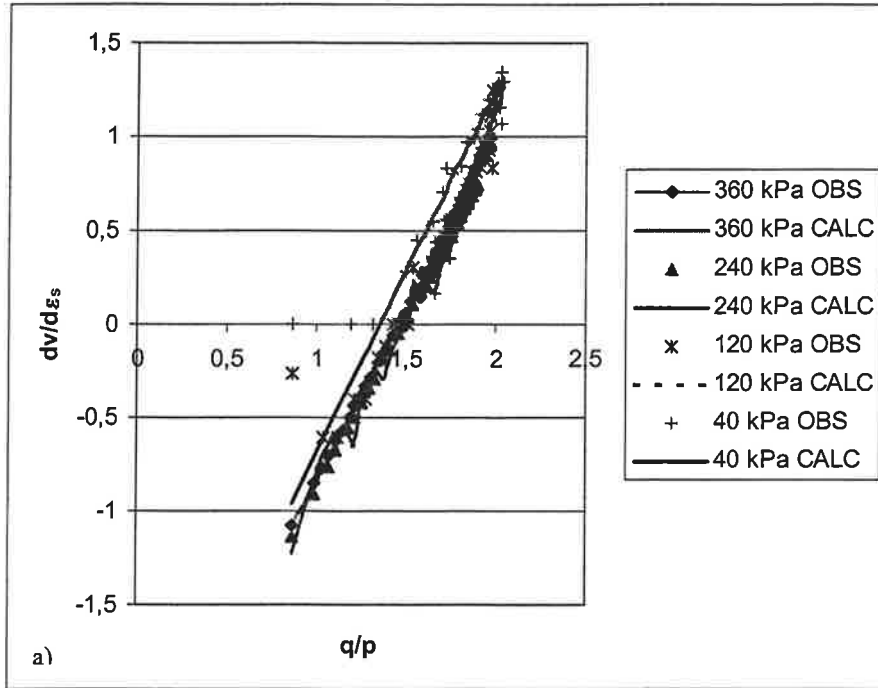
b) $\gamma_{oct} - v$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \quad (1a)$$

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{oct} \quad (1b)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 3\varepsilon_{oct} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{oct} \quad (2b)$$



Kuva 2 Ahlbäckin hiekka.

a) $q/p - dv/d\varepsilon_s$

b) $(q/p) * d\varepsilon_v/d\varepsilon_s - (q/p)^2$

2. MALLIN RAKENNE

Maan mekaanisella mallilla simuloidaan kuormitettuun maakerrokseen; esim. maakerrosten varaan perustetun rakenteen alla olevaan kantavaan rakennuspohjaan kohdistuvien jännitysten ja niiden aiheuttamien muodon muutosten, siirtymien ja painumien välisiä elastisia ja plastisia relaatioita. Koska malleissa on aina ko. maatyypeille soveltuva murtokriteeri voidaan laskelmilla selvittää myös paikallisten ja totaalisten murtumien/sortumien kehittymismahdollisuus. Maan mekaanisia malleja sovelletaan lähinnä geoteknisesti vaikeissa olosuhteissa rakennettavien kantavien maa-, vesi-, ja pohjarakenteiden geotekniseen mitoitukseen. Tyypillisiä mallien avulla suunniteltavia rakenteita ovat maapadot, pehmeikölle rakennettavat liikennepenkereet ja ahtaissa, kaupunkimaisissa olosuhteissa, rakennettavat syvät kaivannot, joiden tukiseinien liikkuminen saattaa aiheuttaa vaurioita läheisyydessä oleville rakenteille yms. Hyvin kantavalle rakennuspohjalle perustettavien asuin- ja teollisuusrakennusten pohjarakenteiden geotekninen mitoitus voidaan yleensä tehdä klassiseen maamekaniikkaan perustuvilla menetelmillä. Maan mekaaniset mallit eivät ole ”joka paikan” suunnittelumenetelmiä, vaan järeitä ja kalliitakin menetelmiä, jotka tuottavat tuloksia kantavien maakerrosten mekaanisen käyttäytymisen sekä rakennuspohjan ja sen varaan tehtävien rakenteiden staattisen vuorovaikutuksen mekanismeja laskelmilla simuloimaan kykenevän suunnittelijan käsissä.

Maan mekaanisella mallilla lasketaan kantaviin maakerrokseen kehittyviä elastisia ja plastisia muodonmuutoksia. Elastiset muodonmuutokset ovat määrääviä mm. tien rakennekerrosten ja päällysteen mitoituksessa. Pehmeikölle rakennetun tiepenkereen määräävät plastiset painumat kehittyvät sitä vastoin penkereen alla olevissa koheesiomaakerroksissa. Elastiset muodonmuutokset ovat tällöin yleensä merkityksettömän pieniä. Tässä yhteydessä käsitellään hiekan plastisten muodonmuutosten laskemiseen sovellettavan mallin ”rakenteeseen” kuuluvia funktioita, jotka esiintyvät mallin jäykkyysmatriisissa ja muodonmuutosinkrementtien matriisissa. Matriisista (3a) käy ilmi kuinka plastiset muodonmuutosinkrementit liittyvät myötöfunktion f , potentiaaliyhtälön g ja myötölujenemisparametrin h avulla toisiinsa ja jännitysinkrementteihin. Wood [2002] on esittänyt kriittisen tilan mallin [CSM, Schofield, Wroth, 1968] jäykkyysmatriisiin D^p mallin formalismilla. Jäykkyysmatriisi D^p on muodostunut vaikeasti tunnistettavaksi lähinnä siksi, että sen sisältö on perinteellisesti esitetty käänteismuodossa ns. muodonmuutosmatriisina. Tässä yhteydessä ei ole tarvetta poiketa tästä perinteellisestä muodosta (3).

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_v^p \\ \delta \varepsilon_s^p \end{bmatrix} = \frac{-1}{H} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} \\ \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$H = \frac{\partial f}{\partial p_o} \left[\frac{\partial p_o}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial p_o}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial g}{\partial q} \right] \quad (3b)$$

ε_v^p plastinen tilavuuden muutos

ε_s^p leikkausmuodon muutos

δ inkrementti

$q = \sigma_1' - \sigma_3'$ jännitysdeviaattori

$p' = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3')$ hydrostaattinen jännitys, CSM:n symboli

f myötöfunktio

g plastisen potentiaalin yhtälö

H plastinen moduuli

h = 1/H myötölujenemisparametri

p₀ myötöpinnan sijainnin määräävä muuttuja

Yhtälössä (3) myötöfunktio f ja potentiaaliyhtälö g on määritetty jännityskomponenttien p ja q avulla:

$$f = f(q, p, p_0) \quad (4a)$$

$$g = g(q, p, \xi) \quad (4b)$$

ξ potentiaaliyhtälön sijainnin määräävä muuttuja

Maan mekaanisen mallin kehittäminen funktioiden f, g, ja H etsimistä, testaamista ja täydentämistä lähinnä muodonmuutosyhtälöiden perusteella: Tärkeimmät muodonmuutosyhtälöt ovat: $q = q(\varepsilon_s)$; $\eta = q/p = \eta(\varepsilon_s)$ ja $\varepsilon_v = \varepsilon_v(\varepsilon_s)$. Myötöfunktio voidaan määrittää perustutkimuksen luonteisissa selvityksissä tarkoitusta varten tehtävillä erityiskokeilla. Potentiaaliyhtälö määritetään tavallisesti normaalisuussäännön (5a) avulla integroimalla jännitysdilataatioyhtälö (5b).

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = - \frac{dq}{dp} \quad (5a)$$

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = d(\eta); \text{ tai } d = d(\eta, \psi) \quad (5b)$$

d on yleensä empiirinen yhtälö, ψ on tilaparametri. Myötöfunktio f ja potentiaaliyhtälö g voidaan esittää myös muodonmuutoskomponenttien ε_v^p ja ε_s^p avulla. [Nemat – Nasser & al, 1980].

$$f = q - F(p, \varepsilon_v, \varepsilon_s) \quad (6a)$$

$$g = q + G(p, \varepsilon_v, \varepsilon_s) \quad (6b)$$

Tässä yhteydessä yhtälöä (6a) on sovellettu muodossa (7a), koska myödon aikana $f = 0$ ja $\dot{f} = 0$ ja koska yhtälö (7b) on aina olemassa. N_f ja N_g ovat operaattoreita.

$$q = pN_f(\varepsilon_v, \varepsilon_s) \quad (7a)$$

Yhtälön (7a) muuttujilla on yleensä selkeä relaatio (7b).

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_v^p(\varepsilon_s^p) \quad (7b)$$

Yhtälöä (6b) on vastaavasti sovellettu muodossa (7c).

$$q = -pN_g(\varepsilon_v, \varepsilon_s) \quad (7c)$$

Yhtälöt (6) ja (7) ovat muodonmuutosyhtälöitä, joita sovelletaan mm. mallin maaparametrien määrittämiseen. Yhtälöiden (6) ja (7) funktionaalinen muoto riippuu kokeessa käytetystä jännityspolusta. Yhtälö (6) soveltuu tämän vuoksi parhaiten sellaisen mallin kehittelyyn, jossa on

kaksi osaa; deviatorinen osa ($\dot{p} = 0$) osa ja hydrostaattinen osa ($q \neq 0$). Vermeer [1980], Frydman [1976] ja Laaksonen [1988] ovat kehittäneet em. kaksiosaisen hiekan mallin (A double hardening model for sand).

Yhtälön (6) avulla voidaan kehittää plastisen moduulin yhtälö (9) deviatorista myötöä varten [Nemat – Nasser et al 1980, Ohmaki 1979, Korhonen 2000]: Plastisen tilavuuden muutoksen hydrostaattiset inkrementit voidaan laskea ko. muodonmuutosyhtälöllä:

$$H_d = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_s} \quad (9)$$

Yhtälöstä (9) todetaan, että leikkausvastus muodostuu kahdesta komponentista; dilataatiosta ja kitkasta. Leikkausvastuksen muodostumistapa on ollut tärkein syy siihen, että muodonmuutosyhtälöt on kehitetty lineaaristen systeemien konseptilla, joka simuloi kahta samanaikaisesti tapahtuvaa prosessia.

Yhtälö (9) näyttää soveltuvan plastisen moduulin määrittämiseen myös silloin kun kolmiakselikokeen leikkausvaihe tehdään perinteellisenä avoimena kokeena, jossa jännityspolun kaltevuus on $\dot{q}/\dot{p} = 3/1$. On ilmeistä, että yhtälö (9) on yksinkertaisin mahdollinen plastisen moduulin muoto, josta käy selvästi ilmi myös leikkausvastuksien komponentit.

3. MUODONMUUTOSYHTÄLÖT

Muodonmuutosyhtälöillä esitetään mekaanisessa mallissa maakerrokseen/maanäytteesen kohdistuvien jännitysten ja niiden aiheuttamien muodonmuutosten välisiä relaatioita. Muodonmuutosyhtälöt olisi kehitettävä muodonmuutosprosessia simuloivan mekanismin perusteella. Hiekkakerros/näyte muodostuu aina vähintään kahdesta populaatiosta; maarakeista ja niiden välissä olevista huokosista. Plastisia muodonmuutoksia simuloivissa malleissa rakeet otaksutaan jäykiksi kappaleiksi joiden muoto ei muutu prosessin aikana. Tässä yhteydessä huokostilassa oletetaan olevan vain ilmaa. Huokosvedenpaine ja kapillaarijännitykset oletetaan nolliksi. Jännitysten johdosta maakerrokseen kehittyvä muodonmuutosvastus kehittyy kuivassa maakerroksessa hiekan rakeiden välisestä kitkasta ja huokostilan tilavuuden muutosten aiheuttamasta dilataatiovastuksesta, jonka suuruuden mittana maamekaniikassa pidetään tilavuudenmuutoksen inkrementin $\delta\varepsilon_v$ ja samanaikaisesti kehittyvän leikkausmuodonmuutoksen inkrementin $\delta\varepsilon_s$ suhdetta d , jota sanotaan dilataatiokulmaksi.

$$d = \frac{\delta\varepsilon_v^p}{\delta\varepsilon_s^p} = d(\eta, \psi) \quad (10, 5b)$$

Yhtälöstä (9) todetaan, että termi $\partial F/\partial \varepsilon_s$ edustaa kitkavastusta. Hooken lakia noudattavissa materiaaleissa leikkausvastusta voidaan pitää materiaalivakiona, joka ilmaistaan leikkausmoduulilla. Maan plastisten muodonmuutosten yhteydessä kehittyvän vastuksen ilmaisemiseen leikkausmoduuli ei sovellu, koska vastus riippuu lähinnä maakerroksen tiiviyydestä ja lisäksi leikkausjännityksen ja hydrostaattisen jännityksen suhteesta $\eta = q/p$. Maakerrokseen muodonmuutosten yhteydessä kehittyvä leikkausvastus ilmaistaan yksinkertaisimmin plastisella moduulilla H_d yhtälön (9) mukaisesti.

Jännitysten (q, p) sekä ominaistilavuuden ja leikkausmuodonmuutosten väliset relaatiot johdetaan tässä yhteydessä lineaarisen systeemin muodostavasta yhtälöryhmästä (11). Koska ominaistilavuus v ilmaisee myös maakerroksen tiiviyyden soveltuu sen inkrementti $\delta v = dv^p = \dot{v}^p$ myös dilataatiovastuksen ilmaisemiseen. Yhtälöryhmään (11) dilataatioyhtälö on muokattu Gajon ja Woodin [1999] esittämästä yhtälöstä (10a):

$$d = \frac{\delta \varepsilon_v^p}{\delta \varepsilon_s^p} = \frac{d \varepsilon_v^p}{d \varepsilon_s^p} = A[M(1 + k_d \psi) - \eta] \quad (10a)$$

A	on dilataatioyhtälön korjauskerroin, $A \approx 1,0$
k_d	Maaparametri; tässä yhteydessä. oletetaan $k_d = 1$
v_c	ominaistilavuus kriittisessä tilassa
$\psi = (v - v_c)$	tilaparametri

Yhtälön (10a) mukaan plastisen tilavuuden muutoksen vastus: eli dilataatiokulma $d \varepsilon_v^p / d \varepsilon_s^p = d$ riippuu kahdesta muuttujasta: $\eta = q/p$ ja $\psi = (v - v_c)$. Ominastilavuuden muutoksen ja jännityssuhteen η muodostama lineaarinen systeemi kirjoitetaan muotoon (10b). Etumerkit määritetään tapauskohtaisesti "common-sense" periaatteella.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{d \varepsilon_s} &= -a(v - v_c) + b(M - \eta) \\ \frac{d\eta}{d \varepsilon_s} &= d(M - \eta) + c(v - v_c) \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

Lyhenteet: $\psi = \pm(v - v_c)$; $\bar{\eta} = (M - \eta)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{d \varepsilon_s} &= -a\psi + b\bar{\eta} \\ \frac{d\bar{\eta}}{d \varepsilon_s} &= -c\psi + d\bar{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (10c)$$

Yhtälöstä todetaan, että "toimivat" muuttujat ovat ψ ja $\bar{\eta}$. Yhtälöryhmän (10) ratkaisu on manipuloitu muotoon (11). Tilaparametrin ψ maksimiarvo on $\psi_{\max} = \Delta v_c = (v_0 - v_c)$. Muodonmuutosyhtälö tulostetaan siis muuttujilla v ja η tai vastaavilla oct-invarianteilla ja parametreilla.

$$v = v_c + \left(\frac{\Delta v_c}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \left[(a + \lambda_2) e^{\lambda_2 \varepsilon_s} - (a + \lambda_1) e^{\lambda_1 \varepsilon_s} \right] \quad (11a)$$

$$\eta = M - \left(\frac{M}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \left[(d + \lambda_2) e^{\lambda_2 \varepsilon_s} - (d + \lambda_1) e^{\lambda_1 \varepsilon_s} \right] \quad (11b)$$

Karakteristisen yhtälön juuret λ_1 ja λ_2 ovat negatiivisia reaalityyppisiä. Kuten tunnettua, muodostetaan karakteristinen yhtälö kertoimista a , b , c , ja d yhtälöryhmässä (10). Yhtälöiden (10) ja (11) maaparametri on määritetty Ahlbäckin hiekan kolmiakselikokeiden perusteella. Kuvissa 1a ja 1b on em. koetuloksia approksimoitu yhtälöillä (11a) ja (11b). Kuvista havaitaan, että yhtälöt approksimoivat hyvin koetuloksia, josta voidaan päätellä, että Ahlbäckin hiekka käyttäytyy avoimen kolmiakselikokeen leikkausvaiheen aikana lineaarisen systeemin teorian mukaisesti. Samanlainen havainto on tehty mm. Otaniemen savella tehtyjen vastaavien kokeiden perusteella [Korhonen, Lojander 2000]. Lineaarinen systeemi soveltuu sekä saven että hiekan mekaanisten mallien yhdeksi potentiaaliseksi osaksi. Toisaalta on todettava, että yhtälöitä (10) ja (11) vastaavat muodonmuutosyhtälöt, jotka on johdettu Volterran [1959] populaatioteoriasta, approksimoivat myös hyvin koetuloksia [Krankka 1982, Kotakorpi 1979, Laitinen 1980, Laaksonen 1983, Milén 1987, Korhonen 1982].

Hyvin koetuloksia approksimoiva empiirinen muodonmuutosyhtälö ei ole riittävä osoitus siitä, että se kaikissa olosuhteissa soveltuisi elasto-plastisen mallin rakentamiseen. Kimmoteoriaan ja plastisuusteoriaan perustuvat tarkastelut ja verifiointit osoittavat jonkin matemaattisen yhtälötyypin lopullisen soveltuvuuden. Yhtälö (10) on tyypillinen lineaarisen systeemin lähtöyhtälö, mutta sillä on samalla myös maamekaniikan keskeisimmän teorian, jännitysdilataatioteorian [Rowe 1972, Schofield, Wroth 1968], tausta. Näyttäisi mahdolliselta, että populaatioteoria [Volterra 1959] ja plastisuusteoria johtavat käyttökelpoiseen, mutta teoreettisesti yksinkertaiseen mekaanista käyttäytymistä simuloivaan malliin.

4. PLASTINEN POTENTIAALI

Plastinen potentiaaliyhtälö on maamekaniikassa kehitetty perinteellisesti ns. jännitys-dilataatioyhtälöstä. Kriittisen tilan mallin [Schofield, Wroth 1968] dilataatioyhtälöstä (12a) saadaan integroimalla yksinkertaisen kysymyksen tuleva potentiaaliyhtälö (12b), jota on sovellettu lukuisissa CSM:n julkaisemisen jälkeen kehitetyissä hiekan malleissa [esim. Adachi, Oka 1984]. Yhtälö on kehitetty isotrooppista maakerrosta varten.

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d'\varepsilon_s^p} = M - \eta \quad (12a)$$

$$q = Mp \ln(p_c / p) \quad (12b)$$

$p' = p_c'$ on konsolidaatiojännitys kun $\eta = 0$

Yhtälöillä (12) voidaan laskea vain tilavuuden muutoksen (dilataation) aiheuttama leikkausvastus, mutta ei kitkan aiheuttamaa vastusta. Tunnetuimmista jännitys-dilataatioyhtälöistä vain Rowen [1972] yhtälöstä voidaan kehittää teoreettisesti sellaiset muodonmuutosyhtälöt, joissa dilataatiovastuksen lisäksi myös hiekan rakeiden välisen kitkan aiheuttama leikkausvastus on otettu huomioon.

Boukpeti ja Drescher [2000] ovat kehittäneet "Superior sand" – malliksi kutsutun mallin hiekkaa varten. Mallin myötöfunktio ja potentiaaliyhtälö ovat analogisia. Jännitysdilataatioyhtälö (14) saadaan potentiaaliyhtälöstä (13) derivoimalla ja soveltamalla normaalisuussääntöä (5a). Yhtälössä (13) ei ole anisotrooppisuutta edustavaa termiä, eikä tilaparametria ψ .

$$g = q - Mp\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{p}{p_0}} = 0 \quad (13)$$

$p_0 = p$, kun $q = 0$, määrää potentiaalipinnan hetkellisen laajuuden $p - q$ tasossa.

Yhtälö (13) on ns. Semi-Cubical Parabola, eli "Tschirnhausen's cubic [Lawrence 1972]. Kun yhtälö (13) derivoidaan saadaan dilataatioyhtälö (14).

$$\frac{dq}{dp} = -3 \left[\frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \right] = -\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_s} = d \quad (14)$$

Yhtälön (14) kanssa analogisen ratkaisun on esittänyt mm. Ohmaki [1979]. Yhtälöstä (14) todetaan, että dilataatiokulman $(d\varepsilon_v^p / d\varepsilon_s^p)$ ja jännityssuhteen η relaatio ei ole lineaarinen kuten useissa mekaanisissa malleissa on oletettu.

Kuvassa 2a on esitetty Ahlbäckin hiekalla tehdyn kolmiakselikokeen tulosten perusteella jännityssuhteen η ja dilataatiokulman välinen havaittu relaatio. Kuvaan on piirretty myös yhtälön (12a) perusteella laskettu vastaava teoreettinen relaatio, joka lineaaristettuna approksimoi vain siedettävästi koetuloksia. Yhtälön (14) soveltuvuutta Ahlbäckin hiekan jännitys-dilataatioyhtälöksi on tarkasteltu kuvassa 2b. Yhtälö (14) voidaan kirjoittaa muotoon (15).

$$q/p^* \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_s} = -\frac{3}{2} [M^2 - \eta^2] \quad (15)$$

Yhtälön (15) mukaan termeillä $\eta(d\varepsilon_v/d\varepsilon_s)$ ja η^2 on yksikäsitteinen relaatio. Kuva 2b osoittaa, että Ahlbäckin hiekan kolmiakselikokeen tulokset noudattavat siedettävällä tarkkuudella yhtälöitä (14) ja (15). Yhtälö (13) soveltuu ilmeisesti isotrooppisen, löysähkön hiekan potentiaaliyhtälöksi.

5. LOPUKSI

Edellä on pyritty esittelemään Ahlbäckin hiekan kolmiakselikokeiden tulosten perusteella eräitä tärkeimpiä hiekan mekaanisen mallin rakennuspalikoita. Näyttää ilmeiseltä, että matemaattisten mallien yleisen teorian ja plastisuusteorian menetelmien avulla voidaan kehittää hiekan mallille kohtuullisen tarkat muodonmuutosyhtälöt ja lisäksi plastisen potentiaalin yhtälö, esim. Boukpetin ja Dreseherin [2000] esittämällä tavalla. Yhtälöt (13), (14) ja (15). Em. tutkijoiden esittämä menetelmä plastisen moduulin määrittämistä varten vaikuttaa keskeneräiseltä ja soveltuu huonosti käytännön tarkoituksiin. Samanlainen toteamus on tehtävä eräistä japanilaisten tutkijoiden 1980-1990-luvuilla julkaisemista malleista, joissa myötöfunktio ja potentiaaliyhtälö toimivat siedettävän hyvin, mutta plastisen moduulin yhtälöstä puuttuu selkeä idea ja tarvittava tarkkuus. Näyttää siltä, että plastisen moduulin yhtälöä on ryhdyttävä etsimään uudella ja tuoreella tavalla. Ahlbäckin ja Ojakkalan hiekan koetulokset [Laaksonen 1983, 1988, Milen 1987] soveltuvat plastisen moduulin yhtälön kehittelyyn.

Hiekan mekaanisia malleja on kehitetty intensiivisesti 1970-luvulta alkaen [mm. Frydman 1976, Vermeer 1980, Nemat-Nasser & al 1980, Laaksonen 1988, jne.]. Wood on oppilaittensa kanssa kehittänyt sekä savelle että hiekalle uutta teoreettista mallia, jota Wood [2002] on pitänyt 1960-luvulla julkaistun kriittisen tilan mallin [Schofield, Wroth 1968, Roscoe, Burland 1968] legaalisenä perillisenä. Näin ilmeisesti onkin. Merkittävän osan uuden mallin teoriasta muodostaa "Bounding Surface-Plasticity"-teoria, jota mm. puolalaiset teoreetikot [mm. Mroz] kehittivät jo 1970-luvulla. Tässä teoriassa on "laskusääntöjä" (mapping rules) mm. plastisen moduulin laskemista varten. Moduulin laskusääntö oli yksi syy siihen, että teoriaan yritettiin vakavasti syventyä myös TKK:n pohjarakennuslaboratoriossa Otaniemessä. Varsin pian todettiin, että rahkeet eivät riitä Bounding-Surface-teorian ymmärtämiseen. Saimme äskettäin käsiimme tunnettujen tutkijoiden kirjoittaman julkaisun, jossa he tunnustivat etteivät he hyväksy Bounding-Surface-teorian laskusääntöjä. Em. tutkijat toteavat: "It is very difficult to ascribe physical meaning to the bounding-surface mapping rules". Wood on 1980-luvulta alkaen kehittänyt nimenomaan Bounding-Surface-ideaan perustuvia malleja. Kun Wood oli TKK:n vierailevana luennoitsijana v. 1989 ja 1991 kysimme asiaa häneltä. Hän totesi, että teoriaa selvitetään useissa julkaisuissa tulevaisuudessa. Näin on tapahtunut. Wood on 1990-luvulla ja alkaneella vuosikymmenellä julkaissut apulaistensa kanssa suuren määrän saven ja hiekan malleja käsitteleviä tasokkaita julkaisuja. Vastausta Bounding-Surface-teorian korostuneeseen asemaan näistä erittäin korkeatasoisista julkaisuista ei löytynyt.

Gajon ja Woodin [1999] julkaisema jännitys-dilataatioyhtälö, joka on esitetty edellä (10a) on edistyskellinen, koska siinä on otettu huomioon tilaparametrin ψ vaikutus. Se soveltuu mm. lineaarin systeemin yhdeksi lähtöyhtälöksi. Näyttää mahdolliselta, että Gajon ja Woodin yhtälöä voidaan kehittää edelleen. Hiekan mekaanisten mallien pullonkaulaksi muodostuneen plastisen moduulin yhtälön ratkaisu löytynee samalla ilman Bounding-Surface konseptia.

KIRJALLISUUSLUETTELO

- Adachi, J.; Oka, F.: Constitutive equations for sands and over-consolidated clays as assigned works for sand. Grenoble 1984.
- Atkinson, J. H.; Bransby, P. L.: The Mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics. Berkshire 1978.

- Boukpeti, N.; Drescher, A.: Triaxial behaviour of refined superior sand model, Computers and geotechnics, 2000. P. 65-81.
- Frydman, S.: The strain hardening behaviour of particulate media. Canadian Geotechnical Journal, 1976, vol. 13. P. 311-323.
- Gajo, A.; Wood, D. M.: A kinematic-hardening constitutive model for sands: The multiaxial formulation. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999. P. 925-965.
- Kantee, P.: Sarja avoimia kolmiakselialikokeita Ahlbäckin hiekalle, Erikoistyö, TKK 1983.
- Kastepohja, K. Ojakkalan hiekan mekaaniset ominaisuudet. Diplomityö, TKK 1985.
- Korhonen, K.-H.: The mathematical model for deformation of granular soils, Delft 1982. P. 233-238. Deformation and failures of granular materials.
- Korhonen, K.-H.: An analogical method for soils, the DH-FG model. NGM, 2000, Nordiska geoteknikmötet, Helsingfors 2000.
- Korhonen, K.-H.; Lojander, M.: Normaalisti konsolidoituneen saven potentiaaliyhtälö. Mekaniikan päivät 2000, Tampere.
- Korhonen, K.-H.; Lojander, M.; Korhonen, O.: The potential and deformation functions of Otaniemi clay, Lisse 2001. P. 27-31.
- Krankka, M.: Oulun hiekan muodonmuutos- ja lujuusominaisuuksista. Diplomityö, Oulun Yliopisto, 1981.
- Laaksonen, R.: Hiekan elasto-plastinen mallintaminen. Tekn. lis. työ, TKK 1988.
- Laaksonen, R.: Maan mekaanisten ominaisuuksien määrittäminen automatisoidulla kolmiakselilaitteistolla. Diplomityö, TKK 1983.
- Lade, P. V.: Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield curve. Int. Journal, solids and structures 1977.
- Laitinen, T.: Kitkamaalajien mekaanisista ominaisuuksista. Diplomityö, TKK 1980.
- Lawrence, J. D.: A catalog of special plane curves. New York 1972.
- Milen, E.: Hiekan muodonmuutosominaisuudet. Diplomityö, TKK 1987.
- Nemat-Nasser, S.; Shokoh, A.: A finite plastic flows of compressible material with internal friction. International Journal Solid Structures, Vol. 16, 1980. P. 495-514
- Ohmaki, S.: A mechanical model for the stress-strain behaviour of normally consolidated cohesive soil. Soils and foundations. Vol. 19, 1979. P. 19-44.
- Ohmaki, S. A.: Stress-strain relationship of normally consolidated cohesive soil under general stress condition. Soils and foundations. Vol. 20, 1980.
- Rantala, K.: Karkearakeisen materiaalin dilataatio. Erikoistyö, TKK 1995.
- Rowe, P. W.: Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil. Roscoe conference 1972.
- Roscoe, K. H.; Burland, J. B.: On the generalised stress-strain behaviour of "wet" clay. Cambridge 1968.
- Wood, D. M.; Belkheier, R.; Liu, D. F.: Strain softening and state parameter for sand modelling. Geotechnique 44, 1994. P. 335-339.
- Vermeer, P. A.: Formulation and analyses of sand deformation problems. Delft University of Technology 1980.

Volterra, V.: Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. New York 1959.

Wood, D. M.: Constitutive cladistics: The progeny of critical state soil mechanics. Constitutive and centrifuge modelling. Two extremes. Ed. Sarah Springman 2001. P. 35-58.

Yasufuku, N.; Murato, H.; Hyodo, H.; Hyde, F. L.: A stress-strain relationship for anisotropically consolidated sand over a wide stress region. Soils and foundations. Vol. 31, 1991. P. 74-92.

THERMOMECHANICAL MODEL FOR COMPACTED BENTONITE

PETRI JUSSILA

Helsinki University of Technology

Institute of Mathematics

Box 1100, FIN-02015 HUT

e-mail: Petri.Jussila@hut.fi

ABSTRACT

A general thermomechanical model is derived for a mixture. The system is described by proper choices of free energy and dissipation function. The general theory is applied to a TH model for a bentonite buffer. The free energy of the system is chosen to take into account the individual behaviours of the components and their mutual interactions. The resulting thermodynamically consistent macroscopic model is fitted to a suction experiment and applied to a simple 1D TH simulation of the bentonite buffer of the Febex in situ test. The results calculated with FEM are compared to measurements.

1. INTRODUCTION

A buffer of compacted bentonite is planned to be used to prevent the movement of groundwater and the consequential escape of material from a geological repository for spent nuclear fuel. Fluid flow, phase changes, mechanical behaviour of the buffer, rock, and the waste canisters, and the heat produced by the waste constitute a coupled thermohydrromechanical system. The aim of the study is to derive a general thermodynamically consistent THM model for an arbitrary mixture. The general theory is applied to the thermohydraulic modelling of a mixture of compacted bentonite, liquid water, vapour, and air.

The system is described by proper choices of free energy and dissipation function. The free energy of the system is chosen to take into account the individual behaviours of the components and their mutual interactions through adsorption, vaporisation, and mixing of the gaseous components. The choice is based on the equilibrium conditions for the water species in different combinations of the components.

The model is fitted to a suction experiment for Febex bentonite and applied to the TH simulation of the bentonite buffer of the Febex in situ test, which is considered in the international Decovalex 3 project. The present approach is to describe the essential features of the TH behaviour of the buffer in a simple 1D geometry. The results calculated with FEM are compared to the measurements.

2. THE GENERAL MODEL

The system consists of solid skeleton (s), liquid water (l), water vapour (v), and air (a). Vapour and air occupy the same gaseous (g) volume fraction. The molar volume fraction $\xi_k = \beta_g x_k$ for $k \in \{a, v\}$ and $\xi_k = \beta_l x_k$ for $k \in \{s, l\}$ of component k is defined by means of the volume fraction $\beta_j = V_j/V$ of the phase $j \in \{s, l, g\}$ and the molar fraction $x_k = n_k/(n_a+n_v)$ for $k \in \{a, v\}$ and $x_k = 1$ for $k \in \{s, l\}$ of component k , where n_k [mol] is the mole number of component k . Apparently, we have $\sum_k \xi_k = 1$. The molar volume fractions relate the apparent densities $\rho_k = m_k/V$ [kg/m³] to the

intrinsic densities $\tilde{\rho}_k = m_k/(x_k V_j)$ [kg/m³], for which $j = g$ for $k \in \{a, v\}$ and $j = k$ for $k \in \{s, l\}$ by the equation $\rho_k = \xi_k \tilde{\rho}_k$.

We also define porosity $\eta = 1 - \xi_s$, liquid saturation $\chi = \xi_l / (1 - \xi_s)$, and vapour fraction $\zeta = \xi_v / (\xi_a + \xi_v)$ as alternative variables.

In the general model the state variables are chosen to be the molar volume fractions ξ_k , intrinsic densities $\tilde{\rho}_k$, and strains ϵ_k [-] of the components, and the common temperature T [K]. The indicator function taking care of the restriction for the molar volume fractions is

$$I(\xi_s, \xi_l, \xi_v, \xi_a) = \begin{cases} 0, & (\xi_s, \xi_l, \xi_v, \xi_a) \in C, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1)$$

where the feasible set is

$$C = \left\{ (\xi_s, \xi_l, \xi_v, \xi_a) \in \mathbb{R}^4 \left| \sum_k \xi_k = 1, \xi_k \geq 0, k \in \{s, l, v, a\} \right. \right\} \quad (2)$$

The free energy [J/m³] of the system is

$$\psi = \sum_{k \in \{s, l, v, a\}} \rho_k \psi_k = \sum_{k \in \{s, l, v, a\}} \rho_k \tilde{\psi}_k + TI(\xi_s, \xi_l, \xi_v, \xi_a), \quad (3)$$

where $\tilde{\psi}_k$ [J/kg] is the specific free energy of component k without the restriction (2). Dissipative behaviour of the system is characterised by the dissipative variables, which in the general work are chosen to be the rates of deformation $\mathbf{D}_k$ [1/s], the heat fluxes $\mathbf{q}_k$ [W/m²], and the relative velocities $\mathbf{V}_k$ [m/s]. The dissipation function ϕ [W/m³] is a function of the state variables and the dissipative variables.

We follow the procedure introduced in [1] of using the principle of maximal rate of entropy production [2] with the orthogonality relations

$$\phi = \nu \left[\sum_k (\partial \phi / \partial \mathbf{D}'_k) : \mathbf{D}'_k + (\partial \phi / \partial (\text{tr} \mathbf{D}_k)) \text{tr} \mathbf{D}_k + (\partial \phi / \partial \mathbf{q}_k) \cdot \mathbf{q}_k + (\partial \phi / \partial \mathbf{V}_k) \cdot \mathbf{V}_k \right], \quad (4)$$

$$\nu = \phi \left[\sum_k (\partial \phi / \partial \mathbf{D}'_k) : \mathbf{D}'_k + (\partial \phi / \partial (\text{tr} \mathbf{D}_k)) \text{tr} \mathbf{D}_k + (\partial \phi / \partial \mathbf{q}_k) \cdot \mathbf{q}_k + (\partial \phi / \partial \mathbf{V}_k) \cdot \mathbf{V}_k \right]^{-1}. \quad (5)$$

As a result we get the following general constitutive relations

$$\sigma'_k = \rho_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \epsilon'_k} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}'_k}, \quad (6)$$

$$p_k = -\rho_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial (\text{tr} \epsilon_k)} - \nu \frac{\partial \phi}{\partial (\text{tr} \mathbf{D}_k)} + p_k^{\text{th}}, \quad (7)$$

$$s_k = -\frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial T} - \frac{I}{\tilde{\rho}_k}, \quad (8)$$

$$-\frac{\nabla T}{T} = \nu \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}_k}, \quad (9)$$

$$-\mathbf{m}_k - \sum_j \left(\rho_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \xi_j} + \xi_k B \right) \nabla \xi_j + \sum_j \left(\rho_j \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \xi_k} + \xi_j B \right) \nabla \xi_k = \nu \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{V}_k}, \quad (10)$$

$$p_k^{\text{th}} = \xi_k \bar{\rho}_k^2 \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \bar{\rho}_k} - \xi_k T I, \quad (11)$$

$$G_q - G_p = 0, \quad (12)$$

where σ'_k [Pa] is the deviatoric Cauchy stress, p_k [Pa] is the pressure,

$$p_k^{\text{th}} = \xi_k \left(B + \sum_j \rho_j \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \xi_k} \right) \quad (13)$$

is the relative thermodynamical pressure [Pa], B [Pa] is the relative hydrostatic pressure for which

$$B = \{B_k \forall k \in \{s, l, v, a\} | (B_s, B_l, B_v, B_a) \in T \partial I(\xi_s, \xi_l, \xi_v, \xi_a)\}, \quad (14)$$

s_k [J/(kgK)] is the specific entropy, $\mathbf{m}_k$ [N/m³] is the rate of production of linear momentum, and

$$G_k = \tilde{\psi}_k - \frac{1}{2} \mathbf{U}_k \cdot \mathbf{U}_k + \frac{p_k^{\text{th}}}{\rho_k} \quad (15)$$

is the generalised specific Gibbs function [J/kg], where $\mathbf{U}_k$ [m/s] is the absolute velocity of component k .

3. THERMOHYDRAULIC MODELLING OF BENTONITE

3.1 Constitution

The general theory is applied to thermohydraulic modelling of bentonite buffer with an assumption of a rigid skeleton. We get the constitution from the general constitutive relations with appropriate choices of the free energies and the dissipation function. The chosen specific free energies of the components are the following

$$\psi_s(T, \bar{\rho}_s, \xi_j) = -c_s T \ln \frac{T}{T_0} + \frac{T}{\bar{\rho}_s} I(\xi_j), \quad (16)$$

$$\psi_l(T, \bar{\rho}_l, \xi_j) = -c_l T \ln \frac{T}{T_0} + \frac{RT}{M_v} h(\xi_s, \xi_l) + \frac{T}{\bar{\rho}_l} I(\xi_j), \quad (17)$$

$$\psi_v(T, \bar{\rho}_v, \xi_j) = -c_v T \ln \frac{T}{T_0} + \frac{RT}{M_v} \ln \frac{\bar{\rho}_v}{\bar{\rho}_{v,0}} + \frac{RT_0}{M_v} \frac{\bar{\rho}_{v,0}}{\bar{\rho}_v} + f(T) + \frac{RT}{M_v} g_v(\xi_j) + \frac{T}{\bar{\rho}_v} I(\xi_j), \quad (18)$$

$$\psi_a(T, \bar{\rho}_a, \xi_j) = -c_a T \ln \frac{T}{T_0} + \frac{RT}{M_a} \ln \frac{\bar{\rho}_a}{\bar{\rho}_{a,0}} + \frac{RT_0}{M_a} \frac{\bar{\rho}_{a,0}}{\bar{\rho}_a} + \frac{RT}{M_a} g_a(\xi_j) + \frac{T}{\bar{\rho}_a} I(\xi_j), \quad (19)$$

where c_k [J/(kgK)] is the specific heat at constant volume, M_k [kg/mol] is the molar weight, R [J/(mol K)] is the universal gas constant, f [J/kg] is a vaporisation function, h [-] is an adsorption function, g_k [-] is a mixing interaction term for the gaseous components, and $\bar{\rho}_{k,0}$ [kg/m³] is the intrinsic density at the reference state $(P, T) = (P_0, T_0)$, where P [Pa] is the (mixture) pressure.

The chosen forms for the adsorption function, mixing terms, and vaporisation function, respectively, are

$$h(\xi_s, \xi_l) = b \left(\frac{\xi_s}{\xi_l} - \frac{1}{\chi_{\max}} \frac{1 - \eta_0}{\eta_0} \right)^2 = a \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi_{\max}} \right)^2, \quad (20)$$

$$g_k(\xi_v, \xi_a) = \ln \left(\frac{\xi_k}{\xi_a + \xi_v} \frac{\xi_{k,0}}{\xi_{a,0} + \xi_{v,0}} \right), \quad k \in \{a, v\}, \quad (21)$$

$$f(T) = -\frac{RT}{M_v} - L_0 \frac{T - T_0}{T_0}, \quad (22)$$

where $\chi_{\max}$ [-] is the maximum saturation, $a = b((1 - \eta_0) / \eta_0)^2$ is a constant material parameter, and L_0 [J/kg] is a constant related to the latent heat of vaporisation.

The dissipation function is chosen to be

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{q}_j, \mathbf{V}_j, \mathbf{V}_{vg}) = & \sum_{k \in \{s, l, v, a\}} \left(\frac{1}{\xi_k \lambda_k T} \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{q}_k \right) + \sum_{k \in \{l, g\}} \mu_k \mathbf{k}_k^{-1} (\beta_k \mathbf{V}_k) \cdot (\beta_k \mathbf{V}_k) + \\ & + \bar{\rho}_v \frac{RT}{M_v} \frac{1}{D} \frac{\beta_g}{\zeta(1 - \zeta)} (\zeta \mathbf{V}_{vg}) \cdot (\zeta \mathbf{V}_{vg}), \end{aligned} \quad (23)$$

where λ_k [W/(Km)] is the heat conductivity, μ_k [kg/(sm)] is the dynamic viscosity, $\mathbf{k}_k$ [m²] is the permeability tensor, D [m²/s] is the diffusivity, $\mathbf{V}_g = \zeta \mathbf{V}_g + (1 - \zeta) \mathbf{V}_a$ is the molar weighted velocity of gas, and $\mathbf{V}_{vg} = \mathbf{V}_v - \mathbf{V}_g$.

The result for the relative intrinsic pressure denoted as $\tilde{p}_k = p_k / \xi_k$ gets the form

$$\tilde{p}_k = B + \tilde{\rho}_l \frac{RT}{M_v} \xi_l \frac{\partial h}{\partial \xi_k}, \quad k \in \{s, l, v, a\}, \quad (24)$$

$$\tilde{p}_k = \tilde{\rho}_k \frac{RT}{M_k} - \tilde{\rho}_{k,0} \frac{RT_0}{M_k} - TI = P - P_0 - TI, \quad k \in \{v, a\}. \quad (25)$$

Here, the relative hydrostatic pressure $B = P - P_0$ is found to equal to the mixture pressure.

The Darcy law for liquid, the Darcy law for gas, the Fick law for the relative velocity of vapour, and the Fourier heat conduction law, respectively, get the form

$$\xi_l \mathbf{V}_l = -\frac{\mathbf{k}_l}{\mu_l} \left[\nabla \left(\frac{p_l}{\xi_l} \right) - \tilde{\rho}_l \mathbf{g} + \tilde{\rho}_l \frac{RT}{M_v} \nabla h \right], \quad (26)$$

$$\beta_g \mathbf{V}_g = -\frac{\mathbf{k}_g}{\mu_g} \left[\nabla P - \frac{\rho_a + \rho_v}{\beta_g} \mathbf{g} \right], \quad (27)$$

$$\zeta \mathbf{V}_{vg} = -D \left[\nabla \zeta - \zeta (1 - \zeta) \frac{M_v - M_a}{RT} \mathbf{g} \right], \quad (28)$$

$$\mathbf{q}_k = -\xi_k \lambda_k \nabla T. \quad (29)$$

Component interactions are studied by considering the Gibbs equilibrium (12) of the water species in different mixtures. The resulting Clausius-Clapeyron equations “outside” and “inside” the porous medium, respectively, are

$$\ln \frac{\zeta^0 P^0}{\zeta_0 P_0} = \frac{M_v}{RT} \left[L_0 \frac{T - T_0}{T_0} + (c_v^p - c_l^p) T \ln \frac{T}{T_0} + \frac{P^0 - P_0}{\tilde{\rho}_1} \right], \quad (30)$$

$$\ln \frac{\zeta P}{\zeta_0 P_0} = \frac{M_v}{RT} \left[L_0 \frac{T - T_0}{T_0} + (c_v^p - c_l^p) T \ln \frac{T}{T_0} + \frac{P - P_0}{\tilde{\rho}_1} \right] + h + \xi_1 \frac{\partial h}{\partial \xi_1}, \quad (31)$$

where ζP , $\zeta^0 P^0$, and $\zeta_0 P_0$ denote the partial pressure of saturated vapour from the gaseous phase inside the porous medium, outside the porous medium, and at the reference state, respectively. This is compatible with the conventional equilibrium conditions for ideal vapour with the assumptions $c_l^p = c_l$, $c_v^p = c_v + R/M_v$, and $L = L_0 + (c_v^p - c_l^p)T$, where c_k^p [J/(kgK)] is the specific heat at constant pressure and L [J/kg] is the latent heat.

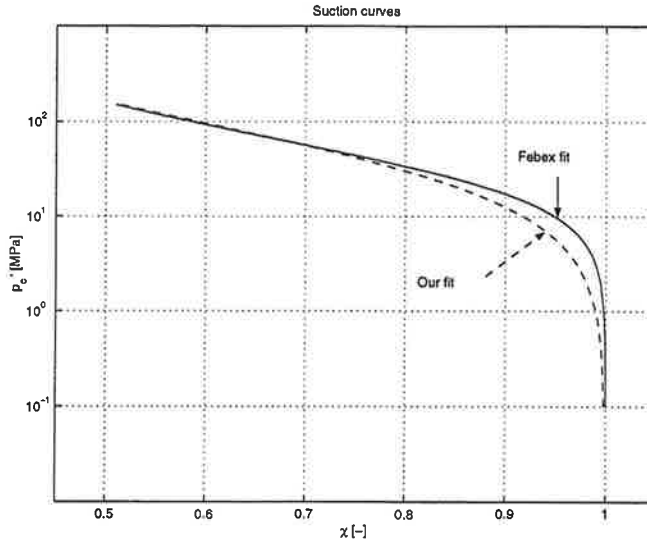


Figure 1. The suction curve (dashed) and the Febex fit (solid). The wetting experiment of a confined sample with $\rho_{dry} = 1600 \dots 1650 \text{ kg/m}^3$.

By combining the Gibbs equilibria (30, 31) at the same pressure and temperature we get the relative humidity inside the porous medium as

$$\ln RH = \ln \left(\frac{\zeta P}{\zeta^0 P^0} \right) = \ln \left(\frac{\zeta}{\zeta^0} \right) = h + \xi_1 \frac{\partial h}{\partial \xi_1} \quad (32)$$

and the Kelvin law for the suction pressure p_c by means of the adsorption function as

$$p_c = -\tilde{\rho}_1 \frac{RT_0}{M_v} \left(h + \xi_1 \frac{\partial h}{\partial \xi_1} \right), \quad (33)$$

which form is also presented in [3]. The fitted suction curve by means of (20, 33) along with a van Genuchten fit used in the Febex project is plotted in Figure 1.

3.2 The thermohydraulic model

The final state variables are saturation χ , temperature T , and vapour fraction ζ . Inertial terms and gravitation are neglected and the total pressure is assumed to be constant. The model consists of the conservation of the mass of the water species, and the thermal energy conservation, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l + \rho_v) + \nabla \cdot [\tilde{\rho}_l \xi_l \mathbf{V}_l + \tilde{\rho}_v \xi_v \mathbf{V}_v] = 0, \quad (34)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} - L \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{V}_l) \right) + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (35)$$

where $c = \sum_k \rho_k c_k$. The constitutive relations are reduced to the Clausius-Clapeyron equation, vapour state equation, Darcy's law for liquid, the result of Fick's law for vapour, Fourier's law for heat flow, and to the latent heat of vaporisation, i.e., to

$$\ln \frac{\zeta}{\zeta_0} = \frac{M_v}{RT} \left[L_0 \frac{T - T_0}{T_0} + (c_v^p - c_l^p) T \ln \frac{T}{T_0} \right] + h + \xi_l \frac{\partial h}{\partial \xi_l}, \quad (36)$$

$$P = \tilde{\rho}_v \frac{RT}{M_v}, \quad (37)$$

$$\xi_l \mathbf{V}_l = \frac{\mathbf{k}_l}{\mu_l} \tilde{\rho}_l \frac{R}{M_v} \frac{2a}{\chi^3} [\chi(1 - \chi/\chi_{\max}) \nabla T - T \nabla \chi], \quad (38)$$

$$\xi_v \mathbf{V}_v = -\beta_g D \nabla \zeta, \quad (39)$$

$$\mathbf{q} = \sum_k \mathbf{q}_k = -\sum_k \xi_k \lambda_k \nabla T \equiv -\lambda \nabla T, \quad (40)$$

$$L(T) = L(T_0) + (c_v^p - c_l^p)(T - T_0) = L_0 + (c_v^p - c_l^p)T, \quad (41)$$

respectively. The relation between saturation and relative humidity is given by equations (20, 32).

4. THERMOHYDRAULIC SIMULATION OF THE FEBEX IN SITU TEST

The thermohydraulic aspects of the Febex in situ test (Figures 2 and 3) are simulated in 1D polar co-ordinate $r \in [R_1, R_2] = [0.485, 1.14]$ m. The simulation covers the radial distributions of relative humidity and temperature for the sections E1 and E2 in the directions RD1, RD2, RD3, and RD4, and the evolutions of relative humidity and temperature in 3 points (E1H, E1C, and E1G) of the section E1. The initial saturation is $\chi_{\text{init}} = 0.54$ corresponding to $RH = 38\%$, and initial temperature is that of the surrounding rock, i.e., $T_{\text{init}} = T_r = 285.15$ K. The simulated sequence between $-180 \dots 1000$ d is divided in three periods. The moisture boundary conditions are no-flow at the heater and full saturation at the rock for every case.

1. Days between $-180 \dots 0$ d correspond to the isothermal saturation period between the construction and the starting of the heaters.
2. Days between $0 \dots 53$ d correspond to the heater adjustment period, which is approximated by a linear increase of the heater temperature to the final value assessed by the measurements for each case (Table 2). The temperature boundary condition at the rock is of the Robin type $\mathbf{q} = H(T - T_r)$ with a calibrated value of the heat transfer coefficient H [W/(m²K)].
3. Days between $53 \dots 1000$ d correspond to the period of controlled heating during which the temperature of the hottest point on each heater is kept at 373.15 K. The period is simulated

by keeping the heater temperature constant. The other boundary conditions are the same as for the period 2.

The results are calculated with the FEM program ELMER [4] in co-operation with CSC. The simple 1D mesh consists of 40 linear elements. A time step of 1 d is used for every case.

For heat capacity, heat conductivity, and liquid permeability, respectively, the following empirical relations are employed

$$c = c_{\text{eff}}(\chi, T) = \eta_0 \chi \tilde{\rho}_1 c_1 + \rho_{\text{dry}} (1.38(T - 273.15) + 732.5), \quad (42)$$

$$\lambda = \lambda_{\text{eff}}(\chi) = A_2 + \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{(\chi - \chi_0)/dx}}, \quad (43)$$

$$k_1 = k_1(\chi) = k_u \chi^3, \quad (44)$$

where A_1 and A_2 [W/(Km)] are the thermal conductivities for dry and fully saturated medium, respectively, χ_0 [-] is the saturation for which the thermal conductivity is the average value between the extreme values, dx [-] is a parameter, and k_u [m²] is the permeability of the fully saturated medium. For diffusivity of vapour-air mixture we use the relation $D = D_1(T/T_1)^n$ [5]. The parameter values are given in Table 1.

The simulated and measured results for the evolution of relative humidity at the points E1H, E1C, and E1G are illustrated in Figure 4. Figure 5 shows the radial distribution of relative humidity for the section E1 in the directions RD3 and RD4. Figure 6 shows the radial distribution of relative humidity for the section E2 in the directions RD3 and RD4. Figure 7 shows the radial distribution of relative humidity for the section E1 in the direction RD2. Figure 8 shows the radial distribution of relative humidity for the sections E1 and E2 in the direction RD1. Figure 9 shows the radial distribution of temperature for the sections E1 and E2 in the direction RD4.

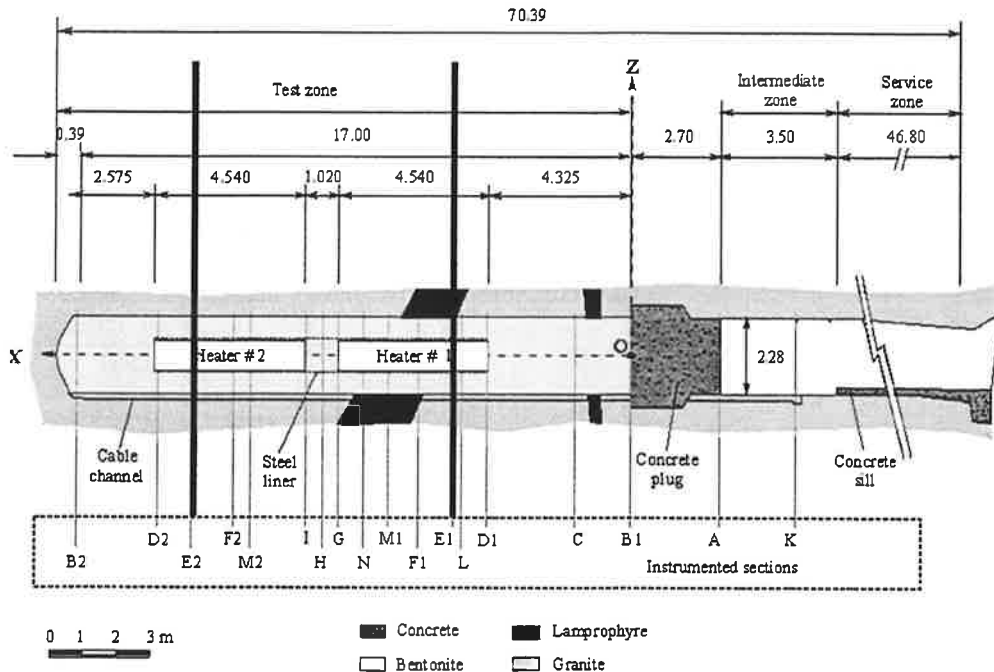


Figure 2. Profile of the Febex in situ experiment and the simulated sections E1 and E2.

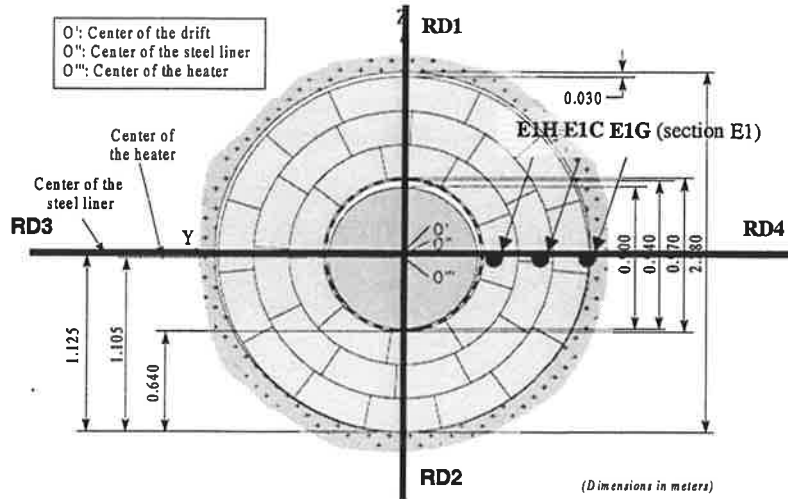


Figure 3. A typical Febex cross section with the definitions of the directions RD1, RD2, RD3, and RD4. The points E1H, E1C, and E1G of the section E1 correspond to $r = 0.52, 0.81$, and 1.1 m, respectively, in the 1D simulation.

Table 1. The parameters.

Initial and reference		Literature		Calibration		
Name	Value	Name	Value	Ref.	Name	Value Case
T_0	293.15 K	g	9.81 m/s^2		a	0.4 suction test
P_0	0.1013 MPa	R	8.314 J/(mol K)		H	$1.9 \text{ W/(m}^2\text{K)}$
η_0	0.45	M_v	0.018 kg/(mol)		$T(R_1)$	266.15 K E1;RD3, RD4
ρ_{dry}	1690 kg/m^3	μ_l	$1.0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(sm)}$	[6]	$T(R_1)$	269.15 K E2;RD3, RD4
χ_{max}	0.999	ζ_0	0.023	[6]	$T(R_1)$	272.15 K E1,E2; RD2
χ_{init}	0.54	D_1	$0.216 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$	[6]	$T(R_1)$	253.15 K E1,E2; RD1
T_r	285.15 K	T_1	273 K	[5]	Laboratory test	
		n	1.8	[5]		
		c_v^p	$1.87 \cdot 10^3 \text{ J/(kgK)}$	[6]	A_1	0.57 W/(Km)
		c_l^p	$4.18 \cdot 10^3 \text{ J/(kgK)}$	[6]	A_2	1.28 W/(Km)
		$L(T_0)$	$2.45 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$	[6]	x_0	0.65
		$\tilde{\rho}_l$	998 kg/m^3	[6]	dx	0.10
					k_u	$2.0 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$

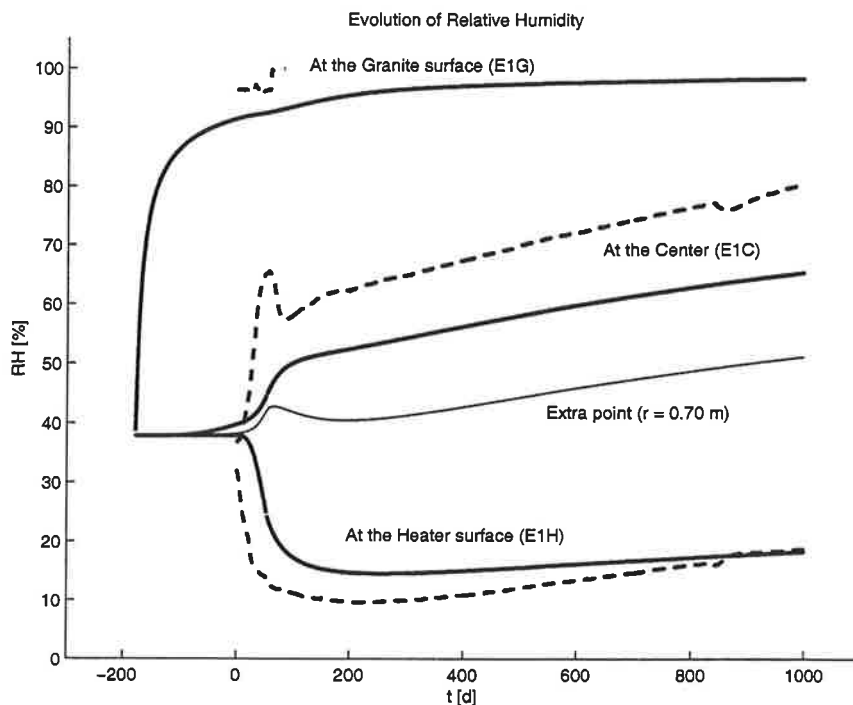


Figure 4. Simulated (solid) and measured (dash) evolution of relative humidity at the points E1H, E1C, and E1G. The thin solid curve shows the simulated extra point.

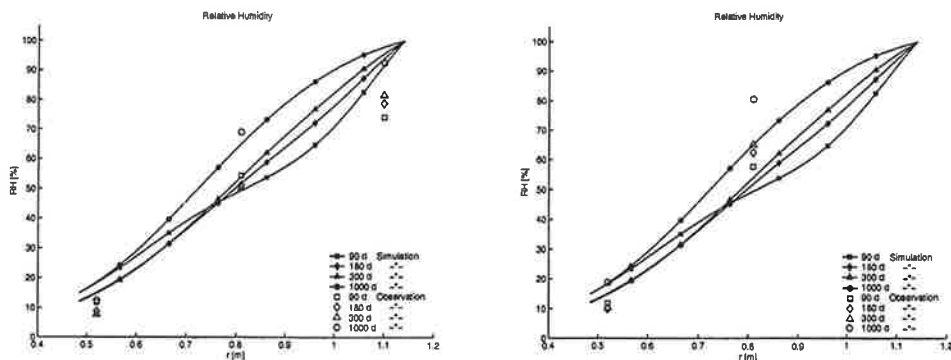


Figure 5. Simulated and measured radial distribution of relative humidity at 90, 180, 300, and 1000 d for the section E1 in the directions RD3 (left) and RD4 (right).

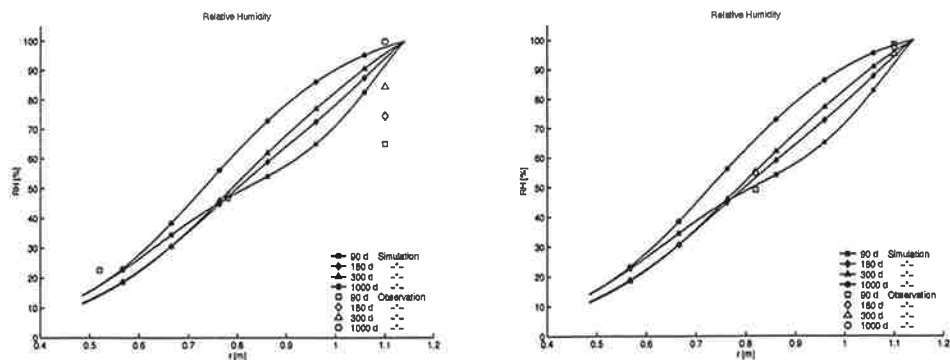


Figure 6. Simulated and measured radial distribution of relative humidity at 90, 180, 300, and 1000 d for the section E2 in the directions RD3 (left) and RD4 (right).

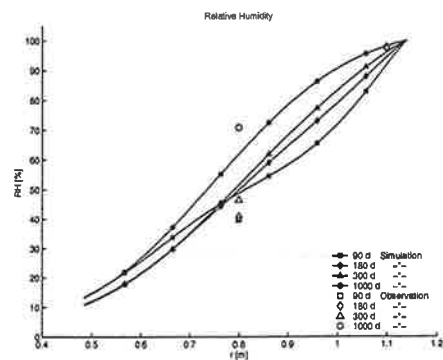


Figure 7. Simulated and measured radial distribution of relative humidity at 90, 180, 300, and 1000 d for the section E1 in the direction RD2.

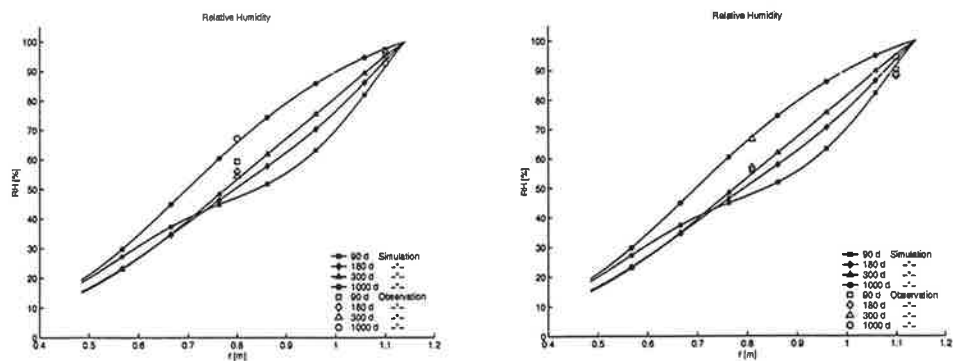


Figure 8. Simulated and measured radial distribution of relative humidity at 90, 180, 300, and 1000 d for the sections E1 (left) and E2 (right) in the direction RD1.

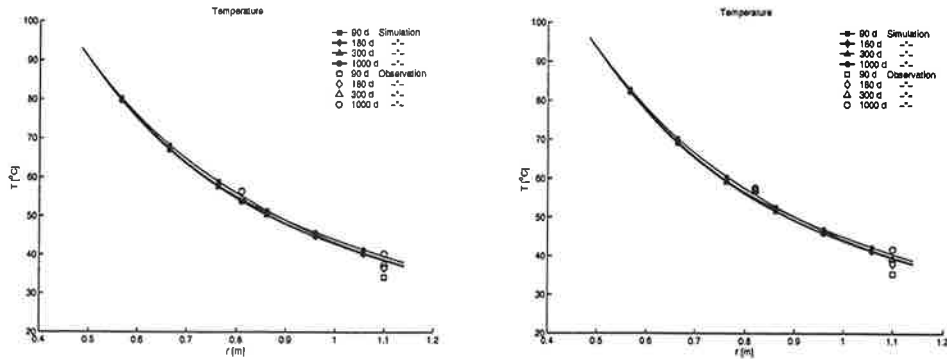


Figure 9. Simulated and measured radial distribution of temperature at 90, 180, 300, and 1000 d for the sections E1 (left) and E2 (right) in the direction RD4.

5. CONCLUSIONS

The presented TH simulations are essentially simplified 1D predictions of the relative humidity by means of calibration of the temperature boundary conditions. The actual geometry, behaviours of the heater, liner and rock, and the deformation of the buffer are not considered. Convection heat transfer, pressure variation due to vaporisation, dependence of dynamic viscosity of liquid on temperature, and dependence of liquid density on temperature and pressure are neglected, and the gas diffusion is of a simple form. The main simulational simplifications are the approximation of the heater adjustment period by a linear time dependence of temperature, and the use of a full saturation boundary condition at the rock surface.

Because the heater performance is simulated by means of temperature boundary conditions, the lack of temperature data constitutes a source of uncertainty. Other main uncertainties are related to the initial moisture distribution in the buffer and to the effect of the construction gaps and the instrumentation.

Fitting of the model against the suction experiment is done only by means of a single wetting curve with shortage of data at the dry region.

The largest discrepancy between the measured and simulated results can be seen in the case of relative humidity evolution at the centre of the buffer after the starting of the heaters. First a rapid condensation is measured followed by a rapid vaporisation after a sufficient temperature increase. In the simulation the same effect of consecutive wetting and drying is seen in considerably less extent at the region nearer the heater, e.g., at the extra point depicted in Figure 4. We suggest that this discrepancy be due to the gaps and instrumentation present in the actual case.

Despite the simplifications and uncertainties the simulations and the observations are fairly consistent. The model succeeds in its aim to describe the essential features of the TH behaviour, i.e., heat transfer, vaporisation, fluid flow, gas diffusion, and suction induced by adsorption.

6. REFERENCES

- [1] Hartikainen, J., and Mikkola, M., *Thermomechanical model of freezing soil by use of the theory of mixtures*, In Proceedings of the 6th Finnish Mechanics Days, Aalto, J., and Salmi, T., (eds), 1997, 1–26.
- [2] Ziegler, H., Wehrli, C., *The derivation of constitutive relations from the free energy and dissipation function*, In *Advances in Applied Mechanics*, volume 25, pages 183-238, New York, 1988.
- [3] Frémond, M., and Nicolas, P., *Macroscopic thermodynamics of porous media*, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 1990, 2:119-139.
- [4] CSC - The Finnish IT Center for Science, 21st January 2003, *ELMER*, [WWW document] <http://www.csc.fi/Elmer/>.
- [5] Vargaftik, N. B., *Tables on the thermophysical properties of liquids and gases. 2. ed*, Wiley, New York, 1975.
- [6] Schmidt, E., *Properties of Water and Steam in SI-Units*, Springer, Berlin, 1989.

IKKUNARUUDUN LÄMPENEMISEN JA RIKKOUTUMISEN MALLI

O. KESKI-RAHKONEN, J. MANGS

VTT Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka
PL 1803, 02101 Espoo
Sähköposti: Olavi.Keski-Rahkonen@vtt.fi

TIIVISTELMÄ

Hyvin lämpöä eristävien ikkunoiden lasiruutuja on viime aikoina uusissa asennuskohteissa rikkoutunut ilmeisesti auringon lämpösäteilyn vaikutuksesta. Tässä on esitetty karkea malli rikkoutumisen syystä. Ikkunan säröytyminen on auringon säteilyenergian aiheuttaman lämpenemisen, ikkunan rakenteen sekä lasiruudun reunaan mahdollisesti syntyneiden pienten säröjen yhteisvaikutusta. Ilmiö on voimakkainta hyvin lämpöä eristävissä ikkunoissa ja sälekaihtimet sopivassa asennossa vahvistavat sitä vielä jonkin verran.

1. JOHDANTO

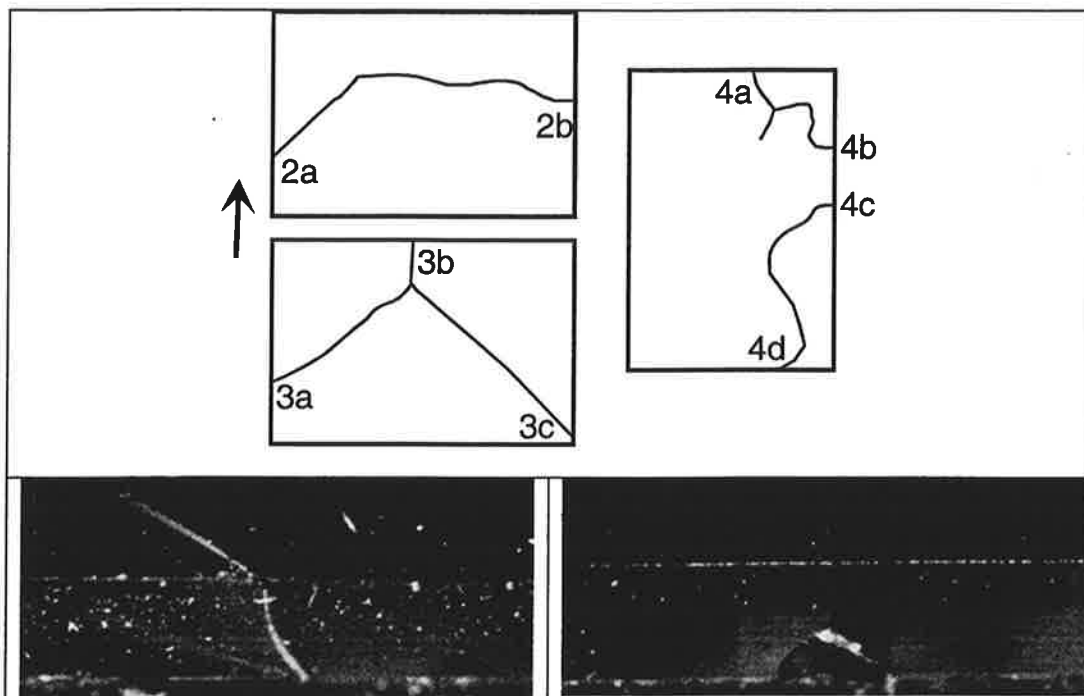
Rakennusten energiankäyttö on merkittävä osa Suomen energiankulutusta. Jo pitkään viranomaiset ovat ohjeistuksellaan pyrkineet tietoisesti parantamaan rakennusten energia-tehokkuutta, jolloin huomio keskittyy myös ikkunoihin. Ikkunateollisuus on pystynyt vastaamaan noihin haasteisiin tuottamalla kaupallisia ikkunaratkaisuja, joiden lämmönläpäisyä on pystytty huomattavasti parantamaan aikaisemmin käytettyihin ratkaisuihin verrattuna. Vaikka Suomi on ilmastollisesti kylmä maa, viime aikoina on törmätty tällaisten ikkunoiden sovelluksissa uuteen ongelmaan: ikkunalasien ruutuja rikkoutuu silloin tällöin näennäisesti itsestään parhaimmin eristettyjen ikkunaratkaisujen sisällä. Rikkoutumisen ilmeinen syy on auringon lämpösäteily, mutta tarkkaa mekanismia ei ole toistaiseksi tunnettu. Vaikka vauriot ovat harvinaisia, niiden syytä on selvitetty ja tässä siitä ensimmäisiä tuloksia.

Kun umpion lämpötila nousee auringon lämmittävän vaikutuksen tai muun syyn vuoksi, ikkunaruuuihin syntyy erilaisia jännityksiä. Ne vaikuttavat eri paikoissa ja ovat suuruudeltaan erilaisia. Tärkeimmät näistä ovat: (a) lämpöshokki ruudun pinnassa, (b) lämpöjännitykset ruudun poikkileikkauksessa vaikuttavan lämpötilagradientin vuoksi, (c) umpion paineen nousun aiheuttamasta mekaanisesta kuormasta johtuvat laatan jännitykset (d) lämpötilagradienteista ruudun pinnan suunnassa aiheutuvat lämpöjännitykset sekä (e) valmistusvirheistä ja vieraista kiteistä (NiS) aiheutuvat paikalliset jännityshuiput. Tässä mallitetaan näitä ilmiöitä ja päätellään tulosten perusteella, onko joku näistä ilmiöistä ikkunan rikkoutumisen syy.

2. HAVAINTOJA RIKKOUTUMISESTA KENTÄLTÄ SAADUISTA NÄYTTEISTÄ

Todellisessa kohteessa rikkoutuneita muutamia ikkunoita tutkittiin laboratoriossa. Säröjen kulku ruudulla ilmenee kuvan 1 yläosasta. Säröjen asemasta ja kulusta ruudulla voitiin päätellä jotain rikkoutumismekanismista sekä jännityshuipun paikasta ruudulla. Paikallisen jännityshuipun (ilmiö e), kuten nikkelisulfidin (NiS) ja nopean kuumenemisen eli lämpöshokin (ilmiö a) aiheuttaman jännityksen mahdollisuus voitiin sulkea pois. Umpion sisäisestä paineesta (ilmiö c) johtuvan särön alkukohta riippuu ruudun reunaehdoista: vapaasti tuettu alkaa keskipaikkeilta, jäykästi kiinnitetty pitempien sivujen keskeltä. Näitä ilmiöitä katsotaan myöskin kvantitatiivisesti

alempana. Särön alkaminen rikkoutuneista ikkunoista on rekisteröity tarkastelemalla säröjen reunoja ja risteymäkohtia mikroskoopilla. Särön muodostamat kulmat lasipintoihin sekä reunoihin mitattiin. Vaurioita katsottiin mikroskoopilla (suurennos säädettävissä asteittain välillä 7,2 - 56) särön ja lasilevyn reunan yhtymäkohdassa (< 10 mm lasilevyn reunasta). Kuvassa 1 on tyypillinen särön muoto ruudun reunassa. Tutkimuksesta voitiin päätellä, että särö on alkanut ikkunan reunasta. Samoin särön kulkusuunta selvisi. Alkukohdasta paljastui pieni paikallinen vaurio, kuten kuvan 1 alaosassa särö 2b.



Kuva 1. Kentällä rikkoutuneiden ikkunoiden säröjen kulku ruudussa kolmessa eri ikkunassa (yläkuvat). Lasilevyn reunan vauriot särön kohdalla, alhalla vasemmalla särö 2a ja alhaalla oikealla 2b. Särön kohdalla on poistettu osa ikkunapuitteista, mistä johtuu kuvissa näkyvä puupöly. Yläkuvan nuoli osoittaa ikkunan yläosaan.

3. LASIRUUDUN TAIPUMINEN

Umpiossa oleva ikkunaruuu kuormittuu, kun paine umpion sisällä muuttuu. Lasilevy on asennettaessa hyvin tarkasti tasomainen, mutta se muuttuu jatkuvasti muotoaan vasteena paineen muuttumiselle lämpötilan muutosten ja ulkoisen paineen muutosten vuoksi. Umpion eri ruudut kytkeytyvät painekuorman välityksellä toisiinsa, mutta niiden muodonmuutoksia voidaan tarkastella yksittäisinä laattoina.

Suurillekin taipumille suorakaidelaatan taipuma on esitettävissä Fourier'n sarjana [1]

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1)$$

missä a ja b ovat ruudun mitat sekä x ja y koordinaatit vastaavien mittojen suunnassa. Umpion paineen laskemista varten tarvitaan tilavuuden muutos v , mikä jää tasolaatan ja taipuneen laatan pintojen väliin. Se saadaan integroimalla kaava (1), mistä seuraa

$$v = \int_A w(x, y) dA = \frac{4ab}{\pi^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{w_{2\mu+1, 2\nu+1}}{(2\mu+1)(2\nu+1)} = \bar{w}A \quad (2)$$

Termit suppenevat nopeasti, jolloin käytännössä riittää muutamien ensimmäisten termien etsimä tilavuuden muutoksen määrittämiseen [2]; keskimääräistä taipumaa on merkitty $\bar{w}$.

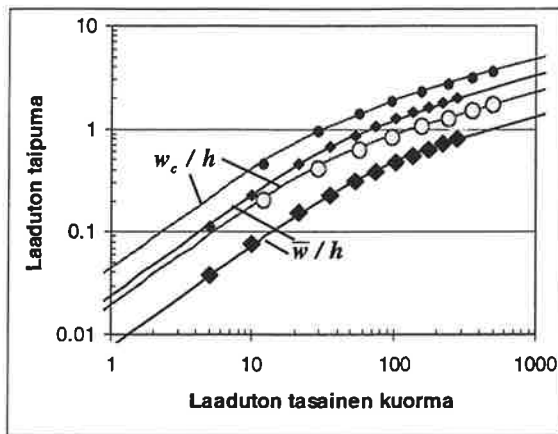
$$v \approx \frac{4ab}{\pi^2} \left\{ w_{11} + \frac{1}{3} w_{13} + \frac{1}{3} w_{31} + \frac{1}{9} w_{33} \right\} \quad (3)$$

Yhtälön (1) kertoimet on laskettava epälineaarisella laattateorialla, missä taipuma ei ole enää suoraan verrannollinen kuormaan. Tällaisista laskuista on kirjallisuudessa hyvä klassinen esitys ja yhteenveto laajasta laskentasarjasta [3]. Tarkastellaan laattaa, jonka paksuus on h ja tyypillinen mitta a . Laatan keskikohdan taipuman w_c ja sille kohtisuorasti vaikuttava painekuorma riippuvat toisistaan yleisesti yhtälön [1]

$$\frac{p}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4 = \frac{w_c}{h} \left[c_1 + c_2 \left(\frac{w_c}{h} \right)^2 \right] \quad (4)$$

mukaisesti, missä c_1 ja c_2 ovat vakioita, joiden arvot riippuvat laatan muodosta ja sen reunojen tuentatavasta. Tähän työhön poimittiin muutamia esitetyistä ratkaisuksista [3] näiden vakioiden lukuarvoja. Kuvassa 2 on esitetty yhtälön (4) kuvaajat keskikohdan taipumalle w_c ja keskimääräiselle taipumalle $\bar{w}$ kahdessa äärimmäisessä reunaehdojen yhdistelmässä. Pienillä kuormilla taipumien ollessa pieniä ($w_c < h$) taipuma riippuu kuormasta lineaarisesti kimmoisena laattana, mutta taipuman kasvaessa laatta alkaa käyttäytyä kalvon tapaan ja taipuma on lopulta verrannollinen kuorman kuutiojuureen. Kuvasta 2 nähdään myös, että keskimääräisen taipuman eli samalla myös umpion tilavuudenmuutoksen ja painekuorman välillä on yhtälön (4) muotoinen riippuvuus, kun keskipisteen taipuma w_c korvataan keskimääräisellä taipumalla $\bar{w}$.

Umpion painetilannetta voidaan nyt tarkastella suoraan viitteissä [2, 4] esitetyllä mallilla, kun sitä muutetaan hieman ottamaan huomioon umpion epäsymmetrisyys, mikä johtuu kiinnittämisestä ikkunanpuitteisiin toispuoleisesti laatan reunan tuentaa muuttaen. Auringon lämmittämässä umpioikkunassa kuormat ovat niin pieniä (laaduton kuorma $(p/E)(a/h)^4 < 20$), että olemme joko lineaarisella alueella tai melko lähellä sitä. Yhtälön (4) kertoimien numeroarvoja ei esitetä tässä, koska laskemalla muutamia ääriesimerkkejä havaittiin, että paineen noususta johtuvat jännitykset ovat epäedullisimmissakin tapauksissa pienehköjä [4].



Kuva 2. Laatan keskikohdan laaduttoman taipuman w_c/h ja keskimääräisen laaduttoman taipuman $\bar{w}/h$ riippuvuus laaduttomasta kuormasta erilaisilla laatoilla, mistä ilmenee yhtälössä (4) esitetty riippuvuus.

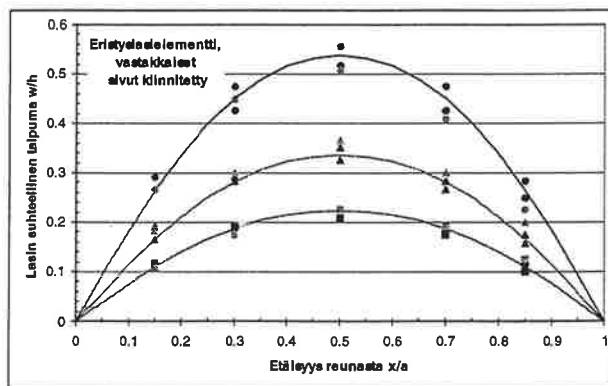
4. RUUDUN KIINNITYS PUITTEESEEN JA LAATAN TUENNAN REUNAEHDOT

Umpion laatan kiinnityksestä aiheutuvia reunaehtoja tutkittiin tekemällä taipumamittauksia kolmella erilaisella avonaisella umpioelementin kappaleella. Mitattaessa umpioiden ruutujen väliin työnnettiin kiila, jolla saatiin halutun suuruinen muodonmuutos. Laatan taipumat mitattiin sitten mittakellolla tai työntömitalla tarvittavista laatan kohdista. Laatan reunaehto vaikuttaa suurimman jännityksen esiintymiskohtaan. Vapaasti tuetulla suorakaidelaatalla se on keskipisteessä, jäykästi kiinnitetyssä laatassa pitempien sivujen keskikohdassa.

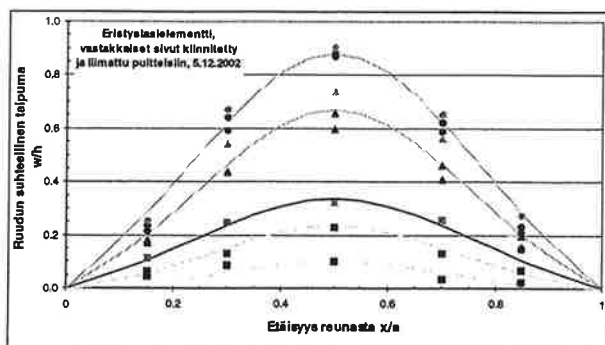
Tulosten tulkitsemiseksi mittaukset muutettiin laaduttomaan muotoon jakamalla taipumat lasiruudun paksuudella $h = 4$ mm, sekä etäisyydet ruudun suunnassa ruudun mitalla $a = 400$ mm. Mittaustulokset on esitetty graafisesti kuvissa 3 ja 4 vastakkaisilta sivuilta kiinnitetyn umpion osalta. Kuviin on sovitettu tulosten tulkitsemiseksi teoreettiset käyrät, jotka kuvaavat laatan pinnan muotoa pitkässä suorakulmaisessa laatassa. Taipuma w on likimäärin paikan funktiona suurillakin taipumilla muotoa

$$w(x) = w_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + w_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \quad (5)$$

joka saadaan ottamalla yhtälöstä (1) kaksi ensimmäistä termiä.



Kuva 3. Ruudun taipuma sivuilta vapaasti tuetussa umpiossa.



Kuva 4. Ruudun taipuma sivuilta jäykästi kiinnitetyssä umpiossa.

Vapaasti tuetulla laatalta yhtälön (5) kertoimista w_1 on vallitseva ja w_3 on positiivinen mutta itseisarvoltaan pieni. Kuvasta 3 näkyy, että tämä oletus pitää hyvin paikkansa. Suhde $w_3/w_1 \approx 0,026$. Kaikki käyrät sopivat hyvin mittausvirheiden rajoissa saatuihin pisteisiin. Tämä tilanne on hyvin puhtaasti vapaasti tuetun laatan tilanne. Mittaukset paljastavat myös pienen liimauksessa havaittavan puutteen. Liitos ei ole jäykkä vaan viruu vähitellen. Tässä se näkyy toistomittauksen antamina lievästi suurempina arvoina.

Kuvassa 4 on oletetusti jäykästi kiinnitetty reuna, sillä umpion ruutu oli liimattu oikeata asennustapaa jäljitellen puiseen ikkunanpuutteeseen. Käyttämällä yhtälön (5) muotoista funktiokehitysmää taipuman yritteenä [3], kerroin w_3 on negatiivinen ja vaihtelee suuruudeltaan eri käyrissä kuormituksen muuttuessa. Tämä havaittiin myös kokeellisesti, sillä alimmassa käyrässä suhde $w_3/w_1 \approx 0,25$, mutta ylimässä käyrässä vain 0,1.

Alkutilassa kuvassa 3 mitatun laatan kiinnitys on hyvin lähellä jäykästi kiinnitetyn laatan teoreettisia arvoja. Liimaus ei kuitenkaan ole pitävä. Kolme alinta käyrää saatiin, kun ruutujen välissä olevaan kiilaan ei koskettu, mutta sama taipuma mitattiin vierekkäisistä kohdista alle puolen tunnin aikana kolme kertaa. Keskikohdan taipuma oli sinä aikana kasvanut noin kolminkertaiseksi. Se johtui siitä, että jäykkä kiinnitys aukesi vähitellen ja liimaliitos puutteen ja ruudun välillä antoi vähitellen periksi.

Näistä tuloksista voidaan päätellä, että umpion ikkunan ruudun reunaehdot ovat vapaasti tuettu silloin, kun ruutu on kiinnitetty vain umpion tukilistaan. Sillä puolella umpiota, missä ruutu on liimattu ikkunanpuutteeseen, reunaehto on jotain jäykästi kiinnitetyn ja vapaasti tuetun välimailta.

5. UMPION JÄNNITYKSET

Johdannossa esitetyt umpion mahdolliset jännitystilat käsitellään tässä kvantitatiivisesti niiltä osin, kun ilmiötä pidetään mahdollisina kuvan 2 tarkastelujen jälkeen. Kun ikkunaruidun toiseen pintaan kohdistuu äkillisesti energiavirta, joka voi aiheutua esimerkiksi auringon ilmaannuttua pilven takaa ja alkaessa lämmittää ikkunarakennetta, ruutuun syntyy lämpötilagradientti sen paksuussuunnassa. Säteilyn puoleinen reuna lämpenee enemmän kuin sen vastakkainen puoli. Jos pinnoissa on ohuita kalvoja, niitä ei tässä tarkastelussa tarvitse ottaa huomioon. Tämä epätasainen lämpiäminen aiheuttaa ruutuun lämpöjännitystilan nimeltään lämpöshokki (ilmiö a). Lämpöjännityksen suurin arvo σ_s ja sen esiintymishetki t_{max} säteilytyksen alkamisesta saadaan analyyttisellä teorialla [5]. Käyttämällä lasin keskimääräisiä materiaaliveikkoja: lämpölaajenemis-kerroin $\alpha \approx 8 \cdot 10^{-6}/K$, kimmokerroin $E \approx 80$ GPa, lämmönjohtavuus $k \approx 1.05$ W/Km, lämpödiffuusiokerroin $\kappa \approx 50,2$ mm²/s, Poissonin luku $\nu \approx 0.22$ sekä lisäksi aurinkovakion arvoa 1390 Wm⁻² [6], tulokseksi saadaan 4 mm lasille: $\sigma_s \approx 0,9$ MPa ja $t_{max} \approx 6,6$ s. Koska lasin vetolujuus on 30 ... 150 MPa, šokkijännitys ei riitä rikkomaan lasinruutua. Tästä on myöskin aivan lautamiesjärjen mukaista pitkäaikaista kokeellista tietoa. Šokkijännitys ei ole mitenkään erilainen

perinteisissä ikkunoissa nykyaikaisiin verrattuna. Koska tällaiset ikkunat eivät lämpimissäkään maissa rikkoutu auringon pilkahdettua pilven takaa, mekanismi ei ole ikkunoille vaarallinen.

5.1 Taipuneen laatan jännityksiä

Taivutusjännitys ruudun kulmissa (ilmiö b). Ikkunan puite on vahva verrattuna lasiruudun jäykkyyteen. Jännityksettömänä ruutu on tasolevy ja pysyy sellaisena myös puitteeseen asennettuna. Puite pitää sen reunat samassa tasossa vaikka ruudun muodostama laatta muuttaisi muotoaan jouduttuaan erilaisten kuormitusten alaiseksi. Tällaisia kuormituksia ovat lämpösäteilyn epätasainen jakautuminen ruudun poikkileikkaukseen ja paine-erot umpion sisä- ja ulkopuolen välillä. Kun ruudun poikkileikkaukseen syntyy lämpötilagradientti ΔT , ruutu pullistuu lämpölaajenemisen vaikutuksesta kuumempaan suuntaan muodostaen pallopinnan, joka on jännitteetön silloin kun muodonmuutokset ovat esteettömiä. Kun laatan reuna on tiukasti puitteessa kiinni, muodonmuutokset eivät ole vaipaita. Laatan kulmiin syntyy jännitys σ , jonka suuruus lasketaan analyyttisellä kaavalla [7]. Ikkunalasille tarvittaisiin $\Delta T > 280 \text{ K}$, jotta lasin vetojännitys ylittyisi. Tämä on vähintään kerralukua suurempi arvo, kuin mitä mittauksilla on havaittu ruudun pintojen väliseksi lämpötilaeroksi. Tämä ilmiö ei voi siten olla rikkoutumisen syy.

Taivutusjännitys ruudun keskellä tai pitkän sivun keskellä (ilmiö c). Paine-ero umpion sisä- ja ulkopuolen välillä aiheuttaa ruutuun tasaisesti jakautuneen painekuorman. Sen suuruus umpion sisällä saadaan kaasun lämpötilan funktiona käyttäen täyteen kaasun tilanyhtälöä sekä kaavalla (3) laskettavaa tilavuudenmuutosta. Tulokset saadaan nopeasti käyttäen viitteessä [4] esitettyjä tuloksia. Vapaasti tuetun laatan ruudun keskelle syntyy paineen vaikutuksesta taivutusjännityksen maksimi σ , jonka arvo taas saadaan analyyttisellä kaavalla, [7]. Paineen lukuarvot riippuvat laatan muodosta ja reunanehdoista. Viitteessä [4] on tarkasteltu kysymystä yleisemmin ja osoitettu, että tämä jännistystila johtaa lasin murtumiseen vain melko harvinaisissa tilanteissa.

Kun laatta on jäykästi tuettu, paineistetun umpion maksimijännitys esiintyy ruudun pidemmän sivun keskellä. Kuvasta 1 voisi pinnallisesti epäillä, että ainakin ruuduissa 3 ja 4 tämä olisi ollut särön alkamiskohta. Kuitenkin: (1) jännityksen arvo on vapaasti tuetun laatan arvoa pienempi ja (2) jännityshuippu on ikkunalistan reunassa eikä ruudun reunassa, joten ilmiö c ei ole myöskään säröytymisen syy.

5.2 Vetojännitys ruudun reunassa (ilmiö d)

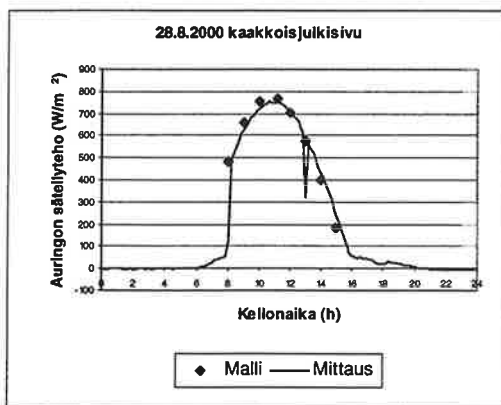
Kun ikkunaruuu on asennettuna puitteeseen, sen reunat eivät ole alttiina lämpösäteilylle vaan ovat syvällä puitteen sisällä. Puite on kuumana kesäpäivänäkin viileämpi kuin ikkunan kuumimmat osat. Reunoilta lasi jäähtyy lämmönjohtumisesta puitteeseen. Kun lasiin syntyy pinnan suuntaisia lämpötilaeroja ΔT matalampien lämpötilojen alueella syntyy vetojännitystä, jonka suuruus σ_v lasketaan kaavalla [8, 9]

$$\sigma_v = E\alpha \Delta T \quad (6)$$

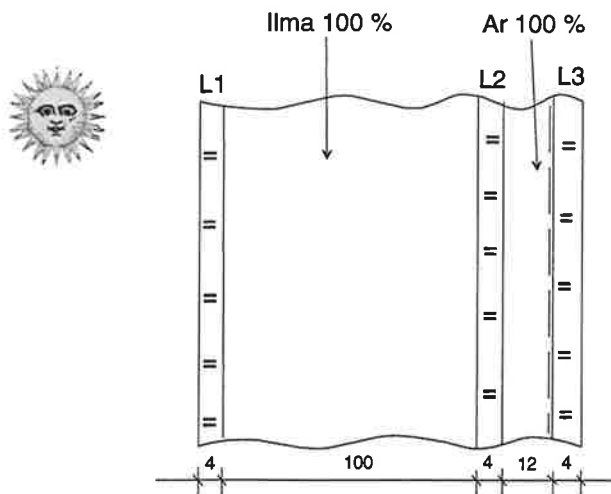
missä E on lasin kimmokerroin ja α on lasin lämpölaajenemiskerroin. Murtojännitys riippuu lasin laadusta. Vaaralliseksi reunan lämpöhjännitys kasvaa, kun lämpötilaero on luokkaa 70 ... 100 K. Kentältä tehdyt mittaukset osoittivat, että suurimmillaan ruudun lämpötila oli 75 °C. Jos oletamme ruudun reunan puitteen sisällä olleen silloin vielä lähellä huoneenlämpötilaa 20 °C, lämpötilaero olisi silloin suurimmillaan 55 K. Vaikka tämä jännitys on voimakkain tähän mennessä esitetyistä ilmiöistä (a-c, e), sekään ei vielä kaavan (6) mukaan riitä rikkomaan ruutua, jos sen esittämä vetojännitys olisi ainoa lasia rasittava tekijä.

6. IKKUNAN LÄMPENEMINEN

Ikkunan lämpeneminen riippuu auringon asemasta. Käyttäen auringon säteilyyn ja pallotähtitieteeseen liittyviä yhtälöitä [6, 10, 11] auringonsäteilyn tehottiheys pystysuoralle ikkunalle voidaan laskea paikkakunnan koordinaattien, päivämäärän ja kellonajan funktiona. Esimerkkinä esitetään kuvassa 5 auringonsäteilyn tehottiheys kaakkoispuoleiselle (kuva 5) ikkunalle pääkaupunkiseudulla ($\Phi \approx 60^\circ$ pohjoista leveyttä ja $L \approx 25^\circ$ itäistä pituutta) 28.8.2000. Kuvassa 5 on myös 28.8.2000 aikana mitattu auringon tehottiheys. Lasketun ja mitatun tehottiheyden välinen yhteensopivuus on hyvä.



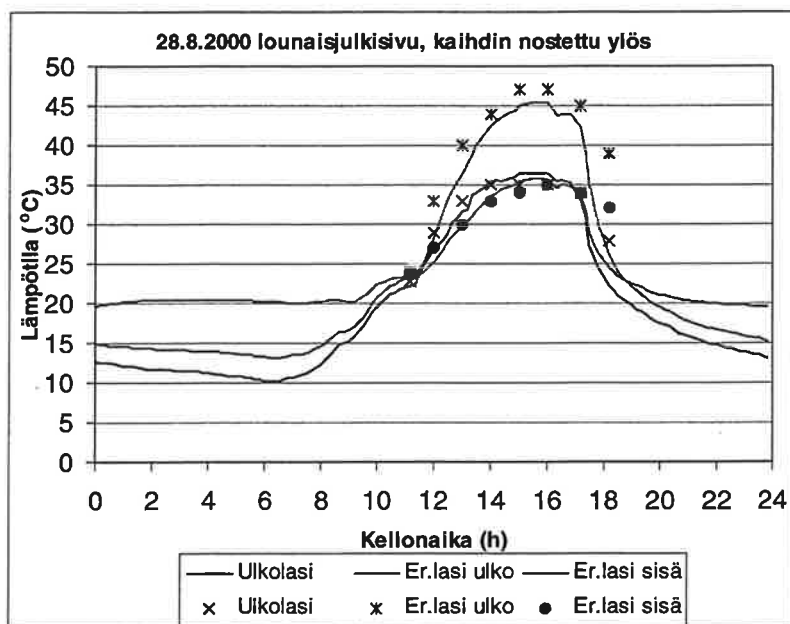
Kuva 5. Laskettu (vinoneliöt) ja mitattu (yhtenäinen viiva) auringonsäteilyn tehottiheys kaakkoispuoleiselle pystysuoralle pinnalle (ikkunalle).



Kuva 6. Lasiyhdistelmä FRAME™ plus 5.1-ohjelman laskentaa varten.

Tällä tavalla laskettuja tehottiheyksiä voidaan käyttää ikkunoiden analysointiohjelmien syöttötietoina ikkunoiden lämpiämisen laskemiseksi. Ikkunalasien pintojen lämpötiloja on laskettu

ikkunoiden lämpötekniiseen analyysiin tarkoitettulla valmisohjelmalla FRAMETMplus 5.1 [12] auringon tehotiheyskäyrän avulla. Laskennan tuloksia on verrattu todellisten ikkunoiden mitattuihin pintalämpötiloihin. Ikkunat olivat MSE-tyyppisiä ikkunoita, joiden eristyslasissa oli Iplus R-selektiivilasi ja argon täytekaasu 12 mm umpiotilassa. Muut kaksi lasia olivat kirkasta float-lasia. Ikkunoiden ruutujen paksuudet olivat 4 mm. FRAMETMplus 5.1-ohjelman käyttämistä lasi- ja välilistakirjastoista voidaan muodostaa haluttuja lasiyhdistelmiä yleisimmillä täytekaasuilla. Nämä kirjastot sisältävät Kanadassa ja Yhdysvalloissa käytettyjen tuotteiden tietoja, ja niistä muodostettiin lasiyhdistelmä jonka osien ominaisuudet ovat lähellä mitattujen ikkunoiden ominaisuuksia. Kuvassa 6 esitetään laskennan lasiyhdistelmä. Lasien L1 ja L2 välissä oli 100 % ilmaa ilman välilistaa sekä lasien L2 ja L3 välissä 100 % argonia. Al-välilistan tiivistysmassana oli polyisobutyleeni ja polysulfidi. Lasiyhdistelmän korkeus oli 1000 mm. Kuvassa 7 näkyy laskennan tulos. Yhtenäiset käyrät ovat todellisesta kohteesta mitattuja ja pisteet tällä ohjelmalla laskettuja lämpötiloja. Yhteensopivuus on erittäin hyvä mutta ei aivan täydellinen, koska ohjelma ei sisältänyt kaikkia suomalaisen teollisuuden käyttämiä komponentteja. Tämän työn tarkoituksiin tulos oli kuitenkin niin vakuuttava, että voimme väittää ohjelmiston sisältävän kaiken olennaisen lämpötilojen laskemiseen tarvittavan tiedon.



Kuva 7. Lounaisjulkisivun mitatut ja lasketut ulkolasin ulkopinnan, eristyslasin ulkopinnan ja eristyslasin sisäpinnan lämpötilat.

7. SÄRÖN ETENEMINEN LASISSA

Lasi on luonteeltaan hauras materialia ja sen luonne vaikuttaa myös tässä käsitellyssä ongelmassa. Hauras materiaali on täynnä pieniä säröjä, joiden koko alkaa molekyyliatasolta ja ulottuu pahimmillaan yli koko ruudun. Tällainen särö on havainnollisesti nähtävissä kuvan 1 alaosassa oikealla. Lasin kestäminen varsinainen avain löytyykin näiden säröjen teorian kautta. Sen perusteella voimme ymmärtää, milloin särö on vakaa, milloin se taas saattaa alkaa kasvaa.

Säröjen yksinkertainen teoria on tunnettu olennaisilta osiltaan jo vuodesta 1920, jolloin Griffith esitti sitä käsittelevän mallinsa. Silti säröt ovat edelleenkin vilkkaan tutkimuksen

kohteena, sillä nykyaikainen laskentateknikka on on avannut uusia mahdollisuuksia teoreettisten mallien luomiseen sekä mittaustekniikka niiden tulosten todentamiseen ja säröjen kuvantamiseen aina atomitasolle ulottuvalla tarkkuudella. Selostamme tässä Griffithin teoriaa [13] ja lisäämme siihen katsauksen viimeaikaisimmasta kehityksestä. Pienen särön, pituus c , yksinkertaistettu malli tasaisessa levyssä on ellipsi. Levyä kuormittaa voima F aiheuttaen siihen vetojännitystilaa, jonka suuruus on keskimäärin σ , kun oletamme voiman F jakautuvan tasaisesti koko levyn sivun pituudelle. Kun levyssä on särö, tämä tasainen jännityskenttä muuttuu. Jos ellipsin pääakselien pituudet ovat b ja c , jo 1913 Inglis osoitti, että suurin jännitys σ_{yy} esiintyy ellipsin kapeammassa kärjessä ja sen suuruus on

$$\sigma_{yy} = \sigma(1 + 2c/b) \quad (9)$$

Koska särön ellipsi on kapea, ts. $b \ll c$, huippuun syntyy voimakas jännityskeskittymä. Aluksi luultiin, että haurasmurtuma syntyy ja särö lähtee kasvamaan silloin, kun σ_{yy} ylittää aineen teoreettisen murtolujuuden. Griffithin uusi löytö 1920 oli, että särö lähtee kasvamaan vasta sitten, kun särön pituus c saavuttaa tietyn vähimmäinpituuden, jota voidaan kutsua särön kriittiseksi pituudeksi c^* . Se määräytyy energiaperiaatteesta. Kaksi jännitetyn levyn kokonaisenergiaan vaikuttavaa termiä ovat kimmoinen muodonmuutosenergia ja särön pintaenergia γ , jonka lukuarvot vaihtelevat lasilaadusta riippuen huoneenlämpötilassa välillä 3,50 ... 4,32 J/m². Särön pintaenergia γ on analoginen nesteen pintajännitysenergialle ja aiheutuu samasta syystä. Pinnassa oleviin atomeihin vaikuttavat voimat suuntautuvat aineen sisään päin. Aineen keskellä olevissa atomeissa nämä voimat suuntautuvat suurin piirtein symmetrisesti kaikkiin suuntiin. Särön syntyessä levyn pinta-ala kasvaa verrannollisena särön pintojen yhteiseen pituuteen.

Kun levyä jännitetään ehjänä ilman säröä, kimmoisen muodonmuutoksen synnyttämiseen tarvittava työ on verrannollinen venymän neliöön. Kun levyssä on särö, jännitys ja siten myös venymä on nolla likimain sellaisen särökeskisen ympyrän sisällä, minkä säde on c . Tämä pienentää muodonmuutosenergiaa suhteellisesti tämän ympyrän alan ja levyn alan suhteessa. Näiden yhteisvaikutuksesta kokonaisenergia muuttuu säröistä levyä jännitettäessä. Pintajännitysenergia kasvaa verrannollisena särön c pituuteen, mutta muodonmuutosenergia vähenee verrannollisena särön pituuden neliöön. Kokonaisenergian kuvaaja c :n funktiona on alaspäin aukeava paraabeli. Pienillä särön pituuksilla c energian muutos kasvaa, jolloin särön pituus on vakaa. Kun pituus c kasvaa, muodonmuutostyö pienenee nopeammin kuin pintaenergia kasvaa. Saavuttaessa paraabelin huippuun tullaan särön kriittiseen pituuteen c^* . Särö on tullut energieettisesti epästaabiiliksi. Se kasvaa ilman ulkoista energian lisäystä. Sen arvo saadaan kaavalla

$$c^* = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma_f^2} \quad (10)$$

missä E on lasin kimmokerroin, ja σ_f lasin murtolujuus. Tyypillinen arvo lasien kriittiselle särön pituudelle on 20 μm . Griffithin energiakriteeri on riittävä, mutta ei välttämätön ehto särön kasvulle. Orowan osoitti kuitenkin jo 1955, että todella hauraassa aineessa särön kärjen kaarevuussäde on atomien välisen etäisyyden suuruusluokkaa. Siten heti kun energiaehto kasvaa riittäväksi, myöskin särö lähtee kasvamaan. Lasia voitaneen pitää tällaisena hauraana aineena.

Kun särön pituus on ylittänyt kriittisen arvon c^* , se kasvaa nopeasti ja rikkoutuminen tapahtuu kuormitetussa ruudussa hyvin lyhyen ajan sisällä. Ikkunateollisuuden kannalta tämä ei kuitenkaan ole vielä riittävää. Eri tehtailla sekä rakennustyömailla asennuksen jälkeen rikkoutuneet ikkunat havaitaan laadunvalvonnassa ja erilaisissa tarkastuksissa, jolloin ne poistetaan hylkyinä ja perusteluna on erilaiset valmistus- sekä työvirheet. Lasi asennetaan kuitenkin rakennukseen, jonka elinkaari on tyypillisesti 50 vuotta. Vaikka aika on paljon pitempi kuin tämän alan takuuajat, lasiteollisuus joutuisi huonoon valoon, mikäli ikkunat rikoutuisivat vähitellen itsestään tuon ajan

sisällä. Historiallinen kokemuksemme on, että ikkunat voivat säilyä ehjinä satoja vuosia. Kohteessa jännityksen alaiseksi joutuvassa ikkunassa on sisäänrakennettu mekanismi, joka saattaa rikkoo sen paljon nopeammin ellei sitä ole valmistettu riittävän lujaksi. Wiederhorn teki laajoja mittauksia säröistä lasista jo klassiseksi tullessaan työssään [13]. Hän havaitsi, että jo aiemmin tunnettu säröjen kasvu riippuu kuormituksesta ja siinä havaitaan jännityksen lisääntyessä kolme erilaista aluetta: (I) alimmilla kuormituksilla eksponentiaalisesti jännityksen funktiona lisääntyvä kasvunopeus, (II) likimain vakiona pysyvä alue, missä särön kasvua rajoitti veden diffuusio särön kärkeen ja (III) uusi voimakas eksponentiaalisen kasvun alue, mikä ei enää riippunut kosteudesta. Tässä merkittävää oli Wiederhornin havainto, että alueella I särön kasvu riippuu ympäröivän ilman kosteudesta. Mekanismi oli jännityskorroosio aivan särön terävässä kärjessä.

Vaikka ikkunalasi kohteeseen asennettuna olisi sellainen, että siinä ei ole yhtään kriittisen kokoista säröä, tämä jännityskorroosio aiheuttaa sellaista särön kasvua, että jonkin ajan kuluttua jokin niistä voi ylittää tämän rajan ja johtaa rikkoutumiseen. Nämä lasin särön kasvun fenomenologiset teoriat ovat jo vanhoja, mutta tuore katsaus osoittaa [14], että ne ovat edelleenkin pitäviä olennaisilta osiltaan makroskooppisella tasolla. Uudemmissa mittauksissa on voitu varmistaa, että alemmilla jännitystasoilla kasvunopeus pienenee ratkaisevasti, joten perusteita löytyy turvallisen jännitysrajan määrittämiselle. Tähän tuo vielä yhden lisän ikkunassa esiintyvä vaihtuva kuorma, mikä yleensä lisää murtumisriskiä. Jo 1977 Michalske esitti mittaustekniikan, millä tämä jännityskorroosion turvaraja oli määritettävissä [14], ja se on sen jälkeen otetty yleisesti käyttöön alan tekniikassa. Kun tuotteelle halutaan turvata riittävä elinikä, sitä on testattava tietyllä tavalla kiihdyttämällä, esimerkiksi ylittämällä kentoolosuhteiden rasitukset hallitulla tavalla.

Murtumismekaniikassa materiaalit on perinteisesti jaettu hauraisiin kuten lasi ja sitkeisiin kuten metallit. Viime aikoina sitkeiden aineiden murtumismekanismit on voitu selittää jo atomitasoon ilmiöistä alkaen teoriaa, laskentamenetelmiä ja uusinta mittaustekniikkaa käyttäen. Hauraiden aineiden kuten lasin murtumisen selitys on jäänyt kvalitatiiviselle tasolle. Wiederhorn [15] teki nuorempien avustajiensa kanssa aivan äskettäin uusia havaintoja atomivoimamikroskooppilla särön etenemisestä. Se oli tarpeen, koska optisella mikroskooppilla ei saatu näkyviin riittävästi yksityiskohtia särön varsinaisesta rakenteesta. Erityisesti keskityttiin katsomaan, mitä tapahtuu särölle, kun sen eteneminen pysäytetään poistamalla kuormitus joksikin ajaksi ja palautetaan se sitten takaisin. Nämä kokeet osoittivat, että särön etenemisen vanhat teoriat eivät yksityiskohdiltaan olleetkaan enää riittävän tarkkoja. Kuitenkaan Wiederhorn työtovereineen ei osannut tulkita mittaustensa tuloksia oikealla tavalla.

Erityisesti Ranskassa tutkimus oli edennyt jo uusille teille sekä teorianmuodostuksessa [16], että kokeellisella alueella [17]. Hiukan myöhemmin Célarié ym. [18] mittasivat myös atomivoimamikroskooppia käyttäen särön etenemistä lasissa. Kokeiden tulokset on nähtävissä havainnollisessa muodossa sähköisesti, joiden johtopäätökset tutkimusryhmästä Marlière tiivistä seuraavasti [19]: "Niinpä tapa, jolla lasi ja metallit murtuvat on hyvin samankaltainen, mutta lasissa tuhat kertaa pienemmissä mitoissa." Tästä syystä lasin murtumapintaa on pidetty tasaisena vastakohtana metallien rosoiseen murtumapintaan. Optisella mikroskooppilla ei nähty tätä rosoisuutta, jonka mittaamiseen tarvitaan nanometrialueella toimivia mittalaitteita. Olennaista oli, että teoreettisten mallien käyttö [16], auttoi ymmärtämään tätä tulkintaa. Kun nyt tunnemme tämän lasin murtumamekanismin hyvin syvällisesti, lasiteollisuus kysyy aikanaan valmistamaan materiaalia, jonka lujuusominaisuudet ja jännityskorroosion kesto ovat nykyisiä paljon parempia. Toistaiseksi alan teollisuuden on kuitenkin tyydyttävä konstruktionsa kehittämiseen, laadunvalvonnan tiivistämiseen sekä tuotteittensa kiihdytettynä ikätestiin rikkoutumisien vähentämiseksi.

9. YHTEENVETO

Tässä artikkelissa esitetään teoreettinen malli, millä ikkunan lasiruutujen lämpötila voidaan laskea moninkertaisen ikkunarakenteen sisällä ottaen huomioon auringon asema sekä lämpötilat ikkunaseinän sisä- ja ulkopuolella. Mallin ennusteita verrataan kesäkauden pituisiin kenttähavaintoihin yhdestä kohteesta. Se osoittaa, miksi hyvin lämpöä eristävässä ikkunassa rakenteen sisällä olevat lasiruudut lämpenevät voimakkaasti, sekä antaa kvantitatiivisen työkalun näiden lämpötilojen ennustamiseen.

Ikkunalasin rikkoutumiseen moninkertaisen, myöskin eristyslaselementtejä sisältävän ikkunarakenteen sisällä on useita mahdollisia syitä. Artikkelissa on mallitettu kvantitatiivisesti useimmat tällaiset mekanismit ja laskettu niistä lasiin kohdistuva jännitys, jota on verrattu käytettyjen lasilaatujen lujuusominaisuuksiin. Ikkuna koostuu kahdesta tai useammasta tasolasilevystä, jotka on liimattu ilmatiiviisti kehykseen. Kun tällaisen ikkunan sisä- ja ulkopintojen välillä on lämpötilaero, umpiossa oleva kaasua aiheuttaa ikkunaan erilaisia jännityksiä. Kvantitatiivisesti mikään niistä ei kuitenkaan ollut niin suuri, että se olisi kyennyt selittämään havaittujen murtumisten esiintymistä.

Sitävästoin ikkunan lasiruudun epätasainen lämpiäminen on osoittautunut suurimmaksi rasitukseksi pelkästään jännityslaskelmien perusteella. Tämän mallin mukaan rikkoutuminen alkaa voimakkaasti lämpiävän lasiruudun reunasta. Reuna on ikkunan keskiosaa viileämpi, koska siitä johtuu lämpöä huomattavasti viileämpiin kehys- ja karmirakenteisiin. Ruudun reunaan syntyy silloin vetojännitystä. Koska lasi on haurasta materiaalia, veto reunassa johtaa helposti siellä jo olevien pienten säröjen kasvuun ja lopulta rikkoutumiseen.

Tämän oletuksen pätevyyttä testattiin tarkastelemalla mikroskoopilla useiden kentällä rikkoutuneiden lasiruutujen säröjä. Tutkimuksessa ilmeni, että rikkoutumisen pääasiallisena syynä on lasiruudun lämpiämisestä johtuvan vetojännitystilan sekä ikkunan reunassa olevan vian yhteisvaikutus. Hauraaseen lasimateriaaliin syntyy valmistusprosessissa helposti pieniä paikallisia vikoja, joissa jäännösjännitys voi nousta jo lähelle lasin lujuutta. Kun ruutu sen jälkeen kuormittuu lämpötilaerojen seurauksena uuteen makroskooppiseen jännitystilaan, särö voi alkaa kasvaa tästä pienestä vikakohdasta.

Haurasmurtumalle on tyypillistä, että tietyn kriittisen koon ylittänyt särö lähtee kasvamaan. Särön syntyessä jännittyneen kappaleen muodonmuutostyö pienenee, mutta samalla pintajännitysenergia kasvaa kappaleen pinnan suurentuessa. Ellipsin muotoiselle särölle edellinen on verrannollinen särön pituuden neliöön, jälkimmäinen särön pituuteen. Kun hauraassa lasissa särö kasvaa yli 20 μm :n pituiseksi, se muuttuu energeettisesti epävakaaaksi, mikä on välttämätön ehto särön kasvulle. Koska haurassa aineissa särön kärjen kaarevuussäde on atomien välisen etäisyyden suuruusluokkaa, myös paikallinen jännitys kasvaa siellä korkeaksi ylittäen teoreettisen murtolujuuden, mikä on riittävä ehto särön kasvulle. Nämä yhdessä johtavat särön etenemiseen läpi koko lasiruudun seuraavaan eteen tulevaan reunaan saakka. Etenevä särö voi myös haarautua kahteen tai useampaan säröön ilmeisesti kohdatessaan paikallisen vikakohdan, mikä johtaa sitten nopeasti koko ikkunaruuun tuhoutumiseen.

Jännityskorroosio aiheuttaa säröjen kasvua siten, että ikkuna voi rikkoutua ptkänkin ajan kuluttua kohteeseen asentamisesta. Laadunvalvonnalla tuotannon eri vaiheissa sekä kiihdytetyllä elinajan testauksella alan teollisuuden olisi varmistettava, että uusien energiatehokkaiden ikkunoiden lasiruutujen kestävyys on suhteessa rakennuksen elinkaariaikaan sekä mahdollisiin tuotteiden takuuaikeihin.

LÄHDELUETTELO

1. Timoshenko, S.P. & Woinowsky-Krieger, S., 1959. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, Auckland, Second Edition, 580 s.
2. Keski-Rahkonen, O., 1978. Umpiolasi-ikkunan pintalämmönläpäisykertoimen lämpötilariippuvuus, Rakennustekniikka 7/1978, s. 429 - 731.

3. Levy, S., 1949. Large Deflection Theory for Rectangular Plates, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Non-Linear Problems in Mechanics of Continua, Vol. I., American Mathematical Society, New York, 197 - 210.
4. Keski-Rahkonen, O., 1981. Umpioikkunan jännityksistä, Rakennustekniikka 8/1981, s. 549 - 551.
5. Boley, B.A. & Weiner, J.H., 1960. Theory of Thermal Stresses, Wiley, New York, 586 s.
6. Karttunen, H., Oja, H., Kröger, P. & Poutanen, M. (toim.) 1984. Tähtitieteen perusteet. Helsinki: Tähtitieteellinen yhdistys Ursa. 615 s.
7. Roark, R.J., 1965. Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, New York, 4th Edition, 432 s.
8. Keski-Rahkonen, O., 1988. Breaking of window glass close to fire, Fire and Materials, Vol. 12, 61 - 69.
9. Keski-Rahkonen, O., 1991. Breaking of window glass close to fire, II: Circular panes. Fire and Materials, Vol. 15, 11 - 16.
10. Duffie, J.A. & Beckman, W.A. 1991. Solar engineering of thermal processes. Second Edition. New York, Wiley. 919 s.
11. Lunde, P. J. 1980. Solar thermal engineering: space heating and hot water systems New York: John Wiley & Sons. 612 s.
12. FRAMETMplus V5.1. 2002. Ottawa, Canada: CANMET Energy Technology Centre, Energy Sector, Natural Resources Canada. [viitattu 2.4.2003]. Saatavissa: <http://www.frameplus.net/>
13. Rawson, R. 1980. Properties and Application of Glass, Elsevier, Amsterdam, 318 s.
14. Fuller, E., Luecke, W. & Freiman, S. 2001. Influence of Water on the Crack Growth in Glass, teoksessa: D. R. Lide, (toim.), A Century of Excellence in Measurements, Standards, and Technology - A Chronicle of Selected NBS/NIST Publications 1901-2000, NIST Special Publication 958, 181 - 183.
15. Wiederhorn, S.M., Dretzke, A. & Rödel, J. 2002. Crack Growth in Soda-Lime-Silicate-Glass near the Static Fatigue Limit, Journal of the American Ceramic Society 85, 2287-2292.
16. Van Brutzel, L. 1999. Contribution à l'étude des mécanismes de rupture dans les amorphes: étude par dynamique moléculaire de la rupture de verre de silice, Paris VI University, väitöskirjan esittely, <http://www.onera.fr/formationparlarecherche/soutenances1999/1126-lvb.html>
17. Marlière, C., Despertis, F., Etienne, P., Woignier, T., Dieudonné, P., Phalippou, J., 2001. Very large-scale structures in sintered silica aerogels as evidenced by atomic force microscopy and ultra-small angle X-ray scattering experiments, Journal of Non-Crystalline Solids 285, 148-153.
18. Célarie, F., Prades, S., Bonamy, D., Ferrero, L., Bouchaud, E. C. Guillot, C. & Marlière, C., 2003. Glass Breaks like Metal, but at the Nanometer Scale, Physical Review Letters 90, 075504-1.
19. Winerman, L. 2003. Breaking Glass under a Microscope, <http://focus.aps.org/story/v11/st9>

MITC4-KUORIELEMENTIN KONVERGENSSIOMINAISUUDET

V. HAVU, H. HAKULA

Matematiikan laitos
PL 1100 02015 Teknillinen korkeakoulu
s-posti: Ville.Havu@hut.fi

TIIVISTELMÄ

Tässä esityksessä analysoimme yhtä kaikkein tunnetuinta matala-asteista kuorielementtiä, MITC4-elementtiä. Suotuisissa olosuhteissa MITC4 pystyy helposti tavoittamaan kuoren muodonmuutokset sekä antamaan luotettavia vastauksia myös lukkiutumisesta kärsivissä kuoren tiloissa. Toisaalta elementtiin tehdyt muutokset saattavat synnyttää tuloksia vääristävän konsistenssivirhekomponentin tapauksissa, joissa lukkiutuminen ei ole ongelma. Esitämme sekä teoreettisia että numeerisia tuloksia hyödyntäen MITC4-elementin muunnosta kaksiulotteiseksi, kuoren keskipinnalla määritellyksi elementiksi.

1 JOHDANTO

Kuorien elementtimenetelmällä tapahtuvassa numeerisessa mallinnuksessa perinteinen ja edelleenkin yleisin menettelytapa on käyttää suoraan kolmiulotteisen elastisuusteorian yhtälöihin matala-asteista bilineaarista diskretaatiota. Tähän liittyen joudutaan suorittamaan erilaisia dimensioireduktioita sekä kuoren geometrian approksimointia. Lisäksi konvergenssin saavuttamiseksi myös taipumadominoiduissa tiloissa on välttämätöntä turvautua erilaisiin numeerisiin "temppeuihin", kuten ali-integrointiin tai epästandardiin interpolointiin. Tehtävä on vaikea, koska lopulliset tavoitteet ovat jossain määrin ristiriitaisia. Toisaalta on tärkeää tavoittaa kaksiulotteisessa mallissa kolmiulotteisen teorian asymptoottinen ratkaisu mahdollisimman tarkasti, kun taas toisaalta tietyt tätä konsistenssia rikkovat toimenpiteet ovat välttämättömiä numeerisen lukkiutumisilmiön käsittelemiseksi.

Vaikeat kuoritehtävät ovatkin poikineet lukuisia ratkaisuehdotuksia pääasiassa erilaisten kuorielementtien muodossa. Näistä tunnetuin ja ehkäpä menestyksekkäinkin on bilineaarinen MITC4-elementti [1]. Tosin on todennäköistä, että monet vastaavaan tarkoitukseen suunnitellut kuorielementit ovat toteutukseltaan lähes MITC4-elementin kaltaisia. Tarkastelemme tässä paperissa MITC4-kuorielementin konvergenssiominaisuuksia sekä teoreettiselta kannalta että esimerkin voimalla. Analyysimme perustuu tulkintaan, jonka mukaan MITC4 voidaan käsittää kaksiulotteiseksi bilineaarielementiksi, johon on tehty tiettyjä modifikaatioita elementille asetettujen vaatimusten täyttämiseksi [2]. Analyysi rajoittuu pyörähdysyymmetristen kuorten tapaukseen mutta jo näiden perusteella havaitaan, että MITC4-elementti on yhdistelmä operaatioita, joiden tarkoituksena on vähentää lukkiutumista taipumadominoiduissa tiloissa mutta silti säilyttää elementin konsistenssi kalvodominoituissa tiloissa.

2 KUORIMALLI

Tarkastelun pohjana läpi koko paperin on Reissnerin ja Naghdin kuorimalli, jossa ongelman dimensio on redusoitu kahteen palauttamalla muodonmuutokset kuoren keskipintaan liitettyihin suureisiin. Muodonmuutokset määräytyvät kolmesta siirtymäkomponentista u, v ja w sekä kahdesta rotaatiokomponentista θ ja ψ . Merkitsemällä $\underline{u} = (u, v, w, \theta, \psi)$, voidaan kuoren skaalattu kokonaisenergia kirjoittaa kalvodominoitussa tilassa

$$\mathcal{F}_M(\underline{u}) = \frac{1}{2}(t^2 \mathcal{A}_b(\underline{u}, \underline{u}) + \mathcal{A}_m(\underline{u}, \underline{u})) - Q(\underline{u}), \quad (1)$$

ja taipumadominoitussa tilassa

$$\mathcal{F}_B(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_b(\underline{u}, \underline{u}) + t^{-2} \mathcal{A}_m(\underline{u}, \underline{u})) - Q(\underline{u}). \quad (2)$$

Tässä $\mathcal{A}_b(\cdot, \cdot)$ vastaa kuoren taipumaenergiaa ja $\mathcal{A}_m(\cdot, \cdot)$ kuoren kalvo- ja leikkausenergiaa. Parametri t on kuoren (dimensioton) paksuus ja $Q(\cdot)$ edustaa lastin potentiaalia. Bilineaarimuodot $\mathcal{A}_b(\cdot, \cdot)$ ja $\mathcal{A}_m(\cdot, \cdot)$ voidaan matalan kuoren tapauksessa kirjoittaa [3]

$$\mathcal{A}_b(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \{ \nu(\kappa_{11} + \kappa_{22})(\underline{u})(\kappa_{11} + \kappa_{22})(\underline{v}) + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \kappa_{ij}(\underline{u})\kappa_{ij}(\underline{v}) \} dx dy,$$

ja

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(\underline{u}, \underline{v}) = & 6(1 - \nu) \int_{\Omega} \{ \rho_1(\underline{u})\rho_1(\underline{v}) + \rho_2(\underline{u})\rho_2(\underline{v}) \} dx dy, \\ & + 12 \int_{\Omega} \{ \nu(\beta_{11} + \beta_{22})(\underline{u})(\beta_{11} + \beta_{22})(\underline{v}) \\ & + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}(\underline{u})\beta_{ij}(\underline{v}) \} dx dy, \end{aligned}$$

missä ν on materiaalin Poissonin luku sekä x ja y ovat kuoren pääkaarevuuskoordinaatit. Matalan kuoren tapauksessa venymät voidaan taas esittää siirtymien avulla

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + aw & \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \beta_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + bw & \kappa_{22} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \beta_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + cw = \beta_{21} & \kappa_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \kappa_{21} \end{aligned}$$

ja

$$\rho_1 = \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \rho_2 = \psi - \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Parametrit a, b ja c määräävät kuoren geometrian ja matalan kuoren tapauksessa näitä voidaan pitää vakioina yli koko kuoren.

Energiaformulaatit (1), (2) ovat tavalliseen tapaan yhtäpitäviä variaatiomuodon: Etsi $\underline{u} \in \mathcal{U}$ siten että

$$\mathcal{A}(\underline{u}, \underline{v}) = Q(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}, \quad (3)$$

missä bilineaarimuodon $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ skaalaus riippuu tarkasteltavan muodonmuutoksen tyypistä. Avaruus $\mathcal{U}$ on tässä tapauksessa energia-avaruus, jossa sopivat, ongelmakohtaiset oleelliset reunaehdot on asetettu voimaan.

2.1 KAKSIULOTTEINEN MITC4-ELEMENTTI

MITC4-kuorielementin kyky välttää kalvo- ja leikkausvenymien lukkiutuminen perustuu tiettyihin elementtiin tehtyihin bilineaarimuotoa redusoihiin muutoksiin. Nämä voidaan tulkita kaksikulotteisessa mallissa numeerisiksi modifikaatioiksi bilineaarimuotoon $\mathcal{A}_m$. Näin syntyvää muotoa voidaan merkitä $\mathcal{A}_m^h$ ja sen lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_m^h(\underline{u}, \underline{v}) = & 6(1 - \nu) \int_{\Omega} \{\tilde{\rho}_1(\underline{u})\tilde{\rho}_1(\underline{v}) + \tilde{\rho}_2(\underline{u})\tilde{\rho}_2(\underline{v})\} dx dy \\ & + 12 \int_{\Omega} \{\nu(\tilde{\beta}_{11} + \tilde{\beta}_{22})(\underline{u})(\tilde{\beta}_{11} + \tilde{\beta}_{22})(\underline{v}) \\ & + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \tilde{\beta}_{ij}(\underline{u})\tilde{\beta}_{ij}(\underline{v})\} dx dy,\end{aligned}$$

missä $\tilde{\beta}_{ij} = R^{ij}\beta_{ij}$ ja $\tilde{\rho}_i = R^i\rho_i$. Operaattorit R^{ij} ja R^i tulee valita siten, että lukkiutuminen vältetään ja konsistenssi säilyy. MITC4-elementin tapauksessa voidaan valita

$$\tilde{\beta}_{11} = \Pi_h^x \beta_{11}, \quad \tilde{\beta}_{22} = \Pi_h^y \beta_{22}, \quad \tilde{\beta}_{12} = \Pi_h^{xy} \beta_{12}, \quad \tilde{\rho}_1 = \Pi_h^x \rho_1, \quad \tilde{\rho}_2 = \Pi_h^y \rho_2, \quad (4)$$

missä Π_h^x ja Π_h^y ovat ortogonaalisia L^2 -projektioita x :n ja y :n suhteen elementteittäin vakioiden funktioiden avaruuksille $\mathcal{W}_h^x$ ja $\mathcal{W}_h^y$. Näiden lisäksi $\Pi_h^{xy} = \Pi_h^x \Pi_h^y$ on L^2 -ortogonaalinen projektiio elementteittäin vakioiden funktioiden avaruuteen. Modifioitua bilineaarimuotoa käytetään sitten elementtiapproksimaation määrittämiseen, jolloin ratkaistavana on tehtävä: Etsi $\underline{u}_h \in \mathcal{U}_h$ siten että

$$\mathcal{A}^h(\underline{u}_h, \underline{v}) = Q(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_h, \quad (5)$$

missä $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ on tavallinen bilineaarielementtien muodostama elementtiavaruus.

On selvää, että lukkiutumisen välttämiseksi on matala-asteisen elementin tapauksessa käytettävä jonkinlaista modifikaatiota konvergenssin paranattamiseksi. Sen sijaan ei ole itsestään selvää, että modifikaatio (4) on välttämättä kaikkein optimaalisin valinta. Toisaalta matala-asteisen elementin tapauksessa vaihtoehtoja on sangen rajoitetusti ja kuten tulevasta käy ilmi, monet seikat puoltavat juuri modifikaatiota (4).

3 VIRHEANALYYSI

Tarkasteltaessa MITC4-elementin kaltaisia tapauksia, joissa tehtävän bilineaarimuotoa on jouduttu muokkaamaan on tarkoituksenmukaista jakaa elementtimenetelmän virhe approksimaatio- ja konsistenssivirheeseen. Näistä ensimmäisen määrää paras mahdollinen approksimaatio, joka on olemassa avaruudessa $\mathcal{U}_h$ tarkalle ratkaisulle $\underline{u}$

$$e_a(\underline{u}) = \inf_{\underline{v} \in \mathcal{U}_h} |||\underline{u} - \underline{v}|||_h.$$

Tässä $|||\cdot|||_h = \sqrt{\mathcal{A}^h(\cdot, \cdot)}$ on modifioitu energianormi. Konsistenssivirhettä taas syntyy bilineaarimuotoon tehdystä muutoksista

$$e_c(\underline{u}) = \sup_{\underline{v} \in \mathcal{U}_h} \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{A}^h)(\underline{u}, \underline{v})}{|||\underline{v}|||_h}.$$

Approksimaatio- ja konsistenssivirheen voidaan osoittaa toteuttavan ortogonaalisuudesta seuraavan identiteetin

$$e^2 = |||\underline{u} - \underline{u}_h|||_h^2 = e_a^2 + e_c^2.$$

3.1 VIRHERAJAT

Pääasiallinen syy MITC4-elementin kehittämiseen on ollut lukkiutumisen välttämisen. Lukkiutumista taas voidaan pitää approksimaatiovirheen voimistumisena taipumadominoiduissa muodonmuutoksissa. Toisaalta MITC4-elementti on tarkoitettu yleiseksi kuorielementiksi. Tämän vuoksi konsistenssivirheenkin olisi pysyttävä hyväksyttävissä rajoissa kaikissa muodonmuutoksissa. Erityisesti tämä koskee kalvodominoituja tiloja, sillä näissä ei esiinny lukkiutumista. Kaksi tärkeintä kysymystä ovatkin

1. Kuinka hyvin MITC4 suoriutuu pääasiallisesta tehtävästään eli lukkiutumisen välttämisestä? Matemaattisesti tämä tarkoittaa approksimaatiovirheen rajoittamista taipumadominoidussa tilassa.
2. Kuinka hyvin MITC4 soveltuu kalvodominoitujen tilojen approksimointiin? Vastausta varten on tutkittava konsistenssivirheen käyttäytymistä.

Täydellistä vastausta näihin kysymyksiin on ainakin tällä hetkellä mahdoton antaa. Tehty analyysi rajoittuu pyörähdyssymmetrisiin kuoriin sekä tapauksiin, joissa elementit ovat suorakulmaisia ja verkkoparametri on vakio kuoren pyörähdyssuuntaan. Tällöin kuitenkin voidaan osoittaa seuraavaa [4, 5]:

1. Olkoon $\mathcal{U}_{0,h} = \{\underline{u} \in \mathcal{U}_h \mid \mathcal{A}_m^h(\underline{u}, \underline{u}) = 0\}$ ja $\mathcal{U}_0 = \{\underline{u} \in \mathcal{U} \mid \mathcal{A}_m(\underline{u}, \underline{u}) = 0\}$. Tällöin kullekin $\underline{u} \in \mathcal{U}_0$ pätee

$$\tilde{e}_a(\underline{u}) = \inf_{\underline{v} \in \mathcal{U}_{0,h}} \|\underline{u} - \underline{v}\|_h \leq C_1 h |\underline{u}|_2 + C_2 h^{\frac{2}{3}(s-1)} |\underline{u}|_s, \quad 2 \leq s \leq 3, \quad (6)$$

missä $C_2 = 0$ elliptisen sekä degeneroituneiden hyperbolisten ja parabolisten kuorten tapauksessa.

2. Oletetaan, että $b \neq 0$ sekä $m = 1$ elliptisen kuoren tapauksessa ja $m = 0$ parabolisten ja hyperbolisten kuorten tapauksessa. Tällöin kalvodominoitujen tilojen konsistenssivirheelle $e_{c,M}$ pätee

$$e_{c,M} \leq C_1(\underline{u})h + C_2(t, s, \underline{u})h^{1+s} + C_3(t, \underline{u})h^2, \quad s \geq 0, \quad (7)$$

missä

$$\begin{aligned} C_1(\underline{u}) &= C \sum_{ij} |\beta_{ij}(\underline{u})|_{2-m}, \\ C_2(t, s, \underline{u}) &= C t^{-1} \sum_{ij} |\beta_{ij}(\underline{u})|_{1+s}, \\ C_3(t, \underline{u}) &= C t^{-1} \sum_i |\rho_i(\underline{u})|_1 \end{aligned}$$

Ensimmäinen tulos (6) laajenee helposti yleisimpiin taipumadominoituihin tiloihin, sillä näissä $\underline{u} = \underline{u}_0 + t\underline{u}_1$, kun taas tulos (7), osoittaa, että konsistenssivirheen käyttäytyminen riippuu oleellisesti venymäkomponenttien β_{ij} ja ρ_i sileydestä.

4 NUMEERISET TULOKSET

Teoreettiset tarkastelut antavat aihetta testata MITC4-elementin toimivuutta tarkasti valituissa malliongelmassa. Erityisesti on syytä keskittyä virherajan (7) nostattamaan

epäilykseen, jonka mukaan konsistenssivirhe voisi kasvaa voimakkaasti kuoren paksuuden lähestyessä nollaa kalvodominoitussa muodonmuutoksessa, jos kalvovenymät β_{ij} eivät ole riittävän sileitä. Testitapauksena toimii hyvin tunnettu päistään kiinnitetty sylinterikuori, jonka säde on yksikön suuruinen ja pituus kahden yksikön suuruinen [6].

Sopivan muodonmuutostilan synnyttämiseksi lastin muodoksi oletetaan

$$Q(\underline{u}) = \int_{\Omega} \{Q_u u + Q_v v + Q_w w\} dx dy,$$

missä Q_u, Q_v , ja $Q_w \in L^2(\Omega)$. Eulerin yhtälöiden avulla voidaan erottaa kolme eri tapausta, jotka sovelutavat testitarkoitukseen:

1. Valitsemalla

$$\begin{cases} Q_u = 12(-\frac{\partial}{\partial x}\beta_{11}) \\ Q_v = 12(-\nu\frac{\partial}{\partial y}\beta_{11}) \\ Q_w = 12b\nu\beta_{11} \end{cases}$$

synnytetään muodonmuutos, jossa $\beta_{11} \neq 0$ ja $\beta_{22} = \beta_{12} = 0$. Sopivia, reunaehdot toteuttavia tiloja saadaan aikaiseksi valitsemalla

$$\beta_{11} = \cos\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right) \cos(\lambda y),$$

missä λ on positiivinen kokonaisluku.

2. Valitsemalla

$$\begin{cases} Q_u = 12(-\nu\frac{\partial}{\partial x}\beta_{22}) \\ Q_v = 12(-\frac{\partial}{\partial y}\beta_{22}) \\ Q_w = 12b\nu\beta_{22} \end{cases}$$

synnytetään muodonmuutos, jossa $\beta_{22} \neq 0$ ja $\beta_{11} = \beta_{12} = 0$. Tällä kertaa valinta

$$\beta_{22} = \sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right) \cos(\lambda y)$$

on soveltuva.

3. Valitsemalla

$$\begin{cases} Q_u = -\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\beta_{12} \\ Q_v = -\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\beta_{12} \end{cases}$$

synnytetään muodonmuutos, jossa $\beta_{12} \neq 0$ ja $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$. Nyt on mahdollista valita joko

$$\beta_{12} = \cos\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right) \cos(\lambda y),$$

tai

$$\beta_{12} = \sin\left(\frac{\lambda\pi x}{L}\right) \cos(\lambda y)$$

Kaikissa tapauksissa $b = 1/R = 1$ on sylinterin säteen käänteisluku ja $L = 2$ on sylinterin pituus. Lisäksi Poissonin luvuksi valitaan $\nu = 1/3$. Virheen mittariksi soveltuu esimerkiksi

$$\hat{e} = \frac{|||\underline{u}||| - |||\underline{u}_h|||_h}{|||\underline{u}|||},$$

missä $||| \cdot ||| = \sqrt{A(\cdot, \cdot)}$ on tavallinen energianormi. Referenssiratkaisu $\underline{u}$ etsittiin käyttäen korkean kertaluvun elementtimenetelmää sekä hieman poikkeavaa kuorimallia [2]. MITC4-elementin yhteydessä käytettiin säännöllistä suorakulmioverkkoa, jonka verkkoparametrit olivat $h_x = 0.1$ aksiaaliseen suuntaan ja $h_y = \pi/256$ periodiseen suuntaan.

Tapauksen $\lambda = 8, 16, 32$ tulokset on esitetty taulukoissa 1–3. Näistä käy selvästi ilmi, että parametrin λ kasvaessa MITC4-elementin kyky approksimoida kyseistä muodonmuutosta heikkenee huomattavasti. Erityisesti on syytä panna merkkille, että tuloksen (7) mukaisesti MITC4-elementin antaman approksimaation laatu muuttuu kuoren ohetessa.

Taulukko 1: Virheindikaattorin $\hat{e}$ arvo tapaukselle 1.

$t \setminus \lambda$	8	16	32
10^{-1}	0.26	0.39	0.24
10^{-2}	0.26	0.40	0.24
10^{-3}	0.25	0.40	0.16
10^{-4}	0.23	0.38	-0.41

Taulukko 2: Virheindikaattorin $\hat{e}$ arvo tapaukselle 2.

$t \setminus \lambda$	8	16	32
10^{-1}	0.21	0.45	0.87
10^{-2}	0.23	0.48	0.86
10^{-3}	0.34	0.52	0.46
10^{-4}	0.33	0.60	-0.83

Taulukko 3: Virheindikaattorin $\hat{e}$ arvo tapaukselle 3.

$t \setminus \lambda$	8	16	32
10^{-1}	0.22	0.46	0.90
10^{-2}	0.23	0.47	0.90
10^{-3}	0.19	0.52	0.69
10^{-4}	0.22	0.54	-0.40

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

Kuorielementtien suunnittelijoilla on ollut jo pitkään unelmana löytää ”yksinkertainen ja tehokas” ratkaisu, joka soveltuisi käytettäväksi kuoreen kuin kuoreen. Bilineaaristen elementtien menestynein versio on ollut MITC4-tyypin elementti, jossa lukkuitumista on ehkäistyt kalvo- ja leikkausjännityksiin suunnatuilla reduktioilla. Monet testit ja analyysit osoittavat, että taipumadominoituja tiloja onkin tällä elementillä mahdollista approksimoida jokseenkin luotettavasti.

Jokainen tehty reduktio tuo kuitenkin muassaan konsistenssivirheen. MITC4 pystyy approksimoimaan myös kalvodominoituja tiloja mutta sopivat testit pystyvät paljastamaan elementin heikkoudet, jotka jo teoreettiset tarkastelut onnistuivat ennustamaan. Näissä ta-

pauksissa MITC4 epäilemättä tuottaa huomattavan virheellisiä tuloksia, joita ei voi pitää luotettavina.

VIITTEET

- [1] K.-J. Bathe, E. N. Dvorkin, *A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components*, Int. J. Num. Meth. Eng., 22, (1986), 697–722.
- [2] M. Malinen, *On the classical shell model underlying bilinear degenerated shell finite elements*, Int. J. Num. Meth. Eng., 52, (2001), 389–416
- [3] J. Pitkäranta, A.-M. Matache, C. Schwab, *Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations*, Research Report No. 99-18, SAM, ETH-Zürich
- [4] V. Havu, J. Pitkäranta, *Analysis of a bilinear finite element for shallow shells I: Approximation of inextensional deformations*, Research Report A430, (2001), Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology
- [5] V. Havu, J. Pitkäranta, *Analysis of a bilinear finite element for shallow shells II: Consistency error*, Research Report A433, (2001), Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology
- [6] J. Pitkäranta, Y. Leino, O. Ovaskainen, J. Piila, *Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 128, (1995), 81–121.

JÄLKIKÄSITTELYMENETELMÄ MITC-LAATTAELEMENTEILLE

M. LYLY¹, J. NIIRANEN², R. STENBERG²

¹CSC — Scientific Computing Ltd.
Box 405, FIN-02101 Espoo
mlyly@csc.fi

²Institute of Mathematics
Helsinki University of Technology
Box 1100, FIN-02015 HUT, FINLAND
jarkko.niiranen@hut.fi, rolf.stenberg@hut.fi

TIIVISTELMÄ

Stabiloiduille MITC-tyyppisesti redusoiduille Reissner—Mindlin-laattaelementeille esitetään jälkikäsitteilymenetelmä, jonka avulla laatan taipuma saadaan kertaluokkaa alkuperäistä tarkemmaksi. Jälkikäsitteily suoritetaan elementtikohtaisesti, joten se on laskennallisesti kevyt toimenpide.

1 JOHDANTO

MITC-tyyppisesti redusoidut Reissner—Mindlin-laattaelementit ovat osoittautuneet optimaalisesti suppeneviksi ja stabiileiksi eli lukkiutumattomiksi elementeiksi [2]. Vastaaviin tuloksiin on päästy myös stabiloiduilla elementtimenetelmillä [4].

Yhdistämällä MITC-tyyppinen reduktio ja stabilointi myös lineaariset elementit on saatu optimaalisesti suppeneviksi ja stabiileiksi [2], [8], [6]. Lisäksi näissä yhdistetyissä menetelmissä taipumalle ja kiertymäkomponenteille voidaan käyttää samanasteisia, itse asiassa täysin identtisiä, yksinkertaisia interpolointipolynomeja. Myös iteratiivisten yhtälönratkaisumenetelmien näkökulmasta stabiloituja menetelmiä voidaan pitää klassisia menetelmiä parempina, koska stabiloinnin ansiosta jäykkyyssmatriisin häiriöherkkyys laskee [9].

Tässä artikkelissa esitetään lyhyesti Reissner—Mindlin-laattamallille (luku 2) edellä mainittu stabiloitu MITC-tyyppisesti redusoitu elementtimenetelmä ja sen virhearviot (luku 3). Tälle menetelmälle esitetään taipuma-approksimaation tarkkuutta parantava jälkikäsitteilymenetelmä sekä sitä vastaavat virhearviot (luku 4) ja numeeriset tulokset (luku 5).

2 REISSNER—MINDLIN-LAATTAMALLI

2.1 Variaatioformulaatio

Tarkastellaan lineaarisen, elastisen ja isotrooppisen laatan taivutusta. Laatan liukukerros on G ja Poissonin vakio ν . Laatan keskipinta $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ennen muodonmuutosta ja laatan paksuus $t \ll \text{diam}(\Omega)$.

Yksinkertaistaen tehtävää oletetaan, että Ω on konvekksi monikulmio ja että laatan reuna $\partial\Omega = \Gamma$ on jäykästi tuettu. Lisäksi oletetaan, että laatan paksuus t on vakio.

Merkinnällä $(\cdot, \cdot)_D$ tarkoitetaan $L^2(D)^d$ -sisätuloa, missä $d = 1, 2$ tai 2×2 . Lisäksi käytetään merkintää $(\cdot, \cdot)_\Omega = (\cdot, \cdot)$.

Näillä merkinnöillä ja oletuksilla jäykästi tuetun Reissner—Mindlin-laatan kimmoker-toimella skaalattu variaatioformulaatio voidaan esittää seuraavassa muodossa [1], [10], [5]:

Varaatiotehtävä 2.1. Etsi taipuma $w \in W = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_\Gamma = 0\}$ ja kiertymä $\eta \in V = \{\eta \in H^1(\Omega)^2 \mid \eta|_\Gamma = 0\}$ siten, että

$$\mathcal{E}(w, \beta; v, \eta) = (f, v) \quad \forall (v, \eta) \in W \times V, \quad (1)$$

missä $f \in H^{-1}(\Omega)$ on laatan keskipintaa vastaan kohtisuorassa oleva kuormitus. Bilineaarimuoto

$$\mathcal{E}(z, \phi; v, \eta) = Gt^3 a(\phi, \eta) + G\kappa t (\nabla z - \phi, \nabla v - \eta), \quad (2)$$

missä $\kappa > 0$ on leikkauskorjauskertoimen, ja taivutusenergia

$$a(\phi, \eta) = \frac{1}{6} \{(\varepsilon(\phi), \varepsilon(\eta)) + \frac{\nu}{1-\nu} (\operatorname{div} \phi, \operatorname{div} \eta)\}. \quad (3)$$

Lineaarinen venymätensori

$$\varepsilon(\eta) = \frac{1}{2} (\nabla \eta + (\nabla \eta)^T), \quad (4)$$

ja vektoriin kohdistuva divergenssioperaattori määritellään yhtälöllä

$$\operatorname{div} \eta = \frac{\partial \eta_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta_y}{\partial y}. \quad (5)$$

Jos oletetaan, että $f = Gt^3 g$, missä $g \in H^{-1}(\Omega)$ on riippumaton paksuudesta t , tehtävällä 2.1 on ei-triviaali ratkaisu rajalla $t \rightarrow 0$ (Kirchhoff—Love-ratkaisu) [10], [1, Proposition 3.1, p. 297].

Lisäksi voidaan olettaa, että $\kappa = 1$, koska tarkasteltavassa stabiloidussa elementtimenetelmässä leikkausenergiaa modifioidaan siten, että leikkauskertoimen arvon valitseminen jää toisarvoiseksi kysymykseksi.

Näillä oletuksilla varaatiotehtävä 2.1 voidaan esittää sekamuodossa ottamalla (skaalattu) leikkausvoima

$$q = t^{-2} (\nabla w - \beta) \quad (6)$$

uudeksi muuttujaksi avaruudessa $Q = L^2(\Omega)^2$ [1], [10], [5]:

Varaatiotehtävä 2.2. Etsi $(w, \beta, q) \in W \times V \times Q$ siten, että

$$\mathcal{M}(w, \beta, q; v, \eta, r) = (g, v) \quad \forall (v, \eta, r) \in W \times V \times Q, \quad (7)$$

missä bilineaarimuoto

$$\mathcal{M}(z, \phi, s; v, \eta, r) = a(\phi, \eta) + (s, \nabla v - \eta) + (\nabla z - \phi, r) - t^2 (s, r). \quad (8)$$

2.2 Differentiaaliyhtälöt ja reunaehdot

Variaatiotehtäviä vastaavat seuraavat differentiaaliyhtälöt ja reunaehdot [5]: Heikkoo muotoa 2.1 vastaavat differentiaaliyhtälöt ovat

$$L\beta + t^{-2}(\nabla w - \beta) = 0 \quad \Omega:ssa, \quad (9)$$

$$-t^{-2}(\Delta w - \operatorname{div} \beta) = g \quad \Omega:ssa. \quad (10)$$

Vektoriin kohdistuva differentiaalioperaattori L määritellään yhtälöllä

$$L\eta = \operatorname{div} m(\eta), \quad (11)$$

missä momenttitensori

$$m(\eta) = \frac{1}{6} \{ \varepsilon(\eta) + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \eta I \}, \quad (12)$$

ja toisen asteen tensoriin kohdistuva divergenssioperaattori määritellään yhtälöllä

$$\operatorname{div} u = \left(\frac{\partial u_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{xy}}{\partial y}, \frac{\partial u_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yy}}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Tehtävää 2.2 vastaavat differentiaaliyhtälöt ovat

$$L\beta + q = 0 \quad \Omega:ssa, \quad (14)$$

$$-\operatorname{div} q = g \quad \Omega:ssa, \quad (15)$$

$$\nabla w - \beta - t^2 q = 0 \quad \Omega:ssa. \quad (16)$$

Molempia tehtäviä vastaavat reunaehdot ovat

$$w = 0 \quad \Gamma\text{:lla}, \quad (17)$$

$$\beta = 0 \quad \Gamma\text{:lla}. \quad (18)$$

3 ELEMENTTIMENETELMÄ

3.1 Perusoletukset ja merkinnät

Aluksi tehdään joitakin tavallisia elementtimenetelmän diskreetointia koskevia oletuksia, joissa kolmion tilalla voidaan yleisessä tapauksessa puhua elementistä, esimerkiksi nelikulmiosta [3]:

Äärellinen joukko $\mathcal{C}_h$ on joukon $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ osiointi suljetuiksi kolmioiksi $K \subset \bar{\Omega}$ eli $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} K$, missä verkontiheys $h = \max_{K \in \mathcal{C}_h} h_K$ ja elementtikoko $h_K = \operatorname{diam}(K)$.

Kolmioinnin oletetaan olevan säännöllinen: Oletetaan, että on olemassa vakio $c > 0$ siten, että $h_K/\rho_K < c \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$, missä ρ_K on kolmioon K sisältyvien ympyröiden halkaisijoiden yli otettu supremum. Lisäksi oletetaan, että verkontiheys h lähenee nollaa.

Lisäksi kolmioiden oletetaan olevan yhteensopivia: Jos $K_1, K_2 \in \mathcal{C}_h$, niin $K_1 \cap K_2$ on joko tyhjä joukko, kolmioiden K_1 ja K_2 yhteinen reuna tai kolmioiden K_1 ja K_2 yhteinen kulma.

Oletetaan vielä, että $\forall K \in \mathcal{C}_h$ kolmiot K ja $\hat{K}$ ovat affini-ekvivalentit: $\forall K \in \mathcal{C}_h$ on olemassa yksikäsitteinen bijektiivinen affinikuvaus $F_K : \hat{K} \rightarrow K$, missä $\hat{K}$ on referenssikolmio, jonka kulma $\hat{a} = (\xi, \eta) = (0, 0), (1, 0)$ tai $(0, 1)$.

Affinikuvausten avulla määritellään lokaali polynomiavaruus

$$P_k(K) = \{p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \mid \hat{p} \in P_k(\hat{K})\}, \quad (19)$$

missä $P_k(\hat{K})$ on referenssikolmiolla $\hat{K}$ kokonaisasteeltaan korkeintaan astetta k olevien polynomien muodostama avaruus.

Virhearvioissa esiintyville positiivisille vakioille, jotka ovat riippumattomia paksuudesta t ja verkontiheydestä h , käytetään merkintää C , joko alaindeksillä tai ilman.

3.2 Elementtiavaruudet

Elementtialiavaruudet $W_h \subset W$, $V_h \subset V$ ja $Q_h \subset Q$, taipumalle, kiertymälle ja leikkausvoimalle, määritellään kokonaislukuasteelle $k \geq 1$ seuraavasti [9]:

$$W_h = \{v \in W \mid v|_K \in W_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}, \quad (20)$$

$$V_h = \{\eta \in V \mid \eta|_K \in V_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}, \quad (21)$$

$$Q_h = \{r \in Q \mid r|_K \in Q_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}. \quad (22)$$

Taipuma ja kiertymäkomponentit interpoloidaan samoilla muotofunktioilla, leikkausvoima MITC-interpolointitekniikalla:

$$W_k(K) = R_k(K) \quad (23)$$

$$V_k(K) = R_k(K)^2 \quad (24)$$

$$Q_k(K) = \{r = J_K^{-T} \hat{r} \circ F_K^{-1} \mid \hat{r} \in Q_k(\hat{K})\}, \quad (25)$$

missä $J_K : \hat{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on edellä määritellyn affiinikuvauksen $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ Jacobin kuvaus. Lokaaliset polynomiavaruudet $R_k(K)$ ja $Q_k(\hat{K})$ määritellään erikseen eri elementtityypeille.

3.3 Elementit

Variaatiotehtävän 2.2 approksimatiiviseen ratkaisemiseen käytetään stabiloitua MITC-redusoitua elementtimenetelmää [9]:

Menetelmä 3.1. *Etsi variaatiotehtävän 2.2 ratkaisulle elementtiapproksimaatio $(w_h, \beta_h) \in W_h \times V_h$ siten, että*

$$\mathcal{B}_h(w_h, \beta_h; v, \eta) = (g, v) \quad \forall (v, \eta) \in W_h \times V_h, \quad (26)$$

missä bilineaarimuoto

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(z, \phi; v, \eta) = & a(\phi, \eta) - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \alpha_K h_K^2 (R_K L\phi, R_K L\eta)_K \\ & + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (t^2 + \alpha_K h_K^2)^{-1} (R_K (\nabla z - \phi) - \alpha_K h_K^2 L\phi, R_K (\nabla v - \eta) - \alpha_K h_K^2 L\eta)_K. \end{aligned} \quad (27)$$

Reduktio-operaattori R_K määritellään erikseen eri elementtityypeille. Menetelmän formuloinnista eliminoitu konsistentti approksimatiivinen leikkausvoima

$$q_h|_K = (t^2 + \alpha_K h_K^2)^{-1} (R_K (\nabla w_h - \beta_h) - \alpha_K h_K^2 L\beta_h)|_K \quad \forall K \in \mathcal{C}_h. \quad (28)$$

Menetelmässä 3.1 voidaan käyttää eri elementtejä valitsemalla lokaalit polynomiavaruudet ja reduktio-operaattori eri tavoin. Stabiloitu MITC-reduoitu kolmioelementti määritellään seuraavilla valinnoilla [9]:

Elementti 3.1. *Kolmiolle $K \in \mathcal{C}_h$ lokaalit polynomiavaruudet valitaan siten, että $R_k(K) = P_k(K)$ ja (kierretty Raviart–Thomas-avaruus)*

$$Q_k(\hat{K}) = P_{k-1}(\hat{K})^2 \oplus (\eta, -\xi) P_{k-1}^{hom}(\hat{K}), \quad (29)$$

missä $P_{k-1}^{hom}(\hat{K})$ on homogeenisten astetta $k-1$ olevien polynomien avaruus referenssikolmiolla $\hat{K}$. Reduktio-operaattori R_K määritellään ehdoilla

$$\int_{\hat{E}} [(R_K \hat{\eta} - \hat{\eta}) \cdot \hat{\tau}] \hat{p} d\sigma = 0 \quad \forall \hat{p} \in P_{k-1}(\hat{E}) \quad \forall \hat{E} \subset \partial \hat{K}, \quad (30)$$

$$\int_{\hat{K}} (R_K \hat{\eta} - \hat{\eta}) \cdot \hat{p} d\xi d\eta = 0 \quad \forall \hat{p} \in P_{k-2}(\hat{K})^2, \quad (31)$$

joissa σ on referenssikolmion reunan $\hat{E}$ koordinaatti ja $\hat{\tau}$ reunan $\hat{E}$ yksikkötangentti.

Huomautus 3.1. Nelikulmiolle lokaalit polynomiavarauudet ja reduktio-operaattori voidaan valita usealla eri tavalla [9].

3.4 Virhearviot

Leikkausvoiman virhearvio esitetään myös seuraavassa verkontiheydestä riippuvassa normissa:

Määritelmä 3.1. Jos $r \in Q$, niin

$$\|r\|_{-1,h} = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|r\|_{0,K}^2 \right\}^{1/2}. \quad (32)$$

Elementin 3.1 virhearvioissa esiintyy vakio, joka on peräisin menetelmän stabiiliuden todistamiseen käytettävästä käänteisarviosta [3]:

Lemma 3.1. On olemassa vakio $C_I > 0$ siten, että

$$C_I h_K^2 \|L\eta\|_{0,K}^2 \leq a_K(\eta, \eta) \quad \forall \eta \in V_k(K), \quad (33)$$

missä $a_K(\eta, \eta)$ vastaa yhtälön (3) mukaista määrittelyä sisätulolla $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_K$.

Jotta virhearvioissa voidaan eritellä eri virhetermit, käytetään seuraavia merkintöjä: Sisäosan verkontiheys $h_i = \max_{K \subset \Omega_i} h_K$ ja reunaosan verkontiheys $h_b = \max_{K \not\subset \Omega_i} h_K$, missä $\Omega_i \subset \subset \Omega$. Merkinnällä $\subset \subset$ tarkoitetaan kompaktia upotusta.

Seuraavien virhearvioiden perusteella elementti 3.1 suppenee optimaalisesti [9]:

Lause 3.1. Olkoon Ω konvekssi monikulmio ja $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$. Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1, niin

$$\|w - w_h\|_1 + \|\beta - \beta_h\|_1 + t\|q - q_h\|_0 + \|q - q_h\|_{-1,h} \leq C \{h_i^k (\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b (\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \quad (34)$$

Lisäksi, jos $k \geq 2$, niin

$$\|w - w_h\|_0 + \|\beta - \beta_h\|_0 \leq Ch \{h_i^k (\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b (\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \quad (35)$$

Seuraavissa virhearvioissa esiintyy interpolaatio-operaattori, jonka interpolointi-ominaisuudet ovat optimaaliset [9]:

Määritelmä 3.2. Interpolaatio-operaattori $I_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow W_h$ määritellään ehdoilla

$$((v - I_K v) \circ F_K)(\hat{a}) = 0 \quad \forall \hat{a} \subset \hat{K}, \quad (36)$$

$$\int_{\hat{E}} ((v - I_K v) \circ F_K) \hat{p} d\sigma = 0 \quad \forall \hat{p} \in P_{k-2}(\hat{E}) \quad \forall \hat{E} \subset \partial \hat{K}, \quad (37)$$

$$\int_{\hat{K}} ((v - I_K v) \circ F_K) \hat{p} d\xi d\eta = 0 \quad \forall \hat{p} \in P_{k-3}(\hat{K}), \quad (38)$$

joiden on toteuduttava lokaalilla operaattorilla $I_K = I_{h|K} \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$.

Seuraavassa luvussa esiteltävässä taipuman jälkikäsitteilymenetelmässä alkuperäisen ja jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation välille asetetaan yhtälöä (36) vastaava kulmasolmuja koskeva ehto. Näin voidaan käyttää hyväksi seuraavia superkonvergenssituloksia [9], [7]:

Lause 3.2. *Olko Ω konvekksi monikulmio ja $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$. Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1, niin*

$$\left\{ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (t^2 + \alpha_K h_K^2)^{-1} \|\nabla(I_h w - w_h)\|_{0,K}^2 \right\}^{1/2} \leq C \{h_i^k (\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b (\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \quad (39)$$

Lause 3.3. *Olko Ω konvekksi monikulmio, $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$ ja $t \leq Ch$ (ns. numeerisesti ohut laatta). Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1 ja $k \geq 2$, niin*

$$\|I_h w - w_h\|_0 \leq Ch^2 \{h_i^k (\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b (\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \quad (40)$$

Huomautus 3.2. Lauseiden 3.1, 3.2 ja 3.3 virhearviot pätevät myös vastaaville stabiloiduille MITC-tyyppisesti redusoiduille nelikulmioelementeille [9], [7].

4 JÄLKIKÄSITTELY

4.1 Perusidea

Jälkikäsitteilyn ideana on käyttää hyväksi taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation superkonvergenssituloksia ja etsiä taipumalle elementtiapproksimaatio alkuperäistä avaruutta astetta laajemmasta avaruudesta. Taipuman jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation virhearvioilla osoitetaan, että jälkikäsitteilymenetelmä antaa alkuperäistä astetta tarkemman approksimaation.

Jälkikäsitteilymenetelmä perustuu leikkausvoimalle asetetun yhtälön (6) heikkoon muotoon. Jälkikäsitteilyehto asetetaan erikseen jokaiselle elementille $K \in \mathcal{C}_h$ tietyn testifunktion avaruuden T_K suhteen:

$$(\nabla w, \nabla v)_K = (\beta, \nabla v)_K + t^2 (q, \nabla v)_K \quad \forall v \in T_K. \quad (41)$$

Lisäksi asetetaan kulmasolmuarvoja koskeva sidosehto, jonka avulla jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio sidotaan alkuperäiseen elementtiapproksimaatioon ja asetetun jälkikäsitteilyehtävän ratkaisusta saadaan yksikäsitteinen.

4.2 Jälkikäsitteilymenetelmä

Olko $w_h \in W_h$, $\beta_h \in V_h$ ja $q_h \in Q_h$ taipuman, kiertymän ja leikkausvoiman elementtiapproksimaatiot, jotka on saatu käyttämällä menetelmässä 3.1 elementtiä 3.1. Yhtälöiden (20) ja (23) sekä elementtimääritelmän 3.1 perusteella taipuman alkuperäinen elementtiapproksimaatio $w_{h|K} \in W_k(K) = P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$. Taipuman jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio $w_h^* \in W_h^* \subset W$ etsitään siten, että $w_{h|K}^* \in W_{k+1}(K) = P_{k+1}(K)$.

Jälkikäsittelemenetelmä 4.1. Olkoon $\mathcal{J}_h$ kolmioinnin $\mathcal{C}_h$ kaikkien kulmien muodostama joukko. Kaikilla kolmioilla $K \in \mathcal{C}_h$ etsi lokaali taipuman jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio $w_h^*|_K \in P_{k+1}(K)$ siten, että

$$(\nabla w_h^*, \nabla v)_K = (\beta_h, \nabla v)_K + t^2(\mathbf{q}_h, \nabla v)_K \quad \forall v \in \tilde{W}_{k+1}(K), \quad (42)$$

$$w_h^*(a) = w_h(a) \quad \forall a \in \mathcal{J}_h \cap K, \quad (43)$$

missä $\tilde{W}_{k+1}(K) = \{v \in P_{k+1}(K) \mid v(a) = 0 \quad \forall a \in \mathcal{J}_h \cap K\}$.

Kirjoittamalla lokaali jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio muodossa $w_h^*|_K = w_h|_K + \tilde{w}_h|_K$ päädytään seuraavaan ekvivalenttiin muotoon: Etsi $\tilde{w}_h|_K \in \tilde{W}_{k+1}(K)$ siten, että

$$(\nabla \tilde{w}_h, \nabla v)_K = (\beta_h - \nabla w_h, \nabla v)_K + t^2(\mathbf{q}_h, \nabla v)_K \quad \forall v \in \tilde{W}_{k+1}(K). \quad (44)$$

Huomautus 4.1. Jälkikäsittelemenetelmällä 4.1 saatava elementtiapproksimaatio ei välttämättä ole jatkuva yli elementtirajojen. Jos ratkaisusta halutaan saada jatkuva, voidaan asettaa täydentävä ehto, jossa käytetään yhtälön (6) heikkoa muotoa jokaiselle reunalle $E \subset \partial K$ tietyn testifunktioavaruuden T_E suhteen:

$$(\nabla w \cdot \boldsymbol{\tau}, \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau})_E = (\beta \cdot \boldsymbol{\tau}, \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau})_E + t^2(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}, \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau})_E \quad \forall v \in T_E, \quad (45)$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on reunan E yksikkötangentti ja merkintä $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ tarkoittaa $L^2(E)$ -sisätuloa. Tällöin avaruus $\tilde{W}_{k+1}(K)$ korvataan pienemmällä avaruudella [7].

4.3 Virhearviot

Seuraavasta virhearviosta nähdään, miten taipuman jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation lokaali virhe riippuu alkuperäisestä elementtiapproksimaatiosta ja laatan paksuudesta [7]:

Lause 4.1. Olkoon Ω konvekksi monikulmio ja $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$. Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1 ja jälkikäsittelemenetelmää 4.1, niin

$$\begin{aligned} \|w_h^* - w\|_{1,K} &\leq \|I_h w - w_h\|_{1,K} + \|I_h^* w - w\|_{1,K} \\ &\quad + C\{\|\nabla(I_h w - w_h)\|_{0,K} + \|\nabla(w - I_h^* w)\|_{0,K} \\ &\quad + \|\beta - \beta_h\|_{0,K} + t^2\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{0,K}\}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \|w_h^* - w\|_{0,K} &\leq \|I_h w - w_h\|_{0,K} + \|I_h^* w - w\|_{0,K} \\ &\quad + Ch_K\{\|\nabla(I_h w - w_h)\|_{0,K} + \|\nabla(w - I_h^* w)\|_{0,K} \\ &\quad + \|\beta - \beta_h\|_{0,K} + t^2\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{0,K}\}, \end{aligned} \quad (47)$$

missä $I_h^* : H_0^1(\Omega) \rightarrow W_h^* = \{v \in W \mid v|_K \in W_{k+1}(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}$ noudattaa määritelmää 3.2, kun asteen k tilalla on aste $k+1$.

Virhearvion 3.1 sekä superkonvergenssitulosten 3.2 ja 3.3 avulla lauseesta 4.1 seuraa, että jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation virhearvion tavoiteltu verkon tiheyden potenssi saavutetaan numeerisesti ohuilla laatoilla [7]:

Lause 4.2. Olkoon Ω konvekksi monikulmio, $0 < \alpha < \alpha_K < C_I$ ja $t \leq Ch$. Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1 ja jälkikäsittelemenetelmää 4.1 sekä $k \geq 2$, niin

$$\left\{ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \|w_h^* - w\|_{1,K}^2 \right\}^{1/2} \leq Ch\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}, \quad (48)$$

$$\|w_h^* - w\|_0 \leq Ch^2\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \quad (49)$$

Huomautus 4.2. Koska jälkikäsitellyn taipuma-approksimaation optimaalinen suppeneminen perustuu alkuperäisen taipuma-approksimaation superkonvergenssiin sekä kiertymän ja leikkausvoiman alkuperäisten elementtiapproksimaatioiden optimaaliseen suppenemiseen, lauseiden 4.1 ja 4.2 virhearviot pätevät myös stabiloiduille MITC-tyyppisesti redusoiduille nelikulmioelementeille. Lisäksi lauseen 4.1 virhearvioista nähdään, että lauseen 4.2 virhearviot voidaan johtaa muillekin sellaisille elementeille, joille pätevät superkonvergenssituloksia 3.2 ja 3.3 sekä lauseen 3.1 virhearvioita vastaavat tulokset.

5 NUMEERISET TULOKSET

Numeeriset tulokset koskevat seuraavanlaista jäykästi tuettua neliölaattaa: $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $G = 1$, $\nu = 0.3$ ja $t = 0$ (Kirchhoff—Love-rajatapaus). Kuormitus $f = \Delta^2 w$ on annettu siten, että se vastaa tarkan ratkaisun taipumaa $w = \cos^2(\pi x/2) \cos^2(\pi y/2)$.

Symmetrian takia vain laatan keskipinnan positiivinen neljännes on mallinnettu. Laskuissa on käytetty sekä säännöllistä että epäsäännöllistä (Delanay-kolmiointi) verkkoa, ks. kuvat 1 ja 3. Elementtien asteluku $k = 1$ (lineaarinen), 2 (kvadraattinen) tai 3 (kuubinen). Elementtien lukumäärä mallinnettavan alueen kutakin reunaa kohti on $N = 2, 4, 8$ tai 16, siis verkontiheys $h \approx 1/N$.

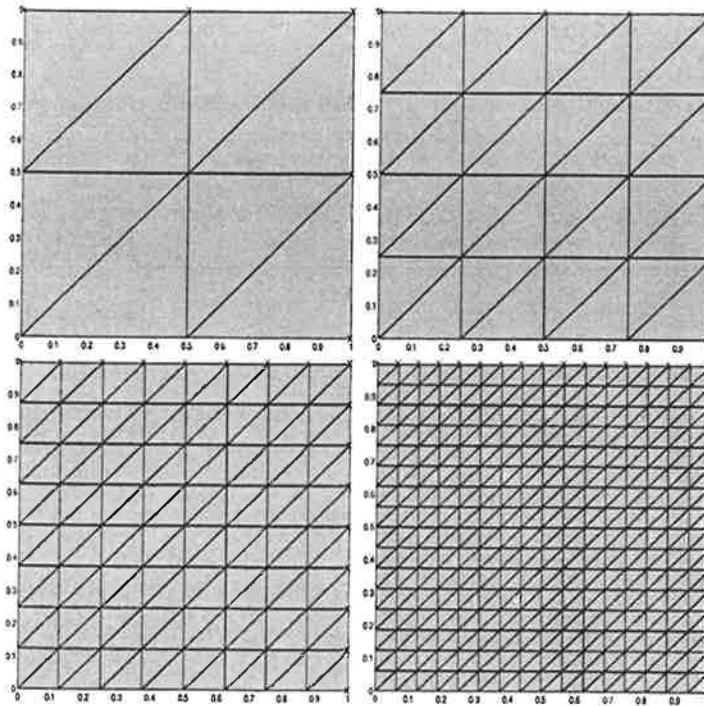
Lineaarisille elementeille stabilointikerroin $\alpha_K = 0.1$. Korkeampiasteisille elementeille on käytetty monimutkaisempaa stabilointikerroimen määritystä [9], jonka tuloksena kvadraattisille elementeille $0.0089 \leq \alpha_K \leq 0.1143$ ja kuubisille elementeille $0.0090 \leq \alpha_K \leq 0.0223$.

Suhteelliset L^2 -virheet on esitetty kuvissa 2 ja 4 sekä taulukoissa 1 ja 2. Taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation (katkoviiva, e_h) ja jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation (jatkuva viiva, e_h^*) suhteelliset virheet on esitetty logaritmiasteikolla elementtilukumäärän N suhteen. Lisäksi kuvissa 2 ja 4 on esitetty taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation kulmasolmuarvojen painotetun keskiarvon suhteellinen virhe (pisteiviiva).

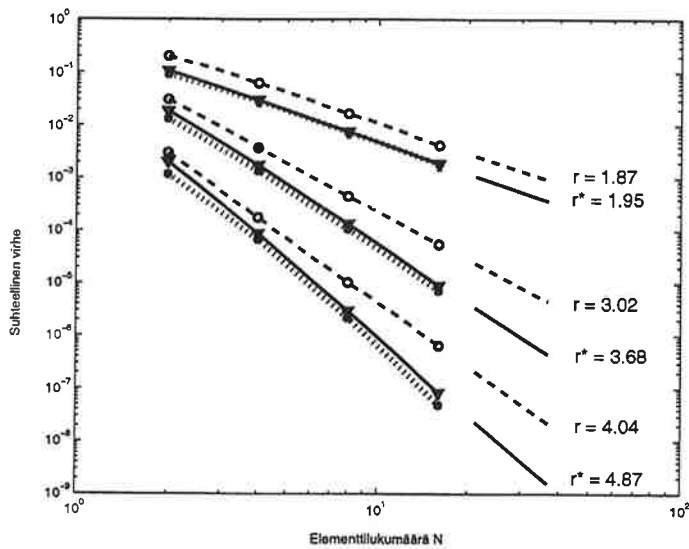
Jotta numeerisia tuloksia voidaan verrata teoriatuloksiin, muotoa $N^{-r} \approx h^r$ oleva funktio on sovitettu laskentatuloksiin pienimmän neliösumman menetelmällä. Sovitusta vastaavat suorat ja niiden kulmakertoimet r ja r^* on esitetty kuvissa 2 ja 4 varsinaisten tulosten jatkeena.

Vertailun perusteella numeeriset tulokset ovat yhteneviä teoriatulosten kanssa: Kun $k = 2$ tai 3, alkuperäisen elementtiapproksimaation suppenemisnopeus $r \approx k + 1$ ja jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation suppenemisnopeus $r^* \approx k + 2 \approx r + 1$ — kuvissa 2 ja 4 jatkuva viiva laskee astetta jyrkemmin kuin katkoviiva. Siis tavoiteltu verkontiheyden lisäpotenssi on saavutettu. Myös taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation kulmasolmuarvojen superkonvergenssi nähdään kuvista 2 ja 4 — pisteiviiva laskee astetta jyrkemmin kuin katkoviiva.

Kun $k = 1$, suppenemisnopeus $r \approx k + 1 \approx r^*$, mutta myös tässä tapauksessa virhe pienenee — kuvissa 2 ja 4 jatkuva viiva kulkee alempana kuin katkoviiva. Taulukoista 1 ja 2 virheiden pieneneminen nähdään tarkemmin — parhaimmillaan suhteellinen virhe pienenee noin kymmenesosaan alkuperäisestä.



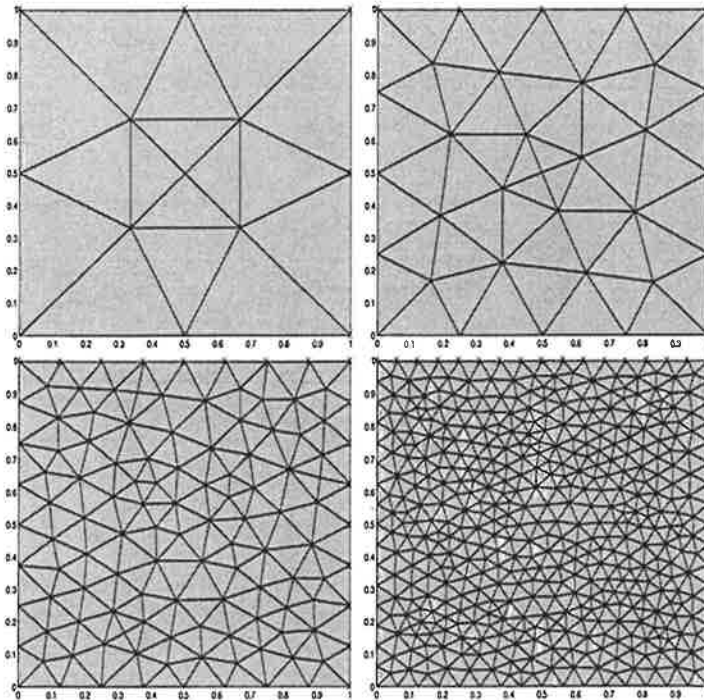
Kuva 1: Säännölliset verkot, kun $N = 2, 4, 8, 16$.



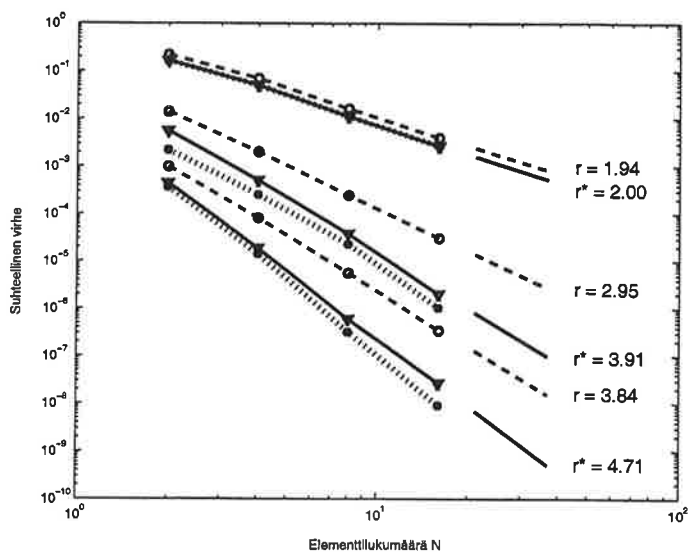
Kuva 2: Suhteellisen L^2 -virheen suppeneminen säännöllisellä verkolla, kun $k = 1, 2, 3$ (e_h katkoviivalla, e_h^* jatkuvalla viivalla, e_h :n kulmasolmuarvot pisteviivalla).

Taulukko 1: Suhteellinen L^2 -virhe säännöllisellä verkolla.

N	2	4	8	16
$k = 1$				
e_h	2.069×10^{-1}	6.449×10^{-2}	1.707×10^{-2}	4.308×10^{-3}
e_h^*	1.062×10^{-1}	2.957×10^{-2}	7.525×10^{-3}	1.858×10^{-3}
$k = 2$				
e_h	3.024×10^{-2}	3.874×10^{-3}	4.639×10^{-4}	5.663×10^{-5}
e_h^*	1.850×10^{-2}	1.750×10^{-3}	1.334×10^{-4}	8.954×10^{-6}
$k = 3$				
e_h	2.979×10^{-3}	1.766×10^{-4}	1.062×10^{-5}	6.655×10^{-7}
e_h^*	2.030×10^{-3}	8.828×10^{-5}	2.952×10^{-6}	8.251×10^{-8}



Kuva 3: Epäsäännölliset verkot, kun $N = 2, 4, 8, 16$.



Kuva 4: Suhteellisen L^2 -virheen suppeneminen epäsäännöllisellä verkolla, kun $k = 1, 2, 3$ (e_h katkoviivalla, e_h^* jatkuvalla viivalla, e_h :n kulmasolmuarvot pisteviivalla).

Taulukko 2: Suhteellinen L^2 -virhe epäsäännöllisellä verkolla.

N	2	4	8	16
$k = 1$				
e_h	2.162×10^{-1}	6.943×10^{-2}	1.610×10^{-2}	3.972×10^{-3}
e_h^*	1.626×10^{-1}	4.990×10^{-2}	1.112×10^{-2}	2.668×10^{-3}
$k = 2$				
e_h	1.390×10^{-2}	2.023×10^{-3}	2.455×10^{-4}	3.065×10^{-5}
e_h^*	5.563×10^{-3}	5.099×10^{-4}	3.771×10^{-4}	2.006×10^{-6}
$k = 3$				
e_h	9.940×10^{-4}	8.138×10^{-5}	5.627×10^{-6}	3.407×10^{-7}
e_h^*	4.436×10^{-4}	1.872×10^{-5}	5.947×10^{-7}	2.660×10^{-8}

VIIITTEET

- [1] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [2] F. Brezzi, M. Fortin, and R. Stenberg. Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner—Mindlin plates. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1:125–151, 1991.
- [3] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, New York, 1978.
- [4] T.J.R. Hughes and L.P. Franca. A mixed finite element formulation for Reissner—Mindlin plate theory: Uniform convergence of all higher-order spaces. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 67:223–240, 1988.
- [5] M. Lyly. Yksinkertaiset Reissner—Mindlin-laattaelementit. Lisensiaatintyö, Teknillinen korkeakoulu, 1996.
- [6] M. Lyly. On the connection between some linear triangular Reissner—Mindlin plate bending elements. *Numer. Math.*, 85:77–107, 2000.
- [7] M. Lyly, J. Niiranen, and R. Stenberg. Postprocessing schemes for MITC plate elements. In preparation, 2003.
- [8] M. Lyly and R. Stenberg. New three and four noded plate bending elements. *Rakenteiden Mekaniikka*, 27:3–29, 1994.
- [9] M. Lyly and R. Stenberg. Stabilized finite element methods for Reissner—Mindlin plates. Forschungsbericht 4, Universität Innsbruck, Institut für Mathematik und Geometrie, Juli 1999. (<http://www.math.hut.fi/~rstenber/>).
- [10] J. Pitkäranta. Analysis of some low-order finite element schemes for Mindlin—Reissner and Kirchhoff plates. *Numer. Math.*, 53:237–254, 1988.

RATIONAALISET BEZIÉR-KÄYRÄT KORKEA-ASTEISEN TASOKOLMIOELEMENTIN GEOMETRIAN KUVAUKSESSA

Juha Mäkipelto
Teknillinen mekaniikka ja optimointi
Tampereen teknillinen yliopisto
PL 589, 33101 TAMPERE
e-mail: juha.makipelto@tut.fi

TIIVISTELMÄ

Elementtimenetelmän p -versiossa elementit ovat usein suuria, ja niiden sivut voivat olla muodoltaan hyvinkin monimutkaisia. Tässä artikkelissa tasokolmioelementtien sivut voivat olla rationaalisia Beziér-käyriä, ja geometria kuvataan sekoitusfunktioimenetelmällä. Jos muotofunktiot ovat ainoastaan tyypillisiä hierarkkisia polynomimuotoisia funktioita, elementti ei pysty kuvaamaan jäykän kappaleen rotaatiota eikä vakiovenymäkenttää. Se ei siis toteuta elementin täydellisyysvaatimuksia. Tässä artikkelissa esitetään, kuinka elementti saadaan toteuttamaan täydellisyysvaatimukset lisäämällä elementin muotofunktioavaruuteen sivun rationaalista geometrista kuvausta vastaavat funktiot. Lisäksi tarkastellaan, millä edellytyksillä elementin sivu on tulkittavissa rationaaliseksi, jotta lisättyjen muotofunktioiden mahdollinen lineaarinen riippuvuus polynomimuotoisten muotofunktioiden kanssa ei aiheuta numeerisia ongelmia. Esimerkin avulla todetaan, että lisämuotofunktioilla rikastettu elementti toimii paremmin kuin tavanomainen.

1 JOHDANTO

Tämän tutkimuksen lähtökohdat ovat muodon optimoinnissa, jossa rakenteelle etsitään rajoitusehdot toteuttavaa ja tietyn kohdefunktion mukaan parasta mahdollista muotoa. Rajoitusehtojen ja kohdefunktion arvot määritetään rakenneanalyysillä, joka suoritetaan usein esimerkiksi elementti- tai reunaelementtimenetelmällä. Elementtimenetelmän eri versioista eniten käytetty on h -versio, mutta muodon optimoinnin kannalta p -versio tarjoaa joitakin etuja. Elementit voivat p -versiossa olla kooltaan suuria, joten optimoinnin edetessä tapahtuva rakenteen muodon muuttuminen ei vääristä niitä yhtä paljon kuin pienempiä h -elementtejä, eikä elementtiverkkoa tarvitse luoda uudelleen niin usein. Lisäksi p -elementtien tarkkuus on vähemmän herkkä vääristymiselle. Myös p -elementtien reunoilla saatavat tarkemmat jännitustulokset ovat eduksi, koska muodon optimoinnissa jännitysten kannalta mielenkiintoiset alueet ovat yleensä juuri rakenteen reunoilla.

Rakenteen geometria kuvataan muodon optimoinnissa useimmiten parametrisilla käyrillä, joiden ohjauspisteiden koordinaatit toimivat suunnittelumuuttujina. Jos käyrät ovat rationaalisia, suunnittelumuuttujina voivat lisäksi olla ohjauspisteiden painokertoimet. Tietokoneavusteisen suunnittelun ohjelmistoissa kappaleiden geometria mallinnetaan usein rationaalisilla käyrillä ja pinnoilla, joten kytkentä muodon optimoinnin, suunnittelun ja tuo-

tannon välille on ainakin teoriassa helposti luotavissa. Rationaalisilla parametrisilla käyrillä on monia hyödyllisiä ominaisuuksia, niiden teoria ja algoritmit ovat pitkälle kehitettyjä, ja aiheesta on julkaistu kattavia teoksiakin (esim. Piegl ja Tiller, 1997), mutta muodon optimoinnissa niitä on käytetty suhteellisen vähän (Schramm ja Pilkey, 1993; Eschenauer *et al.*, 1994; Wiegardt *et al.*, 1997; Wang *et al.*, 1999; Lépine *et al.*, 2001).

Rakenteen reunakäyrät voivat sellaisenaan olla myös elementtien reunakäyrinä, jos elementtien geometria kuvataan sekoitusfunktioimenetelmällä. Tällöin rakenteen ja elementtimallin geometria vastaavat tarkasti toisiaan, mikä on erityisesti muodon optimoinnissa toivottavaa. Shyy *et al.* (1988) käyttivät polynomimuotoisia parametrisia käyriä p -elementin reunoina ja esittivät tietyt ehdot, jotka toteuttava elementti on täydellinen. Schramm ja Pilkey (1993) käyttivät polynomimuotoisten lisäksi myös rationaalisia reunakäyriä, joilla varustettu elementti ei kuitenkaan toiminut optimoinnissa hyvin. Tästä saatiin aihe nykyiseen tutkimukseen.

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli kehittää p -elementtiä siten, että se reunakäyriensä rationaalisuudesta huolimatta toteuttaa täydellisyysvaatimukset ja antaa luotettavia tuloksia. Artikkelin luvussa 2 esitellään tavallisten ja rationaalisten Beziér-käyrien välinen yhteys ja luvussa 3 käyrien rajaaman elementin geometria kuvataan sekoitusfunktioimenetelmällä. Luvussa 4 tarkastellaan polynomimuotofunktiolla varustetun elementin täydellisyyttä, joka voidaan taata luvun 5 rationaalisilla lisämuotofunktiolla, joiden hyötyjä ja haittoja luvun 6 esimerkkilaskelmat valaisevat.

2 POLYNOMIMUOTOISET JA RATIONAALISET BEZIÉR-KÄYRÄT

Esitellään seuraavassa tämän artikkelin kannalta tärkeät asiat tavallisista ja rationaalisista Beziér-käyristä (esim. Piegl ja Tiller, 1997, luvut 1.3 ja 1.4). Astetta n olevan Beziér-käyrän määrittämiseksi tarvitaan ohjauspisteet $\mathbf{P}^i = (P_x^i, P_y^i)$, joita on $n + 1$ kappaletta ($i = 0, \dots, n$). Ohjauspisteiden muodostamaa monikulmiota kutsutaan ohjausmonikulmioksi. Rationaalisen Beziér-käyrän ohjauspisteillä on lisäksi painokertoimet w_i , jotka periaatteessa voivat olla myös ei-positiivisia, mutta usein oletetaan että $w_i > 0$. Tavallisen, n -asteisen Beziér-käyrän kantafunktiot ovat n -asteisia Bernsteinin polynomeja $\mathcal{B}_{i,n}(u)$, jotka saadaan yhtälöstä

$$\mathcal{B}_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Välillä $u \in [0, 1]$ Bernsteinin polynomit ovat ei-negatiivisia ja toteuttavat lisäksi ykkösen jaon

$$\sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{i,n}(u) = 1 \quad u \in [0, 1]. \quad (2)$$

Bernsteinin polynomien avulla määritellään myös rationaaliset kantafunktiot

$$\mathcal{R}_{i,n}(u) = \frac{\mathcal{B}_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n \mathcal{B}_{j,n}(u)w_j} \quad i = 0, \dots, n \quad u \in [0, 1], \quad (3)$$

joiden avulla puolestaan määritellään rationaalinen Beziér-käyrä

$$\mathbf{R}(u) = \sum_{i=0}^n \mathcal{R}_{i,n}(u) \mathbf{P}^i \quad u \in [0, 1]. \quad (4)$$

Yhtälöistä (2) ja (3) nähdään, että

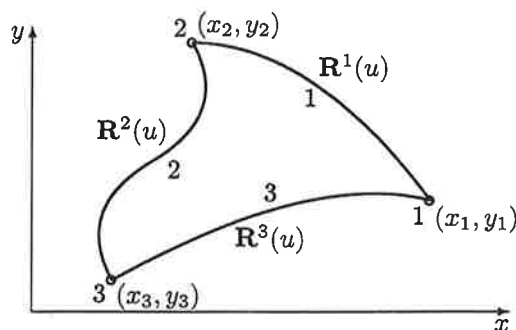
$$w_i = a \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}_{i,n}(u) = \mathcal{B}_{i,n}(u) \quad \forall i. \quad (5)$$

Jos siis kaikki painokertoimet ovat yhtä suuria, kaavasta (4) saadaan rationaalisen Beziér-käyrän erikoistapaus eli tavallinen polynomimuotoinen Beziér-käyrä.

3 GEOMETRIAN KUVAUS SEKOITUSFUNKTIOMENETELMÄLLÄ

Koska elementtimenetelmän p -versiossa elementit ovat yleensä suuria, geometrian kuvauksen tarkkuus on tärkeämpää kuin h -versiossa. Sekoitusfunktioimenetelmässä (Gordon, 1971; Gordon ja Hall, 1973a,b; Cavendish *et al.*, 1976) elementin geometrian määräävät parametriset reunakäyrät, jotka voivat olla lähes mielivaltaisia edellyttäen, että ne rajaavat käyvän elementin, eivätkä sisällä esimerkiksi silmukoita. Elementti on tarkasti reunakäyriensä mukainen, ja siksi menetelmä sopii hyvin monimutkaisen geometrian kuvaamiseen. Szabó ja Babuška (1991, s. 111) esittävät kolmioelementeille soveltuvan sekoitusfunktioimenetelmän, jota on tässä esityksessä hieman muokattu.

Elementin solmu- ja sivunumerointi on esitetty kuvassa 1. Kolmioelementtien yhteydessä



Kuva 1: Elementin solmu- ja sivunumerointi, solmukoordinaatit ja reunakäyrät.

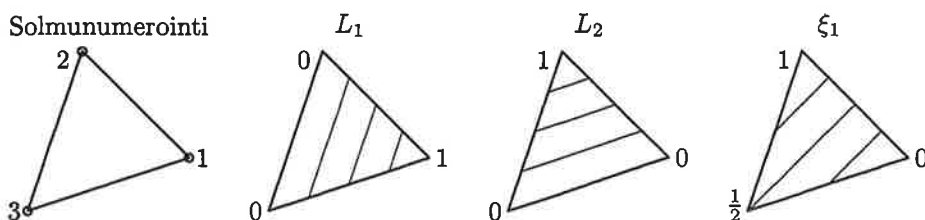
käytetään merkintöjen yksinkertaistamiseksi usein kolmio- eli pinta-alakoordinaatteja L_1 , L_2 ja L_3 , jotka saavat arvon 1 omalla solmullaan ja arvon 0 vastakkaisella sivulla, kuten kuvassa 2 on esitetty. Kolmiokoordinaattien välillä on sidosyhtälö

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1, \quad (6)$$

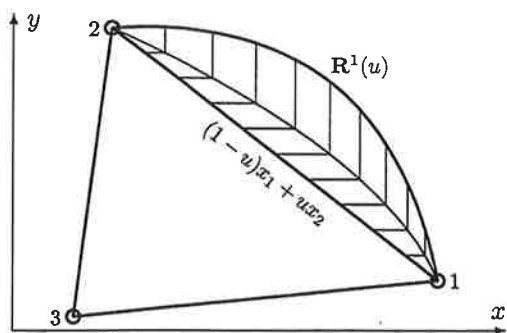
joten vain kaksi niistä on riippumattomia. Käytetään merkintöjen selkeyttämiseksi kuitenkin kaikkia kolmea. Elementin sivut kuvataan rationaalisilla Beziér-käyrillä

$$\mathbf{R}^i(u) = (R_x^i(u), R_y^i(u)) \quad u \in [0, 1] \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

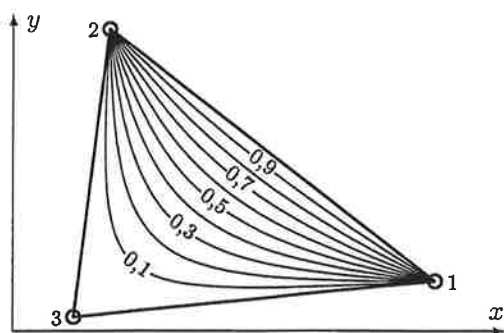
jotka on suunnattu siten, että parametrin u kasvaessa kuljetaan elementin reunalla vastapäivään. Kun reunakäyrien suunnat on sovittu, voidaan määritellä esimerkiksi sivuun 1 liittyvät



Kuva 2: Kolmiokoordinaattien L_1 ja L_2 sekä apumuuttujan ξ_1 tasa-arvokäyriä.



Kuva 3: Sivun 1 Beziér-käyrän ja solmujen 1 ja 2 yhdysjanan välinen erotus. Vaakaviivat kuvaavat erotusfunktioita $E_x^1(u)$ ja pystyviivat erotusfunktioita $E_y^1(u)$.



Kuva 4: Sekoitusfunktion S^1 tasa-arvokäyriä.

erotusfunktioit

$$E_x^1(u) = R_x^1(u) - (1-u)x_1 - ux_2 \quad E_y^1(u) = R_y^1(u) - (1-u)y_1 - uy_2, \quad (8)$$

joita on havainnollistettu kuvassa 3. Ne ovat siis sivun 1 kuvaavan Beziér-käyrän sekä solmujen 1 ja 2 välisen janan x - ja y -koordinaattien erotukset. Muiden sivujen erotusfunktioit ovat täysin analogiset yhtälössä (8) esitettyjen kanssa ja ne saadaan vaihtamalla indeksejä syklisesti.

Sekoitusfunktioimenetelmä saa nimensä rationaalisista sekoitusfunktioista, joita on yksi kutakin elementin sivua kohti

$$S^1 = \frac{4L_1L_2}{1 - (L_2 - L_1)^2} \quad S^2 = \frac{4L_2L_3}{1 - (L_3 - L_2)^2} \quad S^3 = \frac{4L_3L_1}{1 - (L_1 - L_3)^2}. \quad (9)$$

Tarkastellaan esimerkiksi sivun 1 sekoitusfunktioita S^1 , joka osoittajassa olevan tulon L_1L_2 ansiosta on nolla elementin sivuilla 2 ja 3 lukuunottamatta solmupisteitä 1 ja 2. Näin sivun 1 geometrian kuvaus ei vaikuta muiden sivujen kuvaukseen. Muut termit on valittu siten, että sivulla 1 (jälleen poislukien solmut 1 ja 2) sekoitusfunktio saa arvon yksi. Niinpä kuvassa 4 solmujen väliset janatkin ovat itse asiassa tasa-arvokäyriä, ja nähdään, kuinka sekoitusfunktio on yleisesti ottaen hyvin sileä. Solmuilla 1 ja 2 sekoitusfunktioilla S^1 on kuitenkin singulaaripisteet, joissa se on epämääräistä $0/0$ -muotoa, ja suunnattu raja-arvo vaihtelee nollan ja ykkösen välillä riippuen lähestymissuunnasta. Tästä ei ole kuitenkaan haittaa, kuten myöhemmin perustellaan.

Sekoitusfunktioimenetelmän mukaan kuvapisteen koordinaatit saadaan yhtälöistä

$$x = \sum_{i=1}^3 L_i x_i + \sum_{i=1}^3 S^i E_x^i(\xi_i) \quad y = \sum_{i=1}^3 L_i y_i + \sum_{i=1}^3 S^i E_y^i(\xi_i), \quad (10)$$

joissa on käytetty apumuuttujia

$$\xi_1 = \frac{L_2 - L_1 + 1}{2} \quad \xi_2 = \frac{L_3 - L_2 + 1}{2} \quad \xi_3 = \frac{L_1 - L_3 + 1}{2}, \quad (11)$$

joista muuttuja ξ_1 on esitetty kuvassa 2. Kuvauksissa (10) ensimmäinen summalauseke on lineaarinen kuvaus kolmiokoordinaateista xy -tasolle. Toisessa summalausekkeessa jäsenet ovat

elementin tietyn sivun sekoitus- ja erotusfunktioiden tuloja. Tarkastellaan jälleen esimerkiksi sivua 1, jonka erotusfunktiot lähestyvät nollaa lähestyttäessä solmuja 1 ja 2. Vaikka sekoitusfunktiolla onkin epäjatkuvuuskohta kyseisillä solmuilla, on sekoitus- ja erotusfunktion tulo kuitenkin jatkuva. Niinpä yhtälön (10) mukainen kuvaus on jatkuva ja hyvin sileä kaikkialla elementin alueessa, edellyttäen että elementin reunakäyrät ovat sileitä. Lisäksi sivulla kuvaus määräytyy pelkästään sivun erotusfunktioiden (ja tietysti lineaarisen kuvauksen) mukaan, koska vastaava sekoitusfunktio saa arvon yksi.

4 POLYNOMIMUOTOISET HIERARKKISET MUOTOFUNKTIOT

Elementtimenetelmän p -versiossa käytettävät muotofunktiot voidaan valita monella tapaa, eikä ole olemassa yksiselitteisesti parasta valintaa. Niiden tulisi kuitenkin toteuttaa vastaavat yhteensopivuus- ja täydellisyysvaatimukset kuin h -version muotofunktioidenkin, jotta monotoninen suppeneuus olisi mahdollinen. Sanotaan, että muotofunktiot ovat hierarkkisia, jos polynomiastetta p olevat muotofunktiot ovat astetta $p + 1$ olevien osajoukko. Tästä seuraa se hyödyllinen ominaisuus, että astetta p olevan elementin jäykkyyssmatriisi on astetta $p + 1$ olevan elementin jäykkyyssmatriisin osamatriisi. Ensimmäiset hierarkkiset muotofunktiot p -versiolla esitteli Peano (1976), mutta tässä esityksessä käytetään Legendren polynomeihin perustuvia hierarkkisia muotofunktioita (Szabó ja Babuška, 1991, luku 6.2.1.).

Kärkimuodot ovat samat kuin kolmisolmuisen kolmioelementin muotofunktiot elementtimenetelmän h -versiossa, eli ne ovat suoraan kolmiokoordinaatit

$$N^{v1} = L_1 \quad N^{v2} = L_2 \quad N^{v3} = L_3. \quad (12)$$

Kärkimuotofunktiot saavat siis arvon yksi omalla solmullaan ja arvon nolla vastakkaisella sivulla. Käytetään astetta i olevalle Legendren polynomille merkintää $P_i(\eta)$. Määritellään apufunktio

$$\varphi_i(\eta) = \frac{4\sqrt{2}(P_i(\eta) - P_{i-2}(\eta))}{\sqrt{2i-1}(1-\eta^2)} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (13)$$

joka rationaalisesta ulkoasustaan huolimatta on itse asiassa astetta $i - 2$ oleva polynomi, koska nimittäjän termi $1 - \eta^2$ saadaan aina supistettua pois. Nyt sivuun 1 liittyvät muotofunktiot

$$N_i^{e1} = L_1 L_2 \varphi_i(L_2 - L_1) \quad i = 2, 3, \dots \quad (14)$$

ovat siis astetta i . Tulon $L_1 L_2$ ansiosta sivumuotofunktiot N_i^{e1} ovat nollia sivuilla 2 ja 3. Muiden sivujen muotofunktiot saadaan yhtälöstä (14) vaihtamalla kolmiokoordinaatteja syklistesti. Astetta i olevia sisä- eli kuplamuotoja on $i - 2$ kappaletta, joista j :s on

$$N_i^{ij} = L_1 L_2 L_3 P_{i-j-2}(L_2 - L_1) P_{j-1}(2L_3 - 1) \quad j = 1, \dots, i - 2 \quad i = 3, 4, \dots \quad (15)$$

Tulon $L_1 L_2 L_3$ ansiosta sisämuotofunktiot ovat nollia kaikilla elementin sivuilla.

Kutsutaan kärki-, sivu- ja sisämuotofunktioihin liittyviä vapausasteita vastaavasti kärki-, sivu- ja sisävapausasteiksi. Kaikilla elementeillä on oltava kärkivapausasteet, jotka vastaavat h -version solmuisiirryksiä. Elementin eri sivujen vapausasteet ja sisävapausasteet voidaan valita mielivaltaisesti toisistaan riippumatta, kun vain huolehditaan siitä, että yhteisen sivun jakavat elementit ovat yhteensopivia. Lisäksi vaaka- ja pystysuuntaisten siirtymien approksimointiin voidaan tietyllä sivulla käyttää eri määrä vapausasteita, mikä pätee myös elementin sisävapausasteille.

4.1 Elementtien täydellisyys polynomimuotofunktioilla

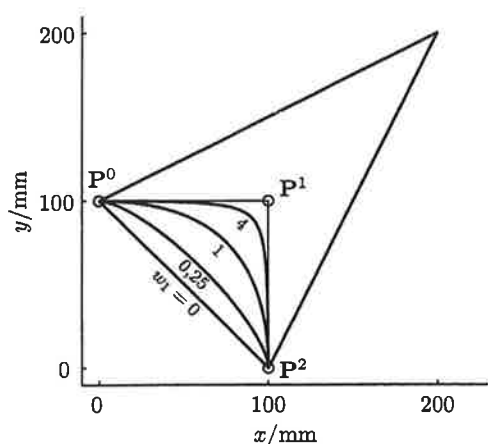
Yhtälöiden (12), (14) ja (15) mukaiset muotofunktiot toteuttavat yhteensopivuusvaatimuksen. Täydellisyysvaatimuksen toteutuminen edellyttää sitä, että muotofunktiot pystyvät kuvaamaan elementin jäykän kappaleen translaatiot ja rotaation sekä vakiovenymäkentän. Translaatioiden kuvaus selvästi onnistuu, koska yhtälöiden (6) ja (12) perusteella muotofunktioavaruus sisältää vakiotermin.

Jotta rotaation ja vakiovenymäkentän kuvaaminen onnistuisi, on muotofunktioiden kyettävä kuvaamaan elementin geometria. Elementtimenetelmän h -versiossa yleisesti käytetyillä isoparametrisilla elementeillä tämä vaatimus toteutuu luonnostaan, koska geometrian ja siirtymien kuvaamiseen käytetään samoja muotofunktioita. Tässä esityksessä käytetään geometrian kuvaamiseen sekoitusfunktio menetelmää ja siirtymien approksimointiin p -menetelmän muotofunktioita, joten ei ole itsestään selvää että kyseinen vaatimus toteutuu. Siksi asetetaan ehto, joka on samankaltainen kuin ehto jota Shyy *et al.* (1988) esittävät käytettäväksi, mutta lievempi: *elementin tietyn sivun muotofunktioiden asteen on oltava vähintään yhtä suuri kuin sivun kuvaamiseen käytetyn reunakäyrän aste.* Tämän ehdon toteuttavat elementit ovat täydellisiä, jos elementin reunakäyrät (7) ovat epärationaalisia eli painokertoimet ovat yhtälön (5) mukaisesti yhtä suuria. Jos reunakäyrä on rationaalinen, kuten tässä esityksessä sallitaan, ei polynomimuotoisilla muotofunktioilla ole mahdollista kuvata elementin geometriaa tarkasti, eikä elementti siis ole täydellinen.

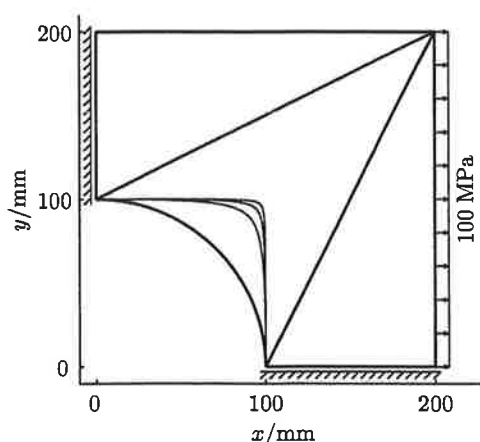
4.2 Esimerkki epätäydellisestä elementistä

Tässä ja luvun 6 esimerkissä käytetään kimmomoduulille arvoa $E = 200$ GPa, Poissonin luvulle $\nu = 0,3$, elementin paksuudelle $t = 10$ mm ja oletetaan, että rakenne on tasojännitustilassa. Jäykkyysmatriisien integroinneissa käytetään astetta 20 olevaa numeerista kaavaa (Dunavant, 1985), jos elementti on käyräviivainen ja tarkkaa kaavaa (Lawrence *et al.*, 1991), jos elementin kaikki sivut ovat suoria.

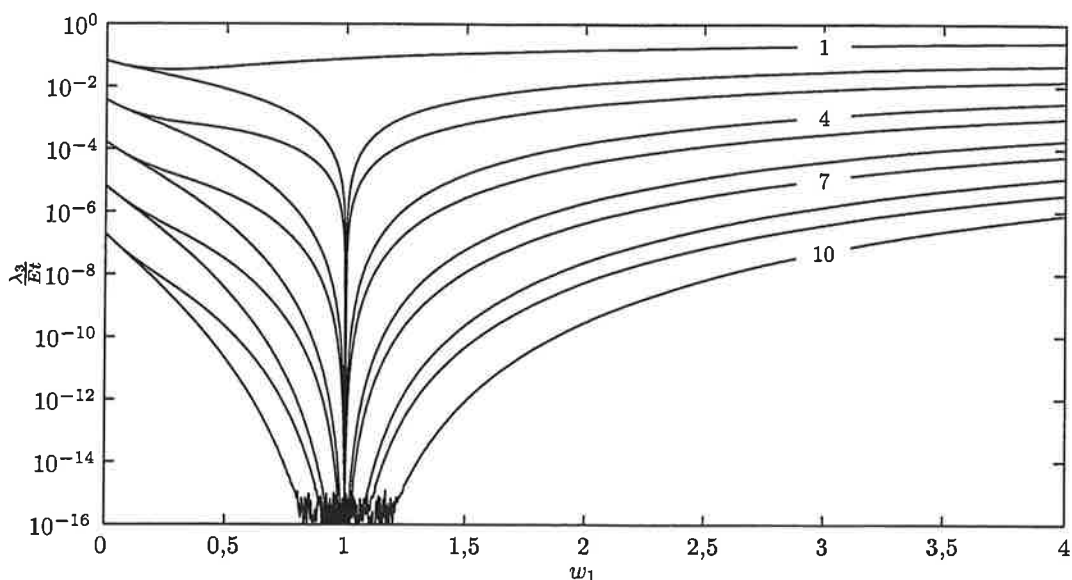
Epätäydellisuuden havainnollistamiseksi tarkastellaan kuvassa 5 esitettyä elementtiä, jon-



Kuva 5: Ominaisarvo- ja kuntolaskelmissa käytetty elementti. Kuvassa on havainnollistettu ohjauspisteen P^1 painokertoimen w_1 vaikutusta elementin muotoon.



Kuva 6: Virhetarkasteluissa käytetty kolmen elementin rakenne. Reiän muoto on esitetty painokertoimen w_1 arvoilla $1/\sqrt{2}$, 4, 8 ja 16.



Kuva 7: Kuvan 5 elementin jäykkyyssmatriisin kolmanneksi pienin ominaisarvo λ_3 painokertoimen w_1 funktiona. Muutamien kuvaajien kohdalle on merkitty elementin käyrän sivun siirtymäapproksimaation korkein aste.

ka yksi reunakäyrä on toisen asteen rationaalinen Beziér-käyrä ja kaksi muuta sivua ovat suoria. Beziér-käyrän ohjauspisteiden P^0 ja P^2 painokertoimet ovat $w_0 = w_2 = 1$, ja ohjauspisteen P^1 painokerroin w_1 vaihtelee, mikä vaikuttaa elementin muotoon, kuten kuvasta 5 nähdään. Elementillä on kärkivapausasteet, ja käyrän sivun vapausastemäärä vaihtelee. Suorilla sivuilla ei ole vapausasteita, eikä elementillä ole myöskään sisävapausasteita. Elementin jäykkyyssmatriisin pienimpien ominaisarvojen laskeminen lienee helpoin tapa todeta pystyykö elementti kuvaamaan jäykän kappaleen translaatiot ja rotaation. Käytännössä ominaisarvoista ainakin kaksi on laskentatarkkuuden rajoissa nolliä, ja ne vastaavat jäykän kappaleen translaatioita. Mitä pienempi kolmanneksi pienin ominaisarvo on, sitä paremmin elementti pystyy kuvaamaan jäykän kappaleen rotaation. Kuvassa 7 on esitetty jäykkyyssmatriisin kolmanneksi pienin ominaisarvo λ_3 painokertoimen w_1 funktiona. Kuvan eri käyrät vastaavat eri asteisia siirtymäapproksimaatioita elementin käyrällä sivulla. Ylimmäisenä kulkee approksimaatioastetta 1 eli lineaarista approksimaatiota (pelkät kärkimuodot, ei sivumuotoja) vastaava käyrä. Seuraava käyrä vastaa approksimaatioastetta 2 (kärkimuodot ja ensimmäinen sivumuoto) ja lopulta alimmainen käyrä liittyy asteeseen 10 (kärkimuodot ja 9 sivumuotoa). Kuvasta nähdään, kuinka käyrän sivun siirtymäapproksimaation asteen kasvassa elementti kuvaa jäykän kappaleen rotaation tarkemmin, mikä on tietysti luonnollista. Painokertoimen w_1 lähestyessä arvoa 1 elementin käyrä sivu lähestyy toisen asteen polynomimuotoista käyrää, ja kaikki approksimaatioasteet lineaarista lukuunottamatta pystyvät kuvaamaan rotaation käytännössä tarkasti. Lineaarinen siirtymäapproksimaatio ei toteuta luvussa 4.1 esitettyä ehtoa, joten siksi elementti ei ole täydellinen, vaikka reunakäyrä onkin polynomimuotoinen.

5 RATIONAALISET LISÄMUOTOFUNKTIOT

Kuten luvussa 4.1 esitettiin, on elementin muotofunktioiden kyettävä kuvaamaan elementin geometria, jotta elementti voisi olla täydellinen. Jos elementin reunakäyrät ovat rationaalisia, kuvaus ei pelkillä polynomimuotoisilla muotofunktioilla tietenkään onnistu. Elementtimenetelmän p -versiossa muotofunktioavaruutta voidaan kuitenkin laajentaa. Jos esimerkiksi tiedetään, että tarkka ratkaisu sisältää singulaaripisteen, lisätään muotofunktioiden joukkoon tämän pisteen suhteen singulaarisia funktioita. Aivan vastaavasti voidaan muotofunktioavaruutta laajentaa geometrian kuvausta vastaavilla funktioilla, joiden ansiosta elementti toteuttaa täydellisyysvaatimukset.

Tarkastellaan jälleen esimerkiksi elementin sivua 1, jonka reunakäyrä oletetaan epälineaariseksi. Geometrian kuvaukseen käytettävästä yhtälöstä (10) voidaan valita osat, jotka soveltuvat sivun 1 muotofunktioiksi

$$\hat{N}_x^{e1} = c_x^1 S^1 E_x^1(\xi_1) \quad \hat{N}_y^{e1} = c_y^1 S^1 E_y^1(\xi_1). \quad (16)$$

Kutsutaan niitä tässä esityksessä lisämuotofunktioiksi, joihin liittyvät lisävapausasteet. Merkinnäissä $\hat{N}_x^{e1}$ alaindeksi viittaa x -koordinaatin kuvausta vastaavaan muotofunktioon. Numeeristen ongelmien välttämiseksi voidaan kertoimella c_x^1 lausekkeen arvo skaalata muihin muotofunktioihin nähden sopivaksi, koska erotusfunktion saamat arvot voivat vaihdella suurestikin riippuen elementin todellisesta koosta globaalissa xy -koordinaatistossa. Suoritettujen kokeilulaskelmien perusteella kertoimen tarkalla arvolla ei ole merkitystä, kuten oletettavaa onkin, mutta sopiva suuruusluokka voidaan laskea esimerkiksi kaavalla

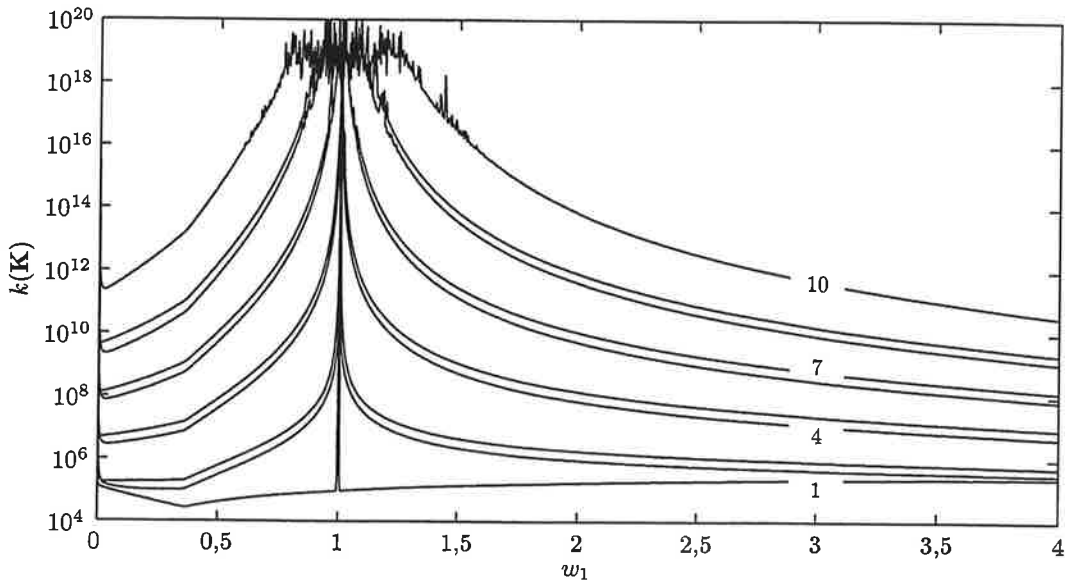
$$c_x^1 = \frac{c}{\max_{u \in [0,1]} |E_x^1(u)|}, \quad (17)$$

jossa vakiolle c valittava arvo määrää rationaalisen muotofunktion itseisarvon maksimin. Sopivan suuruusluokan valitsemiseksi tarkastellaan muiden muotofunktioiden elementin alueella saamia arvoja. Kärkimuotofunktioiden (12) maksimiarvo on luonnollisesti 1. Sivun 1 sisämuotofunktiot on muodostettu siten, että asteluvun kasvaessa funktion itseisarvon maksimi pienenevät. Yhtälön (14) mukaisen toista astetta olevan sivumuotofunktion itseisarvon maksimi elementin alueella on noin 0,612 ja yhtälön (15) mukaisen kolmatta astetta olevan sisämuotofunktion noin 0,037. Näiden arvojen perusteella sopiva valinta voisi olla $c = 0,5$. Kaavan (17) nimittäjän tarkan arvon laskeminen on työlästä, joten käytännössä riittää, että lasketaan muutamassa kohdassa erotusfunktion arvo ja käytetään näistä itseisarvoltaan suurinta.

6 ESIMERKIT

Yhtälön (16) mukaisilla lisämuotofunktioilla rikastettu elementti toimii odotetusti, eli se toteuttaa täydellisyysvaatimukset, vaikka elementillä ei olisi kärkivapausasteiden lisäksi mitään muuta kuin lisävapausasteet. Toisaalta muotofunktioavaruuden laajentaminen lisämuotofunktioilla voi aiheuttaa myös ongelmia. Rationaalisen reunakäyrän lähestyessä polynomimuotoa myös erotusfunktio (8) lähestyy polynomimuotoa, ja on mahdollista, että lisämuotofunktiot (16) ja polynomimuotofunktiot tulevat lineaarisesti riippuvaisiksi.

Lineaarisen riippuvuuden arvioimiseksi voidaan laskea jäykkyyismatriisin $\mathbf{K}$ (josta on toki eliminoitu jäykän kappaleen liikemahdollisuus) kunto $k(\mathbf{K})$, joka määritellään matriisin suurimman ja pienimmän singulaariarvon osamääränä. Kunto kuvaa matriisin numeerista käännettävyyttä ja kasvaa kääntämisen vaikeutuessa. Tarkastellaan jälleen kuvassa 5 esitettyä elementtiä, jolle käytetään samoja materiaaliarvoja ja integrointikaavoja kuin luvussa 4.2. Jäykän kappaleen liikemahdollisuuden poistamiseksi elementin molemmat käyrän sivun vastaisen kärjen kärkivapausasteet ja ohjauspisteessä $\mathbf{P}^0$ olevan kärjen pystysuuntainen

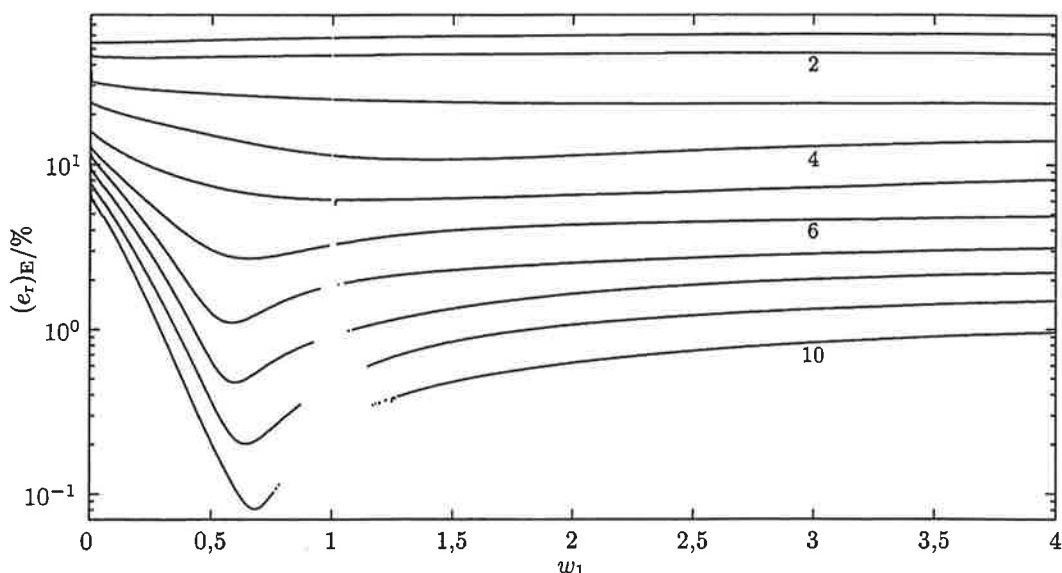


Kuva 8: Rikastetun elementin jäykkyyismatriisin kunto $k(\mathbf{K})$ painokertoimen w_1 funktiona. Muutamien kuvaajien kohdalle on merkitty elementin käyrän sivun polynomimuotoisen siirtymäapproksimaation korkein aste.

kärvivapausaste on poistettu. Käyrällä sivulla on yhtälöä (16) vastaavat kaksi lisävapausastetta vaakasuuntaan ja kaksi pystysuuntaan sekä vaihteleva määrä sivuvapausasteita. Suorilla sivuilla ei ole vapausasteita, eikä elementillä ole myöskään sisävapausasteita. Kuvassa 8 on esitetty jäykkyyismatriisin kunto $k(\mathbf{K})$ painokertoimen w_1 funktiona, ja eri kuvaajat vastaavat eri asteisia polynomimuotoisia siirtymäapproksimaatioita elementin käyrällä sivulla. Nähdään, kuinka sivuvapausasteiden määrän lisääntyessä jäykkyyismatriisin kunto huononee, koska laajempi polynomiavaruus pystyy tarkemmin kuvaamaan rationaalifunktion, ja siten lisä- ja sivumuotofunktiot ovat lähes lineaarisesti riippuvia. Painokertoimen w_1 lähestyessä arvoa 1 elementin käyrä sivu lähestyy toisen asteen polynomimuotoista käyrää, ja kunto huononee niin, että arvolla $w_1 = 1$ kaikkia sivuvapausastemääriä vastaavat jäykkyyismatriisit ovat käytännössä singulaarisia. Tämän perusteella voisi kuvitella, että rikastetun elementin antamat tulokset hajaantuvat painokertoimen w_1 lähestyessä arvoa 1. Näin ei kuitenkaan ole, kuten seuraavassa esitetään.

Tarkastellaan kuvassa 6 esitettyä kolmen elementin mallia, jossa keskimmäinen elementti on täsmälleen sama kuin kuvassa 5 oleva ja aiemmissa esimerkeissä käytetty. Suorilla $x = 0$ mm ja $y = 0$ mm on symmetriareunaehdot ja kyseessä on siis neljännesmalli, joka kuvaa neliölevyn keskellä olevaa reikää. Reiän muoto voi vaihdella painokertoimen w_1 funktiona, ja kuvassa 6 on esitetty arvoja 4, 8 ja 16 vastaavat muodot ohuemmalla viivalla sekä arvoa $1/\sqrt{2}$ vastaava, tarkka ympyränkaari vahvemalla viivalla. Kuormituksena on suoralla $x = 200$ mm vaakasuuntainen vetojännitys 100 MPa. Materiaaliarvot ja integrointikaavat ovat samat kuin luvussa 4.2. Lasketaan rakenteelle ratkaisu $\tilde{\mathbf{u}}$ kuvan 6 mukaisella elementtiverkolla ja käytetään tarkan ratkaisun $\mathbf{u}$ approksimaationa huomattavasti tiheimmällä elementtiverkolla ja astetta 10 olevilla elementeillä saatua tulosta. Nyt voidaan laskea ratkaisun $\tilde{\mathbf{u}}$ energianormin suhteellinen virhe

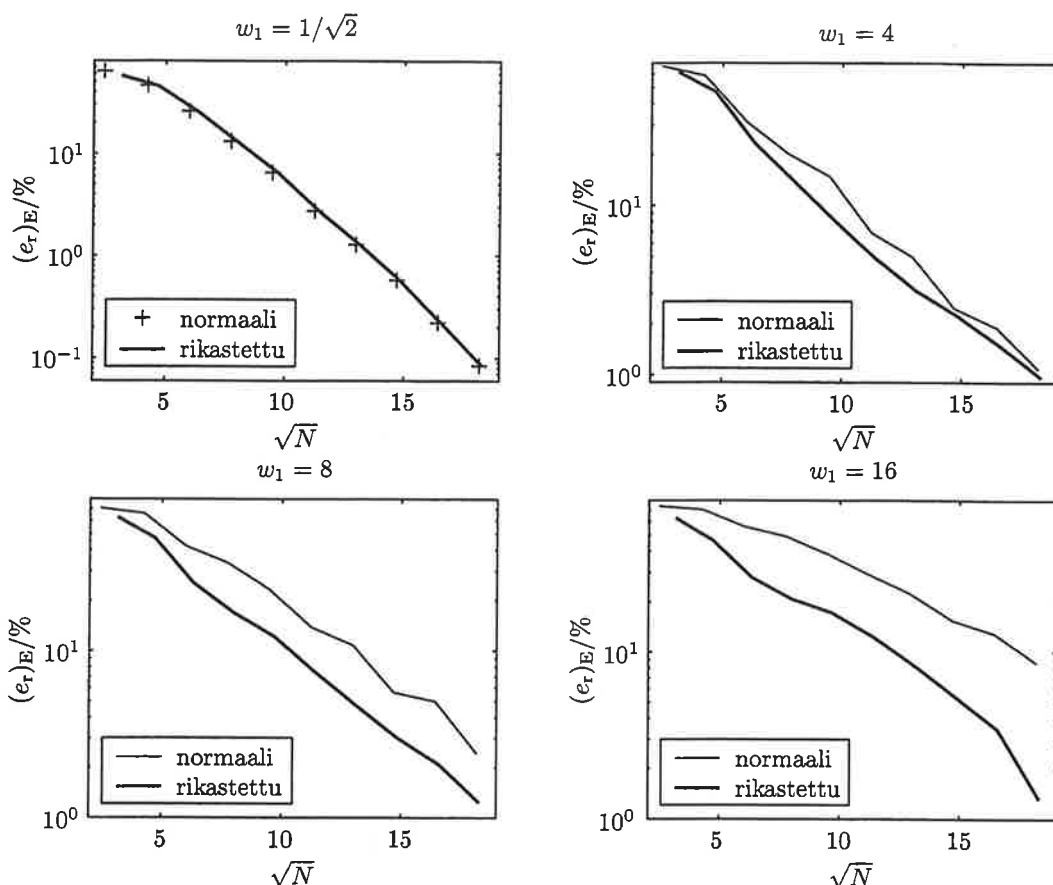
$$(e_r)_E = \frac{\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_E}. \quad (18)$$



Kuva 9: Energianormin suhteellinen virhe painokertoimen w_1 funktiona. Kuvaan on merkitty muutamien käyrien kohdalle elementtien aste.

Kuvassa 9 on esitetty eriasteisille approksimaatioille saadut tulokset painokertoimen w_1 funktiona. Eri kuvaajat vastaavat eri asteisia elementtejä. Jokaisella kolmella elementillä on käytetty samaa astetta ja käyräviivainen elementti on rikastettu, eli sillä on 4 lisävapausastetta. Nähdään, kuinka asteluvun kasvaessa tarkkuus luonnollisesti paranee. Kuvaajissa olevat katkokset kohdan $w_1 = 1$ ympäristössä johtuvat siitä, että tällöin jäykkyysmatriisi on ollut singulaarinen, eikä ratkaisu ole onnistunut. Katkoksista huolimatta painokertoimen w_1 lähestyessä arvoa 1 ei tapahdu havaittavaa, linjasta selvästi poikkeavaa virheen kasvua. Näyttäisi siltä, että lisämuotofunktioilla rikastettuja elementtejä käytettäessä tulokset ovat luotettavia, jos ratkaisu saadaan laskettua. Tämä on hieman yllättävää aiemman esimerkin ja kuvan 8 perusteella.

Tarkastellaan edelleen kuvassa 6 olevaa, edellä esiteltyä rakennetta. Tällä kertaa reiän muoto pidetään vakiona, mutta elementtien astelukua vaihdellaan. Näin voidaan vertailla normaalien p -elementtien ja lisämuotofunktioilla rikastettujen elementtien suorituskykyä. Saatuja tuloksia on esitetty kuvassa 10 tulostamalla eri painokertoimen w_1 arvoilla energianormin suhteellinen virhe elementtimallin vapausasteiden lukumäärän neliöjuuren funktiona. Kaikki kolme elementtiä ovat samaa astetta, ja käyräviivainen elementti on joko normaali p -version mukainen tai lisämuotofunktioilla rikastettu. Kuvaajat ovat kaikilla painokertoimen w_1 arvoilla lähes suoria, joten suppenevuus on eksponentiaalista. Näin tulee ollakin, koska rakenteessa ei ole singulaaripisteitä, ja siksi tarkka ratkaisu on sileä. Painokertoimen arvolla $w_1 = 1/\sqrt{2}$ normaali malli on pienillä asteluvuilla hivenen rikastettua parempi, mutta ero käytännössä häviää elementtien asteluvun kasvaessa. Saman suuntainen tulos on saatu myös muissa tapauksissa, joissa painokerroin on ollut lähellä arvoa $w_1 = 1$. Lisämuotofunktioista ei siis tällöin ole hyötyä, mutta ei suurta haittaakaan. Painokertoimen kasvaessa rikastetun mallin virhe on kuitenkin selvästi pienempi, ja arvolla $w_1 = 16$ ero on suurilla asteluvuilla jo lähes dekadin. Lisäksi etenkin arvojen $w_1 = 4$ ja $w_1 = 8$ osakuvista nähdään, kuinka normaalin mallin suppenevuus on epätasaista ja kuvaajassa on havaittavissa selvää sahalaitaisuutta. Tämä aiheuttanee epätarkkuutta laskettaessa *a posteriori* virhearvioita,



Kuva 10: Energianormin suhteellinen virhe elementtimallin vapausasteiden lukumäärän neliöjuuren funktiona. Käyräviivainen elementti on joko normaali p -version mukainen tai lisä-vapausasteilla rikastettu. Osakuvat vastaavat painokertoimen w_1 eri arvoja.

joiden laskemisen vaivattomuus on juuri eräs syy käyttää elementtimenetelmän p -versiota.

7 YHTEENVETO

Yhdistelmänä elementtimenetelmän p -versio, rationaaliset Beziér-käyrät elementtien reunoina ja geometrian kuvaus sekoitusfunktio menetelmällä muodostavat kokonaisuuden, joka sopii oivallisesti esimerkiksi muodon optimoinnin analyysimenetelmäksi. Kun elementtejä vielä rikastetaan reunakäyriä vastaavilla lisämuotofunktioilla, kuten tässä artikkelissa on esitetty, ne saadaan toteuttamaan täydellisyysvaatimukset. Esimerkki osoittaa, että rikastettu elementti toimii rikastamatonta paremmin. Ero on sitä suurempi, mitä rationaalisempi reunakäyrä on. Reunakäyrän lähestyessä polynomimuotoista elementit ovat yhtä tehokkaita.

Jatkossa voitaisiin tarkemmin tutkia rikastamisen vaikutusta *a posteriori* virhearvioiden tarkkuuteen. Lisäksi olisi syytä kehittää käyrän rationaalisuutta luotettavasti mittaava vertailuluku, jonka avulla voitaisiin etukäteen päättää kannattaako elementtiä rikastaa vai ei. Esitelyjen lisämuotofunktioiden yleistys nelikulmioelementeille olisi varsin suoraviivainen.

KIITOKSET

Kiitokset Tekniikan edistämissäätiölle, joka on rahoittanut kirjoittajan tutkimuksen.

VIITTEET

- James C. Cavendish, William J. Gordon ja Charles A. Hall. Ritz-Galerkin approximations in blending function spaces. *Numerische Mathematik*, **26**, no. 2, 155–178, 1976.
- D. A. Dunavant. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, no. 6, 1129–1148, 1985.
- H. A. Eschenauer, V. V. Kobelev ja A. Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, **8**, no. 1, 42–51, 1994.
- William J. Gordon. Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **8**, no. 1, 158–177, 1971.
- William J. Gordon ja Charles A. Hall. Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **7**, no. 4, 461–477, 1973a.
- William J. Gordon ja Charles A. Hall. Transfinite element methods: Blending-function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numerische Mathematik*, **21**, no. 2, 109–129, 1973b.
- Kent L. Lawrence, Rajiv V. Nambiar ja Brad Bergmann. Closed form stiffness matrices and error estimators for plane hierarchic triangular elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, no. 5, 879–894, 1991.
- Jérôme Lépine, François Guibault, Jean-Yves Trépanier ja François Pépin. Optimized non-uniform rational B-spline geometrical representation for aerodynamic design of wings. *AIAA Journal*, **39**, no. 11, 2033–2041, 2001.
- Alberto Peano. Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. *Computers & Mathematics with Applications*, **2**, no. 3–4, 211–224, 1976.
- Les A. Piegl ja Wayne Tiller. *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communication Series. Springer-Verlag, Berlin, toinen painos, 1997.
- Uwe Schramm ja Walter D. Pilkey. The coupling of geometric descriptions and finite elements using NURBs — A study in shape optimization. *Finite Elements in Analysis and Design*, **15**, no. 1, 11–34, 1993.
- Y. K. Shyy, C. Fleury ja K. Izadpanah. Shape optimal design using high-order elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**, no. 1, 99–116, 1988.
- Barna Szabó ja Ivo Babuška. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- Xuelin Wang, Ji Zhou ja Yujin Hu. A physics-based parameterization method for shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **175**, no. 1–2, 41–51, 1999.
- K. Wieghardt, D. Hartmann ja K. R. Leimbach. Interactive shape optimization of continuum structures. *Engineering Structures*, **19**, no. 4, 325–331, 1997.

EULERIN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN KUVAUS KIERTYMISS- MONISTOLTA LINEAARISEEN AVARUUTEEN

J. MÄKINEN

Teknillinen mekaniikka ja optimointi
Tampereen teknillinen yliopisto
PL 589, 33101 TAMPERE
s-posti: jari@mohr.me.tut.fi

TIIVISTELMÄ

Esityksessä perehdytään kiertymismonistoon $SO(3)$ ja Eulerin kiertymisliikkeen differentiaaliyhtälöön, joka on määritetty kiertymismoniston tangenttiavaruudessa, sekä kuvaukseen, jossa tämä differentiaaliyhtälö muunnetaan lineaarisen avaruuden differentiaaliyhtälöksi. Näin saatu differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista tavanomaisilla differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmillä. Kiertymisliikkeen parametrisointiin käytetään alkutilan kiertymävektoria, jonka vastaava viinosymmetrinen tensori on kiertymisoperaattorin alkutilan tangentti. Kuten tunnettua kiertymismonistoa ei voida kuvata kokonaan yhdellä ainoalla alkutilan kiertymävektorilla, mutta alkutilan kiertymävektorilla sekä sen komplementaarisella kiertymävektorilla kiertymismonisto on mahdollista kuvata kokonaisuudessaan – singulaarittomasti. Numeerisessa esimerkissä tarkastellaan symmetrisen hyrrän kiertymisliikettä.

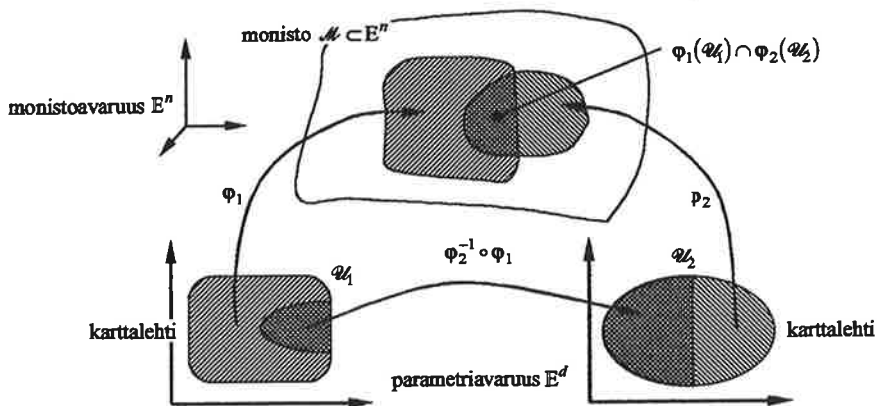
1 JOHDANTO

Yleinen jäykän kappaleen liike voidaan jakaa suuntaisliikkeeseen ja kiertymisliikkeeseen. Kiertymisliike voidaan kuvata joko suoraan kiertymisoperaattorilla tai sen parametreilla. Kiertymisliikkeen parametreina käytetään tavallisesti Eulerin kulmia, erilaisia kiertymisvektoreita, kvaternoneja (Eulerin parametreja) tai Rodriguesin parametreja. Kiertymisliikkeen kuvaaminen poikkeaa suuntaisliikkeestä; sillä kiertymisavaruus on kaareutuva monisto eikä lineaarinen avaruus, kuten suuntaisliikkeessä. Tämä kiertymismonisto on Lie ryhmä $SO(3)$ eli erityinen ortogonaalisuusryhmä, jota on käsitelty kattavasti lähteissä [1], [2] ja [6].

Laskennallisen mekaniikan piirissä on tunnettu pitkään se tosiasia, että kiertymäliisäysvektorin avaruudellinen esitysmuoto ei sovellu tavanomaisille aikaintegroimismenetelmille, koska avaruudelliset kiertymä-, kulmanopeus- ja kulmakiikthyvyysvektorit kuuluvat eri tangentiaaliin avaruuksiin eri ajan hetkinä. Aiemmin on erheellisesti luultu, että vastaavassa aineellisessa erityismuodossa tätä ongelmaa ei ole. Kuten kiertymäliisäysvektorin avaruudellisessa esitysmuodossa myös sen aineellisessa esitysmuodossa kiertymä-, kulmanopeus- ja kulmakiikthyvyysvektorit kuuluvat eri tangentiaaliin avaruuksiin eri ajan hetkinä, [8]. Tämä tulee ottaa huomioon kiertymisoperaattoria parametrisoitaessa. Epäyhteensopivuus voidaan korjata tangentiaalisilla operaattoreilla, jotka kuvaavat alkioita tangenttiavaruuksien välillä.

2 KIERTYMISMONISTO

Kuvassa 1 on hahmoteltu derivoituvan moniston perusajatusta, [6]. Derivoituva monisto voidaan kuvata karttalehtien avulla – parametriavaruudesta monistoavaruuteen – siten, että parametrisoinnin vaihdon kuvaus karttalehdestä toiseen on derivoituva. Usein monisto upotettu monistoavaruuteen, jonka ulotteisuusluku on suurempi kuin parametriavaruuden ulotteisuusluku ($n > d$).

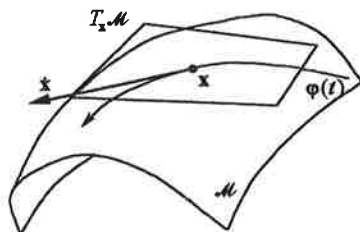


Kuva 1 Hahmotelma d -ulotteisesta derivoituvasta monistosta

Moniston tangenti pisteessä $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ voidaan määritellä parametrisoidun käyrän $\varphi(t)$ avulla, kuvan 2 mukaisesti,

$$\dot{\mathbf{x}} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}, \quad \text{missä } \mathbf{x} := \varphi(0), \quad \varphi(t) \in \mathcal{M}. \quad (1)$$

Tangenttiavaruudelle käytetään merkintää $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$, missä $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ on tangentin kantapiste.



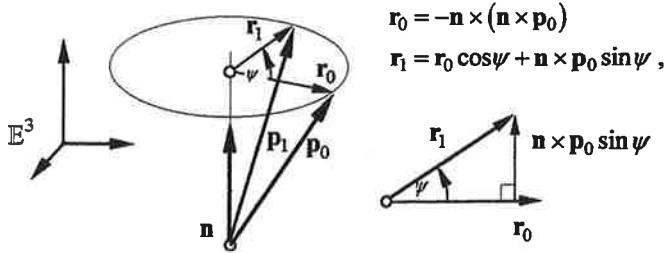
Kuva 2 Tangenti monistolla $\mathcal{M}$

Kiertymisliike voidaan esittää kiertymisoperaattoreiden avulla, joiden muodostama joukko voidaan määrittellä kaavalla

$$SO(3) := \{ \mathbf{R}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3 \text{ lineaarinen} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \}. \quad (2)$$

Kiertymisoperaattori $\mathbf{R}$ on siis ortogonaalinen operaattori, joka säilyttää kuvauksessa alkuperäisen kätisyyden. Kaava määrittää epäsuorasti derivoituvan moniston, jossa ortogonaalisuusehto asettaa kuusi toisistaan riippumatonta sidosetta kiertymisoperaattorille, jolloin kiertymisoperaattoreiden joukko $SO(3)$ muodostaa 3-ulotteisen pinnan, tai oikeammin moniston, 9-ulotteiseen avaruuteen. Kiertymismonisto voidaan parametrisoida vain paikallisesti, kuten lähteessä [10] esitetty, mutta jo kahdella karttalehdellä tämä parametrisointi voidaan suorittaa täysin peittävästi.

2.1 Kiertymisliikkeen kuvaus kiertymävektori avulla



Kuva 3 Kiertymisliike, jossa alkuperäinen vektori p_0 kierretään akselin n ympäri vastapäivään kulman ψ verran vektoriksi p_1

Vastaavasti mikä tahansa kiertymisoperaattori voidaan esittää kiertymävektorin Ψ avulla, joka määritellään

$$\Psi := \psi n, \quad n \in E^3, \psi \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

missä n on kiertymisakselin yksöisvektori $\|n\| = 1$ ja ψ on positiivinen kiertymiskulma. Kiertymävektorin Ψ ja kiertymisoperaattorin R välinen yhteys nähdään kuvasta 3, jolloin kiertyneeksi vektoriksi p_1 saadaan

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - r_0 + r_1 \\ &= p_0 + (1 - \cos \psi) n \times (n \times p_0) + n \times p_0 \sin \psi \\ &= R p_0 \quad p_1, p_0, n, r_0, r_1 \in E^3, \psi \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (4)$$

Kiertymisoperaattori voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$R := I + \frac{\sin \psi}{\psi} \tilde{\Psi} + \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} \tilde{\Psi}^2 = \exp(\tilde{\Psi}), \quad \psi = \|\Psi\|, \quad (5)$$

missä vinosymmetrinen tensori $\tilde{\Psi}$ määritellään kaavalla

$$\tilde{\Psi} h = \Psi \times h, \quad \forall h \in E^3. \quad (6)$$

Toisin sanoen $\tilde{\Psi}$ on akselivektoria Ψ vastaava vinosymmetrinen tensori.

2.2 Yhdistetty kiertyminen

Kahden peräkkäisen kiertymisliikkeen aineellinen esitysmuoto voidaan kirjoittaa muodossa

$$R_{\text{uusi}} = R R_{\text{aine}} = R \exp(\tilde{\Theta}_R), \quad (7)$$

missä Θ_R on aineellinen kiertymäisäysvektori pisteessä $R \in SO(3)$. Uusi kiertymisoperaattori R_{uusi} saadaan siis kertomalla oikealta kiertymisoperaattorin lisäyksellä R_{aine} , mikä vastaa kiertymäisäystä kiinteän koordinaatiston suhteen.

Yhdistetyn kiertymän avaruudellinen esitysmuoto on vastaavasti

$$R_{\text{uusi}} = R_{\text{avar}} R = \exp(\tilde{\Theta}_R) R, \quad (8)$$

missä Θ_R on avaruudellinen kiertymäisäysvektori pisteessä $R \in SO(3)$, mikä edustaa kiertymäisäystä liikkuvan koordinaatiston suhteen.

Aineellisella ja avaruudellisella esitysmuodoilla on yhteydet:

$$R_{\text{avar}} = R R_{\text{aine}} R^T, \quad \tilde{\Theta}_R = R \tilde{\Theta}_R R^T \quad \text{ja} \quad \Theta_R = R \Theta_R. \quad (9)$$

2.3 Kiertymismoniston tangentialiavaruudet

Kiertymisvektorilla kuvatum kiertymisliikkeen tangentialiavuus saadaan, kaavan (1) mukaisesti, kiertymisoperaattoria $\exp(t\tilde{\Psi}_I)$ derivoimalla

$$\left. \frac{d \exp(t\tilde{\Psi}_I)}{dt} \right|_{t=0} = \tilde{\Psi}_I \quad (10)$$

joten vinosymmetrinen tensori $\tilde{\Psi}_I \in T_I SO(3)$, missä I edustaa moniston kantapistettä. Vinosymmetriset tensorit $\tilde{A}$ muodostavat myös Lien algebran, jossa Lien sulkeet määritellään kaavalla

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] := \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^\sim, \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in so(3), \quad (11)$$

missä vinosymmetristen tensoreiden joukko $so(3)$ määritellään

$$so(3) := \{ \tilde{A} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3 \text{ lineaarinen} \mid \tilde{A}^T = -\tilde{A} \}. \quad (12)$$

Lien sulkeet on kaksilineaarinen, vinosymmetrinen operaattori, joka toteuttaa myös Jacobin identiteetin.

Yhdistetyn kiertymisliikkeen aineellinen tangentialiavuus mielivaltaisessa kantapisteessä $\mathbf{R} \in SO(3)$ saadaan derivoimalla kaava $\mathbf{R} \exp(t\tilde{\Theta})$ parametrin t suhteen ja asettamalla $t = 0$

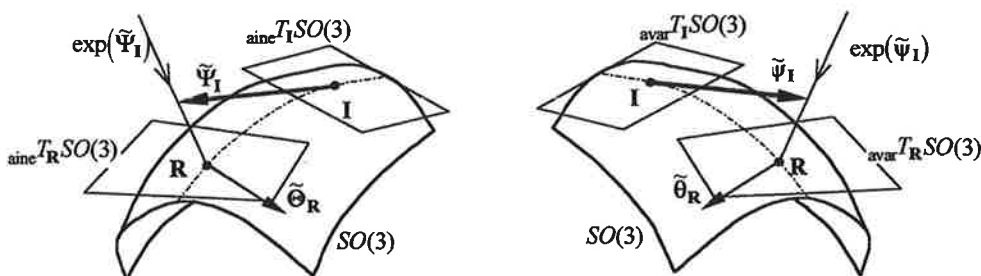
$${}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}SO(3) := \{ \tilde{\Theta}_{\mathbf{R}} := (\mathbf{R}, \tilde{\Theta}) \mid \mathbf{R}\tilde{\Theta}, \mathbf{R} \in SO(3), \tilde{\Theta} \in so(3) \}, \quad (13)$$

missä $(\mathbf{R}, \tilde{\Theta})$ edustaa vinosymmetristä tensoriavuutta $\tilde{\Theta} \in so(3)$ kantapisteessä $\mathbf{R} \in SO(3)$. On huomattava, ettei tensoreita $\tilde{\Theta}_{\mathbf{R}} \in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}SO(3)$ ja $\tilde{\Psi}_I \in {}_{\text{aine}}T_I SO(3)$ saa laskea yhteen, sillä ne kuuluvat eri kiertymismoniston $SO(3)$ tangentialiavaruuksiin, kuva 4.

Vastaavasti avaruudellinen tangentialiavuus määritellään kaavalla

$${}_{\text{avar}}T_{\mathbf{R}}SO(3) := \{ \tilde{\Theta}_{\mathbf{R}} := (\mathbf{R}, \tilde{\Theta}) \mid \tilde{\Theta}\mathbf{R}; \mathbf{R} \in SO(3), \tilde{\Theta} \in so(3) \}, \quad (14)$$

jolloin tensori $\tilde{\Theta}_{\mathbf{R}} \in {}_{\text{avar}}T_{\mathbf{R}}SO(3)$.



Kuva 4 Aineellisten (vas.) ja avaruudellisten (oik.) kiertymien geometrinen tulkinta

Seuraavaksi haetaan kiertymävektorin lisäyksen $\delta\tilde{\Theta}_{\mathbf{R}}$ ja kokonaiskiertymävektorin muutoksen $\delta\Psi_I$ välinen yhteys. Derivoidaan yhtälö

$$\exp(\tilde{\Psi}_I + t \cdot \delta\tilde{\Psi}_I) = \exp(\tilde{\Psi}_I) \exp(t \cdot \delta\tilde{\Theta}_{\mathbf{R}}) \quad (15)$$

parametrin t suhteen ja asettamalla $t = 0$ saadaan yhteys, [4]

$$\begin{aligned}\delta\Theta_R &= T \cdot \delta\Psi_I \\ T &:= \frac{\sin\psi}{\psi} I - \frac{1-\cos\psi}{\psi^2} \tilde{\Psi}_I + \frac{\psi - \sin\psi}{\psi^3} \Psi_I \otimes \Psi_I, \\ \psi &:= \|\Psi_I\|, \quad R = \exp(\Psi_I), \quad \lim_{\Psi_I \rightarrow 0} T(\Psi_I) = I\end{aligned}\quad (16)$$

missä $\delta\Psi$ on aineellinen kokonaiskiertymävektorin variaatio, $\delta\Theta_R$ on aineellisen kiertymäliisäyksen variaatio. On huomattava, että tangenttimuunnos on epäsäännöllinen (singulaarinen) kiertymäkulman arvolla 2π , joten joudutaan rajoittumaan kiertymäkulman arvoihin $0 \leq \psi < 2\pi$.

Määritellään aineellinen vektoriavaruus kaavalla

$${}_{\text{aine}}T_R := \left\{ \Theta_R := \Psi + \Theta \mid R = \exp(\tilde{\Psi}) \in SO(3), \Theta \in \mathbb{E}^3 \right\}, \quad (17)$$

jolloin $T: {}_{\text{aine}}T_I \rightarrow {}_{\text{aine}}T_R$. Määritelmä (17) tarjoaa käytännöllisen merkintätavan kiertymävektoreiden erotteliseksi.

Vastaavasti avaruudelliselle esitysmuodolle saadaan yhteys

$$\begin{aligned}\delta\Theta_R &= T^T \cdot \delta\psi \\ T &= T(\psi) \\ \psi &:= \|\psi\| \quad (= \|\Psi\|)\end{aligned}\quad (18)$$

missä avaruudellinen tangenttimuunnos $T: {}_{\text{avar}}T_I \rightarrow {}_{\text{avar}}T_R$, ts. tangenttimuunnos on kuvaus kiertymismoniston eri tangenttiavaruuksien välillä. Määritelmää (17) vastaava avaruudellinen vektoriavaruus voidaan määritellä

$${}_{\text{avar}}T_R := \left\{ \Theta_R := \theta + \psi \mid R = \exp(\tilde{\psi}) \in SO(3), \theta \in \mathbb{E}^3 \right\}, \quad (19)$$

jolloin $T^T: {}_{\text{avar}}T_I \rightarrow {}_{\text{avar}}T_R$.

Aineellinen kulmanopeustensori ja avaruudellinen kulmanopeustensori määritellään, [6]

$$\tilde{\Omega}_R := R^T \dot{R} \in {}_{\text{aine}}T_R SO(3), \quad \tilde{\omega}_R := \dot{R} R^T \in {}_{\text{avar}}T_R SO(3). \quad (20)$$

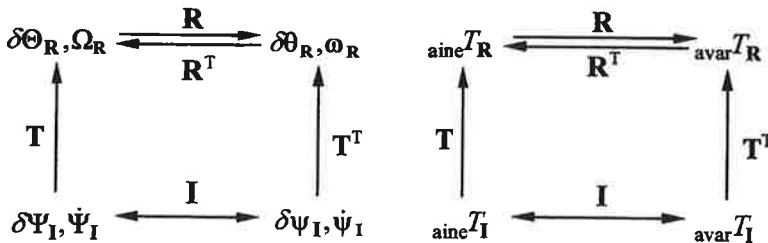
Näitä vinosymmetrisiä tensoreita vastaavat akselivektorit, eli aineelliset ja avaruudelliset kulmanopeusvektorit voidaan esittää kokonaiskiertymävektoreiden ja niiden aikaderivaattojen avulla

$$\begin{aligned}\Omega_R &= T(\Psi_I) \cdot \dot{\Psi}_I, \quad \text{missä } \Omega_R \in {}_{\text{aine}}T_R, \quad \dot{\Psi}_I, \Psi_I \in {}_{\text{aine}}T_I \\ \omega_R &= T^T(\psi_I) \cdot \dot{\psi}_I, \quad \text{missä } \omega_R \in {}_{\text{avar}}T_R, \quad \dot{\psi}_I, \psi_I \in {}_{\text{avar}}T\end{aligned}\quad (21)$$

Aineellisilla ja avaruudellisilla kulmanopeuksien esitysmuodoilla on yhteydet:

$$\tilde{\omega}_R = R \tilde{\Omega}_R R^T \quad \text{ja} \quad \omega_R = R \Omega_R. \quad (22)$$

kuten kiertymäliisäyksille (9), kuva 5.



Kuva 5 Vaihdannaiskaavio

Aineellinen ja avaruudellinen kulmakiihtyvyyssensori ja niitä vastaavat vektorit määritellään:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} &:= \dot{\tilde{\mathbf{\Omega}}}_{\mathbf{R}}, & \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} &\in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}SO(3) & \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{R}} &:= \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{\mathbf{R}}, & \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{R}} &\in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}SO(3) \\ \mathbf{A}_{\mathbf{R}} &:= \dot{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{R}}, & \mathbf{A}_{\mathbf{R}} &\in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}} & \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{R}} &:= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{R}}, & \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{R}} &\in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}\end{aligned}\quad (23)$$

Vektorit $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}}, \mathbf{A}_{\mathbf{R}} \in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}$, missä kantapiste $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ ja samalla tangentialiavaruus muuttuu alati. Vektoreita $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R}}, \mathbf{A}_{\mathbf{R}}$ voidaan kutsua pyörrevektoreiksi, kuten myös avaruudellisia vektoreita $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{R}} \in {}_{\text{avar}}T_{\mathbf{R}}$

Aineelliset ja avaruudelliset kulmakiihtyvyydet tangentialimuunnoksen $\mathbf{T}$ avulla lausuttuna:

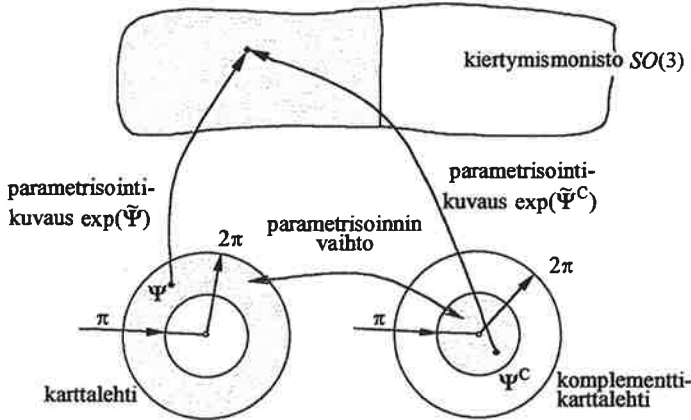
$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathbf{R}} &= \mathbf{T} \cdot \ddot{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{I}}, & \text{missä } \mathbf{A}_{\mathbf{R}} &\in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}, & \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{I}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{I}}, \ddot{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{I}} &\in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{I}} \\ \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{R}} &= \mathbf{T}^T \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{T}}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{I}}, & \text{missä } \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{R}} &\in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}, & \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{I}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{I}}, \ddot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{I}} &\in {}_{\text{avar}}T_{\mathbf{I}}\end{aligned}\quad (24)$$

2.4 Komplementaarinen kiertymävektori

Kokonais-Lagrangen esitysmuodossa singulaarisuusongelmat – kiertymäkulman arvolla $\psi = 2\pi$ – voidaan välttää määrittelemällä myös toinen karttalehti, joka parametrisoi täydentävästi kiertymismonistoa. Komplementtikiertymävektori $\boldsymbol{\Psi}^C \in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{I}^C}$ määritellään kaavalla

$$\boldsymbol{\Psi}^C := \boldsymbol{\Psi} - \frac{2\pi}{\psi} \boldsymbol{\Psi}, \quad \psi := \|\boldsymbol{\Psi}\|, \quad (25)$$

Kiertymävektori kuvataan komplementtikiertymävektoriksi, kun kiertymiskulma ylittää suoran kulman, ts. $\psi > \pi$. Tällöin komplementtikiertymäkulma $\psi^C = 2\pi - \psi$, joka on siis pienempi kuin suorakulma, ts. $\psi^C < \pi$. Kuvassa 6 on esitetty parametrisoinnin vaihdot alkuperäisestä kiertymävektoriparametrisoinnista komplementaariseen kiertymävektoriparametrisointiin. Näillä kahdella karttalehdellä mikä tahansa kiertymisliike voidaan kuvata kattavasti.



Kuva 6 Kiertymismoniston kaksi parametrisointia kiertymävektorin ja sen komplementti-vektorin avulla

Kun kiertymävektori $\boldsymbol{\Psi} \in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{I}}$ vaihdetaan komplementaariseksi kiertymävektoriksi $\boldsymbol{\Psi}^C \in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{I}^C}$, tarvitaan dynaamisessa analyysissä lisäksi komplementaarisen vektorin aikaderivaattoja, jotka ovat

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Psi}}^C &= \mathbf{B} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} & \in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{I}^C}, \\ \ddot{\boldsymbol{\Psi}}^C &= \mathbf{B} \cdot \ddot{\boldsymbol{\Psi}} + \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} & \in {}_{\text{aine}}T_{\mathbf{I}^C},\end{aligned}\quad (26)$$

missä symmetrinen kinemaattinen tensori $\mathbf{B} := \mathbf{D}_\Psi \Psi^C \in \text{Iso}(\text{aine}T_I, \text{aine}T_{I^C})$ ja sen aikaderivaatat ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= (1 - \frac{2\pi}{\psi})\mathbf{I} + \frac{2\pi}{\psi}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{B}} &= \frac{2\pi}{\psi^2}[(\mathbf{n} \cdot \dot{\Psi})\mathbf{I} + (\dot{\Psi} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \dot{\Psi}) - 3(\mathbf{n} \cdot \dot{\Psi})\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}],\end{aligned}\quad (27)$$

ja missä $\mathbf{n} = \Psi / \psi$.

3 EULERIN LIKEYHTÄLÖ

Tarkastellaan virtuaalisen periaatetta jäykälle kappaleelle V , mikä voidaan antaa muodossa

$$\int_V \delta \mathbf{x} \cdot (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{x}}) dV = 0, \quad \forall \delta \mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}, \quad (28)$$

missä $\mathbf{f}$ on annettu ulkoinen kuormitusvektorikenttä, ρ on tiheyskenttä, $\ddot{\mathbf{x}}$ on kiihtyvyyssvektorikenttä ja $\delta \mathbf{x}$ on virtuaalinen siirtymäkenttä. Holonomiset sidokset $\mathbf{g}$ – kuten esimerkiksi jäykän kappaleen oletukset – muodostavat asema-avaruuteen $\mathcal{X}$ sidosmoniston $\mathcal{M}$, joka voidaan määrittellä

$$\mathcal{M} := \{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \} \quad (29)$$

ja jonka tangenttiavaruus toimintapisteessä $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ on vastaavasti

$$T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} := \{ \delta \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \}. \quad (30)$$

Virtuaalinen siirtymäkenttä $\delta \mathbf{x}$ kuuluu siis sidosmoniston tangenttiavaruuteen. On huomattava, että virtuaalinen siirtymä voi olla suuruudeltaan minkä suuruisen tahansa, infinitesimaalinen tai ei. Erilaisten sidosten sekä virtuaalisen työn differentiaaaligeometriaa on käsitelty tarkemmin esityksessä [7] sekä siellä annetuissa lähteissä.

Parametrisointi, joka parametrizoi (jäykän kappaleen) yleisen palloliikkeen, voidaan esittää yksinkertaisesti muodossa

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X}, \quad (31)$$

missä $\mathbf{R}$ on jäykän kappaleen kiertymisoperaattori ja $\mathbf{X}$ on alkutilan paikkavektorikenttä. Nyt siis $\mathbf{g}(\mathbf{R}\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, jossa sidosehtona $\mathbf{g}$ on jäykän kappaleen oletuksesta syntyneet yhtälörajoitteet.

Sijoitetaan parametrisointi (31), jonka virtuaalinen siirtymäkenttä sekä toinen aikaderivaatta ovat aineellisessa esitysmuodossa

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x} &= \mathbf{R} \delta \tilde{\Theta}_{\mathbf{R}} \mathbf{X} = -\mathbf{R} \tilde{\mathbf{X}} \delta \Theta_{\mathbf{R}}, \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} \mathbf{X} + \mathbf{R} \tilde{\Omega}_{\mathbf{R}}^2 \mathbf{X} = -\mathbf{R} \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{A}_{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \tilde{\Omega}_{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{X}} \Omega_{\mathbf{R}},\end{aligned}\quad (32)$$

virtuaalisen työn periaatteeseen (28), jolloin saadaan

$$\delta \Theta_{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{M}_{\mathbf{R}} - \mathbf{J} \mathbf{A}_{\mathbf{R}} - \tilde{\Omega}_{\mathbf{R}} \mathbf{J} \Omega_{\mathbf{R}}) = 0 \quad (33)$$

ja missä on käytetty merkintöjä hitaustensorille $\mathbf{J}$ ja ulkoiselle momenttivektorille $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$

$$\mathbf{J} := \int_V \rho \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} dV, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{R}} := \int_V \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \mathbf{f} dV \quad (34)$$

Kaava (33) esittää virtuaalisen työn periaatetta Eulerin differentiaaliyhtälölle sen aineellisessa muodossa. Siitä myös havaitaan, että Eulerin differentiaaliyhtälö on määritetty kiertymismoniston tangenttiavaruudessa $\text{aine}T_{\mathbf{R}}$, sillä virtuaalinen kiertymäisäysvektori $\delta \Theta_{\mathbf{R}} \in \text{aine}T_{\mathbf{R}}$ kuuluu tähän

tangenttiavaruuteen. Kun lisäksi kiertymisoperaattori $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ – tangenttiavaruuden ${}_{\text{aine}}T_{\mathbf{R}}$ kantapiste – on ajan funktio, muuttuu myös tämän tangenttiavaruus ajan mukana. Perinteiset aika-integroimismenetelmät on suunniteltu lineaarisen avaruuden differentiaaliyhtälöille, jotka on siis määritelty $\mathbb{R}^n$:ssä. Nämä aikaintegroimismenetelmät eivät sovellu suoraan Eulerin differentiaaliyhtälön numeeriseen ratkaisemiseen, ellei niitä muuteta tähän tarkoitukseen, kuten lähteessä [8] on esitetty. Toinen näiden muunnosten kanssa samanarvoinen tapa on kuvata Eulerin differentiaaliyhtälö lineaariseen avaruuteen tangenttimuunnoksen $\mathbf{T}$ avulla josta seuraavassa.

3.1 Kuvaus lineaariseen avaruuteen

Eulerin differentiaaliyhtälön kuvaus lineaariseen avaruuteen saadaan sijoittamalla virtuaalisen työn periaatteeseen (33) yhteydet (16), (21a) ja (24a), jolloin periaatteeksi saadaan

$$\delta\mathbf{\Psi}_I \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{M}_R - \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} \ddot{\mathbf{\Psi}}_I - \mathbf{T}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{\Psi}}_I - \mathbf{T}^T (\mathbf{T} \dot{\mathbf{\Psi}}_I)^{\sim} \mathbf{J} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{\Psi}}_I) = 0 \quad (35)$$

Yllä oleva virtuaalisen työn periaate on nyt määritetty tangenttiavaruudessa ${}_{\text{aine}}T_I$, jossa kantapiste $\mathbf{I}$ on vakio. Tangenttiavaruus ${}_{\text{aine}}T_I$ voidaan täten samaistaa euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^3$ kanssa. Periaatteen (35) avulla voidaan myös määrittellä virtuaalista kiertymää $\delta\mathbf{\Psi}_I \in {}_{\text{aine}}T_I$ vastaava ulkoisen kuorman työpari

$$\mathbf{M}_I := \mathbf{T}^T \mathbf{M}_R \in {}_{\text{aine}}T_I \quad (36)$$

Tällöin periaate (35) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\delta\mathbf{\Psi}_I \cdot (\mathbf{M}_I - \mathbf{J}_I \ddot{\mathbf{\Psi}}_I - \mathbf{M}_I^{\text{hk}}) = 0 \quad (37)$$

missä hitaustensori $\mathbf{J}_I \in {}_{\text{mat}}T_I \otimes {}_{\text{mat}}T_I$ ja hyrrä- ja keskeismomenttivektori $\mathbf{M}_I^{\text{hk}} \in {}_{\text{aine}}T_I$ määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_I &:= \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T}, \\ \mathbf{M}_I^{\text{hk}} &:= \mathbf{T}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{\Psi}}_I + \mathbf{T}^T (\mathbf{T} \dot{\mathbf{\Psi}}_I)^{\sim} \mathbf{J} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{\Psi}}_I. \end{aligned} \quad (38)$$

Periaatteen (37) mukainen muunnettu Eulerin differentiaaliyhtälö

$$\mathbf{J}_I \ddot{\mathbf{\Psi}}_I = \mathbf{M}_I - \mathbf{M}_I^{\text{hk}} \quad (39)$$

soveltuu suoraan differentiaaliyhtälöiden numeeriseen ratkaisemiseen, koska tämä differentiaaliyhtälö on nyt määritetty lineaarisessa avaruudessa ${}_{\text{aine}}T_I$.

Seuraavaksi esitetään lyhyesti muunnetun Eulerin differentiaaliyhtälön (39) numeerisessa ratkaisemisessa tarvittavat tangenttitensorit. Tangenttimuunnoksen $\mathbf{T}$ aikaderivaatta on

$$\dot{\mathbf{T}}(\dot{\Psi}, \Psi) = c_1(\Psi \cdot \dot{\Psi})\mathbf{I} - c_2(\Psi \cdot \dot{\Psi})\tilde{\Psi} + c_3(\Psi \cdot \dot{\Psi})\Psi \otimes \Psi + c_4\dot{\tilde{\Psi}} + c_5(\dot{\Psi} \otimes \Psi + \Psi \otimes \dot{\Psi}) \quad (40)$$

missä kertoimet c_i ovat

$$\begin{aligned} c_1 &:= \frac{\psi \cos \psi - \sin \psi}{\psi^3}, & c_2 &:= \frac{\psi \sin \psi + 2 \cos \psi - 2}{\psi^4}, \\ c_3 &:= \frac{3 \sin \psi - 2\psi - \psi \cos \psi}{\psi^5}, & c_4 &:= \frac{\cos \psi - 1}{\psi^2}, & c_5 &:= \frac{\psi - \sin \psi}{\psi^3}. \end{aligned} \quad (41)$$

Tensorin $\dot{\mathbf{T}}$ raja-arvo on

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} \dot{\mathbf{T}}(\dot{\Psi}, \Psi) = -\frac{1}{2} \dot{\tilde{\Psi}}. \quad (42)$$

Keskeisjäykkyys-, hyrrävaimennus- ja kuormitustensori määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{kesk}} &:= D_{\Psi}(\mathbf{J}_I \ddot{\Psi}_I + \mathbf{M}_I^{\text{hk}}), \\ \mathbf{C}_{\text{hyrrä}} &= D_{\dot{\Psi}}(\mathbf{J}_I \ddot{\Psi}_I + \mathbf{M}_I^{\text{hk}}), \\ \mathbf{K}_{\text{kuorm}} &:= D_{\Psi}(\mathbf{M}_I), \end{aligned} \quad (43)$$

jolloin nämä tensorit voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{kesk}} &= \mathbf{C}_2(\tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega + \mathbf{J}\mathbf{A}, \Psi) + \mathbf{T}^T \cdot (\tilde{\Omega}\mathbf{J} - (\mathbf{J}\Omega)^{\sim}) \mathbf{C}_1(\dot{\Psi}, \Psi) + \\ &\quad + \mathbf{T}^T \mathbf{J} \cdot (\mathbf{C}_5(\dot{\Psi}, \Psi) + \mathbf{C}_1(\ddot{\Psi}, \Psi)), \\ \mathbf{C}_{\text{hyrrä}} &= \mathbf{T}^T \left[(\tilde{\Omega}\mathbf{J} - (\mathbf{J}\Omega)^{\sim}) \mathbf{T} + \mathbf{J}\mathbf{C}_4(\dot{\Psi}, \Psi) \right], \\ \mathbf{K}_{\text{kuorm}} &= \mathbf{C}_2(\mathbf{M}_R, \Psi) + \mathbf{T}^T \mathbf{b} \mathbf{T}, \quad \mathbf{b} := \int_V \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{R}^T \mathbf{f})^{\sim} dV, \end{aligned} \quad (44)$$

missä $\mathbf{f}$, $\mathbf{J}$ ja $\mathbf{M}_R$ ovat annettu ulkoinen kuormitusvoimakenttä (28) – oletettu vakioksi, hitaus-tensori (34a) sekä ulkoinen momenttivektori (34b). Tensorit $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_4$ ja $\mathbf{C}_5$ määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(\mathbf{V}, \Psi) &:= D_{\Psi}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{V}), \quad \mathbf{C}_2(\mathbf{V}, \Psi) := D_{\Psi}(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{V}) \\ \mathbf{C}_4(\dot{\Psi}, \Psi) &:= D_{\dot{\Psi}}(\dot{\mathbf{T}} \dot{\Psi}), \quad \mathbf{C}_5(\dot{\Psi}, \Psi) := D_{\Psi}(\dot{\mathbf{T}} \dot{\Psi}), \end{aligned} \quad (45)$$

ja ne voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(\mathbf{V}, \Psi) &:= c_1 \mathbf{V} \otimes \Psi - c_2 (\tilde{\Psi} \mathbf{V}) \otimes \Psi + c_3 (\Psi \cdot \mathbf{V}) \Psi \otimes \Psi - c_4 \tilde{\mathbf{V}} + c_5 ((\Psi \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + \Psi \otimes \mathbf{V}), \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{V}, \Psi) &:= c_1 \mathbf{V} \otimes \Psi + c_2 (\tilde{\Psi} \mathbf{V}) \otimes \Psi + c_3 (\Psi \cdot \mathbf{V}) \Psi \otimes \Psi + c_4 \tilde{\mathbf{V}} + c_5 ((\Psi \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + \Psi \otimes \mathbf{V}), \\ \mathbf{C}_4(\dot{\Psi}, \Psi) &:= (c_1 + c_5) (\Psi \cdot \dot{\Psi}) \mathbf{I} + 2c_3 (\Psi \cdot \dot{\Psi}) (\Psi \otimes \Psi) + 2c_5 (\Psi \otimes \dot{\Psi}) + (c_1 + c_5) (\dot{\Psi} \otimes \Psi) + \\ &\quad - c_2 (\tilde{\Psi} \dot{\Psi}) \otimes \Psi - c_2 (\Psi \cdot \dot{\Psi}) \tilde{\Psi}, \\ \mathbf{C}_5(\dot{\Psi}, \Psi) &:= (c_3 (\Psi \cdot \dot{\Psi})^2 + c_5 (\dot{\Psi} \cdot \dot{\Psi})) \mathbf{I} + \left(\frac{c'_3}{\Psi} (\Psi \cdot \dot{\Psi})^2 + c_3 (\dot{\Psi} \cdot \dot{\Psi}) \right) (\Psi \otimes \Psi) + \\ &\quad + 2c_3 (\Psi \cdot \dot{\Psi}) (\Psi \otimes \dot{\Psi}) + \left(\frac{c'_1}{\Psi} + c_3 \right) (\Psi \cdot \dot{\Psi}) (\dot{\Psi} \otimes \Psi) - \frac{c'_2}{\Psi} (\Psi \cdot \dot{\Psi}) (\tilde{\Psi} \dot{\Psi}) \otimes \Psi + \\ &\quad - c_2 (\tilde{\Psi} \dot{\Psi}) \otimes \dot{\Psi} + c_2 (\Psi \cdot \dot{\Psi}) \tilde{\Psi} + (c_1 + c_5) (\dot{\Psi} \otimes \dot{\Psi}). \end{aligned} \quad (46)$$

Kerrointen c_i derivaatat ovat

$$\begin{aligned} c'_1 &= \frac{3 \sin \psi - \psi^2 \sin \psi - 3 \psi \cos \psi}{\psi^4}, \quad c'_2 = \frac{\psi^2 \cos \psi - 5 \psi \sin \psi - 8 \cos \psi + 8}{\psi^5}, \\ c'_3 &= \frac{7 \psi \cos \psi + 8 \psi + \psi^2 \sin \psi - 15 \sin \psi}{\psi^6}, \end{aligned} \quad (47)$$

ja tensoreiden $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_4$ ja $\mathbf{C}_5$ raja-arvot ovat

$$\begin{aligned} \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathbf{C}_1(\mathbf{V}, \Psi) &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{V}}, \quad \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathbf{C}_2(\mathbf{V}, \Psi) = -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{V}}, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathbf{C}_4(\dot{\Psi}, \Psi) &= \mathbf{O}, \quad \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathbf{C}_5(\dot{\Psi}, \Psi) = -\frac{1}{6} (\dot{\Psi} \otimes \dot{\Psi}) + \frac{1}{6} (\dot{\Psi} \cdot \dot{\Psi}) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (48)$$

3.2 Eulerin liikeyhtälö avaruudellisessa esitysmuodossa

Eulerin yhtälön avaruudellinen esitysmuoto saadaan sijoittamalla virtuaalisen työn periaatteen (28) parametrisointi (31), jonka virtuaalinen siirtymäkenttä sekä toinen aikaderivaatta ovat avaruudellisessa esitysmuodossa

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x} &= \delta \tilde{\Theta}_R \mathbf{R} \mathbf{x} = -\tilde{\mathbf{x}} \delta \tilde{\Theta}_R, \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\alpha}_R \mathbf{R} \mathbf{x} + \tilde{\omega}_R^2 \mathbf{R} \mathbf{x} = -\tilde{\mathbf{x}} \alpha_R - \tilde{\omega}_R \tilde{\mathbf{x}} \omega_R,\end{aligned}\quad (49)$$

jolloin saadaan

$$\delta \tilde{\Theta}_R \cdot (\mathbf{m}_R - \mathbf{j} \alpha_R - \tilde{\omega}_R \mathbf{j} \omega_R) = 0, \quad (50)$$

ja missä on käytetty merkintöjä avaruudelliselle hitaustensorille $\mathbf{j}$ ja ulkoiselle momenttivektorille $\mathbf{m}_R$

$$\mathbf{j} := \int_V \rho \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} dV, \quad \mathbf{m}_R := \int_V \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{f} dV. \quad (51)$$

Aineellisella ja avaruudellisilla suureilla (vektoreilla ja tensoreilla) on kaavojen (9) ja (22) mukaiset yhteydet, jolloin virtuaalisen työn periaate (50) voidaan myös kirjoittaa muodossa

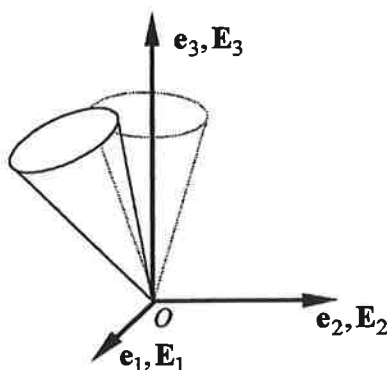
$$\delta \tilde{\Theta}_R \cdot \mathbf{R} (\mathbf{M}_R - \mathbf{J} \mathbf{A}_R - \tilde{\Omega}_R \mathbf{J} \Omega_R) = 0, \quad (52)$$

missä suluissa olevat termit vastaavat Eulerin liikeyhtälöä sen aineellisessa muodossa. Toisaalta avaruudellisia suureita linearisoitaessa tulee käyttää objektiivisia derivaattoja, kuten Lien derivaattaa muodossa

$$\mathbf{R} D(\mathbf{R}^T \circ), \quad (53)$$

missä $\circ$ -ilmaisee derivoitavan avaruudellisen vektorin paikkaa. Kun tätä Lien derivaattaa soveltaa virtuaalisen työn periaatteeseen (50) ja erityisesti kaavaan (52) nähdään, että derivointi suoritetaan aina vastaavilla aineellisilla suureilla. Näin on siksi, koska objektiivisen aineellisen suureen derivaatta on aina objektiivinen. Tästä sekä avaruudellisen ja aineellisen kokonaiskiertymävektorin samaistamisesta, $\psi = \Psi$, seuraa, että avaruudelliset tangenttitensorit saavat täsmälleen saman muodon kuin vastaavat aineelliset suuret (44).

4 LASKENTAESIMERKKI



Kuva 7 Hyrrä, jossa vertailutila on piirretty katkoviivalla ja alkuarvon mukainen asema yhtenäisellä viivalla

Esimerkkiongelmassa tarkastellaan kuvan 7 mukaista hyrrää, jota kuormittaa oma paino ja jonka teknisiksi tiedoiksi sekä alkuehdoiksi on valittu

$$[J_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2, [M_i] = mgl \begin{bmatrix} (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{E}_2 \\ -(\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, mgl = 20 \text{ Nm},$$

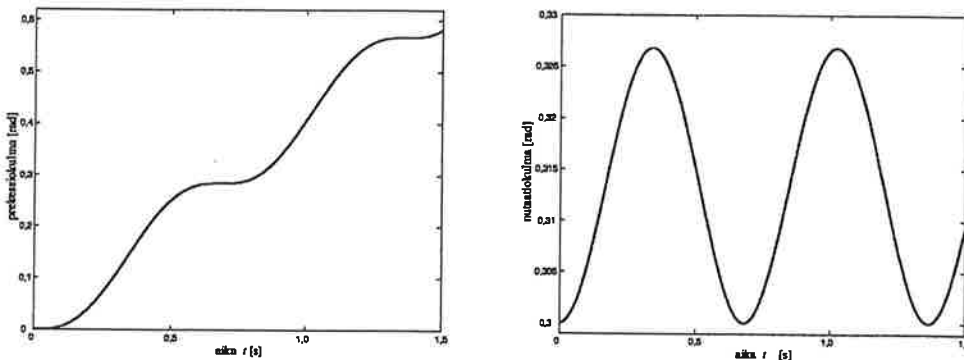
$$[\psi_i(t=0)] = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ rad}, [\Omega_i(t=0)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$
(54)

missä m, g, l ovat hyrrän massa, vetovoimakiihtyvyyden ja massakeskiön etäisyys origosta. On huomattava, että $\mathbf{J} = J_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$, $\mathbf{M} = M_i \mathbf{E}_i$, $\Psi = \psi_i \mathbf{E}_i$, $\Omega = \Omega_i \mathbf{E}_i$. Hyrrä pyörii akselinsa ympäri noin kahdeksan kierrosta sekunnissa, jolloin kiertymävektorin kuvaus komplementaariseksi suureeksi tulee ajankohtaiseksi, koska laskenta-aikaväliksi on valittu 1,5 sekuntia. Kiertymävektorin kutistuskuvauksen eli parametrisoinnin vaihto tehdään kappaleen 2.4 mukaan. Laskentamallina on käytetty kappaleessa 3.1 esitettyä lineaariseen avaruuteen muunnettua Eulerin differentiaaliyhtälöä sekä samassa kappaleessa esitettyjä tangenttitensoreita. Aikaintegrointi on suoritettu perinteisellä Newmarkin menetelmällä, jossa vakio aika-askeleena oli $h = 0,001 \text{ s}$ ja jossa menetelmäparametreina olivat $\beta = 0,25$ ja $\gamma = 0,5$, mikä vastaa puolisuunnikaskaavaa.

Teoreettinen hyrrän prekessioliikkeen kulmanopeus on lähteen [3] mukaan

$$\omega_{\text{prec}} = \frac{mgl}{J_{33}\Omega_3} \Rightarrow \omega_{\text{prec}} = 0,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$
(55)

Kuvassa 8 on esitetty hyrrän prekessio- ja nutaatiokulman vasteen tulokset laskentavälillä 1,5 sekuntia. Vasemmanpuoleisesta kuvasta nähdään, että käyrän keskimääräinen kulmakerroin on teorianmukainen 0,4 rad/s. Tulokset lisäksi vastaavat täysin lähteessä [8] esitettyjä tuloksia, jossa on käytetty muunnettua Newmarkin menetelmää, mikä edustaa Eulerin yhtälön kuvausta lineaariseen avaruuteen, jossa kantapisteenä on edellinen toimintapiste $\mathbf{R}(t_n)$. Tätä menetelmää tavalliseksi kutsutaan päivitetyn Lagrangen menetelmäksi, kun tässä esityksessä on käytetty kokonais-Lagrangen menetelmää, jossa tuntemattomana on alkutilan kokonaiskiertymävektori.



Kuva 8 Hyrrän prekessiokulman ja nutaatiokulman aikavasteet.

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

Esityksessä on tutkittu kiertymismonistoa sekä Eulerin kiertymisliikkeen differentiaaliyhtälöä, joka on määritetty kiertymismoniston tangenttiavaruudessa. On esitetty kuvaus, jossa tämä differentiaaliyhtälö muunnetaan lineaarisen avaruuden differentiaaliyhtälöksi, joka voidaan ratkaista käyttäen tavallisia aikaintegroimismenetelmiä, kuten Newmarkin menetelmää. Samoin on annettu implisiittisissä aikaintegroimismenetelmissä tarvittavat muunnetun Eulerin likeyhtälön tangentti-tensorit. Lisäksi kiertymisliikkeen parametrisointiin on käytetty alkutilan kiertymävektoria, jonka vastaava vinosymmetrinen tensori on kiertymisoperaattorin alkutilan tangenti. Singulaariongelmat on ratkaistu kutistamalla kiertymävektori komplementaariseksi kiertymävektoriksi.

Vaikka esityksessä on käsitelty vain jäykän kappaleen dynamiikkaa, voidaan tässä esitettyä menetelmää soveltaa suoraan geometrisesti tarkkaan palkki- ja kuoriteoriaa. Menetelmää onkin sovellettu teleskooppipuomin mallintamiseen [5] sekä singulaarittomaan Reissnerin palkkielementin kehittämiseen, jossa perustuntemattomana on alkutilan kiertymävektori [9].

LÄHDELUETTELO

- [1] Argyris, J. & Poterasu, V.F., (1993), "Large Rotation Angles Revisited Application of Lie Algebra", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 103, s. 11-42.
- [2] Argyris, J., (1982), "An Excursion into Large Rotations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, s. 85-155.
- [3] Arnold, V.I., (1978), *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- [4] G radin, M., Cardona, A., (2001), *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*, John Wiley & Sons, 327 s..
- [5] Marjam ki, H. & Mäkinen, J., (2003), "Teleskooppipuomin mallintaminen elementtimenetelmällä", *VIII Suomen mekaniikkapäivät*, Espoo, 12.-13.6.2003.
- [6] Marsden, J.E. & Ratiu, T.S., (1999), *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Springer, New York.
- [7] Mäkinen, J., (2000), "Newtonin ja Lagrangen mekaniikan peruslait", *VII Suomen mekaniikkapäivät*, Tampere, 25.-26.5.2000, nide 2, s. 609-620. <http://mohr.me.tut.fi/jari>
- [8] Mäkinen, J., (2001), "Critical Study of Newmark-Scheme on Manifold of Finite Rotations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(8-10), pp. 817-828.
- [9] Mäkinen, J., (2003), "Total Lagrangian Reissner's Geometrically Exact Beam Element without Singularities", l hetetty arvioitavaksi *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* -lehteen.
- [10] Stuelpnagel, J., (1964), "On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group", *SIAM Review*, 6, s. 422-430.

AN ORTHOTROPIC NONLINEAR ROLL MODEL ACCOUNTING FOR FINITE STRAIN

Raimo von Hertzen¹ and Marko Jorkama²

¹Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics
P.O.Box 1100, FIN-02015 HUT, FINLAND

²Metso Paper Inc., Winders

ABSTRACT

A model of a wound paper roll is presented. The roll is considered as a layered hyperelastic orthotropic cylinder, linearly elastic in the circumferential and axial directions and non-linearly elastic in the radial direction. The winding is considered as an incremental process consisting of addition of successive single hoops of web onto the roll serving as an example of an accretion process of solid mechanics. The governing field equations for the roll consist of the incremental equilibrium equation and of the incremental constitutive and compatibility equations. It should be noted that the total strain field does not satisfy the conventional compatibility equation since the roll build-up constitutes an accumulative accretion process of pre-stressed material. The boundary conditions are set by the elastic cylindrical roll core and by the tension of the added outmost hoop.

In many winding applications the displacements and displacement gradients are not small compared to unity. In paper winding, the radial strains of the rolls take typically values of the order 5-10%, and even 15 % in the case of certain soft paper boards. Therefore, the infinitesimal strain theory, utilized usually for strains well below 1 %, is not a good approximation for such rolls. A discussion of finite strains in winding is given and it is shown how finite strains may be incorporated into the developed winding model.

INTRODUCTION

The stress state of a winding roll provides the most important piece of information for the evaluation of the future durability and functionality of the finished roll in the subsequent converting processes. Unfortunately, non-destructive techniques to measure the internal state of stress of a winding roll are still lacking. This applies to the finished roll as well as to the roll still in a wind up. Thus, to evaluate the quality of the winding, there is an obvious need for a physical model of the winding process. The inputs for this model would be the boundary conditions set by the winding apparatus and the material properties of the web.

In most of the winding models, the roll is built up by shrinking concentric rings of paper onto the existing roll. As each layer is added, new tangential and radial stresses in the roll are calculated until the roll is completed.

In 1959 R. P. Gutterman [1] outlined the basic approach to the model of a roll of magnetic tape. Although Gutterman's model was a continuous elastic disk, he already outlined the approach of modeling the roll as discrete concentric thin rings. He made a mathematical analysis for the disk using the theory of elasticity and was able to predict some roll failures.

In 1963 H. Trampusch [2,3], in a two-part report, modeled a wound roll of magnetic tape as a collection of thin elastic concentric rings as suggested by Gutterman. The model was for a linear elastic anisotropic material. From the model, the internal stresses were calculated. After the roll was wound it was treated as a continuous, homogeneous, isotropic and viscoelastic disk with an

initial stress state given by the winding. The internal stresses as a function of time were then calculated from this model.

In 1973 Rand and Eriksson [4] obtained a good agreement between the measured stresses in a roll of newsprint and their linear, anisotropic model. Their instrumentation was extremely sophisticated. For example, to measure the tangential web stress, a hole was cut in the web and a strain gage was mounted across the hole such that the strain gage added enough stiffness to the web to compensate for the loss of stiffness due to the hole. They measured both the interface pressure and the tangential tension throughout the roll, and also developed a single parameter called "roll stiffness" to describe the roll quality.

Already 1947 Lekhnitskii [5] (first in Russian and 1968 in English) presented an elastic solution for a system of several, not necessary of equal modulus, anisotropic and concentric rings piled onto each other. Although his derivation contained all the needed elements, he did not compile it in a form suitable for a winding model. In addition, a proper treatment to account for the non-linear radial modulus was not presented.

Finally, in 1987 Hakiel [6] presented an undisputable theory and computation scheme for an anisotropic and non-linear winding model. Since its release it has been the industry standard for computing the internal wound roll stresses. An upgrade, accounting also for the centrifugally induced stresses, was presented by Olsen [7] in 1995.

Due to historical reasons the type of the constitutive equations in the winding models has traditionally been the plane stress state, which is suitable for narrow webs, such as magnetic tapes, but less appropriate for reeling in the paper industry. However, this does not restrict the applicability of the winding models since both the plane stress and plane strain states are described by a linear relationship between the stresses and strains and can be transformed into each other.

The winding model presented in this paper will be based on Hakiel's approach. The new features are the full treatment of the centrifugal forces, the proper iteration of the wound-on tension relaxation and the treatment of finite strains. The theory is restricted to elastic materials, though it is acknowledged that viscoelasticity should be accounted for when there is a need to estimate the wound roll stresses hours or days after the winding. The state-of-the-art treatment of viscoelastic winding is given by Qualls and Good [8].

THEORY

Although winding is a continuous process, it has traditionally been considered as an incremental process in the winding models, that is, a process consisting of adding successive single hoops of web onto the roll leading to an incremental increase in the roll radius. Thus, instead of a spiral, the roll is assumed to be a collection of concentric hoops stuck together. This is an example of an accretion problem of solid mechanics discussed by Brown and Goodman [9]. One should note that, due to the radial compression of the roll, the original web tension T of the outer hoop will change after placing the hoop onto the roll. This tension loss is dictated by the equilibrium of the hoop and the roll and is not known beforehand.

The roll is considered to be an hyperelastic orthotropic cylinder, linearly elastic in the circumferential and axial directions and non-linearly elastic in the radial direction. Due to its hyperelasticity, a complementary strain energy function $W^*(\sigma_{ij})$ for the roll exists. Using the contracted notation for stresses and strains, the constitutive equations may be written as

$$\varepsilon_i = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_i} \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (1)$$

For incremental changes one gets

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial \sigma_i} (\Delta W^*) = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2 W^*}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \Delta \sigma_j \quad (2)$$

For the orthotropic roll under consideration this can be written in terms of the engineering elastic constants as

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \varepsilon_\theta \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \gamma_{\theta z} \\ \Delta \gamma_{zr} \\ \Delta \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_r & -\nu_{r\theta}/E_\theta & -\nu_{rz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{\theta r}/E_r & 1/E_\theta & -\nu_{\theta z}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zr}/E_r & -\nu_{z\theta}/E_\theta & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_r \\ \Delta \sigma_\theta \\ \Delta \sigma_z \\ \Delta \tau_{\theta z} \\ \Delta \tau_{zr} \\ \Delta \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Above E_i is Young's modulus in the i -direction, ν_{ij} Poisson's ratio for transverse strain in the i -direction when stressed in the j -direction, and G_{ij} the shear modulus in the ij -plane ($i, j = r, \theta, z$). Note that these moduli are the tangential (linearized) moduli at the given stress level. Since the order of differentiation in (2) can be changed, Maxwell's relations hold, that is

$$\frac{\nu_{ij}}{E_j} = \frac{\nu_{ji}}{E_i} \quad (i, j = r, \theta, z) \quad (4)$$

The requirement that the work done by the stress components must always be positive, in order to avoid the creation of energy, provides a *thermodynamic constraint* on the values of the elastic constants. This means that both the stiffness and compliance matrices must be positive-definite leading to the conditions [10]

$$|\nu_{ij}| < \left(\frac{E_j}{E_i}\right)^{1/2}, \quad i, j = r, \theta, z, \quad (5)$$

and

$$\nu_{r\theta}\nu_{\theta z}\nu_{zr} < \frac{1 - \nu_{r\theta}^2\left(\frac{E_r}{E_\theta}\right) - \nu_{\theta z}^2\left(\frac{E_\theta}{E_z}\right) - \nu_{zr}^2\left(\frac{E_z}{E_r}\right)}{2} < \frac{1}{2} \quad (6)$$

These restrictions on the engineering constants can be used to evaluate whether experimental data are consistent with basic physical requirements.

For rolls wound of paper, plastic film and many other materials, all elastic parameters except the radial modulus E_r can be considered as constants. The most common constitutive laws for E_r are Pfeiffer's law [11]

$$E_r(\sigma_r) = K_2(K_1 - \sigma_r) \quad (7)$$

corresponding to an exponential total stress-strain relation and the polynomial relation

$$E_r(\sigma_r) = C_0 + C_1\sigma_r + C_2\sigma_r^2 \quad (8)$$

suggested by Hakiel [12]. For rolls which are particularly soft at low pressures the form

$$E_r(\sigma_r) = \sigma_r(C_0 + C_1\sigma_r + C_2\sigma_r^2) \quad (9)$$

may be useful. For rolls which display a relatively rapid turn from soft to hard behaviour, exhibiting an abrupt bend in the total stress-strain behaviour, a double exponential form can be successful.

The subsequent theory is developed either for plane stress ($\Delta\sigma_z = 0$) or plane strain ($\Delta\varepsilon_z = 0$) states. The former is appropriate for magnetic tapes, for example, and the latter for long paper rolls. In addition, due to circular symmetry, the stress and strain fields are functions of the radial coordinate only so that all shear strains and stresses vanish.

By using Maxwell's relations (4) it may be shown that the constitutive relations can be written in the form

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \Delta\sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} \Delta\sigma_\theta, \quad \Delta\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_\theta} \Delta\sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta r}}{E_r} \Delta\sigma_r \quad (10)$$

provided that for the plane strain case the substitutions

$$E_r \rightarrow \frac{E_r}{1 - \nu_{rz}\nu_{zr}}, \quad \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} \rightarrow \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} \left(1 + \frac{\nu_{rz}\nu_{z\theta}}{\nu_{r\theta}}\right), \quad E_\theta \rightarrow \frac{E_\theta}{1 - \nu_{\theta z}\nu_{z\theta}} \quad (11)$$

are made.

The roll is wound on an orthotropic linearly elastic core of outer radius r_0 . The current outer radius of the roll is denoted by R (see Figure 1) and the outer radius of the finished roll by R_0 . A radial position in the roll is denoted by r . Hence, $r_0 \leq r \leq R \leq R_0$. The roll is rotating with an angular velocity $\omega(R)$.

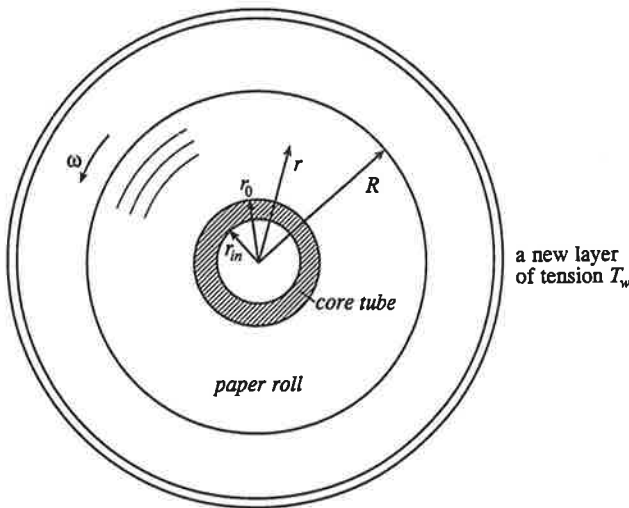


Figure 1. Core tube, paper roll and a new layer to be added onto the roll.

The equation of equilibrium in polar coordinates in the absence of shear stresses is

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = -\rho\omega^2 r^2. \quad (12)$$

Let us consider the changes induced by the addition of a single tensioned hoop of thickness $h(R)$ onto the roll of outer radius R . The governing field equations for this incremental state are the equilibrium equation obtained from (12)

$$r \frac{d(\Delta\sigma_r)}{dr} + \Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta = -\rho\Delta(\omega^2)r^2, \quad (13)$$

the incremental constitutive relations (10)

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \Delta\sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} \Delta\sigma_\theta, \quad \Delta\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_\theta} \Delta\sigma_\theta - \frac{\nu_{r\theta}}{E_r} \Delta\sigma_r, \quad (14)$$

and the incremental strain-displacement relations

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{d(\Delta u)}{dr}, \quad \Delta\varepsilon_\theta = \frac{\Delta u}{r}, \quad (15)$$

where $\Delta u = \Delta u(r)$ is the radial displacement at r due to the addition of the outer hoop. Equations (13) – (15) are written within the range $r_0 \leq r \leq R$. It should be noted that due to the discrete accretion process of the roll the total strains and displacements ε_r , ε_θ and u do not satisfy relations (15) and, hence, the compatibility equation is not valid for the total strain field. The origin of this incompatibility lies in the different displacement history of different parts of the roll: the outer surface of a certain layer has experienced one displacement event, caused by the addition of that very layer, more than the inner surface of the next layer. On the contrary, the displacement field $\Delta u(r)$ is caused solely by the hoop added on the top of the current outer surface at R . Therefore, the roll has experienced the displacement field $\Delta u(r)$ as a solid within the range $r_0 \leq r \leq R$. After the elimination of Δu one gets from equations (15) the *incremental compatibility equation*

$$r \frac{d(\Delta\varepsilon_\theta)}{dr} + \Delta\varepsilon_\theta - \Delta\varepsilon_r = 0. \quad (16)$$

Equations (13), (14) and (16) can be combined and rearranged to give a second order differential equation for the incremental radial stress

$$r^2 \frac{d^2(\Delta\sigma_r)}{dr^2} + 3r \frac{d(\Delta\sigma_r)}{dr} + \left(1 - \frac{E_\theta}{E_r}\right) \Delta\sigma_r = -(3 + \nu_{r\theta}) \rho \Delta(\omega^2) r^2, \quad (r_0 \leq r \leq R). \quad (17)$$

Equation (17) is subject to two boundary conditions. At the core-roll interface the radial displacement of the core equals that of the roll. Therefore, also the tangential strains of the core and roll at the core-roll interface are equal. Since the inner boundary of the core at $r = r_{in}$ is subject to atmospheric pressure all the time, the change in the surface stress $\sigma_r(r_{in})$ vanishes

during winding. Therefore $\Delta\sigma_r(r_{in}) = 0$ and the change of the tangential strain of the roll due to the added hoop at the roll-core interface becomes

$$\Delta\epsilon_\theta(r_0) = \frac{\Delta\sigma_r(r_0)}{E_c} + D\rho\Delta(\omega^2)r_{in}^2. \quad (18)$$

Now equations (13), (14) and (18) imply for the boundary condition at the core

$$r_0 \frac{d(\Delta\sigma_r)}{dr}(r_0) = \left(\frac{E_\theta}{E_c} + \nu_{r\theta} - 1\right)\Delta\sigma_r(r_0) - \rho r_0^2 \left(1 - \frac{r_{in}^2}{r_0^2} DE_\theta\right)\Delta(\omega^2). \quad (19)$$

The boundary condition at the outer surface of the roll is derived as follows. The equation of equilibrium in the outer hoop added onto the roll of radius R is (see equation (12))

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = -\rho(\omega + \Delta\omega)^2 r^2 \quad (R < r \leq R + h). \quad (20)$$

Since the outer surface of the hoop is free of stresses and the hoop is very thin, one may approximate equation (20) by

$$R \frac{0 - \sigma_r(R)}{h} + \sigma_r(R) - \sigma_\theta\left(R + \frac{h}{2}\right) = -\rho(\omega + \Delta\omega)^2 \left(R + \frac{h}{2}\right)^2. \quad (21)$$

Note that $\sigma_r(R)$ vanished before adding the outer hoop. Therefore, $\sigma_r(R)$ in equation (21) equals $\Delta\sigma_r(R)$ and the outer boundary condition becomes ($h/R \sim 10^{-4}$)

$$\Delta\sigma_r(R) = \rho(\omega + \Delta\omega)^2 hR - \frac{T(R)}{R}, \quad (22)$$

where

$$T(R) = h\sigma_\theta\left(R + \frac{h}{2}\right) \quad (23)$$

is the web tension of the added hoop. It should be noted that the web tension T in equation (23) differs from the known tension $\hat{T}_w$ in the web line before entering the roll. This is due to bending of the added hoop when wrapped around the roll, due to the radial stress at the bottom of the added hoop, and due to compression of the roll induced by the added hoop. If the outer radius of the roll is changed by ΔR (< 0), the change in tangential strain of the added hoop due to bending and roll compression is

$$\Delta\epsilon_\theta = \frac{h}{2R} + \frac{\Delta R}{R}. \quad (24)$$

The change in radial stress equals the hoop stress relieved by the centrifugal force at the bottom, and vanishes at the top of the added layer. Therefore, the average change of radial stress in the added hoop is

$$\Delta\sigma_r = \frac{1}{2} \left[\rho(\omega + \Delta\omega)^2 hR - \frac{\hat{T}_w + h\Delta\sigma_\theta}{R} \right], \quad (25)$$

where $\Delta\sigma_\theta$ can be calculated from equation (10) as

$$\Delta\sigma_\theta = E_\theta \Delta\varepsilon_\theta + \nu_{r\theta} \Delta\sigma_r. \quad (26)$$

Using equations (24) – (26) the tension in the added hoop after the roll compression has taken place becomes

$$T(R) \equiv \hat{T}_w(R) + h\Delta\sigma_\theta = \hat{T}_w(R) + E_\theta h \left(\frac{h}{2R} + \frac{\Delta R}{R} \right). \quad (27)$$

The approximation above is justified, since typically $\nu_{r\theta} h/2R \sim 10^{-4}$ or 10^{-3} in practical winding cases. Note that the tension of the added hoop after bending around the roll but before the roll compression

$$T_w(R) = \hat{T}_w(R) + E_\theta \frac{h^2}{2R} \quad (28)$$

can be calculated readily. Since evidently $\Delta R < 0$, the last term in equation (27) expresses a tension loss in the web. The outer boundary condition (22) takes now the form

$$\Delta\sigma_r(R) = \rho(\omega + \Delta\omega)^2 hR - \frac{T_w(R) + E_\theta \frac{\Delta R}{R} h}{R}. \quad (29)$$

Equations (17), (19) and (29) (or (22) with (27)) comprise a boundary value problem whose solution is the radial stress distribution in the roll due to the winding on of a single lap. The corresponding tangential stress distribution can be solved from equation (13).

Actually, there is still one problem to be solved before the stress distributions due to one lap are obtained. Namely, the amount of tension loss due to roll compression is an unknown quantity and is intimately coupled to the radial strains due to the radial stresses to be solved. Let us suppose for a while that the web tension T after the roll compression is given. One can now solve the boundary value problem determined by equations (17), (19) and (22) and with the aid of the incremental radial strains calculate the change in the outer radius of the roll. Let us write this dependence in the form

$$\Delta R = f\left(\frac{T}{T_w}\right). \quad (30)$$

Combining equations (27) and (30) gives

$$\frac{T}{T_w} = 1 + \frac{h}{R} \frac{E_\theta}{T_w} f\left(\frac{T}{T_w}\right). \quad (31)$$

Since the value of f for a given value of T/T_w can be calculated as described above, the nonlinear equation (31) may be easily solved numerically. When the value of T is known, the incremental

stresses are obtained from (17), (19) and (22). An expression for the change in the outer radius can be written as

$$\Delta R = \Delta u(r_0) + \int_{r_0}^R \Delta \varepsilon_r dr = \frac{r_0}{E_c} \Delta \sigma_r(r_0) + r_0 D \rho \Delta(\omega^2) r_{in}^2 + \int_{r_0}^R \Delta \varepsilon_r dr. \quad (32)$$

A NOTE ON FINITE STRAINS

In many winding applications the displacements and displacement gradients are not small compared to unity. In paper winding, for example, the radial strains take values typically of the order 5-10 %, and even 15 % in the case of certain soft paper boards. Therefore, the infinitesimal strain theory, utilized usually for strains well below 1 %, is not a good approximation any more. In the following a brief discussion of large strains in winding of an orthotropic material is given. The topic is worth of a more comprehensive treatment in a future work.

To a first approximation, the wound roll is modeled here as a hyperelastic material so that an elastic potential function exists. The stress-strain relation may be written as

$$\tilde{T}_{IJ} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{IJ}}, \quad (33)$$

where $\tilde{T}_{IJ}$ is the second Piola-Kirchhoff stress tensor, E_{IJ} the Lagrangian strain tensor, and W the strain energy per unit undeformed volume, or alternatively as

$$\tilde{T}_{IJ} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial C_{IJ}}, \quad (34)$$

where C_{IJ} is the Cauchy-Green deformation tensor. It can be shown by group theoretical arguments that the irreducible integrity basis (or invariants) for the tensor $\mathbf{C}$ in the case of orthotropic material symmetry is [13]

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], \quad I_3 = \det \mathbf{C}, \\ I_4 &= \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_R, \quad I_5 = \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{e}_R, \\ I_6 &= \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_\theta, \quad I_7 = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (35)$$

where $\mathbf{e}_R$ and $\mathbf{e}_\theta$, unit vectors of the cylindrical coordinate system, are normal to two planes of reflectional symmetry of the roll in the reference (or undeformed) configuration. To fulfill all the symmetry requirements of an orthotropic material, the elastic strain-energy $W = W(\mathbf{C})$ can only be a function of the invariants, i.e.,

$$W = W(I_1, I_2, \dots, I_7). \quad (36)$$

After substituting this expression into equation (34) and changing to the Cauchy stress σ one gets for the general form of the constitutive equation of an orthotropic material

$$\sigma = 2 \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left[(I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}) \mathbf{1} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + I_4 \frac{\partial W}{\partial I_4} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + I_6 \frac{\partial W}{\partial I_6} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + I_4 \frac{\partial W}{\partial I_5} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B} \otimes \mathbf{e}_r) \\
& + I_6 \frac{\partial W}{\partial I_7} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{B} \otimes \mathbf{e}_\theta)],
\end{aligned} \quad (37)$$

where $\mathbf{e}_r$ and $\mathbf{e}_\theta$ denote the unit vectors in the deformed configuration in the directions of line elements which had the directions of $\mathbf{e}_R$ and $\mathbf{e}_\Theta$ in the reference configuration, and

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{or} \quad B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_K} \quad (38)$$

is the left Cauchy-Green tensor of the deformation.

In this work the stress and strain states of the wound roll display cylindrical symmetry. This means that the displacement field has only a radial component and no rotation is associated in the deformation. It can easily be shown that in this case the only independent invariants are C_{RR} , $C_{\Theta\Theta}$ and C_{ZZ} . Consequently, the strain-energy function for this cylindrically symmetric case is of the form

$$W = W(C_{RR}, C_{\Theta\Theta}, C_{ZZ}). \quad (39)$$

In several papers the stress-strain relation of wound rolls has been modeled as exponential in the radial direction and linear in perpendicular directions [11,12]. This can be achieved by the strain-energy function

$$W = \frac{K_1}{2} \ln C_{RR} + \frac{K_1}{K_2} \frac{1}{C_{RR}^{K_2/2}} + \frac{1}{4} A_{R\Theta} \ln C_{RR} \ln C_{\Theta\Theta} + \frac{1}{8} A_{\Theta\Theta} (\ln C_{\Theta\Theta})^2, \quad (40)$$

where plane strain is assumed for simplicity. The constants K_1 , K_2 and $A_{R\Theta}$ and $A_{\Theta\Theta}$ can be directly related to the conventional elastic moduli used for wound rolls [11]. By using the appropriate Legendre transformation an alternative formulation in terms of the complementary strain-energy

$$W^* = \frac{K_1}{K_2} \left[\ln \left(1 - \frac{\tilde{T}_{RR}}{K_1} \right) - 1 \right] \left(1 - \frac{\tilde{T}_{RR}}{K_1} \right) + \frac{1}{K_1 K_2} \frac{A_{R\Theta}}{A_{\Theta\Theta}} \tilde{T}_{RR} \tilde{T}_{\Theta\Theta} + \frac{1}{2 A_{\Theta\Theta}} \tilde{T}_{\Theta\Theta}^2 \quad (41)$$

may be developed. The corresponding strain-stress relation is (cf. with equation (1))

$$E_{IJ} = \frac{\partial W^*}{\partial \tilde{T}_{IJ}}. \quad (42)$$

It should be noted that the above expressions are valid for the second Piola-Kirchhoff stress tensor using material coordinates in the undeformed configuration, whereas the equation of equilibrium (12) is written in terms of the Cauchy stress tensor using spatial coordinates in the deformed configuration. Here an attractive possibility appears. Firstly, it will be pointed out that the displacements due to one added hoop can be considered infinitesimally small whereas those due to 20 000 (let us say) cannot. Secondly, although the *natural strain* is not a tensor in general, it can be integrated from $d\epsilon_{ij}$ (which is a tensor) here since no rotations are involved in the

deformation, leading to the relations $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \ln C_{ij}$. Therefore, the components ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$ and ϵ_{zz} of natural strain can be used in the formulation of the present problem. It is easy to see that the incremental equations (15) are valid even in the case of finite strains provided that the natural strain ϵ_{ij} and coordinates in the deformed configuration are used. Consequently, the incremental compatibility equation (16) retains its simple form for finite strains whereas for the Lagrangian strain, for example, the right hand sides of equations (15) should be multiplied by the factors $(1 + du/dR)^2$ and $(1 + u/R)^2$, respectively, where $u = u(R)$ denotes the total radial displacement. The constitutive equation in terms of the Cauchy stress and natural strain is

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (43)$$

or

$$\epsilon_{ij} = \rho \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (44)$$

where W is the strain-energy per unit mass and W^* the corresponding complementary energy. Using the expression

$$\rho = \rho_0 e^{-(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz})} \quad (45)$$

for the roll density the incremental form of equation (43) becomes

$$\Delta \sigma_{ij} = -(\Delta \epsilon_{rr} + \Delta \epsilon_{\theta\theta} + \Delta \epsilon_{zz}) \rho \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} + \rho \sum_{kl} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \Delta \epsilon_{kl}, \quad (46)$$

which gives the incremental stresses in terms of the strains and incremental strains. Solving for the incremental strains and expressing the strains ϵ_{ij} in terms of the stresses σ_{ij} one gets the incremental strains in terms of the stresses and incremental stresses (c.f. with equation (14)). However, rather than trying to construct the appropriate functions W and W^* in the following, we take the incremental constitutive equations (14) as the starting point of our analysis. This means that the experimental results for the constitutive relation must be expressed in terms of the Cauchy stress and natural strain. Accounting for the finite strain in the equation of equilibrium (12) leads, after some mathematical manipulation, to the second order differential equation for the incremental radial stress

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2(\Delta \sigma_r)}{dr^2} + 3r \frac{d(\Delta \sigma_r)}{dr} + \left(1 - \frac{E_\theta}{E_r}\right) \Delta \sigma_r = \\ - \left\{ r \Delta r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + [(1 + \nu_{r\theta}) \Delta r + 2r \frac{d(\Delta r)}{dr}] \frac{d\sigma_r}{dr} - r \frac{d(\Delta r)}{dr} \left(\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \frac{df_r}{dr} \right) + \right. \\ \left. [(1 + \nu_{r\theta}) \frac{d(\Delta r)}{dr} + r \frac{d^2(\Delta r)}{dr^2}] (\sigma_r - \sigma_\theta + f_r) + r \frac{d(\Delta f_r)}{dr} + (1 + \nu_{r\theta}) \Delta f_r \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

where

$$f_r(r, \rho, \omega) = \rho \omega^2 r^2. \quad (48)$$

Here $\Delta r = \Delta r(r)$ denotes the change due to one added hoop in the radial direction of the material point located at r before the hoop was added. Equation (47) replaces equation (17) when finite strains are considered. The extra terms in the boundary conditions will be omitted here, since their effect is of the order of N whereas the effect of the roll bulk is of the order of N^2 ($N \sim 20\,000$). Note also that in the process of roll build-up the radial pressure of a layer is increasing while the tangential stress is decreasing, i.e., both directions are under monotonic loading. This means that hysteresis effects can be accounted for by simply choosing the appropriate branch of the constitutive relation. In conclusion, the benefit of using the Cauchy stress and natural strain is that finite strains can be accounted for in the solution of the incremental accretion process of the roll build-up without any changes in the form of the governing equations except the extra terms displayed by equation (47)! One must only take care of that the spatial coordinates appearing in the equations refer to the deformed configuration. In the numerical solution this becomes feasible since the total displacements of the roll are updated after every single hoop added onto the roll.

CONCLUSIONS

Since non-destructive techniques to measure the internal stress state of a wound roll are still lacking, there is an obvious need for a mathematical model of the winding process. A computational model may be utilized when improving the wound roll structure in terms of optimal internal stresses and strains in many industrial processes dealing with paper, plastic, metal foils and textiles.

In the present paper, Hakiel's winding model was extended by a full treatment of the centrifugal forces and the tension reduction of the incoming layers due to the roll compression. It was also shown how finite strains can be accounted for in the winding model. This is important since radial strains may be even 10-15 % in wound paper rolls. In future work, extensive numerical simulations should be performed to elucidate the qualitative and quantitative behaviour of wound rolls.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank prof. M. Mikkola for discussions.

REFERENCES

- [1] Gutterman, R. P., Theoretical and Practical Studies of Magnetic Tape Winding Tensions and of Environmental Roll Stability. *U.S. Contract No, DA-18-119-SC-42*, 1959.
- [2] Tramposch, H., Internal Forces in a Wound Reel of Magnetic Tape – Part I, *IBM Technical Report*, 1963.
- [3] Tramposch, H., Relaxation of Internal Forces in a Wound Reel of Magnetic Tape – Part II, *IBM Technical Report*, 1963.
- [4] Rand, T. and Eriksson, L. G., Physical Properties of Newsprint During Winding, *Tappi Journal* **56**(6), 153-156, 1973.
- [5] Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1968.
- [6] Hakiel, Z., Nonlinear Model for Wound Roll Stresses, *Tappi Journal* **70**(5), 113-117, 1987.
- [7] Olsen, J. E., On the Effect of Centrifugal Force in Winding, *Tappi Journal* **78**(7), 191-195, 1995.

- [8] Qualls, W. R. and Good, J. K., A Nonlinear Orthotropic Viscoelastic Winding Model. *Proceedings of the 3rd International Conference on Web Handling*, Oklahoma State University, Stillwater, OK, USA, 1995.
- [9] Brown, C.B. and Goodman, L.E., Gravitational stresses in accreted bodies, *Proc. R. Soc. London* **A276**, 571-576, 1963.
- [10] Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [11] Pfeiffer, J.D., Measurement of the K2 Factor for Paper, *Tappi Journal* **64** (4), 1981.
- [12] Hakiel, Z., Nonlinear Model for Wound Roll Stress, *TAPPI Paper Finishing and Converting Conference Proceedings*, p. 9-15, 1986.
- [13] Spencer, A.J.M., The Formulation of Constitutive Equation for Anisotropic Solids. In: *Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids*, p. 2-26, *Proceedings of the Euromech Colloquium* 115, June 19-22, 1979, edited by J.-P. Boehler. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, Netherlands, 1982.

INCREASE OF SHEET TENSION UNDER A ROLLING NIP

K. ÄRÖLÄ¹, R. VON HERTZEN²

¹Helsinki University of Technology
Laboratory for Mechanics of Materials
P.O.Box 4100, FIN-02015 HUT, Finland
e-mail: kilwa.arola@hut.fi

²Helsinki University of Technology
Institute of Mathematics
P.O.Box 1100, FIN-02015 HUT, Finland
e-mail: rvhertz@csc.fi

ABSTRACT

The rolling of a cylindrical drum on a stack of separate paper sheets is studied using the finite element method. A two dimensional model under plane strain conditions is considered. The material of the sheets is modeled by a linearly elastic orthotropic constitutive law. The friction between the various contacting surfaces is modeled by the conventional Coulomb's law. As a result of the FEM-calculations the time development of the displacements, stresses and strains of the paper layers is obtained. The slip behavior at the various contacting surfaces is presented. The results indicate the existence of an instant center in the stack demonstrated earlier experimentally. The micro-slip pattern of the contacting surfaces in the nip area and, particularly, at the trailing edge of the nip, seems to be the main reason for the tightening effect of the nip.

1 INTRODUCTION

Web transport between nipped rolls is common in many industrial processes dealing with paper, plastic, metal foils and textiles. The thin web is transported in rolling contact between two deformable axisymmetric bodies. Also, reeling and winding of thin webs is usually performed against a rotating drum creating a nip rolling over the web layers. The rolling nip removes the boundary layer of air following the web surface and increases the tension of the web passing the nip. The control of this tension increase is of primary importance when improving the roll structure in terms of optimal internal stresses and strains. Rolling contact phenomena including thin webs constitute a challenging problem, as they involve contact of different deformable bodies, free and loaded boundaries with a priori unknown borders, slip-and-stick patterns related to frictional behaviour, and geometric and possible material nonlinearities. Bental and Johnson [1] considered an elastic strip passing between identical rollers. Their results provided details of the contact stresses and deformations, the indentation of the strip by the rollers, the contact width, and the speed at which the strip passes through the nip. No net tractive force was transmitted in the process. In their numerical solution they approximated the surface stress distribution by overlapping triangular elements. Soong and Li [2] studied the steady rolling contact with friction of two

freely rolling dissimilar cylinders covered by bonded elastic layers and driving a thin sheet in the nip. The sheet was incompressible in its thickness, had extensional elasticity but no bending stiffness. They obtained the stresses and deformations as well as surface speeds for the cylinders and the sheet in a series form using a stress function formulation. Later Soong and Li [3] accounted for a pushing or pulling force acting at the tail end of the sheet. They studied the effect of the normal load and tail force on the speed ratios of the two cylinders and the sheet, and also the slippage and shear stress in the contact arc. The equations were solved by the collocation method and an iterative procedure. In both papers Soong and Li restricted their treatment to an isotropic elastic material. Batra [4] developed a finite element solution for the plane strain problem of a rubber covered roll indented by a rigid roll. Later Hinge and Maniatty [5] extended the finite element solution to the problem of steady rolling contact between rubber-layered rolls with thin media in the nip. The contact interface was assumed to be largely in stick and the bearing in the lower roll offered a negligible resisting torque. They also restricted to an isotropic elastic material law and the thin media was assumed to be inextensible, implying a constant thin media velocity through the nip. Kalker [6] considered the rolling contact of two parallel rigid cylinders covered with a number of homogeneous, isotropic and linearly elastic or viscoelastic layers. The layers were completely bonded to each other and to the cylinders so that no interlayer slippage could occur. Partial or complete slip could occur in the interface between the top layers of the cylinders. Friction was assumed to behave according to Coulomb's law with a constant friction coefficient. Kalker presented a fast method for the calculation of the elastic field on and inside the multilayered cylinders. A landmark investigation of the effect of a rolling nip upon a pile of separate layers was performed by Pfeiffer [7]. He reported experimental results on the strain-inducing mechanism of a rolling nip on a paper stack. This simulated the winding of a roll with an infinite radius. He observed in his experiment that the sheets nearest the stack surface were moved in the direction of the rolling nip while sheets deeper in the stack moved in the opposite direction. He concluded that somewhere beneath the contact interface there must be an instantaneous center of rotation. In this paper, the first quantitative data displaying the effect of nip load, drum diameter, and the number of sheets in the stack on the amount of nip induced tension was presented. Pfeiffer's observations, however, accounted for external nip behaviour only and neither stress or strain distributions nor slip-stick patterns within the nip interface were considered. Good and Wu [8] considered the mechanism by which a nip roller can increase the wound-in tension in the outer layer of a wound roll. In their finite element analysis a Hertzian pressure distribution moved across the upper surface of the web while the lower web boundary was horizontally restrained by friction to accommodate slippage. They concluded that although the classical Hertzian contact stresses are always compressive throughout much of the depth of the web, they result in an elongating machine direction strain. As this elongating strain advances with the moving nip roll, web material attempts to advance in front of the nip and contact in towards the nip in back of the rolling nip. If the web material in back of the nip is constrained, a net increase in tension will result. Although Good and Wu provide the first basic understanding of the elongating strain in machine direction, their model comprises only one web layer and does not properly account for the rolling contact with friction since they employ a classical Hertzian pressure distribution with no shear stress at the upper surface of the web. Mc Donald and Menard [9] studied roll defects associated with interlayer movement experimentally. They considered, in particular, the formation of crepe wrinkles during reeling and winding. Crepe wrinkles consist of one or more folds of paper in the machine direction, and appear to be a consequence of layer-to-layer movement, quantified by means of J-lines, and out-of-plane buckling under in-plane

compressive forces. They concluded that below the immediate surface layers the drum rolling against the conformable paper roll generated shear forces that caused the paper layers to slip, and the balance between the shear stress and frictional stress determined the amount of slippage and magnitude of the J-line. In their paper they gave several experimental results of the effect of drum diameter, cover material, frictional and radial compressive stress, and nip load on the size of the J-line. Recently, a rigorous contact mechanical model of the winding nip was presented by Jorkama and von Herten [10, 11]. Their model consisted of the wound roll, winding drum and the intervening sheet. The roll and drum were modeled as linearly elastic, orthotropic, homogeneous cylinders with a rigid core, and the sheet was modeled as an orthotropic material as well. In their numerical solution they utilized an iterative scheme, the Panagiotopoulos process, in an extended form for the solution of the stick-and-slip zones within the contact area. They presented a novel stick-and-slip mechanism, which explained the generation of the nip induced tension in the incoming sheet. They also properly described the conditions of the incoming sheet after the nip, which is a distinctive feature of winding compared to calendering. They utilized, however, a solid elastic model for the wound roll. The real layered structure of the roll with possible interlayer slippage can lead to a significantly different strain behaviour, especially in the vicinity of the nip.

In the present paper the layered structure of the paper stack is fully accounted for. The stresses, strains and displacements due to a rolling nip are calculated and the slip-and-stick behaviour at all contacting surfaces is presented. A detailed description of the interlayer movement of the paper sheets is given, and the mechanism of the nip induced tension as a result of the shear stresses and opposing frictional forces is identified. The system studied here is very close to that used by Pfeiffer [7] in his experiment.

2 NUMERICAL RESULTS FOR A LAYERED STACK

2.1 Model Setup

Let us consider a cylindrical steel drum rolling with a velocity v to the right on a stack of ten paper sheets clamped at the left end as shown in Fig. 1. The sheets are placed on a steel surface at rest. If the situation is observed from a coordinate system translating with the center of the drum, the steel surface and the clamp bar are moving with the velocity

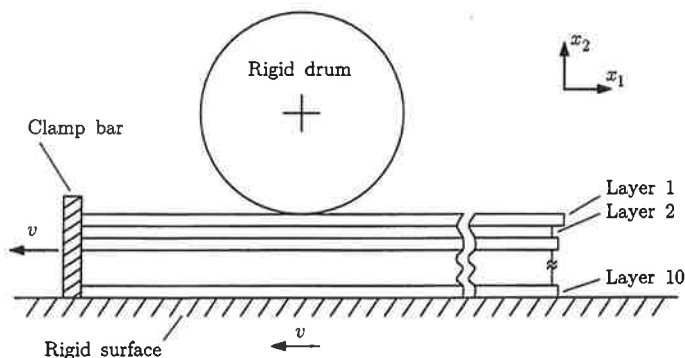


Figure 1: Drum rolling on a paper stack.

v to the left and the drum is at rest (see Fig. 1). To get a basic understanding of the phenomena and to keep the computational cost reasonable, a 2D-case under plane strain

conditions is considered. Since the deformations of the steel drum and bottom plate are negligible compared to those of the paper sheets, the drum and plate are modeled as rigid. The paper sheets are modeled using four-noded plane strain finite elements¹. A linear orthotropic constitutive model of the form

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & E_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & E_{1313} & 0 \\ & & & & & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

is used. The x_1 -axis is oriented in the sheet length, x_2 -axis in the layer thickness and x_3 -axis in the transverse direction. The friction between all contacting surfaces is modeled using Coulomb's friction law with a constant coefficient of friction.

At the beginning of the simulation the drum is touching the topmost paper layer at one point without any compressive forces. Then the vertical displacement δ of the center of the drum is given as a time dependent kinematic condition and the drum is moved downward to generate a nip. After that the rolling process is activated by moving the bottom surface and the clamp bar to the left with a velocity v . One could also fix the bottom plate and the clamp bar and move the drum to the right. The former approach is preferred here due to an easier post processing of the results. To minimize the oscillatory effects caused by sudden changes in the displacement and velocity, the kinematic conditions are applied smoothly. The applied displacement and velocity are shown in Fig. 2 as a function of time. The values

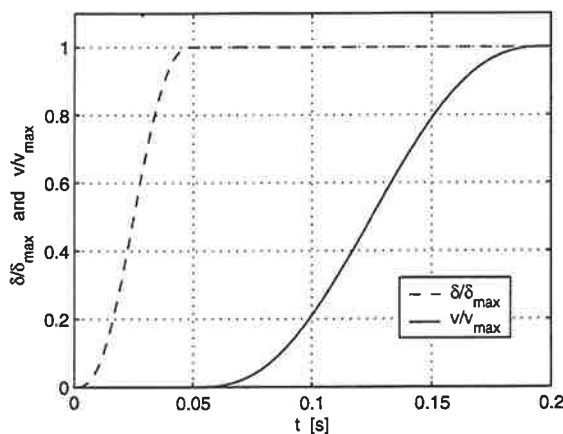


Figure 2: Time dependence of the vertical displacement of the drum and horizontal velocity of the clamp bar and bottom plate. After 0.2 s the values of the displacement and velocity are held constant.

of the parameters and other data used in the calculations are given in the Appendix. The model had approximately 140000 degrees of freedom and the calculations were performed using the ABAQUS/Explicit computer code.

¹ABAQUS/Explicit element type CPE4R

2.2 Development of the Sheet Tension

The time development of the tensile stress σ_{11} of the paper layers due to the rolling nip is shown in Fig. 3(a). All the stresses are calculated at the left end of the sheets. The curves show the evolution of the average stress in each individual layer. After an initial transient the tension of each individual layer rapidly tends towards a limit value as can be seen in Fig. 3(a). Similar experimental results concerning a nip roller on an aluminum strip were reported by Good and Wu [8] who found an exponential saturation of the strip tension with respect to the distance rolled. The final tensile stress distribution through the paper stack (at time $t = 0.7$ s) is shown in Fig. 3(b). The largest increase in tension takes

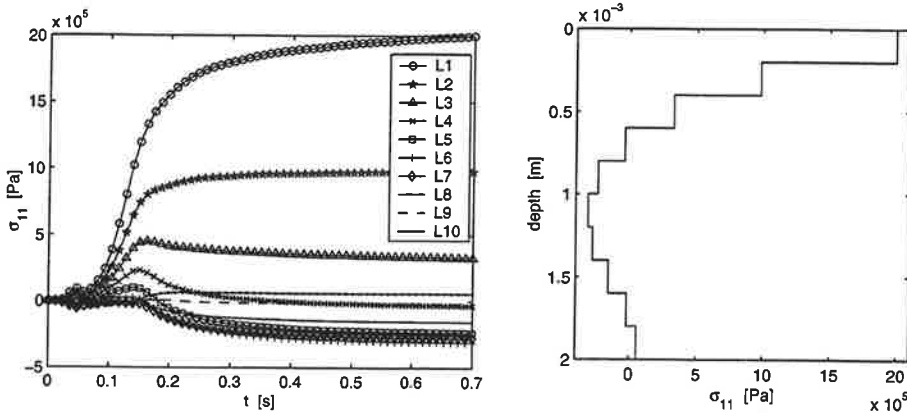


Figure 3: (a) Time development of the tensile stress of the paper layers L1,...,L10 due to the rolling nip. (b) The final tensile stress distribution through the paper stack. The stresses are calculated at the clamp bar.

place in the topmost layer. The tension then decreases layer by layer so that the fourth layer actually exhibits a compressive stress. The compressive stress is at largest in the sixth layer, whereas a small tensile stress is again found in the bottom layer. Note that the stress across each individual layer is constant as can be seen from Fig. 3(b).

2.3 Stresses in the Nip Area

A lot can be learnt about the events taking place in the nip by studying the stress distributions under the nip. In the following the tensile stresses σ_{11} and the contact shear stresses q of the sheets are considered. In the case of tensile stresses positive and negative signs indicate tension and compression, respectively. For the contact shear stresses the positive directions are shown in Fig. 4(a). Note that the direction of the shear stresses indicates the slip direction between the layers. If, for example, in Fig. 4(b) layer b is moving faster to the left than layer a, i.e. $v_b > v_a$, the real directions of the shear stresses are as shown in the figure. By the sign convention of Fig. 4(a) the shear stress on the bottom of layer a would be negative and on the top of layer b positive.

The tensile stresses in the sheets in the nip area are shown in Fig. 5. The solid line represents the average tensile stress, whereas the dashed and dashed-dotted lines show the tensile stress at the top and bottom of the layer, respectively. The x -coordinate is scaled by the nip half width a ($= 6.752$ mm). Consequently, the nip spans from $x/a = -1$ to 1. As can be seen, in the topmost layers most of the tightening action appears near the

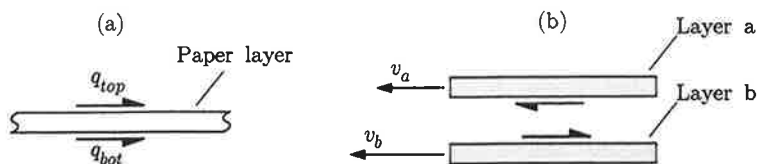


Figure 4: (a) Sign convention for the contact shear stresses q shown at the top and bottom of the layer. (b) The direction of the shear stresses reveals the slip direction.

trailing edge of the nip. The tensile stress at the top and bottom surface of a layer can differ considerably in the nip area. This difference is mainly due to the bending of the sheet under the drum. Behind the nip the tensile stress across each layer becomes constant very soon. Note that only the three layers on the top of the stack and the bottom layer are tightened and that the top layer is tightened by far most.

The contact shear stress distributions in the nip area for each layer are shown in Fig. 6. The dashed and dashed-dotted lines show the shear stress at the top and bottom surface of the layer, respectively. The solid line is the sum of the top and bottom stresses, i.e., the net shear stress on the sheet. To observe the areas of slip, the maximum and minimum values of the contact shear stress, that is the lines $q = \pm\mu p$ (p is contact pressure), are shown as dotted lines. If the shear stress falls on these lines, the contact is slipping. By inspecting the contact shear stress distributions we can draw several conclusions concerning the events taking place in the nip. Let us first examine the top surface of the first layer. In the vicinity of the leading edge of the nip the shear stress is positive (Fig. 6(a), dashed line) and the contact is slipping. The positive sign of the contact shear stress indicates that the top surface of the paper sheet is moving faster to the left than the surface of the drum. The center part of the contact zone is in a state of stick so that the drum and paper sheet have equal surface velocities. There is another slip zone near the trailing edge of the nip. The sign of the shear stress shows that again the surface of the sheet is moving faster than the drum. Let us then examine the shear stress at the bottom of the first layer (Fig. 6(a), dashed-dotted line). There is again a slip zone at the leading edge of the nip. Since the shear stress is negative, the bottom surface of the first layer is moving slower than the top surface of the second layer. Within the stick zone in the middle part of the nip, the shear stress becomes positive and finally rises to the upper friction limit. From here to the end of the nip sliding again occurs. Since the shear stress is positive, the bottom of the top layer is moving faster than the top of the second layer. Within about the first three quarters of the nip the shear stresses on the top and bottom surfaces of the first layer act in opposite directions and thus try to cancel each other. For this reason practically no tightening is observed in this part of the nip (see Figs. 5(a) and 6(a)). Near the trailing edge of the nip both shear stresses are positive so that they act additively, in the same direction. The force balance of the top layer requires that the effect of the shear stresses must be compensated for by the tensile stress. Consequently, a large increase in the tensile stress of the top layer occurs (see Fig. 5(a)).

Let us next consider the second paper layer. By inspection of the shear stresses (Fig. 6(b)) the following conclusions can be drawn. Within the slip zone near the leading edge of the nip the top of the second layer moves faster than the bottom of the first layer, while the bottom of the second layer moves slower than the top of the third layer. Within the other slip zone near the trailing edge of the nip the situation reverses. Note that the shear stresses are of opposite sign partially canceling each other throughout the nip. However, the net

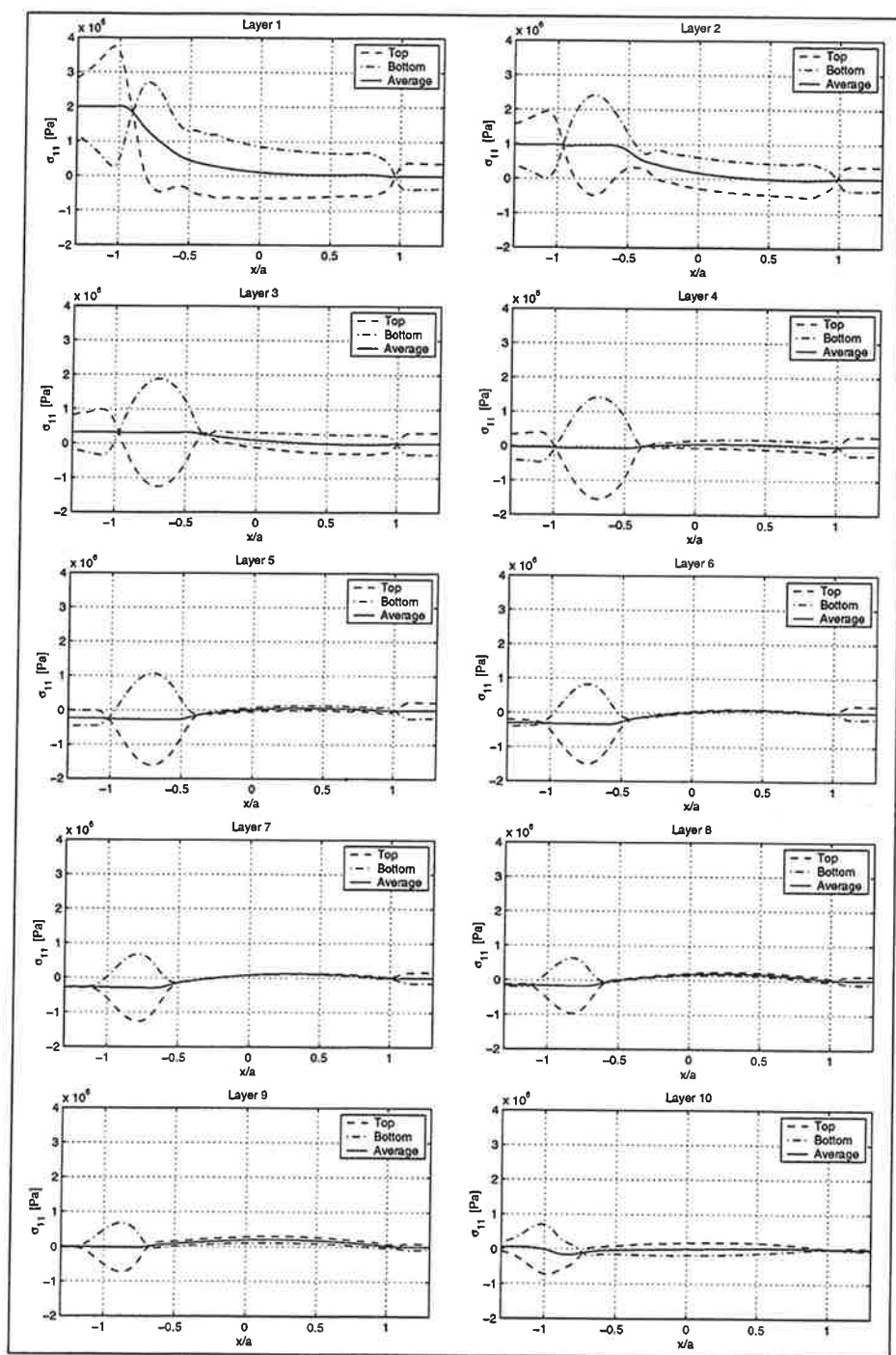


Figure 5: Tensile stress σ_{11} for each layer within the nip. The average, top and bottom stresses of the sheet are shown (solid, dashed and dashed-dotted lines, respectively).

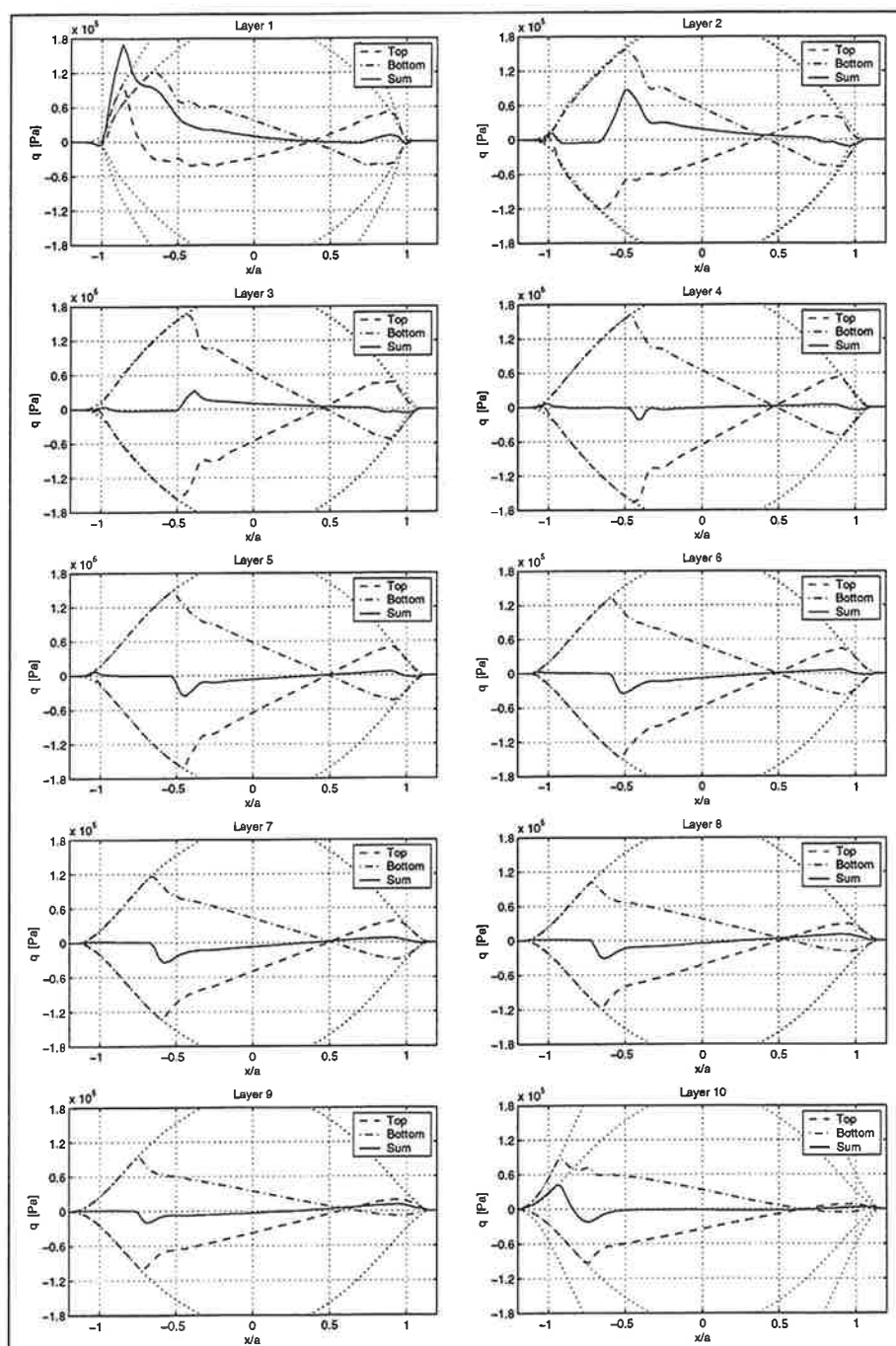


Figure 6: Contact shear stresses at the top and bottom surfaces of the layers (dashed and dashed-dotted lines, respectively) and the net shear stress (solid line). The friction limits are shown as dotted lines.

shear stress on the second layer still remains positive for most part of the nip so that some tightening in that layer occurs (see Figs. 5(b) and 6(b)).

In the third, fourth, . . . , and ninth layers the shear stress behavior is qualitatively similar to that of the second layer except that below the third layer the net shear stress may become negative. In the tenth layer the net shear stress is slightly positive (see Figs. 6(c)-(j)). In conclusion, there are in every layer two slip zones near the edges of the nip. Within the first one, at the leading edge of the nip, the upper layer (or drum) is moving slower than the layer below. Within the second one, near the trailing edge of the nip, the upper layer is moving faster than the layer below. Within the second slip zone, however, the top layer behaves in a unique manner as it also moves faster than the drum above. As already pointed out above, this phenomenon is essential in the tightening mechanism of a rolling nip.

It is instructive to have a look at the surface speeds within the contacts. The speeds are calculated from the surface strains and shear stresses. Some wavy behaviour due to a limited numerical accuracy has been filtered out from the figures. Fig. 7(a) shows the relative speed difference between the top surface of the first layer and the drum surface. At the beginning of the nip the speed difference is negative so that the surface of the top layer is moving faster than the drum surface resulting in a slip zone. This slip zone was already observed from the shear stress distribution of Fig. 6(a). A corresponding slip zone at the leading edge of the contact is not found in a typical capstan where the belt or sheet would be in a state of stick immediately at the beginning of the contact. The difference is due to the surface strains of the first layer in front of the nip caused by the bending of that layer as it approaches the nip region and due to the compressive strains experienced by this first layer under the drum at the beginning of the nip. This can be seen from Fig. 8 which

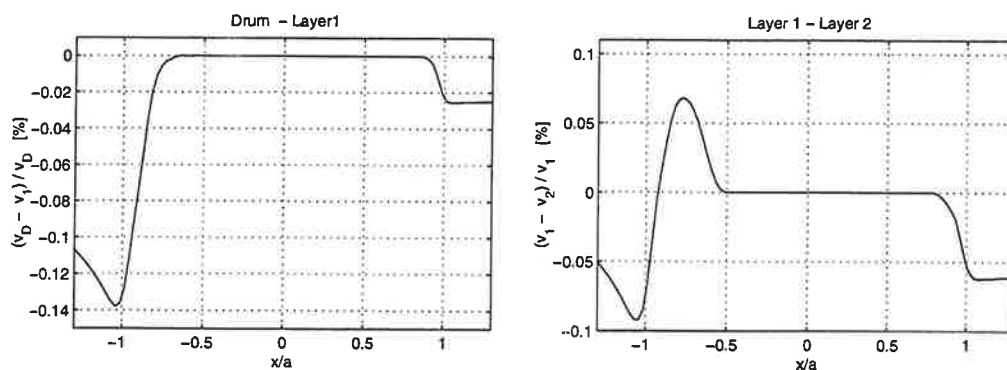


Figure 7: (a) Relative speed difference between the top surface of the first layer and the drum surface, and (b) between the bottom surface of the first layer and top surface of the second layer. Positive values indicate that the upper surface moves faster (to the left).

shows the top and bottom surface strains and the vertical deflection of the first paper layer in the vicinity of the nip. Note the change of curvature of the first layer when it comes into contact with the rigid drum accompanied with a rapid decrease of the tensile strain at the top of the layer.

At $x/a \approx 0.8$ the relative speed difference goes to zero resulting in a stick zone (see Fig. 7(a)). This is maintained until the back of the nip where the contact starts slipping again. From $x/a \approx -0.7$ on the velocity of the first layer increases rapidly and the layer shoots out of the nip.

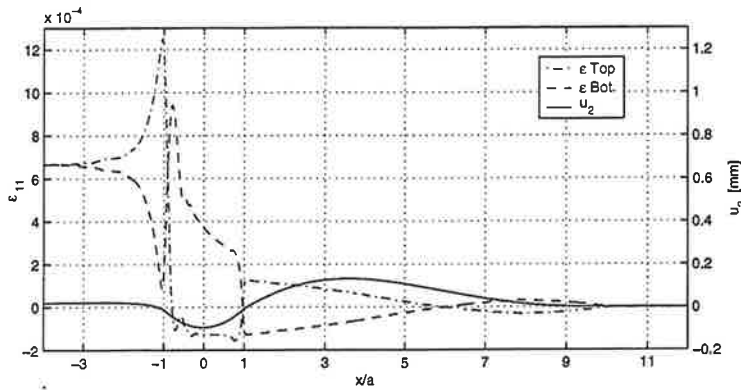


Figure 8: Tensile strain ϵ_{11} at the top and bottom surface of the first layer (dashed-dotted and dashed lines, respectively) and the vertical deflection u_2 of the center line of the top sheet (solid line). The nip is located in the range $-1 \leq x/a \leq 1$.

The relative speed difference between the bottom surface of the first layer and top surface of the second layer is shown in Fig. 7(b). The behaviour in the layers below is qualitatively similar, only the absolute values exhibit a decreasing trend. Within the first slip zone, in the vicinity of the nip front edge, the second layer is faster than the first one, the center part of the contact sticks and in the back of the nip the upper layer is faster. At the very end of the nip and behind the nip the lower sheet may be faster again. Note the difference in the speed behaviour of the drum-first layer contact as compared to the contacts between the layers below.

Figure 9 displays the contour plots for the tensile and shear stresses in the vicinity of the nip. The contour plots of Fig. 9 show the same information noted already earlier. The bending of the individual sheets in front of the nip is clearly visible in Fig. 9(a).

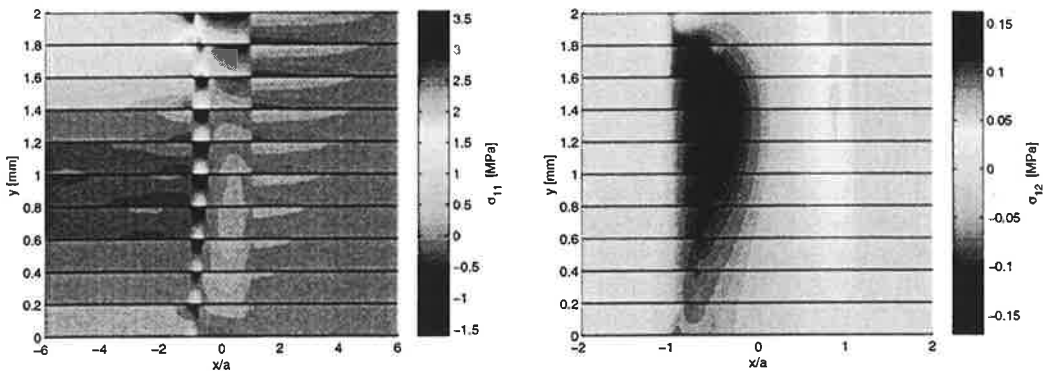


Figure 9: Stress distribution in the vicinity of the nip. (a) Tensile stress and (b) shear stress.

3 CONCLUSIONS

A cylindrical steel drum rolling on a stack of separate paper sheets was studied. An exponential type saturation towards a limit value of the sheet tension of the top layers as the drum was rolled ahead was observed. The tensile stress at the bottom and surface of each layer could differ considerably in the nip area. This difference is mainly due to the bending of the sheet under the drum. The following observations on events taking place under the nip were made:

- Within about the first three quarters of the nip the contact shear stresses on the top and bottom surface of the first layer act in opposite directions and, thus, try to cancel each other. Near the trailing edge of the nip these contact shear stresses act *additively* in the same direction pointing towards the leading edge of the nip. Due to the balance of the sheet, this must be compensated for by a tensile stress in the sheet resulting in a significant tightening of the top layer.
- The contact shear stresses on the top and bottom surface of the other layers act always in opposite directions and partially cancel each other. The layers above the instant center experience a net tightening when passing the nip and those below the instant center a net slackening.

These basic phenomena for a stack of paper sheets are likely to be applicable to a wound roll as far as the topmost layers are concerned. The layers deeper in the roll, however, experience a cumulative normal stress due to the hoop tension of the layers above. This evidently leads to less slippage of these layers within the nip area. Consequently, the behaviour of the topmost layers obviously dominates when the nip-induced tension of a wound roll is considered.

REFERENCES

- [1] R. H. Bental and K. L. Johnson. *An Elastic Strip in Plane Rolling Contact*, Int. J. Mech. Sci., **10**, 637-663 (1968).
- [2] T.-C. Soong and C. Li. *The Steady Rolling Contact of Two Elastic Layer Bonded Cylinders With a Sheet in the Nip*, Int. J. Mech. Sci., **23**, 263-273 (1981).
- [3] T.-C. Soong and C. Li. *The Rolling Contact of Two Elastic-Layer-Covered Cylinders Driving a Loaded Sheet in the Nip*, J. Appl. Mech.-Trans. ASME, **48**, 889-894 (1981).
- [4] R. C. Batra. *Rubber Covered Rolls - The Nonlinear Elastic Problem*, J. Appl. Mech.-Trans. ASME, **47**, 82-86 (1980).
- [5] K. C. Hinge and A. M. Maniatty. *Model of Steady Rolling Contact Between Layered Rolls With Thin Media in the Nip*, Engineering Computations, **15**, 956-976 (1998).
- [6] J. J. Kalker. *Viscoelastic Multilayered Cylinders Rolling With Dry Friction*, J. Appl. Mech.-Trans. ASME, **58**, 666-679 (1991).
- [7] J. D. Pfeiffer. *Mechanics of a Rolling Nip on Paper Webs*, TAPPI Journal, **51**, 77-85 (1968).
- [8] J. K. Good and Z. Wu. *The Mechanism of Nip-Induced Tension in Wound Rolls* J. Appl. Mech.-Trans. ASME, **60**, 942-947 (1993).

- [9] J. D. McDonald and A. Menard. *Layer-to-layer slippage within paper rolls during winding* J. Pulp. Pap. Sci., **25**, 148–153 (1999).
- [10] M. Jorkama. *Contact Mechanical Model for Winding Nip* Acta Polytech. Scan, Me 146, The Finnish Academies of Technology (2001).
- [11] M. Jorkama and R. von Hertzen. *The Mechanism of Nip-Induced Tension in Winding* J. Pulp. Pap. Sci., **28**, 280–284 (2002).

APPENDIX

The numerical values used in the calculation are given below.

Quantity	Value
General	
Number of paper layers	10
Thickness of one layer	0.2 mm
Number of elements in a layer (crosswise)	2
Length of paper layers	450 mm
Number of elements in a layer (lengthwise)	2399
Material	
Density	1000.0 kg/m ³
Elastic stiffness matrix	$E_{1111} = E_{3333} = 3000.0$, $E_{2222} = 20.0$, $E_{1122} = E_{2233} = E_{1133} = 5.0$, $E_{1212} = E_{1313} = E_{2323} = 10.0$ MPa
Drum	
Radius	250 mm
Rolling velocity v_{max}	0.5 m/s
Vertical displacement δ_{max}	0.1 mm
Friction coefficients	
drum-paper	0.3
paper-paper	0.2
paper-bottom plate	0.4
Other parameters	
Mass scaling factor	100.0
Duration of simulation	0.7 s
Acceleration due to gravity	10.0 m/s ²

YDINJÄTTEEN KAPSELISIJOITUKSEN MEKAANISEN STABIILIUDEN LASKENTAMENETELMÄ

T. LAHTINEN¹, M. LYLY², J. RUOKOLAINEN², R. STENBERG³

¹Teknillinen korkeakoulu, Polttomoottorilaboratorio
PL 4300, 02015 Espoo
sähköposti: tuukka.lahtinen@hut.fi

²CSC - Tieteellinen laskenta Oy
PL 405, 02101 Espoo
sähköposti: mikko.lyly@csc.fi, juha.ruokolainen@csc.fi

³Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laitos
PL 1100, 02015 Espoo
sähköposti: rolf.stenberg@hut.fi

TIIVISTELMÄ

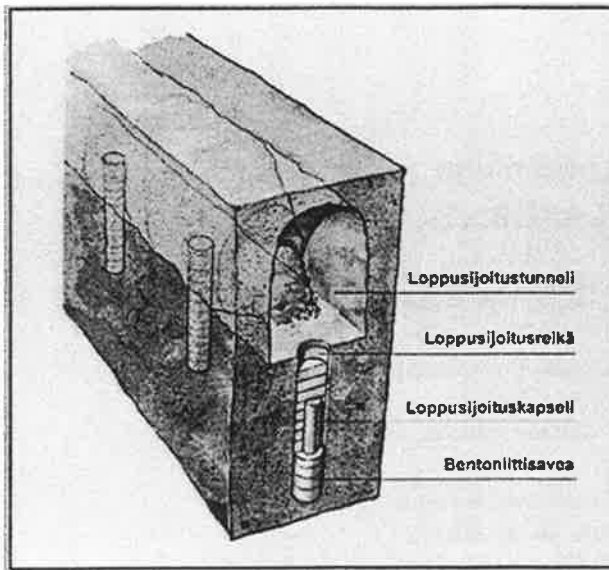
Artikkelissa esitetään laskentamenetelmä, jolla voidaan tutkia loppusijoitustilaan suljetun ydinjätekapselin mahdollista liikettä olettaen, että kapselia ympäröivän bentoniittisaven pitkäaikaiskäyttäytyminen on kuvattavissa newtonilaisen nesteen materiaaalimallilla. Esitys pohjautuu vuonna 2002 TKK:n Matematiikan laitoksella kirjoitettuun diplomityöhön [1], jonka on rahoittanut Säteilyturvakeskus.

1 JOHDANTO

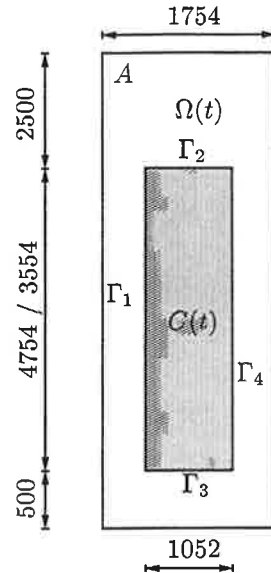
Nykyisen suunnitelman mukaan Suomessa tuotettava ydinjäte tullaan loppusijoittamaan kuvan 1 esittämällä tavalla peruskallioon noin puolen kilometrin syvyyteen louhittuihin tiloihin. Käytetyt ydinpolttoaineniput suljetaan kapseleihin, jotka eristetään kallioista vuoraamalla sijoitusreiät kapseleiden ympäriltä bentoniitti-nimisellä savimaisella materiaalilla. Bentoniitti toimii kulkeutumiseristeenä ja suojaa kapseleita kallion mahdolliselta liikehdistä.

Luonnon bentoniittiesiintymiä tutkittaessa on havaittu, että raskaiden kivien alla bentoniitti lähtee viskoosin nesteen tavoin erittäin hitaasti virtaamaan [2]. On arveltu, että vastaava ilmiö saattaisi olla mahdollinen myös sijoitusreiässä — bentoniitti virtaa äärimmäisen hitaasti pois 20 tonnin painoisen kapselin alta kapselin vajotessa samalla alaspäin. Pahimmassa tapauksessa kapseli vajoaisi hyvin pitkän ajan kuluessa sijoitusreiän pohjalle, jolloin se ei ole enää bentoniittieristeessä vaan osittain vapaassa kosketuksissa kallion ja kallioraoissa virtaavan pohjaveden kanssa.

Matemaattisesti kapselin liikkeen mallintamisessa on kyse nopeusreunaehdon kautta kytkeytyvien kapselin ja bentoniitin liikeyhtälöiden muodostaman systeemin ratkaisemisesta. Olettaessa bentoniitti newtonilaiseksi nesteeksi muodostuva systeemi on lineaarinen ja se voidaan ratkaista implisiittisesti seuraavassa luvussa kuvattavalla tavalla.



Kuva 1: Loppusijoitustila, lähde: [3]



Kuva 2: Laskentageometria

2 KAPSELIN LIIKKEEN MALLINTAMINEN

Tarkastellaan kuvan 2 mukaista sijoitusreiän aluetta $A \subset \mathbb{R}^3$. Merkitään $A = \Omega \cup C$, jossa $C = C(t)$ ja $\Omega = \Omega(t)$ ovat kapselin ja bentoniitin täyttämät alueet sijoitusreiässä. Yksikkökulkonormaalivektori Ω :lle olkoon $\mathbf{n}$. Valitaan vielä koordinaatiston x_3 -akseli symmetria-akselin suuntaiseksi ja merkitään tämän akselin suuntaista ”ylöspäin” osoittavaa yksikkövektoria $\mathbf{e}_3$:lla.

Bentoniitin liikettä kuvataan tässä tarkastelussa tehtävällä

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{b} & \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_C & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2(t) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -V_C & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3(t) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_4(t) \\ \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2(t) \cup \Gamma_3(t) \cup \Gamma_4(t). \end{array} \right. \quad (1)$$

Edellä $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ja $p = p(\mathbf{x}, t)$ ovat nopeus- ja painekentät, ρ on bentoniitin tiheys, $\mathbf{b}$ gravitaatiokenttä, μ dynaaminen viskositeetti, V_C kapselin vajoamisnopeus ja $\mathbf{t}$ traktiovektori, $\mathbf{t} = [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \cdot \mathbf{n}$. Voimatasapainoyhtälö kapselille kirjoitetaan muodossa

$$F_S - M_C b = 0, \quad (2)$$

jossa F_S on bentoniitin kapseliin kohdistama pintavoima ja M_C kapselin massa. Tehtävänä on määrittää kapselin kullakin sijainnilla vajoamisnopeus V_C siten, että siitä aiheutuva virtauskenttä kohdistaa kapseliin painon $M_C b$ suuruisen pintavoiman F_S .

Implisiittistä ratkaisumenettelyä varten tehtävän (1) kuormatermi $\rho \mathbf{b}$ on sisällytettävä painegradienttiin. Merkitään $\bar{p} := p + \rho b x_3$, $\bar{\mathbf{u}} := \mu \mathbf{u}$ ja $\bar{\mathbf{t}} := (-\bar{p}\mathbf{I} + \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) \cdot \mathbf{n}$, jolloin

(1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \mu V_C & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2(t) \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = -\mu V_C & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3(t) \\ \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_4(t) \\ \tilde{\mathbf{t}} - (\tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2(t) \cup \Gamma_3(t) \cup \Gamma_4(t) \end{array} \right. \quad (3)$$

tai vastaavasti operaattorinotaatiolla

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) = \mathcal{F}(\mu V_C). \quad (4)$$

Edellä $\mathcal{S}$ on reunaehdot sisältävä Stokesin operaattori ja $\mathcal{F}$ kuormafunktionaali. Tehtävän (3) ratkaisu $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ on lineaarikuvauksen μV_C :stä: $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{F}(\mu V_C)$.

Määritellään seuraavaksi lineaarikuvaukset $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ ja $\mathcal{L}_3$:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{t}) := -\mathbf{e}_3 \cdot \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} \mathbf{t} \, ds \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) := [-\tilde{p} \mathbf{1} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T)] \cdot \mathbf{n} \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_3(\mu V_C) := \mathcal{S}^{-1} \mathcal{F}(\mu V_C). \quad (7)$$

Näillä merkinnöillä kapseliin kohdistuva pintavoima on

$$\mathbf{F}_S = \mathcal{L}_1(\mathbf{t}) = \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_3(\mu V_C) + \mathcal{L}_1(\rho b x_3 \mathbf{n}) = \chi \mu V_C + B_C, \quad (8)$$

jossa χ on ainoastaan kapselin sijainnista riippuva skalaarinen vastuskerroin — lineaarikuvauksen $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_3$ "esitysmatriisi" — ja B_C kapseliin kohdistuva hydrostaattinen noste. Kapselin voimatasapainoyhtälö (2) tulee nyt muotoon

$$\chi \mu V_C + B_C - M_C b = 0 \quad (9)$$

ja liikkeen määrittämiseksi voidaan soveltaa implisiittistä menetelmää: määritetään sijaintikohtainen vastuskerroin χ ratkaisemalla virtaustehtävä (3) esimerkiksi nopeusreunaehdolla $\mu V_C = 1$, jonka jälkeen todellinen vajoamisnopeus kapselin kyseisellä sijainnilla on yhtälön (9) nojalla

$$V_C = \frac{M_C b - B_C}{\mu \chi}.$$

Vastuskerroin χ sisältää siis informaation, joka yhdessä bentoniitin materiaaliparametrien ρ ja μ kanssa määrää kapselin liikkeen.

3 TEHTÄVÄN DISKRETOINTI

Suureen $\mathcal{L}_3(1) = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{F}(1)$ määrittämiseksi tehtävä (3) joudutaan ratkaisemaan numeerisesti. Tässä artikkelissa numeeriseen laskentaan käytetään Elmer-ohjelmistoa [4], jossa jatkuvan tehtävän diskretointi perustuu elementtimenetelmään. Tehtävän (3) tapauksessa diskretointi johtaa muotoa

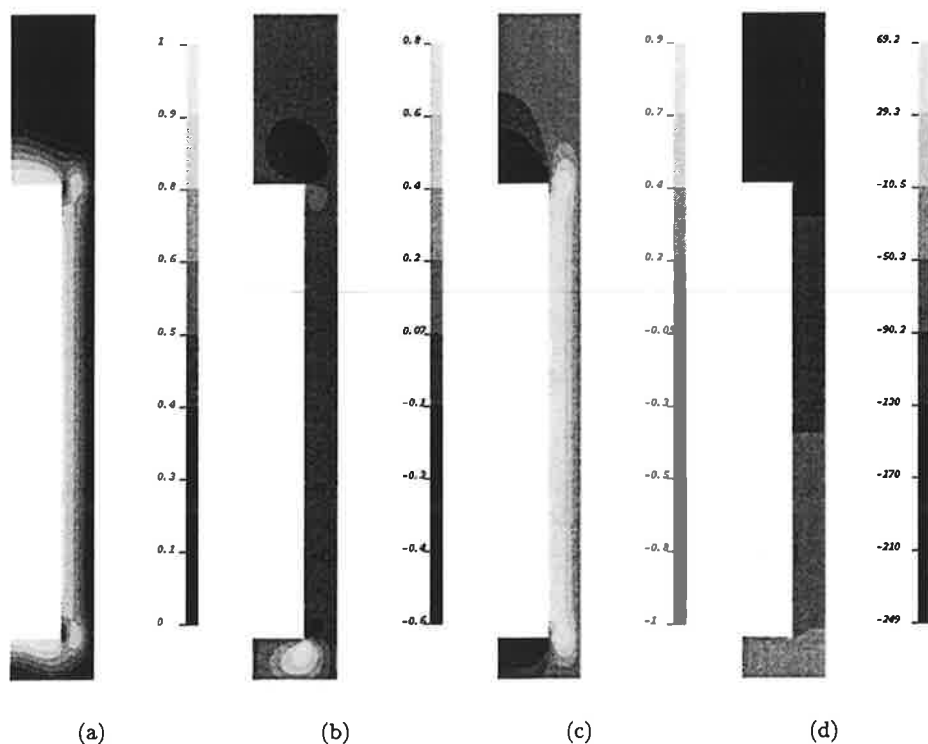
$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

olevaan lineaariseen yhtälöryhmään, missä vektorit U ja P sisältävät nopeus- ja painepausteet.

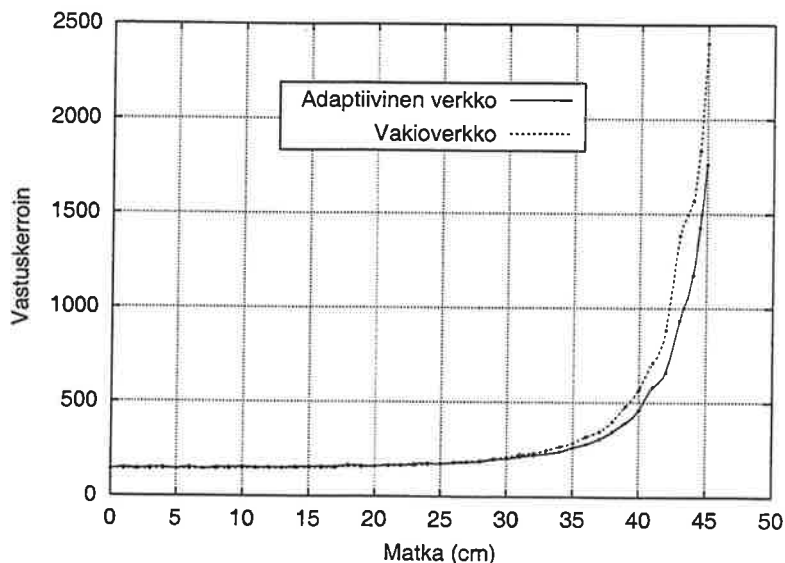
Sovellettaessa elementtimenetelmää Stokesin tehtävälle on numeerisen stabiiliuden kannalta kriittistä nk. Babuškan – Brezzin (BB) ehdon toteutuminen. Numeerinen ratkaisu on matemaattisessa mielessä stabiili, jos nopeuden ja paineen muotofunktiokannat valitaan siten, että BB-ehto on voimassa. Elmer-ohjelmistossa BB-ehto voidaan toteuttaa valitsemalla ratkaisija käyttämään kuplastabilointitekniikkaa. Tällöin nopeuden lineaarista muotofunktiokantaa täydennetään viidennen asteen kuplafunktioilla, jotka pyritään muotoilemaan residuaalivapaiksi [5].

Numeerisessa laskennassa hyödynnetään lisäksi adaptiivista laskentaverkkoa, joka perustuu a posteriori -virheanalyysistä saatavan lokaalin virheindikaattorin käyttöön. Ideana on tällöin jakaa sopivassa normissa mitattu numeerisen ratkaisun virhe tasaisesti koko laskenta-alueelle. Kapselin päätylaippojen ja vaipan väliseen rajapintaan muodostuvien kulmasingulariteettien vuoksi adaptiivinen verkko (h-adaptiivisuus) on tässä yhteydessä laskentataloudellisesti varsin tehokas.

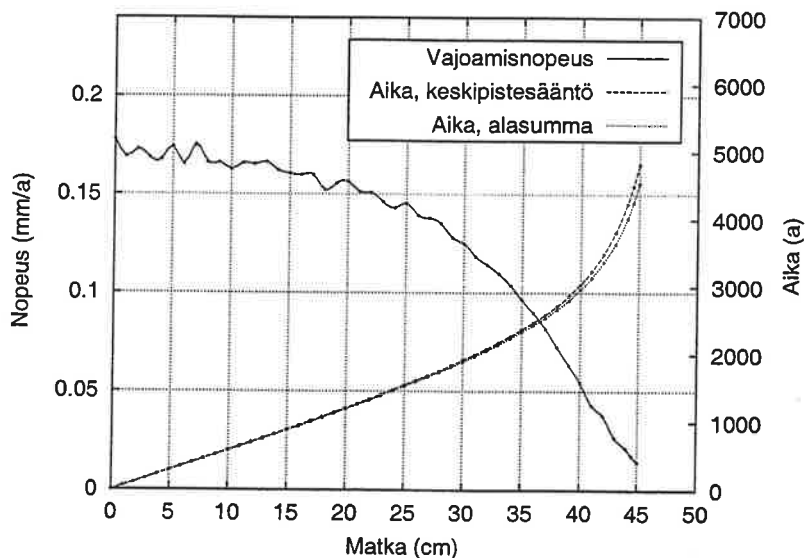
4 NUMEERISIA TULOKSIA



Kuva 3: Tehtävän (3) ratkaisu reunaehdolla $\mu V_C = 1$. Suureet: nopeuden itseisarvo (a), nopeuden vaakakomponentti (b), nopeuden pystykomponentti (c) ja paine (d).



Kuva 4: Vakioverkoilla ja adaptiivisilla verkoilla laskettuja vastuskertoimen χ arvoja kapselin vajoman matkan x funktiona, kun $x \in [0, 45]$. Arvo $x = 0$ vastaa alkutilaa, jolloin kapselin pohja on 50 cm:n etäisyydellä sijoitusreiän pohjasta.



Kuva 5: Esimerkki kapselin mahdollisesta liikkeestä: vajoamisnopeus ja -aika sijainnin x funktiona lähteen [6] mukaisilla materiaaliparametrien arvoilla $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ ja $\mu = 2 \cdot 10^{14} \text{ Pa s}$. Vastuskertoimina on käytetty kuvan 4 mukaisia adaptiivisella verkolla laskettuja arvoja. (1 a = 1 vuosi)

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

Edellä esitettiin laskentamentetelmä sekä numeeriset tulokset, joiden perusteella voidaan halutuilla materiaaliparametrien arvoilla arvioida ydinjätekapSELIN mahdollista vajoamista loppusijoitustilassa. Kapselisijoituksen kvantitatiivisen stabiiliusanalyysin tekemiseksi tarvittaisiin lisätietoa bentoniitin pitkäaikaiskäyttämismisestä.

VIITTEET

- [1] Tuukka Lahtinen. *Ydinjätteen kapselisijoituksen mekaanisen stabiiliuden laskentamenetelmä*. Diplomityö, Teknillinen korkeakoulu, Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto, 2002. <http://www.hut.fi/u/tlahtine/dt/>
- [2] Paula Keto. *Bentonite Deposits as a Natural Analogue to Long-Term Barriers in a Final Repository of Nuclear Waste*. Helsinki University of Technology, Laboratory of Engineering Geology and Geophysics, TKK-IGE-A-24, 1999.
- [3] Säteilyturvakeskus. *Käytetyn ydinpolttoaineen loppusijoitus Suomessa*. <http://www.stuk.fi/ydinjatteet/loppusijoitus.html>
- [4] CSC - Tieteellinen laskenta Oy. Elmer-ohjelmiston www-sivu. <http://www.csc.fi/elmer>
- [5] CSC - Tieteellinen laskenta Oy. *Finite element techniques of Elmer Solver*. <http://www.csc.fi/elmer/elmersolve/fem.html>
- [6] Antti Lempinen. *A Simple Estimate for Sinking Speed of a High Level Nuclear Waste Canister in a Bentonite Buffer*. VII Suomen mekaniikkapäivät Tampereella 25.-26.5.2000, Juhani Koski ja Simo Virtanen (toim.), ISBN 952-15-0414-5, ss. 581-587, 2000.

ZIP-FLYER EFFECT AND ITS APPEARANCE IN COMPOSITE STRUCTURES

Matti V. LESKELÄ
Engineering Mechanics Laboratory
University of Oulu
P.O.Box 4200
FIN-90014 UNIVERSITY OF OULU, FINLAND

ABSTRACT

Zip-flyer effect in longitudinal shear connection behaviour of composite structures is attributable to the non-ductile load-slip properties of the connection interfaces. The lack of ductility in certain types of connection is well recognised and known, but its consequences in the flexural behaviour of a structure are not fully understood, and for the moment it seems that not much research has been carried out on this subject. The paper explains and discusses the mechanical background of the zip-flyer effect, introducing representative structural examples, where the behaviour appears. Numerical results from non-linear finite element calculation are presented for demonstrating the essential appearance of the effect in the structural behaviour. A discussion is given on the parameters that may be used for evaluating the need to make allowance of the effect and how to deal with it in the design of composite structures.

1. INTRODUCTION

The definition of the ductility vs. non-ductility has not been expressed in exact terms, although papers on the subjects are frequently written. Normally the ductility in connection with the flexural behaviour of members is referred to when discussing the rotation capacity in plastic bending of sections. In case of composite flexural members the bending behaviour can be ductile, and yet the flexural response of a member is not satisfactory; the ultimate moment achieved is well below the maximum level that could be achieved. This is attributable to the load-slip properties of the shear connection interfaces that probably possess a too low resistance and ductility in terms of maintaining a longitudinal shear force of the connection as high as possible. The problem may schematically be represented as shown in Fig. 1, where the axial stress resultants, F_c and F_t of the material components in the section with the maximum bending moment must be in equilibrium with total shear force of the connection interfaces between the material components of the member:

$$|F_c| = |F_t| = \int_{L_s} v_l(x) dx, \quad v_l(x) dx = \sum_i \tau_i(x) A_i \quad (1)$$

where $v_l(x)$ is the longitudinal shear flow of the connection, i.e. the sum of the interface forces $\tau_i A_i$ at section x .

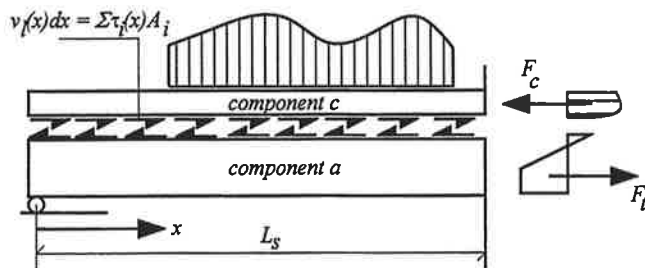


Fig. 1 – Schematic representation of composite behaviour in a flexural member consisting of components 'a' and 'c'

Independent of the elastic or inelastic state of the components 'a' and 'c', composite interaction is maintained by connection shears and in ductile behaviour the shear flow can redistribute from the elastic state to the plastic one at the same time as the redistribution of the stress resultants takes place in the section of the maximum moment. It has been shown elsewhere [1] that independent of the interface configuration, the one and only thing that is important for the development of stress resultants F_c and F_t is the total shear flow, $v_I(x)$, and the respective load-slip response, i.e. it is not important how the total load is distributed within the interfaces in section x . This fact also justifies the experimental connection studies using simple shear tests, known as the push-out tests [2]. In the tests the material components connected together are loaded axially with respect to each other and the load-slip response is measured. The three basic types of the connection response – plastic, hardening and softening - are shown in Fig. 2. The desirable responses of these are the plastic and hardening types and they may unconditionally be classified as ductile.

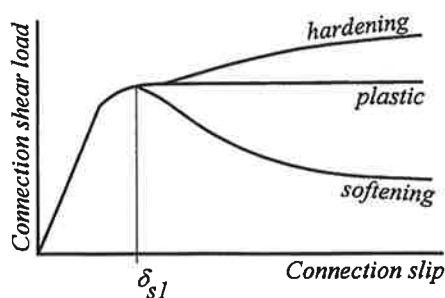


Fig. 2 – The basic types of connection response

1.1 Zip-flyer effect

For describing the zip-flyer effect, consider the shear load-slip behaviour illustrated as the softening type in Fig. 2. The pre-peak and post-peak parts of the diagram are separated by slip $\delta_s = \delta_{sI}$. Assume that the residual load that is maintained for very high slips is small or practically zero.

When the slips along the connection length (L_s in Fig. 1) are small and the structure is in the elastic state of stresses, the connection shear forces are distributed in proportion to the vertical shear force of the beam, and this holds well as long as all the slips remain below δ_{sI} . The first occurrence of slips beyond δ_{sI} will be found at the sections of maximum vertical shear force. In non-ductile connections the redistribution of longitudinal shear forces into a certain uniform

resistance value cannot take place, but the peak value, represented by the maximum force in the connection response diagram, normally shifts towards the section of the beam where the slips are still in their pre-peak values, i.e. towards the section of the maximum bending. For increasing load of the structure, the stress resultants corresponding to the maximum bending moment of the structure can increase so far as the sum of the longitudinal shears can increase during slipping.

As a simplification the form of the connection force diagrams for non-ductile connections may be modelled e.g. as triangles (Fig. 3), where the vertex of the triangle always represents the peak of the shear force – slip diagram. The area of the connection force diagram then represents the sum of the longitudinal shears, and if the diagrams are assumed to have a constant vertex, it may be concluded that stress resultant F_c cannot considerably increase after the slip somewhere in the connection is beyond δ_{s1} . Thus, what happens during the non-ductile ‘redistribution’ of connection forces, is that the constant peak of the diagram moves towards the beam centre at the same time as the load of the beam cannot be much increased (Fig. 3). This phenomenon is described as the zip-flyer effect within the connection behaviour: by developing slips and deflection the structure always tries to active more connection forces although it may not be possible on account of the connection characteristics.

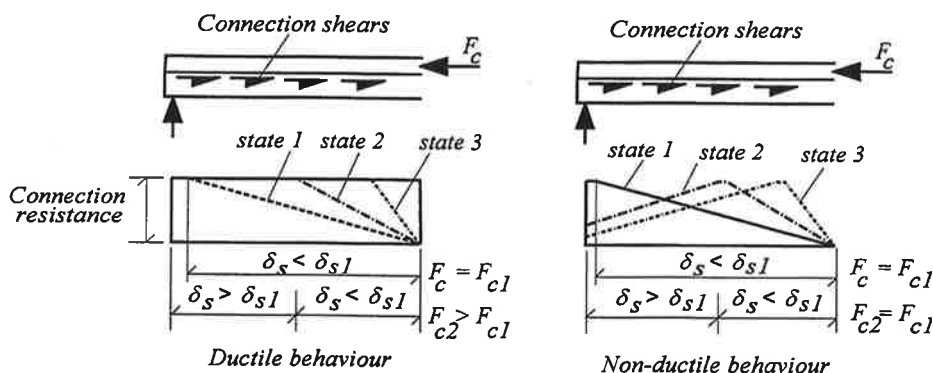


Fig. 3 – Differences in the behaviour of ductile and non-ductile shear connections when slip δ_{s1} has been exceeded within the connection length

In Fig. 3 above three states of loading, such that $load\ 1 < load\ 2 < load\ 3$, with corresponding connection force distributions are illustrated. Independent of the connection type, the structure responds to load incrementation with similar deflection when all the slips are smaller than δ_{s1} ($load < load\ 1$). The difference between the systems is first seen when $load\ 1$ is exceeded. Generally the systems can respond to increasing bending moment by two methods, by increasing the elastic stresses when the internal lever arm between the axial stress resultants remains constant, or by developing plasticity when the internal lever arm will gradually change.

In systems with ductile connection the lever arm and the stress resultants remain intact for $load > load\ 1$, whereas in the non-ductile systems the zip-flyer effect gives mainly rise to deflections with no or only slight increment of load until the development of plasticity starts. In short, this effect reduces the interaction effectiveness.

The non-ductile connection behaviour is normally considered as unfavourable, as it reduces the bending resistance from what can be expected according to plastic stress blocks that correspond to the assumption of full connection. There is one exception, however, when a moderate zip-flyer effect in fact should be considered as favourable for the load capacity of the floor. In systems with hollow core slabs supported on beams, the resistance of the slabs (component 'c') depends on

thrust F_c and its proportion transferred to component 'a' through the cellular structure between the hulls of the slabs [3].

1.2 Structures with non-ductile connections

Typical structures with non-ductile shear connections and its prominent consequences are reported e.g. in papers [4 and 5]: integrated floor beams with bond connection and composite slabs with profiled steel sheeting.

2. CASE STUDIES

The bond connections have sometimes been referred to as those developing 'unintentional composite behaviour' [7]. By defining bond as being something not intended is unjustified for a number of structural systems, e.g. composite slabs with profiled steel sheeting and shallow floor integrated beams, where bond and frictional connections are an everyday practice. The design practices for such systems, however, have been constructed in the same way as for the truly ductile systems. Thus the designer is led to believe that again he is dealing with a ductile behaviour of a structure, although of moderate strength only. The behaviour can be improved in some systems by adding a mechanical connection, but not always. New research on shear connections should be carried out for clarifying the facts more thoroughly. In this paper only some typical examples of non-ductile behaviour and its appearance are introduced. Numerical evaluations of the structures discussed were performed using the non-linear finite element calculation in a two-dimensional system of layered beam elements (LBE-method, [8]).

2.1 Steel beam integrated with a concrete decking of solid type

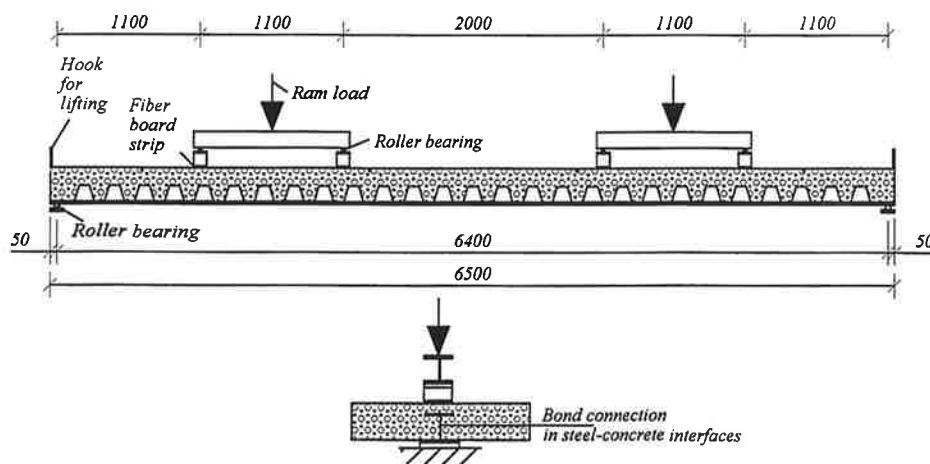


Fig. 4a – An example of a composite beam test where the zip-flyer effect due to non-ductile connection characteristics was clearly seen

The beam shown in Fig. 4a below comes from a test series reported in reference [4]. It may be considered as a typical case where the indications of non-ductile characteristics in the test behaviour are clear. Although loaded with four point loads, the behaviour may be considered similar with that due to uniform loading, as the bending moment diagrams do not differ much. In the load-deflection diagram it is clearly seen that the stiffness of the system critically deteriorates after the load level representing *state 1* in Fig. 3 is met. In the finite element modeling of the test

(LBE-analyses [8]) similar characteristics are observed. The connection shear force diagrams in Fig. 5 drawn for loads prior to *state 1*, for *state 1* and past *state 1* also indicate the behaviour demonstrated in Fig. 3.

Three load-deflection diagrams are drawn in Fig. 4b for comparison with the test behaviour: (a) full connection with ductile characteristics, (b) non-ductile bond connection with only a small residual strength after bond failure and (c) response of the steel member alone, assuming no connections. The diagrams would indicate that the deterioration of the connection resistance to a small residue adjusts the system to the overall behaviour of the residual member, i.e. the steel member. The initiation of the zip-flyer behaviour is seen as the drop of the load in the test response, and as a 'yield-plateau' in the respective finite element analysis.

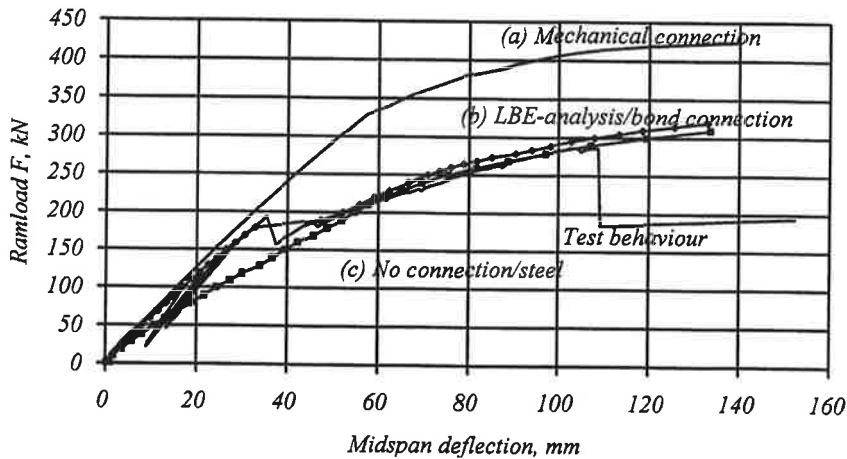


Fig. 4b – Load-deflection diagrams for the system of Fig. 4a

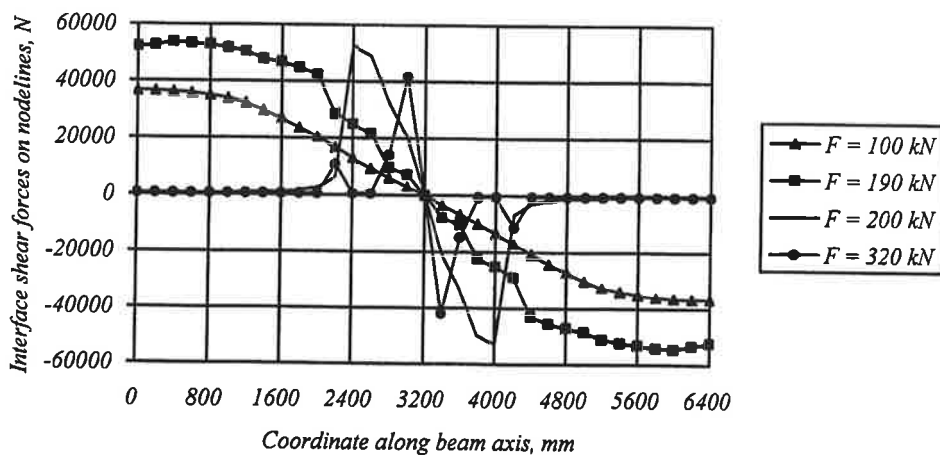


Fig. 5 – Development of connection shear forces as analyzed by the LBE-method according to option (b): bond connection

2.2 Steel beam integrated with hollow core decking units

When integrating beams with hollow core decking units to form a shallow floor, the connections between the decking and the beam consist of grouted joints that bond well to the end of the decking units, but a weaker connection appears in the beam interface. As the hollow core units differ from the solid types of slab, a more complicated system of longitudinal shear forces will develop to maintain composite behaviour between the beam and the slabs. The upper hulls of the decking elements act as a concrete compression flange for the composite beam, but in the practical structural systems it is the bottom hulls of the decking that are better connected to the beam than the top hulls that take in the compressive stress resultants.

Thus, the overall system with shear connection interfaces is as shown schematically in Fig. 6 below. There are at least three connection interfaces in the system, $i4$, $i2$ and $i3$, which are interrelated. Interfaces $i4$ and $i3$ connect the hollow core units to the supporting beam, but $i2$ is only for bridging the top and bottom hulls of the decking units. The shear forces in the webs of the hollow core units are denoted as $v_{l,2}$, the top and bottom hulls interface the beam through shear forces $v_{l,3}$ and $v_{l,4}$. The concrete thrust, F_c , must be in equilibrium with the sum of shear forces $\Sigma(v_{l,2} + v_{l,4})$ and shear forces $v_{l,3}$ take care of transferring the thrust finally to the beam to be in equilibrium with its tensile force F_t . The role of forces $v_{l,4}$ is generally of lesser importance, unless special design is carried out so as to strengthen this interface.

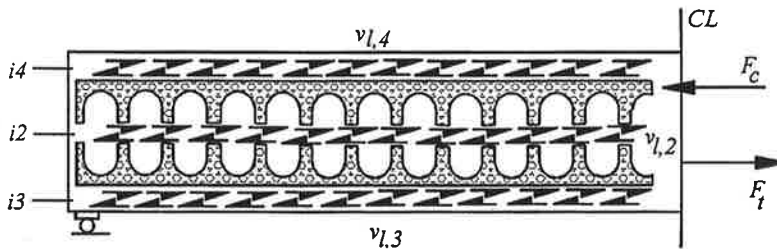


Fig. 6 – System of shear connection interfaces when hollow core slabs are integrated with shallow floor beams

It has been observed in the full-scale floor tests that the properties of the hollow core units (cross-section geometry, concrete grading, prestressing), the properties of the connection interfaces ($i3$ and $i4$) and the geometry of the beam section critically affect the floor properties [9, 10]. In fact, the critical issue is the vertical shear resistance of the hollow core units, which is a function of the shear flow $v_{l,2}$. Hence, for improving the resistance of the decking, the strength of interface $i3$ should not be increased but decreased, instead. Considering Fig. 6 above, it is also easy to see that strengthening of interface $i4$ with respect to $i3$ will improve the decking resistance.

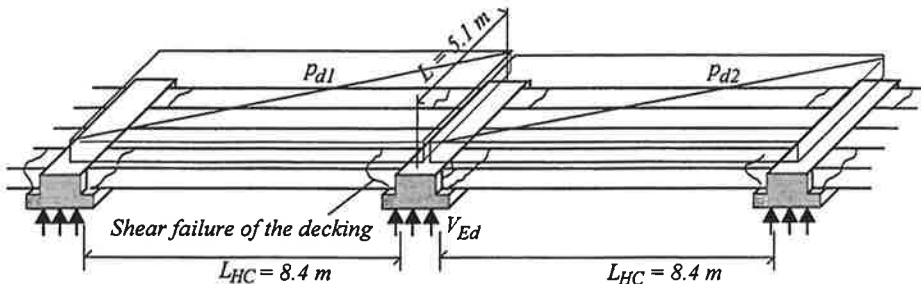


Fig. 7 – Hollow core decking supported on beams; type of failure shown

Fig. 7 above illustrates a typical floor configuration with hollow core slabs supported on shallow type beams. The system behaviour was analyzed using the LBE-method. The spanning of the slabs and the beams are as shown, but it is pointed out that the cross-section of the beams drawn in the figure is only conceptual. In the analysis the decking load $p_{d1} = p_{d2}$ is increased until a failure of the decking slabs is reached in locations shown in Fig. 7.

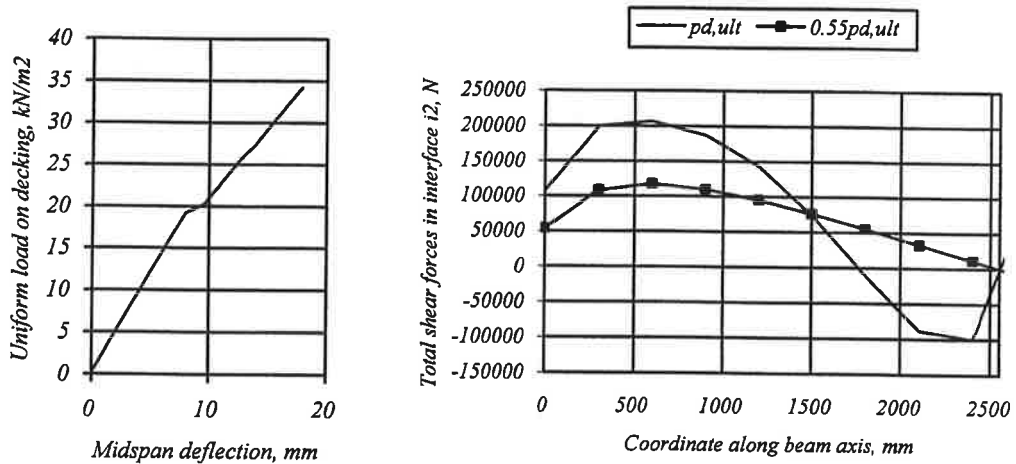


Fig. 8 – Load-deflection response and total longitudinal shear forces through the webs of hollow core slabs

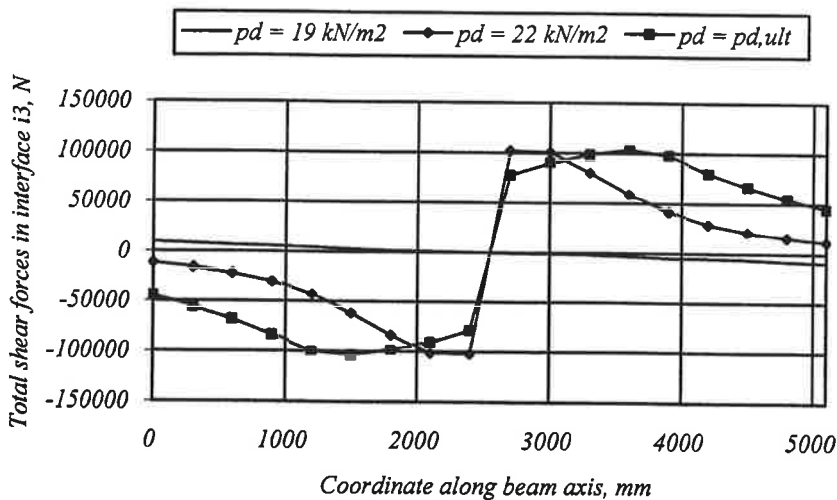


Fig. 9 – Development of longitudinal shear forces in interface i3 when load p_d is increased

The calculation results presented in Figs. 8 and 9 call for following comments and conclusions. The load-deflection response on the left-hand side diagram of Fig. 8 was drawn for the live load p_d , extracting the deflection due to dead-weight of the decking. The ultimate load, $p_{d,ult}$ is reached when the beam is still in the elastic state of strains and stresses. This is typical for this kind of structures. The beneficial influence of the zip-flyer effect on the load-bearing capacity of the hollow core slabs is best exploited when the span of the beam (L) is small compared to the span of the slabs (L_{HC}).

3. SUMMARY

The zip-flyer effect is encountered frequently in composite structures; although its existence may not be recognized due to the uniform way of modeling all modes of behaviour in terms of ductility. Difficulties may arise when it is tried to establish generalized conclusions from the non-ductile behaviour in short shear spans. This is typically the case in composite slabs.

The design of the hollow core slabs supported on beams as presented in references [3 and 10] give an example of the method where the connection characteristics are allowed for in the design parameters. This is done by defining the design width to span length ratio for the concrete compression flange as related to the type of beam and connections. The structure is then analyzed applying nominal full interaction analysis of composite structures. Although the ratio may not be constant, it can be assumed such, as the variation in the applicable range of span lengths is not large.

It is a common feature in all composite systems that when the span length of the structure increases, the interaction effectiveness will improve and the importance of slipping decreases, independent of the connection characteristics. A method of evaluating the effectiveness of composite interaction in the elastic range as a function of the slipping in the shear connection is presented in [1].

REFERENCES

1. Leskelä, M.V., "Integration of Steel Sections in Shallow Floors", in Proceedings of Third European Conference on Steel Structures, Vol. 1, Eds. A. Lamas and L.S. da Silva, Coimbra 2002. 421-430.
2. ENV 1994-1-1, Design of steel and concrete composite structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN 1992.
3. Pajari, M., (ed.) "Design Recommendations for Hollow Core Slabs Supported on Beams." VTT Building Technology, Internal Report 2/1995, RTE27-IR-2/1995. Tech.Res.Ctr. of Finland, April 1995
4. Leskelä, M.V. and Hopia, J., "Steel Sections for Composite Shallow Floors". Report RTL 0053E, University of Oulu, Structural Engineering Laboratory, March 2000, Oulu, Finland
5. Takey, T.H., Andrade, S.A.L., Vellasco, P.C.G.S. and da Silva, J.G.S., "An Innovative Composite Slab System for Residential Buildings", in Proceedings of Third European Conference on Steel Structures, Vol. 1, Eds. A. Lamas and L.S. da Silva, Coimbra 2002. 451-460.
6. Leskelä, M.V., "Shallow Floor Integrated Beams - Research on the Composite Behaviour", in 'Theorie und Praxis im Konstruktiven Ingenieurbau', Festschrift zu Ehren von Prof. Dr.-Ing. Helmut Bode, ibidem Verlag, Stuttgart, 2000 199-212.
7. Leskelä, M.V., "Intentional and Unintentional Shear Connections in Shallow Floor Composite Structures", in RILEM Proceedings PRO21, Connections between Steel and Concrete, Volume Two, Stuttgart Germany 10. - 12.9.2001, 1392-1401
8. Leskelä, M.V., "A Finite Beam Element for Layered Structures and Its Use when Analysing Steel-Concrete Composite Flexural Members", in Constructional Steel Design: World Developments, Eds. P.J. Dowling, J.E. Harding, R. Bjorhovde and E. Martinez-Romero. Elsevier Applied Science 1992 354-358
9. Pajari, M. and Koukkari, H., "Shear Resistance of PHC Slabs Supported on Beams I: Tests". ASCE Journal of Structural Engineering, September 1998, 1050-1061
10. Pajari, M., "Shear Resistance of PHC Slabs Supported on Beams II: Analysis". ASCE Journal of Structural Engineering, September 1998, 1062-1073

ROOTTORIN VASTEISTA ERILAISILLA RAKENTEEN EPÄIDEAALISUUKSILLA

Jari Toiva¹ ja Raimo von Hertzen²

¹Teknillinen korkeakoulu, Koneensuunnittelun laboratorio

²Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laitos

PL 1100, 02015 TKK

TIIVISTELMÄ

Työssä on johdettu rakenteen valmistusvirheitä sisältävän roottorin värähtelyjä kuvaava matemaattinen malli. Malli ottaa huomioon painovoiman, hyrräkytkennän, epäsymmetrisen ja vaimennetun tuennan, roottorin alkukäyryyden ja poikkileikkauksen epäsymmetrian, roottorin sisäisen ja ulkoisen vaimennuksen, ominaismuotovaimennuksen, dynaamisen massavaimentimen, tasapainotusmassojen vaikutuksen ja roottorin linjausvirheen. Roottori on mallinnettu pyörivänä Rayleighin palkkina. Liikeyhtälöt on johdettu yleistetystä Hamiltonin periaatteesta lähtien. Numeerista ratkaisua varten yhtälöt on muokattu elementtimenetelmää käyttäen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi, joka voidaan ratkaista ominaismuotokannassa vapausasteiden vähennystä hyväksi käyttäen. Aluksi on tutkittu ideaalisen roottorin dynaamista vastetta. Tämän jälkeen on simulointiin lisätty seuraavia tekijöitä: sisäinen ja ulkoinen vaimennus, massaepätasapaino, poikkileikkauksen muotoepäsymmetria, poikkileikkauksen muotoepäsymmetria ja painovoima, tuennan jäykkyyden epäsymmetria, sekä tuennan ja roottorin epäsymmetrioiden yhteisvaikutus. Erityisesti todettiin roottorin muotoepäsymmetrian ja epäsymmetrisen laakerituennan aiheuttavan lisäresonansseja, epästabiilisuuksivähyhykkeitä ja kiepuntasuuntien vaihteluita. Kehitetyllä ohjelmalla voidaan mallintaa mm. paperikoneen teloja ja ydinvoimalan monilaakerisia turbiineja.

JOHDANTO

Tyypillisten pyörivien koneiden kuten paperikoneiden, turbiinien, generaattoreiden, puhaltimien ja pumppujen tehokkuuden parantaminen johtaa usein roottoreiden kokojen pienentämiseen ja tätä kautta roottoreiden pyörimisnopeuksien kasvamiseen. Roottoreiden korkeat pyörimisnopeudet tuovat mukanaan suuria hitausvoimia ja kiepuntasäteitä, roottorin kriittisiä nopeuksia voidaan joutua ylittämään, ja roottorin toiminta-alue voi joutua lähelle epästabiileja pyörimisnopeuksia. Pyörivien koneiden tehokkuuden parantaminen vaatii parempaa roottoridynamiikan tuntemusta, jotta suunniteltu kone ei olisi valmistuttuaan käyttökelvoton tai sen suunniteltua toiminta-alueetta ei jouduttaisi kaventamaan.

Roottoridynamiikan analyysillä pyritään selvittämään roottorin kriittiset pyörimisnopeudet, epästabiilit pyörimisnopeusalueet ja värähtelyjen vasteet. Kun kriittiset pyörimisnopeudet ovat tiedossa, voidaan roottorin normaali toiminta-alue suunnitella sellaiseksi, että kriittisiä nopeuksia voidaan välttää. Jos toiminta-alue osuu pakostakin kriittiselle nopeudelle, tai sitä halutaan myöhemmin laajentaa, pitäisi pystyä suunnittelemaan tarvittavat muutokset, joilla kriittisiä nopeuksia voidaan siirtää. Roottorin epästabiiliuteen vaikuttavat monet tekijät. Esimerkiksi roottorin muotoepäsymmetria ja tietyt vaimennustekijät voivat olla epästabiiloivia. Vaikka kaikkia epästabiiloivia tekijöitä ei tunnettaisikaan, voidaan tietokonesimulaatioilla löydettyjä stabiiloivia tekijöitä kuitenkin hyödyntää käytännössä. Roottorin tarkat värähtelyjen vasteet olisi hyvä tuntea, jotta tiedetään pysyvätkö värähtelyt tarpeeksi pieninä toiminta-alueella,

tai että onko roottorilla mahdollista ylittää kriittisiä nopeuksia. Tämä on vaativa osa-alue, sillä käytännössä on vaikeaa määrittää roottorista massaepätasapainojakauma, muotoepäsymmetria ja vaimennustekijät. Tästä huolimatta voidaan roottorianalyysillä hakea esimerkiksi tasapainotusmassoille optimaalisia paikkoja tai suunnitella värähtelyjen vaimentimia. Analyysillä voidaan hakea myös valmistustoleransseja, joilla roottorin värähtelyjen vasteet pysyisivät sallituissa rajoissa.

Tässä työssä esitettävä roottorin malli kuvaa vakionopeudella pyörivän roottorin taiputusvärähtelyjä ottaen huomioon hyrräkytkennän, massaepätasapainon, roottorin alkukäyryyden ja muotoepäsymmetrian, roottorin sisäisen ja ulkoisen vaimennuksen sekä epäsymmetrisesti joustavan ja vaimentavan tuennan. Malliin on sisällytetty myös tasapainotusmassojen ja dynaamisten vaimentimien vaikutus. Numeerinen ratkaisu on suoritettu FE-menetelmää käyttäen. Lopuksi esitellään numeerisia tuloksia rakenteen epäideaalisuuksien vaikutuksesta roottorin dynaamiseen vasteeseen.

YLEISTÄ ROOTTORIDYNAMIIKASTA

Pyörivien rottoreiden kriittisiä pyörimisnopeuksia vastaavien resonanssikohtien sijaintiin ja epästabiileiden alueiden syntymiseen vaikuttavat roottorin rakenne ja rakenteen epäideaalisuudet. Tässä esityksessä keskitytään hyrräilmiöiden, massaepätasapainon, eri vaimennustekijöiden sekä roottorin ja tuennan epäsymmetrian vaikutukseen. Seuraavassa tarkennetaan mitä eri epäideaalisuuksilla tarkoitetaan.

Pyörivässä roottorissa on verraten paljon rotaatioenergiaa verrattuna värähtelyenergiaan. Hyrrä- eli gyroskooppi-ilmiöillä onkin huomattava vaikutus roottorin värähtelykäyttäytymiseen. Roottorin massaepätasapaino johtuu siitä, että roottorin massakeskipiste ei sijaitse roottorin pyörimisakselilla eli laakeri-laakeri suoralla. Massaepätasapaino on todellisuudessa jakautunut pitkin roottorin akselia. Roottoriin kohdistuvat vaimennukset tulee jakaa ulkoisiksi ja sisäisiksi. Tämä johtuu siitä, että sisäinen vaimennus voi olla sekä stabiloiva että epästabiloiva. Ulkoiset vaimennukset aiheutuvat tuennasta ja roottorin ympärillä olevasta väliaineesta, esimerkiksi ilmasta. Sisäiset vaimennukset aiheutuvat pyörivän roottorin materiaalisesta vaimennuksesta. Materiaalin sisäinen vaimennus on rakenteellista hystereesivaimennusta, mutta herätevoimien ollessa harmonisia sekä matemaattisista syistä kuvataan tässä työssä sisäinen vaimennus viskoosivaimennuksena. Roottorin tuennan epäsymmetrialla tarkoitetaan sitä, että tuenta joustaa ja vaimentaa eri suuntiin eri tavalla. Roottorin muotoepäsymmetria taas johtuu siitä, että itse roottori joustaa eri suuntiin eri tavalla. Tässä työssä on muotoepäsymmetria mallinnettu kohtisuorien suuntien erisuuruksina jähyysmomentteina.

ROOTTORIN MATEMAATTINEN MALLI

Pyörimättömässä koordinaatistossa saadaan kuvan 1 roottorin kenttäyhtälöksi [1,2]

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{W} - (\rho I \ddot{W}') + C \dot{W} + (c I \dot{W}'') - i \dot{\Psi} (c I W'') + \\ + (E I W'') + 2 i \dot{\Psi} (\rho I \dot{W}') = \\ - i \rho A g + e^{i \Psi} \left[(E I W_{in, rot}'') - (E \Delta I W_{in, rot}'') \right] \\ - e^{i 2 \Psi} \left[(\rho \Delta I A'') - (E \Delta I W'') - (c \Delta I \dot{W}'') - i \dot{\Psi} (c \Delta I W'') \right] \end{aligned} \quad (1)$$

ja reunaehtoyhtälöiksi

$$\begin{aligned}
& -(\rho I \ddot{W}')_0 + (\alpha \dot{W})_0 + (cI \dot{W}'')_0' - i\dot{\Psi}(cI \mathcal{W}'')_0' + \\
& + (K \mathcal{W})_0 + (EI \mathcal{W}'')_0' + 2i\dot{\Psi}(\rho I \dot{W}')_0 = \\
& e^{i\Psi} \left\{ (EI \mathcal{W}_{in,rot}'')_0' - (E \Delta I \mathcal{W}_{in,rot}^{**})_0' + [(K + i\dot{\Psi}\alpha) \mathcal{W}_{in,rot}']_0 \right\} + \\
& -e^{i2\Psi} \left[(\rho \Delta I \mathcal{A}'')_0 - (E \Delta I \mathcal{W}^{**})_0' - (c \Delta I \dot{\mathcal{W}}^{**})_0' - i\dot{\Psi}(c \Delta I \mathcal{W}^{**})_0' \right] + \\
& + e^{-i\Psi} \left[(\Delta \mathcal{K} - i\dot{\Psi} \Delta A) \mathcal{W}_{in,rot}^* \right]_0 - (\Delta \mathcal{K} \mathcal{W}^*)_0 - (\Delta A \dot{\mathcal{W}}^*)_0,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \dot{W}')_0 - (cI \dot{W}'')_0 + i\dot{\Psi}(cI \mathcal{W}'')_0 + (D \mathcal{W}')_0 - (EI \mathcal{W}'')_0 = \\
& -e^{i\Psi} \left\{ (EI \mathcal{W}_{in,rot}'')_0 - (E \Delta I \mathcal{W}_{in,rot}^{**})_0 - [(D + i\dot{\Psi}\beta) \mathcal{W}_{in,rot}']_0 \right\} + \\
& -e^{i2\Psi} \left[(E \Delta I \mathcal{W}^{**})_0 + (c \Delta I \dot{\mathcal{W}}^{**})_0 + i\dot{\Psi}(c \Delta I \mathcal{W}^{**})_0 \right] + \\
& -e^{-i\Psi} \left[(\Delta \mathcal{D} - i\dot{\Psi} \Delta B) \mathcal{W}_{in,rot}^* \right]_0 + (\Delta \mathcal{D} \mathcal{W}^{**})_0 + (\Delta B \dot{\mathcal{W}}^{**})_0,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho I \ddot{W}')_L + (\alpha \dot{W})_L - (cI \dot{W}'')_L' + i\dot{\Psi}(cI \mathcal{W}'')_L' + \\
& + (K \mathcal{W})_L - (EI \mathcal{W}'')_0' - 2i\dot{\Psi}(\rho I \dot{W}')_L = \\
& -e^{i\Psi} \left\{ (EI \mathcal{W}_{in,rot}'')_L' - (E \Delta I \mathcal{W}_{in,rot}^{**})_L' - [(K + i\dot{\Psi}\alpha) \mathcal{W}_{in,rot}']_L \right\} + \\
& + e^{i2\Psi} \left[(\rho \Delta I \mathcal{A}'')_L - (E \Delta I \mathcal{W}^{**})_L' - (c \Delta I \dot{\mathcal{W}}^{**})_L' - i\dot{\Psi}(c \Delta I \mathcal{W}^{**})_L' \right] + \\
& + e^{-i\Psi} \left[(\Delta \mathcal{K} - i\dot{\Psi} \Delta A) \mathcal{W}_{in,rot}^* \right]_L - (\Delta \mathcal{K} \mathcal{W}^*)_L - (\Delta A \dot{\mathcal{W}}^*)_L,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \dot{W}')_L + (cI \dot{W}'')_L - i\dot{\Psi}(cI \mathcal{W}'')_L + (D \mathcal{W}')_L + (EI \mathcal{W}'')_L = \\
& e^{i\Psi} \left\{ (EI \mathcal{W}_{in,rot}'')_L - (E \Delta I \mathcal{W}_{in,rot}^{**})_L + [(D + i\dot{\Psi}\beta) \mathcal{W}_{in,rot}']_L \right\} + \\
& + e^{i2\Psi} \left[(E \Delta I \mathcal{W}^{**})_L + (c \Delta I \dot{\mathcal{W}}^{**})_L + i\dot{\Psi}(c \Delta I \mathcal{W}^{**})_L \right] + \\
& -e^{-i\Psi} \left[(\Delta \mathcal{D} - i\dot{\Psi} \Delta B) \mathcal{W}_{in,rot}^* \right]_L + (\Delta \mathcal{D} \mathcal{W}^{**})_L + (\Delta B \dot{\mathcal{W}}^{**})_L.
\end{aligned} \tag{5}$$

Yhtälöissä käytetyt kompleksiset muuttujat ovat

$$\mathcal{W} \equiv U + iV, \tag{6}$$

$$\mathcal{W}_{in,rot} \equiv U_{in,rot} + iV_{in,rot}, \tag{7}$$

$$\mathcal{A} \equiv \ddot{W} - 2i\dot{\Psi}\dot{W}, \tag{8}$$

$$\Delta I \equiv \Delta I + iI_{xy}, \tag{9}$$

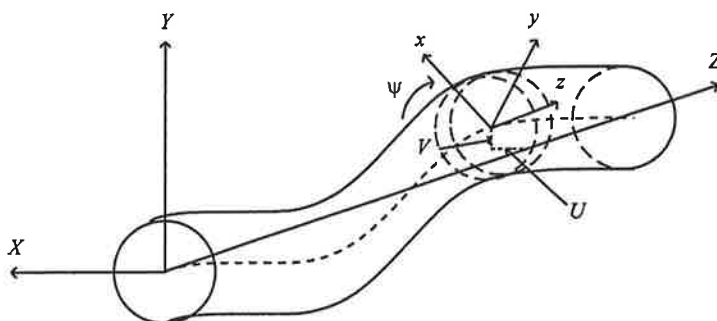
$$\Delta \mathcal{K} \equiv \Delta K + iK_{XY}, \tag{10}$$

$$\Delta D \equiv \Delta D + i D_{XY}, \quad (11)$$

$$\Delta A \equiv \Delta \alpha + i \alpha_{XY}, \quad (12)$$

$$\Delta B \equiv \Delta \beta + i \beta_{XY}. \quad (13)$$

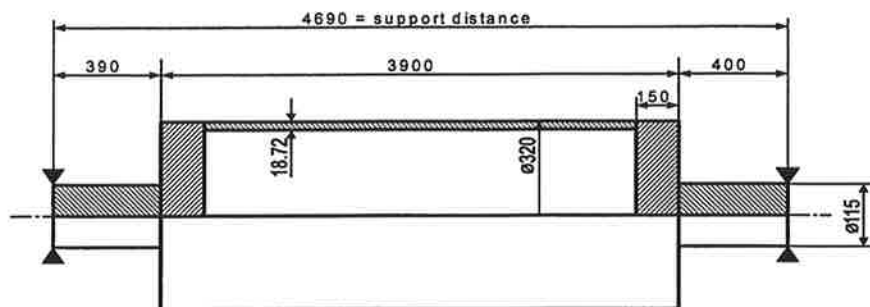
Edellä olevissa yhtälöissä suuret U ja V tarkoittavat roottorin siirtymää X - ja Y -suuntiin koordinaatin Z funktiona. Alaindeksi "in" viittaa roottorin alkukäyryyteen, "rot" siirtymään mitattuna pyörivässä koordinaatistossa ja "*" merkitsee kompleksikonjugaattia. Muuttuja Ψ merkitsee roottorin pyörimisen kulma-asemaa, joten roottorin pyörimisnopeus on $\Omega = \dot{\Psi}$, joka tässä oletetaan vakioksi. Tarkempi kuvaus yhtälöistä ja niiden johdosta sekä numeerisesta ratkaisusta löytyy viitteistä [1,2].



Kuva 1. Pyörivä roottori ja käytetyt koordinaatistot. Koordinaatit X , Y , Z viittaavat paikallaan pysyvään ja koordinaatit x , y , z roottorin mukana pyörivään koordinaatistoon. Muuttujat U ja V kuvaavat roottorin siirtymää.

ROOTTORIN VASTEITA ERILAISILLA EPÄIDEAALISUUKSILLA

Roottorin vasteita tutkitaan kuvan 2 mukaisella TKK:n Koneensuunnittelun laboratorion koeroottoria vastaavalla roottorilla. Aluksi käytetään kuvan 2 mukaista sisäisesti vaimentamatonta ideaalista pyörähdysymmetristä roottoria, johon lisätään vähitellen erilaisia epäideaalisuuksia. Vasteita tutkitaan seuraamalla roottorin taipumaa, värähtelyjen halkaisijaa sekä X - ja Y -suuntaisia värähtelyamplitudeja keskimmäisestä solmusta mitattuna.



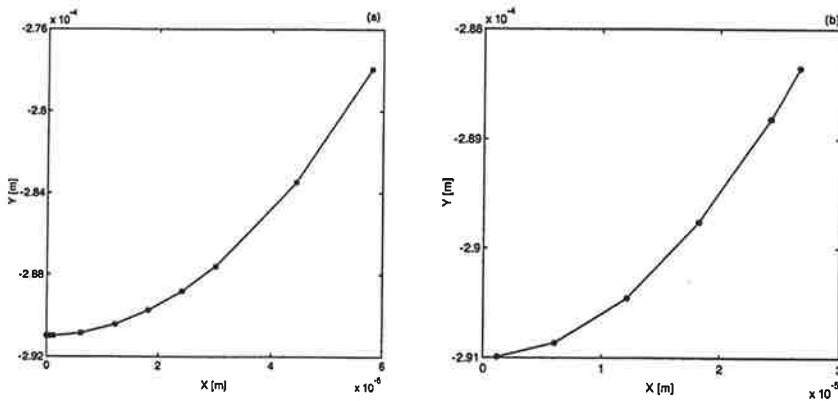
Kuva 2. Lähtökohtana käytetty testiroottori.

Ideaalinen roottori painovoimakentässä

Ideaalinen sisäisesti vaimentamaton roottori asettuu painovoimakentässä pyörimään taipuneen akselinsa ympärille eikä roottorin pyörimisnopeus vaikuta tällaisen roottorin taipumaan. Taipuma on siis sama kuin pyörimättömällä roottorilla ja voidaan laskea staattista palkkiteoriaa käyttäen.

Sisäinen ja ulkoinen vaimennus

Sisäisesti ja ulkoisesti vaimennettu ideaalinen roottori asettuu painovoimakentässä stationaariseseen tilaan, mikäli roottorin pyörimisnopeus on pienempi kuin edellä mainittu epästabiiliusraja. Kuvassa 3(a) on esitetty lasketut testiroottorin keskipisteen XY-koordinaatit sisäisen vaimennuksen arvoilla $1.0 \cdot 10^6 - 1.0 \cdot 10^9 \text{ Nsm}^{-2}$ pyörimisnopeuden ollessa 50 rads^{-1} . Kuvassa 3(b) on vastaa-vasti esitetty roottorin keskipisteen koordinaatit pyörimisnopeuden arvoilla $10-220 \text{ rads}^{-1}$ sisäisen vaimennuksen ollessa $1.0 \cdot 10^8 \text{ Nsm}^{-2}$.



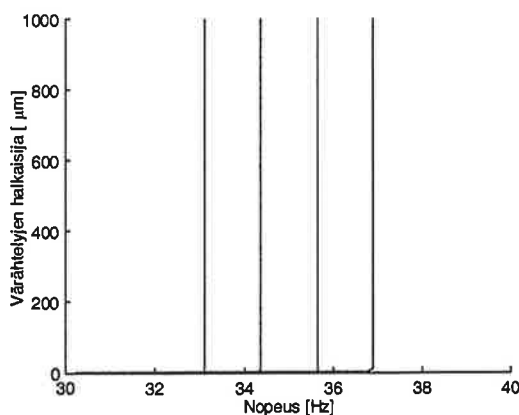
Kuva 3. Roottorin keskipisteen sijainti stationaartilassa eri sisäisen vaimennuksen (a) ja pyörimisnopeuden (b) arvoilla.

Kuvista nähdään, että roottorin siirtymä ei ole enää täysin pystysuunnassa vaan roottori on kokenut myös vaakasuuntaisen siirtymän. Siirtymä on sitä suurempi, mitä suurempi sisäinen vaimennus ja roottorin pyörimisnopeus ovat. Viitteessä [3] on analyttisesti johdettu ideaalisen, tasapaksun, vapaasti tuetun roottorin nousukulmalle θ lauseke

$$\tan \theta = \frac{\Omega c}{E}. \quad (14)$$

Voidaan todeta, että kyseisellä roottorilla kulma θ riippuu roottorin sisäisestä vaimennuksesta c , pyörimisnopeudesta Ω ja kimmokertoimesta E .

Kuvaan 4 on laskettu testiroottorin vasteita ulkoisen vaimennuksen eri arvoilla sisäisen vaimennuksen pysyessä samana. Kuvasta nähdään, että ulkoisen vaimennuksen ollessa nolla on roottori stabiili ensimmäiseen ominaiskulmataajuuteen ($f_1 = 33.1 \text{ Hz}$) saakka. Nähdään myös, että ulkoisen vaimennuksen kasvattaminen korottaa tätä stabiiliusrajaa. Huomattakoon, että viitteen [3] mukainen analyttinen lauseke stabiiliusrajalle on saatavilla ainoastaan tasapaksulle roottorille.



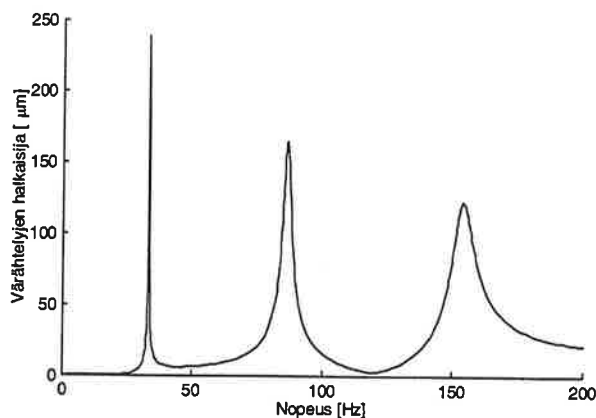
Kuva 4. Testiroottorin vasteita eri ulkoisen ja sisäisen vaimennuksen suhteilla. Ulkoisen vaimennuksen arvot ovat $C = 0, 100, 200$ ja 300 Nsm^{-2} (vasemmalta oikealle). Sisäinen vaimennus on $c = 1.0 \cdot 10^8 \text{ Nsm}^{-2}$.

Viitteessä [4] on tutkittu sisäisen vaimennuksen vaikutusta pyörivään Timoshenko-palkkiin. Artikkelissa todettiin, että sisäinen viskoosivaimennus on stabiloivaa ensimmäiseen kriittiseen nopeuteen asti, minkä jälkeen se muuttuu epästabiloivaksi. Viitteessä [5] on tutkittu eri epäideaalisuuksien vaikutusta Jeffcott-roottorin vasteeseen. Viitteessä päädyttiin samankaltaisiin tuloksiin, eli sisäinen viskoosivaimennus tekee roottorin epästabiiliksi ensimmäisen kriittisen nopeuden jälkeen ja ulkoinen vaimennus nostaa tätä epästabiiliusrajaa.

Massaepätasapaino

Kuvassa 5 on esitetty alkukäyrän roottorin laskettu vaste. Kuvassa näkyy kolme alinta resonanssia. Pyörimättömälle palkille lasketut kolme alinta ominaistajuuksia ovat 32.1, 85.7 ja 150.8 Hz. Resonanssikohdat ovat miltei pyörimättömien ominaistajuuksien kohdalla, mutta kuvasta huomataan, että kohdat ovat siirtyneet eteenpäin. Tämä johtuu siitä, että pyöriminen nostaa tässä tapauksessa ominaistajuuksia pyörimättömään roottoriin nähden. Havaitaan myös, että mitä suurempi roottorin pyörimisnopeus on, sitä enemmän ovat resonanssikohdat siirtyneet. Viitteessä [6] on esitetty tarkka yhteys roottorin pyörimisnopeuden ja ominaistajuuksien välillä. Ominaisajuuksia on johdettu käyttäen hyväksi pyöriviä ominaismuotoja. Viitteessä todetaan, että eteenpäin pyörivien ominaismuotojen ominaistajuuksien kasvavat ja taaksepäin pyörivien muotojen ominaistajuuksien laskevat roottorin pyörimisnopeuden kasvaessa. Roottorin eri epäideaalisuudet herättävät eri suuntiin pyöriviä ominaismuotoja, joten viitteessä johdetuista yhteyksistä ei nähdä suoraan roottorin kriittisiä pyörimisnopeuksia. Todetaan vielä, että roottorin massaepätasapainosta tuleva herätevoiman taajuus on sama kuin roottorin pyörimisnopeus (ks. yhtälö (1)).

Resonanssioppiikkien korkeus riippuu sekä vaimennuksesta että alkukäyräyden muodosta. Jos alkukäyräyden muodoksi valittaisiin tarkasti värähtelyjen ensimmäinen ominaismuoto, nousisi resonanssi vain ensimmäisen ominaistajuuksien kohdalle. Jos taas alkukäyräyden muodoksi valittaisiin toinen ominaismuoto, nousisi resonanssi ainoastaan toisen ominaistajuuksien kohdalle jne. Tätä ominaisuutta käytetään hyväksi roottoreiden tasapainotuksessa.

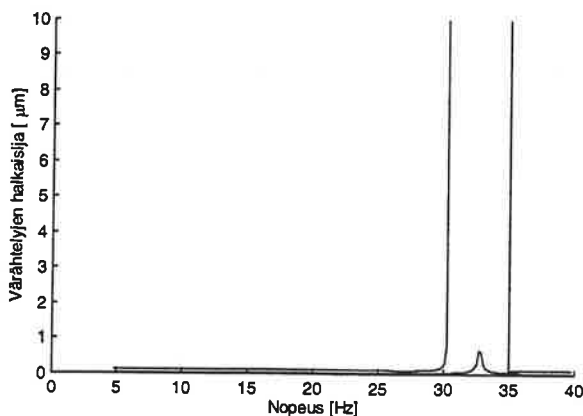


Kuva 5. Testiroottorin vaste alkukäyryydelle.

Muotoepäsymmetria

Kuvassa 6 on esitetty pienellä massaepätasapainolla kuormitetun symmetrisen ja epäsymmetrisen roottorin värähtelyjen vaste. Testiroottorin muotoepäsymmetria on tässä varsin suuri ($\Delta I/I = 20\%$). Kuvan sisempi käyrä on symmetrisen ja ulompi käyrä epäsymmetrisen roottorin vaste. Pyörimättömän symmetrisen roottorin ominaistajuus on 32.8 Hz ja pyörimättömän epäsymmetrisen roottorin alempi ominaistajuus on 30.3 Hz ja ylempi 34.9 Hz. Kuvasta nähdään, että epäsymmetrinen roottori on epästabiili näiden ominaistajuuksien välissä. Suuremmilla sisäisillä vaimennuksilla laskettaessa huomattiin epästabiilin alueen kapenemista.

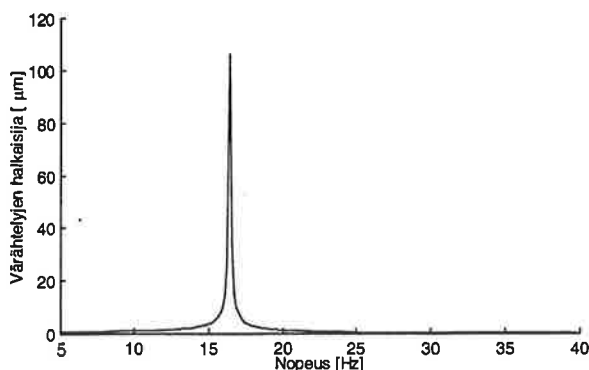
Viitteessä [7] on tutkittu ulkoisen vaimennuksen vaikutusta tuennaltaan epäsymmetrisen Jeffcott-roottorin stabiiliuteen. Tuennan epäsymmetria aiheutti epästabiilin alueen symmetrisen roottorin ensimmäisen ominaistajuuden ympärille. Epästabiili alue sijaitsi pyörimättömän epäsymmetrisen roottorin alemman ja ylemmän ominaistajuuden välissä. Ulkoisen vaimennuksen havaittiin kaventavan tätä epästabiiliusaluetta ja riittävän suuren ulkoisen vaimennuksen havaittiin hävittävän tämän alueen kokonaan.



Kuva 6. Muotoepäsymmetrian vaikutus pääresonanssiin. Sisempi (matalampi) käyrä on symmetrisen ja ulompi käyrä epäsymmetrisen roottorin vaste.

Muotoepäsymmetria ja painovoima

Kuvassa 7 on esitetty roottorin muotoepäsymmetrian vaikutus roottorin vasteeseen painovoimakentässä. Testiroottorissa käytetty muotoepäsymmetria oli varsin pieni ($\Delta I/I = 0.1\%$), mutta pienikin vaihtelu jäykkyydessä aiheuttaa sen, että roottori taipuu painovoimakentässä eri tavalla eri



Kuva 7. Muotoepäsymmetrian vaikutus roottorin vasteeseen yhdessä painovoiman kanssa.

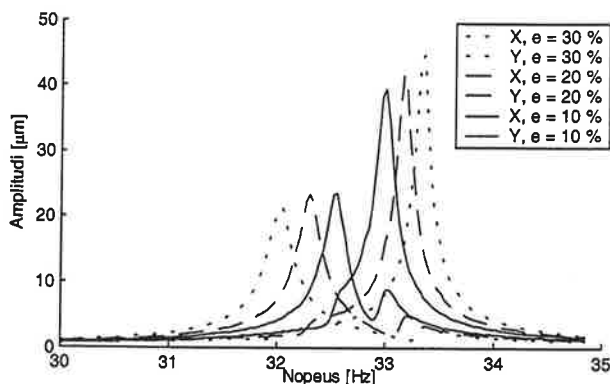
Kuvassa näkyy puolikriittinen resonanssi.

suuntiin. Tästä aiheutuva taipuman muutos tapahtuu kaksi kertaa yhden pyörähdyskierroksen aikana ja näin muotoepäsymmetria aiheuttaa herätevoiman, jonka taajuus on kaksinkertainen verrattuna roottorin pyörimisnopeuteen. Muotoepäsymmetrian ja painovoiman aiheuttamaa resonanssia kutsutaankin *puolikriittiseksi* resonanssiksi.

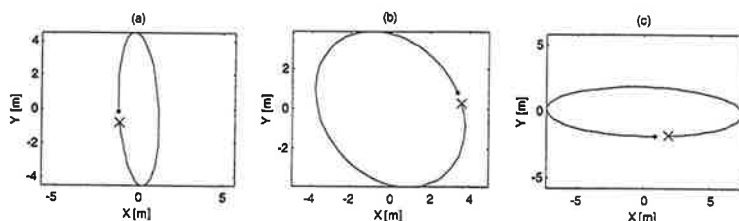
Tuennan jäykkyyden epäsymmetria

Kuvassa 8 on esitetty testiroottorin vasteita massaepäasapainolle erilaisilla tuennan epäsymmetrioilla. Vasemmanpuoleiset kolme käyrää kuvaavat roottorin keskipisteen värähtelyamplitudia Y -suunnassa ja oikeanpuoleiset vastaavasti X -suunnassa. Tuennan epäsymmetriaa kuvataan suureella $e = \Delta K/K$. Nähdään, että tuennan jäykkyyden epäsymmetria aiheuttaa pysty- ja vaakasuunnalle erisuuret resonanssitaajuuksien välit. Mitä suurempi tuennan epäsymmetria on, sitä suurempi on vaaka- ja pystysuuntaisten resonanssitaajuuksien väli. Kuvasta nähdään myös, että pysty- ja vaakasuuntaisissa vasteissa esiintyy pieni piikki myös toistensa resonanssikohtissa. Tämän selittää roottorissa oleva hyrräkytkentä, joka yhdistää värähtelyjen suunnat toisiinsa.

Kuvassa 9 on esitetty kuvan 8 ratakäyriä kolmella eri nopeudella. Kuva (a) on ennen pystysuunnan resonansseja, kuva (b) resonanssikohtien välissä ja kuva (c) resonanssikohtien jälkeen. Roottorin pyörimisnopeus on kaikissa tapauksissa vastapäivään. Kuvissa on merkitty rastilla kierroksen ensimmäinen piste ja pallolla viimeinen. Nähdään, että roottorin liike seuraa roottorin pyörimissuuntaa resonanssikohtien ulkopuolella, kun taas resonanssikohtien välissä tilanne on päinvastainen. Ilmiöstä käytetään nimityksiä eteenpäin- ja taaksepäinkieppunta (*forward and backward whirling*). Kieppuntasuunnan muutos resonanssien välissä aiheutuu siitä, että vasteeseen tulee herätteeseen nähden resonanssin jälkeen 180° vaihe-ero. Kun tämä ensin tapahtuu vain pystysuunnalle, muuttuu roottorin liikkeen pyörimissuunta. Kun molemmat resonanssit on ylitetty, on molemmilla suunnilla 180° vaihe-ero, ja kieppuntasuunta on palautunut roottorin pyörimisnopeuden suuntaiseksi.



Kuva 8. Tuennan jäykkyyden epäsymmetrian vaikutus massaepätasapainolla kuormitetun roottorin vasteeseen. Vasemmanpuoleiset käyrät kuvaavat vastetta pystysuunnassa ja oikeanpuoleiset vaakasuunnassa.



Kuva 9. Kiepuntasuunnat eri pyörimisnopeuksilla: (a) $\Omega = 31.5$ Hz, (b) $\Omega = 32.6$ Hz ja (c) $\Omega = 33.7$ Hz. Rasti on ratakäyrän ensimmäinen ja pallo viimeinen piste.

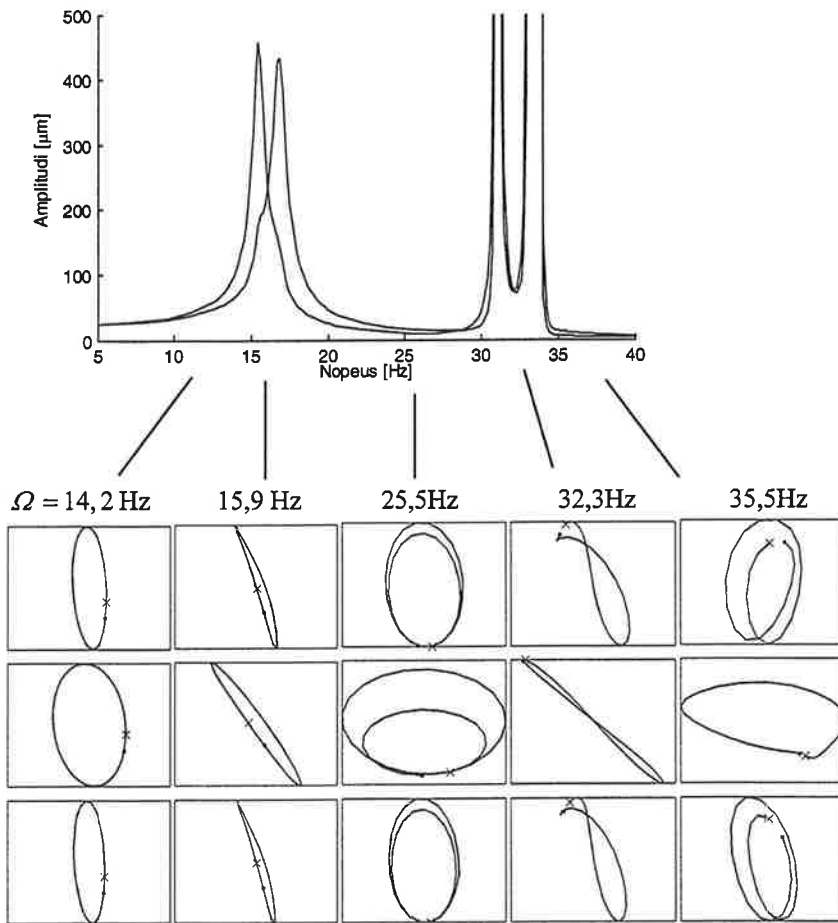
Tuennan ja roottorin epäsymmetrioiden yhteisvaikutus

Kuvassa 10 on esitetty tuennaltaan ja muodoltaan epäsymmetrisen roottorin vaste, kun kuormitus on muodostunut massaepätasapainosta ja painovoimasta. Kuvasta nähdään, että painovoima yhdessä muotoepäsymmetrian kanssa on aiheuttanut puolikriittisen resonanssin. Tuennan epäsymmetriasta johtuen on sekä puolikriittisiä että pääresonanssikohtia kaksi, pysty- ja vaakasuunnalle omansa. Roottorin muotoepäsymmetriasta johtuen on molempien suuntien pääresonansseissa myös pienet epästabiilit vyöhykkeet.

Kuvan 10 ratakäyristä nähdään, että roottorin kiepuntasuunta vaihtuu myös puolikriittisten resonanssikohtien välissä. Pääresonanssien välissä piirtää roottorin ratakäyrä kahdeksikon, eli kiepuntasuunnasta ei voida sanoa mitään. Itse asiassa ratakäyrää voidaan kuvata likimääräisesti yhtälöillä

$$\begin{aligned} X &= X_a \sin(\Omega t + \alpha) + X_m \sin(2\Omega t + \beta) \\ Y &= Y_a \sin(\Omega t + \delta) + Y_m \sin(2\Omega t + \gamma) \end{aligned} \quad (15)$$

missä X_a ja Y_a ovat massaepätasapainoon (alkukäyryteen) ja X_m ja Y_m muotoepäsymmetriaan liittyvät amplitudit. Roottorin ohitettua resonanssin, tulee vasteeseen aina 180° vaihe-ero kuormitukseen nähden. Kun X - ja Y -suuntaiset resonanssit ovat eri kohdissa, näkyy tämä roottorin liikkeessä taaksepäin kiepuntana. Tämä ilmiö näkyy yleensä sekä puolikriittisessä että pääresonanssissa. Jos värähtelyjen amplitudit X_a , X_m , Y_a ja Y_m ovat sopivat, ei selvää eteen- tai taaksepäin kiepuntaa ole havaittavissa. Selkeimmin kiepuntasuunnat liittyvätkin vasteeseen, jonka aiheuttaa pelkästään joko massaepätasapaino tai muotoepäsymmetria.



Kuva 10. Tuennan ja roottorin epäsymmetrioiden vaikutus. Vasemmanpuoleinen käyrä kuvaa Y -suunnan ja oikeanpuoleinen X -suunnan amplitudia. Ratakäyrissä sarakkeiden ylimmät kuvat ovat roottorin alkupäästä, keskimmäiset roottorin keskeltä ja alimmat roottorin loppupäästä. Ratakäyrissä on rastilla merkitty alkukohta, pisteellä loppukohta ja roottorin pyörimisnopeus on vastapäivään.

JOHTOPÄÄTÖKSET

Seuraavassa suoritetaan lyhyt yhteenveto eri epäideaalisuuksien vaikutuksesta vasteeseen.

Hyrräilmiöt

Roottorissa oleva hyrrävaikutus kytkee eri suuntien liikkeitä toisiinsa. Kun systeemiin tulee heräte X -koordinaatin suunnassa, voi se herättää myös Y -koordinaatin suuntaisen resonanssin. Pyörivän roottorin resonanssitaajuuksien kasvavat roottorin pyörimisnopeuden kasvaessa. Roottorin staattiseen jäykkyyteen ei pyöriminen kuitenkaan vaikuta, ja häviöttömän roottorin staattinen taipuma pysyy vakiona kovillakin pyörimisnopeuksilla, kunhan roottorin muodonmuutosaallon nopeus pysyy alle materiaalin äänennopeuden.

taipuma pysyy vakiona kovillakin pyörimisnopeuksilla, kunhan roottorin muodonmuutosaallon nopeus pysyy alle materiaalin äänennopeuden.

Tuennan jäykkyyden epäsymmetria

Tuennan jäykkyyden epäsymmetria aiheuttaa erisuuruiset resonanssitaajuudet pysty- ja vaakasuuntaisille värähtelyille. Tästä johtuen on roottorin kiepuntasuunta resonanssien välissä erisuuntainen kuin roottorin pyörimisnopeus. Vaikka tuennan epäsymmetria olisi pieni, levittäisi se käytännössä kuitenkin roottorin resonanssialuetta nopeustasossa ja vaikeuttaisi resonanssikohtien ylittämistä. Suurempi tuennan epäsymmetria voi vaikeuttaa erilaisten passiivisten värähtelyjen vaimentimien toimintaa merkittävästi resonanssialueen ollessa liian leveä.

Massaepätasapaino ja alkukäyryys

Roottorissa oleva massaepätasapaino tai alkukäyryys aiheuttaa herätevoiman, jonka taajuus on sama kuin roottorin pyörimisnopeus. Epätasapainon suuruuden lisäksi vaikuttaa resonanssin voimakkuuteen alkukäyryyden muoto. Eri muotoiset alkukäyryydet herättävät eri ominaismuotoja eri tavalla. Tätä ominaisuutta voidaan käyttää hyväksi tasapainotettaessa roottoria. Jos esimerkiksi roottoria pyöritetään ensimmäisen ominaistaajuuden alapuolella, voidaan tasapainotusmassat asentaa siten, että roottori on tasapainossa ensimmäiseen, mutta ei välttämättä toiseen ominaismuotoon nähden.

Muotoepäsymmetria

Roottorin muotoepäsymmetria aiheuttaa sen, että itse roottori joustaa eri suuntiin eri tavalla. Tästä aiheutuu herätevoima, jonka taajuus on kaksinkertainen roottorin pyörimisnopeuteen nähden. Muotoepäsymmetriasta aiheutuvaa resonanssia kutsutaankin puolikriittiseksi resonanssiksi, koska se esiintyy pyörimisnopeudella, joka on puolet roottorin ominaistaajuudesta. Herätevoima aiheutuu roottorin muotoepäsymmetrian ja painovoiman yhteisvaikutuksesta. Ilman painovoiman vaikutusta ei roottorin puolikriittistä resonanssia esiinny. Tätä voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi paperikoneessa valitsemalla viiran tai huovan aiheuttaman kiristysvoiman resultantti vastakkaiseksi painovoimaan nähden. Roottorin muotoepäsymmetria ja painovoima aiheuttavat herätevoimajakautuman, joka on yleensä varsin symmetrinen roottorin keskipisteeseen nähden. Tästä johtuen ei muotoepäsymmetria painovoiman kanssa jaksa helposti herättää parittomia ominaismuotoja.

Roottorin muotoepäsymmetria aiheuttaa epästabiilin alueen pääresonanssin ympärille. Epästabiiliusalue on roottorin epäsymmetriasta aiheutuvien kahden vierekkäisen ominaistaajuuden välissä. Jos roottori on tuettu epäsymmetrisesti, voi epästabiileja alueita olla kaksi. Käytännössä ei epästabiiliusaluetta yleensä huomata, sillä roottorin muotoepäsymmetria saadaan yleensä varsin pieneksi ja ulkoisen vaimennuksenkin on havaittu kaventavan tätä aluetta. Kuitenkin voidaan todeta, että roottorin muotoepäsymmetrialla on myös vaikutusta roottorin vasteeseen pääresonanssin kohdalla.

Sisäinen ja ulkoinen vaimennus

Roottorin materiaalista aiheutuva sisäinen vaimennus stabiloi roottoria pyörimisnopeuden ollessa ensimmäisen ominaistaajuuden alapuolella. Tämän jälkeen vaikuttaa roottorin sisäinen vaimennus epästabiiloivasti. Roottorin ulkoinen vaimennus nostaa tätä epästabiiliusrajaa ja mahdollistaa roottorin pyörimisen ensimmäisen ominaistaajuuden yläpuolella. Epästabiiloiva vaikutus tulee siitä, että roottorin sisäinen vaimennus aiheuttaa pyörivään roottoriin poikittaissuuntaisen voiman (ns. *follower force*). Roottorin ulkoinen vaimennus stabiloi roottoria kaikilla pyörimisnopeuksilla ja nostaa roottorin sisäisestä vaimennuksesta aiheutuvaa epästabiiliusrajaa. Suuren ulkoisen vaimennuksen on myös havaittu kaventavan muotoepäsymmetrian aiheuttamaa epästabiilius- aluetta.

VIIITEET

- [1] R. von Herten and M. Jorkama, On the Modal Analysis of Rotating Asymmetric Rayleigh Beams. *Proceedings of 13th International Modal Analysis Conference*, Vol. II, 1362-1367, Nashville, Tennessee, February 13-16, 1995.
- [2] J. Toiva, R. von Herten, M. Orth, J. Sopanen, P. Hannukainen and M. Jussila, Rotordynamic Analysis of Rolling Cylinder - Comparison of Results of Three Different Programs, *VTT Industrial Systems*, Espoo, 2003-02-28. Research Report BTUO58-031128, 39p.
- [3] J. Toiva ja R. von Herten, Roottorin vaimennuksen mallintaminen ja simulointiohjelman verifiointi. *Tutkimusraportti, VÄRE-teknologiaohjelma*, Teknillinen korkeakoulu, 2001, 22 s.
- [4] J. Melanson and J. W. Zu, Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions. *Journal of Vibration and Acoustics*, Transactions of the ASME, 120:776-783, July 1998.
- [5] H. L. Wettergren and K.-O. Olsson, Dynamic instability of a rotating asymmetric shaft with internal viscous damping supported in anisotropic bearings. *Journal of Sound and Vibration* 195(1):75-84, 1996.
- [6] Y. W. Lee, *Vibration Analysis of Rotors*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [7] C. Rajalingham, R. B. Bhat and G. D. Xistris, Influence of external damping on the stability and response of a horizontal rotor with anisotropic bending stiffness. *Tribology Transactions* 36(3):393-398, 1993.

BEHAVIOUR OF LINEAR AND NONLINEAR TWO-EQUATION TURBULENCE MODELS NEAR INTERFACES OF TURBULENT AND LAMINAR FLOW

A. HELLSTEN

Helsinki University of Technology – Laboratory of Aerodynamics
P.O.Box 4400, FIN-02015 HUT
e-mail: Antti.Hellsten@hut.fi

ABSTRACT

A theoretical analysis on the behaviour of two-equation $k - \omega$ turbulence models near interfaces of laminar and turbulent flow is conducted. The main focus is in the $k - \omega$ models equipped with a nonlinear constitutive relation. This kind of models have shown anomalous behaviour near such interfaces. The reason for the anomalous behaviour is revealed by the theoretical analysis. Furthermore, the analysis provides constraints for the model calibration in order to ensure proper behaviour in the interface regions. The existing $k - \omega$ models are critically reviewed in the light of the obtained theoretical results. It is shown that many of the existing $k - \omega$ models are unsuitable to be combined with nonlinear constitutive models.

1 INTRODUCTION

The computational fluid dynamics (CFD) is still largely based on the numerical solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. This is because turbulence is a major obstacle in the way towards the direct simulation of flows with moderate or high Reynolds numbers. Turbulence is random motion of fluids typically characterised by a wide spectrum of scales. From the mathematical point of view, the strong non-linearity of the Navier-Stokes equations allows this kind of random, or chaotic-like behaviour. Although the turbulent motion is random by nature, it is statistically deterministic, or even stationary. This makes it possible to filter the turbulent motion from the equations and to attempt to model its effects on the filtered mean-flow equations. Nowadays, the most popular class of turbulence models is the class of two-equation models. Such models can be considered to consist of a scale-determining model and of a constitutive model. The former provides two scalar quantities that characterise the turbulence, and the latter one mainly relates the turbulent stress-tensor with the mean-flow deformation tensors and the turbulent scales.

The turbulence modelling presently employed in practical CFD simulations is usually based on two-equation scale-determining models and a linear constitutive model for the Reynolds stress tensor. This is known as the generalized Boussinesq model, and it assumes a linear dependency between the turbulent stress and the mean strain-rate tensors. This may be a too restricting assumption in complex flow problems typical in engineering work, because a multitude of different flow phenomena may be present in a single problem. Therefore, turbulence modelling with a wider range of applicability than the Boussinesq-models

must be looked for. Differential Reynolds stress modelling (RSM), in which a modelled transport equation is solved for each stress component, is in principle a more general class of models with a wider range of applicability. RSMs are, however, considered as a too complex approach for the industrial engineering work. On the other hand, the two-equation models can be extended for a wider range of applicability by developing more advanced nonlinear constitutive modelling. Explicit algebraic Reynolds stress models (EARSMS) are an interesting subset of nonlinear models. In this approach, part of the higher-order description of physical processes in the RSM-level is transferred into the two-equation modelling level. The EARSMS approach is considered to be a suitable type of constitutive modelling for many engineering purposes.

Most of the existing two-equation scale-determining models are designed in conjunction with the linear constitutive modelling. This fact may compromise the performance of the model when combined with an EARSMS or another nonlinear constitutive model. This work focuses on the $k - \omega$ type scale-determining models because they have some very favourable features in comparison with the other forms of scale-determining models. The analysis can be applied to the other model types as well. The $k - \omega$ models predict adverse pressure-gradient boundary layers much more accurately than most of the other types of models. Furthermore, they can be integrated down to the wall without any near-wall modifications. Owing to these reasons, the $k - \omega$ models have become popular especially in the aerodynamics community. The $k - \omega$ models have, however, suffered from poor or even anomalous, behaviour near interfaces of turbulent and laminar flow, *i.e.* near the outer edges of turbulent flow regions. The anomalous free-stream sensitivity of some $k - \omega$ models is one consequence of this [1]. On the other hand, some $k - \omega$ models predict unphysically sharp outer edges for turbulent regions. Cazalbou *et al.* first presented theoretical analysis on the edge behaviour of two-equation models [2]. They also deduced constraints for the model coefficients to ensure proper behaviour in the edge region. Cazalbou *et al.* focused on linear $k - \varepsilon$ models. Later Kok applied Cazalbou's analysis to the linear $k - \omega$ models [3]. There are no published efforts to extend this kind of analysis to models employing nonlinear constitutive models.

The edge behaviour may become a significantly more severe problem when a nonlinear constitutive model is combined with a $k - \omega$ model. The aim of this study is to find a theoretical explanation to this phenomenon, and furthermore, to deduce theoretical constraints and guidelines for the model calibration also for nonlinear models in order to ensure proper behaviour in the edge region.

2 THE FAMILY OF $k - \omega$ MODELS

This study focuses on the $k - \omega$ models, although the theory can be applied to other forms of two-equation turbulence models as well. The scale-determining part of almost all of the $k - \omega$ models proposed in the literature can be written as

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \\ \frac{D\omega}{Dt} &= \frac{\omega}{k} (C_{\omega 1} P - C_{\omega 2} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + \sigma_d \frac{\nu_T}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \\ \nu_T &= C_\mu k / \omega, \quad P = -\overline{u'_i u'_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}, \quad \text{and} \quad \varepsilon = k\omega \end{aligned} \quad (1)$$

Thus the variables to be solved are the kinetic energy of turbulence k and its specific dissipation rate ω , *i.e.* the dissipation rate ε divided by k . Note that here ω is defined

simply as $\omega \equiv \varepsilon/k$ instead of the more usual definition $\omega \equiv \varepsilon/(0.09k)$. This only influences the values of some of the model coefficients. The quantity ν_T is known as the eddy viscosity, P is the production rate of k , and $\overline{u'_i u'_j}$ is the Reynolds stress tensor. Note that k is defined as half of the trace of the Reynolds stress tensor. Several values have been proposed for the model coefficients $C_{\omega 1}$, $C_{\omega 2}$, σ_k , σ_ω , and σ_d . The diffusion coefficients (σ_k , σ_ω , and σ_d) have an important role near the edges of turbulent regions. Most of the diffusion-coefficient values proposed in the literature will be critically reviewed in section 6 in the light of the theoretical results to be presented.

It is convenient to express the constitutive model using the nondimensional Reynolds-stress anisotropy tensor defined as

$$a_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (2)$$

Using a_{ij} , the constitutive model may be formally written as

$$\overline{u'_i u'_j} = k \left(\frac{2}{3} \delta_{ij} + a_{ij} \right) = k \left(-2C_\mu S_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} + a_{ij}^{\text{ex}} \right) \quad (3)$$

$$a_{ij} = a_{ij}(S_{ij}, \Omega_{ij}) = \sum_{p=1}^n \beta_p T_{ij}^{(p)} \quad (4)$$

$$\beta_p = \beta_p(S_{kl} S_{kl}, \Omega_{kl} \Omega_{kl}, \dots) \quad (5)$$

The n tensor groups $T_{ij}^{(p)}$ are different outer products of nondimensionalized strain-rate and vorticity tensors S_{ij} and Ω_{ij} , respectively. These groups form the representation basis for a_{ij} , and the β_p -coefficients depend on the scalar invariants of these tensors. Note that $C_\mu = -\beta_1/2$. The number n of independent tensor groups is limited to ten in this case. All higher-order groups can be reduced with the aid of the generalized Cayley-Hamilton theorem to linear combinations of the ten groups that form the integrity basis for a_{ij} .

In (3), a_{ij}^{ex} stands for the anisotropy expression (4) less its leading term $-2C_\mu S_{ij}$. This is a feasible expression because the leading term corresponds to the linear model as such. Thus, in the traditional linear constitutive modelling, $a_{ij}^{\text{ex}} = 0$, and C_μ is typically constant. Nonlinear constitutive models, such as EARSMs involve also a_{ij}^{ex} and C_μ depends on the mean strain-rate and vorticity. The nondimensionalized strain-rate and vorticity tensors, *i.e.* the symmetric and skew-symmetric parts of the mean-velocity gradient scaled by the turbulent time scale are defined as

$$S_{ij} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{and} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

3 THE IDEALIZED EDGE PROBLEM

The behaviour of two-equation turbulence models on the edge regions between turbulent and laminar flows can be understood with the aid of the analysis first deduced by Cazalbou *et al.* [2]. Furthermore, this approach provides constraints for the diffusion coefficients. A model that satisfies these constraints behaves properly around the outer edges of turbulent regions and does not show anomalous sensitivity to the free-stream values as some $k - \omega$ models do, see [1].

Cazalbou *et al.* assumed that the turbulent transport (modelled as turbulent diffusion) balances the transport by mean flow, while the production and destruction terms and also the molecular viscosity are negligible on the outer edges of turbulent shear layers. This

means that the model equations reduce to a non-linear convection-diffusion problem locally in such regions. Moreover, one-dimensionality must be assumed in order to be able to find an analytical solution. The practical problems are multi-dimensional, of course, even locally in the edge zone. However, the velocity gradient as well as the gradients of the turbulent scales are often quite well aligned with the edge-normal direction especially in thin shear flows that are in an equilibrium state, *e.g.* equilibrium boundary layers, far wakes, etc. The simplified one-dimensional problem is considered to be physically relevant for such situations. The exact conditions for the physical validity of the one-dimensional problem are that the molecular viscosity is negligibly small ($Re \rightarrow \infty$), and both the mean-flow transport and turbulent transport are aligned with the edge-normal direction, and that the entrainment velocity

$$U_e \sin \left(\frac{d\delta}{dx} \right) - V_e \cos \left(\frac{d\delta}{dx} \right) \approx U_e \frac{d\delta}{dx} - V_e \quad (7)$$

is constant along the edge. In (7), $d\delta/dx$ denotes the streamwise rate at which the turbulent layer penetrates into the surrounding flow, or which is equivalent, the angle between the edge and the velocity of the free flow. This angle is usually quite small, and hence the simplified form of (7) is often adequate. In practice, the entrainment velocity is seldom constant along the edge, but it often varies relatively slowly. After all, it is assumed that the behaviour of the original equation system can be understood by studying a simplified one-dimensional non-linear convection-diffusion problem. The dominance of the transport terms over the production and dissipation will be checked after the solution is found. Cazalbou *et al.* presented the solution for the $k - \varepsilon$ models, and later Kok [3] carried out the corresponding analysis for $k - \omega$ models of the form of (1) including the cross-diffusion term.

Near the edge, the mean-momentum equation and the $k - \omega$ model equations reduce to

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \frac{dU}{dy} &= \frac{d}{dy} \left(\nu_T \frac{dU}{dy} \right) \\ \mathcal{V} \frac{dk}{dy} &= \frac{d}{dy} \left(\sigma_k \nu_T \frac{dk}{dy} \right) \\ \mathcal{V} \frac{d\omega}{dy} &= \frac{d}{dy} \left(\sigma_\omega \nu_T \frac{d\omega}{dy} \right) + \sigma_d \frac{\nu_T}{k} \frac{dk}{dy} \frac{d\omega}{dy} \end{aligned} \quad (8)$$

The convective velocity $\mathcal{V}$ may be associated with the entrainment velocity (7) of some real flow problem. All the variables U , k , and ω are defined as positive quantities that go to zero on the edge. Thus U can be considered either as a velocity defect of a wake-like flow or a velocity excess of a jet-like flow. Cazalbou *et al.* and Kok formulated the problem in a moving coordinate frame to make $\mathcal{V}$ zero. In such a frame, the problem takes the form of an unsteady non-linear diffusion problem. The present system of equations (8), which is written in a stationary frame, is obtained from Kok's equations, or vice versa, by a simple Galilean transformation.

4 SOLUTION OF LINEAR MODELS

Kok found that the following ramp-like functions form at least a weak solution to (8) if σ_k , σ_ω , and σ_d are suitably selected [3]:

$$\begin{aligned} U(y) &= U_0 f^{\sigma_k \sigma_\omega / (\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} \\ k(y) &= k_0 f^{\sigma_\omega / (\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} \\ \omega(y) &= \omega_0 f^{(\sigma_k - \sigma_d) / (\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$f = \max \left(\frac{\delta_0 - y}{\delta_0}; 0 \right) \quad (10)$$

Here, U_0 , k_0 , ω_0 , and δ_0 are the characteristic scales of the problem, and the convective velocity becomes

$$\mathcal{V} = - \frac{\sigma_k \sigma_\omega}{\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d} \frac{C_\mu k_0}{\omega_0 \delta_0} \quad (11)$$

Depending on the values of the diffusion coefficients, it may happen that equations (9) are not differentiable enough at $y = \delta_0$ to form a rigorous solution of (8). In such a case, equations (9) can be considered as a weak solution. For proof, see ref. [2].

Now, constraints can be derived from the requirements that (9) must be non-singular to form at least a weak solution of the problem, and that the slope of the velocity remains bounded at the edge:

$$\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d > 0 \quad (12)$$

$$\sigma_k - \sigma_d > 0 \quad (13)$$

$$\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d \leq \sigma_k \sigma_\omega \quad (14)$$

If smooth edge is required from the solution, then " $\leq$ " must be replaced by " $<$ " in (14). To ensure that diffusion really dominates over production and dissipation, we have to require the exponent of f in the production and dissipation terms to be larger than that in the diffusion term. These terms of the k -equation can be written as

$$\frac{d}{dy} \left(\sigma_k \nu_T \frac{dk}{dy} \right) \sim f^{(\sigma_k - \sigma_d)/(\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} \quad (15)$$

$$P = \nu_T \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \sim f^{[(2\sigma_k - 1)\sigma_\omega + \sigma_k - \sigma_d]/(\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} \quad (16)$$

$$\varepsilon = k\omega \sim f^{(\sigma_\omega + \sigma_k - \sigma_d)/(\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} \quad (17)$$

thus the above requirement is satisfied when

$$\sigma_k > 0.5 \quad \text{and} \quad \sigma_\omega > 0 \quad (18)$$

Also the source and sink terms of the ω -equation must go to zero more rapidly than its diffusion and cross terms. It is straightforward to show that this is also ensured by satisfying (18).

5 AN IDEALIZED EXTENSION FOR NONLINEAR MODELS

The validity of the above analysis and the applicability of the constraints (12) – (14) and (18) to models utilizing nonlinear constitutive relations, such as EARSMS, is not obvious. This is because the solution (9) is only valid for models based on the Boussinesq approximation with constant C_μ . Fortunately, the contribution of the higher-order terms ($a_{ij}^{(2)}$) to the principal shear stress in the momentum equation is negligible near the outer edges of shear layers. The present modelling of the diffusive terms of k and ω is also independent of the higher-order terms. Thus, the only difference that actually must be considered is the fact that C_μ is variable in nonlinear constitutive modelling.

In the following, the analysis is extended for variable C_μ assuming that C_μ is of a similar power form as the solutions of U , k , and ω . A condition that solutions of power form exist

is that $\nu_T \sim f$. Since $\nu_T = C_\mu k/\omega$, k/ω must be proportional to f^{1-m} if $C_\mu \sim f^m$. With these assumptions, it is straightforward to show that

$$\begin{aligned} U(y) &= U_0 f^{\sigma_k \sigma_\omega (1-m)/(\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} = U_0 f^{n_u} \\ k(y) &= k_0 f^{\sigma_\omega (1-m)/(\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} = k_0 f^{n_k} \\ \omega(y) &= \omega_0 f^{(\sigma_k - \sigma_d)(1-m)/(\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} = \omega_0 f^{n_\omega} \end{aligned} \quad (19)$$

satisfy the system (8) if $m < 1$. It is immediately seen that if C_μ decreases towards the edge as with $0 < m < 1$, the edges in the solutions become sharper. This may well lead to a situation where the velocity exponent n_u , originally larger than one with constant C_μ , now becomes less than one. The edge will be perfectly sharp with dU/dy being indefinite always when $n_u \leq 1$. This is an unphysical situation and may also cause numerical troubles. In practise, the numerical dissipation and the molecular viscosity may alleviate the situation to some extent, but also the numerical solutions will be qualitatively wrong at least when $n_u < 1$. If C_μ increases towards the edge as with $m < 0$, the exponents increase and the solution around the edge just becomes smoother. This has no severe consequences since the Reynolds averaged distributions around the shear-layer edges are smooth in reality. Now, knowing that C_μ distributions decreasing towards the edge may spoil the solution even qualitatively, this kind of situations must be avoided. So, the question is: in which circumstances could C_μ decrease towards the edge? In the nonlinear constitutive models C_μ is typically approximately inversely proportional to the nondimensional strain parameter S when S is not small. Therefore S increasing towards the edge may be an unfavourable situation. Now, S is given by

$$S = \frac{1}{\omega} \frac{dU}{dy} \sim f^{[\sigma_k \sigma_\omega (1-m) + (\sigma_k - \sigma_d)m - \sigma_\omega]/(\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d)} \quad (20)$$

Thus, increase of this parameter towards the edge makes C_μ to drop, respectively. It is now easily seen that dU/dy should decrease at a rate equal to that of ω or larger than it. This is the case only if the exponent in (20) is non-negative. Hence, a new condition

$$\sigma_k \geq \frac{\sigma_\omega + m\sigma_d}{\sigma_\omega + m(1 - \sigma_\omega)} \quad (21)$$

is obtained. It was already seen that positive values of m are potentially unfavourable. In the case of $m = 0$, this constraint reduces to $\sigma_k \geq 1$. In practice, it may be safer to require

$$\sigma_k > 1 \quad (22)$$

This constraint was actually first derived by Beazard [4] very recently when he studied the ratio of production to dissipation based on the solution (9) valid for constant C_μ . In the case of $m < 1$, constraint (21) becomes less restrictive if $\sigma_d > 1 - \sigma_\omega$. This, in turn, happens to always be the case if (12) is satisfied and if $\sigma_k > 1$. Hence, it is sufficient simply to apply (22), and thus the former constraint in (18) must be replaced by (22). The constraints (12) and (13) remain unchanged, but the constraint (14) becomes passive if (13) and (22) are satisfied. In other words, (22) guarantees the edge-smoothness without (14). The latter of (18) now becomes

$$\sigma_\omega > m(\sigma_k - \sigma_d) \quad (23)$$

This constraint is of little importance when m is zero or negative as desired. Finally, all active diffusion-coefficient constraints, relevant in the nonlinear level of $k - \omega$ modelling,

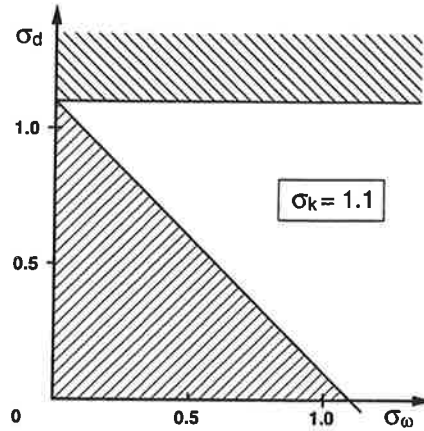


Figure 1: Constrained $(\sigma_\omega, \sigma_d)$ -space when $\sigma_k = 1.1$, see Eqs. (24) – (26).

are collected together as follows

$$\sigma_\omega - \sigma_k + \sigma_d > 0 \quad (24)$$

$$\sigma_k - \sigma_d > 0 \quad (25)$$

$$\sigma_k > 1 \quad (26)$$

These constraints are illustrated in Fig. 1 for the case $\sigma_k = 1.1$.

It was assumed above that C_μ follows a power function f^m near the edge. Whether this is the case in reality or not depends, of course, on the details of the constitutive model. In case of the Wallin-Johansson EARSIM [5] used here, the dependency between C_μ and S is not that simple. However, at large values of S , C_μ is approximately proportional to S^{-p} with $p \approx 1$. Knowing that $S \sim f^{n_u-1-n_\omega}$, we obtain $m = 1$ in this case if $p = 1$. This means a Heaviside-step solution, which is not sensible. Slightly different values of p lead to smaller values of m depending on the values of the diffusion coefficients. In reality, C_μ is not likely to exactly follow any power law. To learn more about this, numerical studies of a zero pressure-gradient boundary layer are made with three different models: Kok's original linear $k - \omega$ TNT model [3], Kok's model combined with the EARSIM, and a generic model (EARSIM) having diffusion coefficients $\sigma_k = 1.1$, $\sigma_\omega = 0.8$, and $\sigma_d = 0.74$, which produce $n_u = 2(1 - m)$. Kok's model is designed to satisfy the constraints (12) – (14) and (18), but not the constraint (26) as it is a linear Boussinesq-model. More specifically, it features $\sigma_k = 2/3$, and $\sigma_\omega = \sigma_d = 1/2$, and thus $n_u = 1 - m$. As seen in figure 2, it produces an anomalous hook-shaped solution for U on the edge when combined with the EARSIM. This is because it predicts S to rapidly increase and thus C_μ to drop near the edge so that $0 < m < 1$. Kok's original linear model gives a sharp edged solution as its $n_u = 1$. The generic model gives a healthy solution with $n_u = 2(1 - m)$ and $m \approx 0$. It turns out that the hook-like solution follows fairly well a power solution with $n_u = 0.7$ or, which is equivalent, $m = 0.3$, although C_μ seems not to follow the 0.3-power function, according to the numerical result. It even does not go to zero on the edge unlike the assumed power-form. It must be kept in mind that the numerical solution for C_μ is, of course, extremely sensitive to the numerical details, since S has a singularity on the edge. However, the point here is that C_μ makes a sudden dive near the edge because ω vanishes more rapidly than the velocity gradient, and thus S becomes very high. It can be concluded that the above theory based on the solution (19) is at least qualitatively valid, although C_μ does not necessarily follow any power function according to the present EARSIM. The present theory is valid

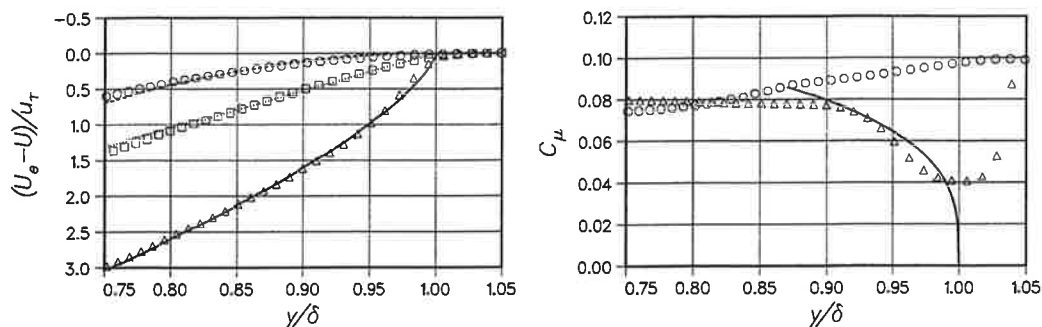


Figure 2: Left: numerical solutions of a boundary layer (symbols), and analytical solutions (19) of the idealized edge problem (curves) using different models: Kok's original model with constant C_μ where $n_u = 1$ (squares and dotted curve), Kok's model combined with the EARSM where $n_u = 1 - m$ and $m \approx 0.3$ (triangles and solid curve), and a generic model with the EARSM where $n_u = 2(1 - m)$ and $m \approx 0$ (circles and dashed curve). Right: computed C_μ distributions and a 3/10-power curve.

when simple scalar-diffusivity gradient model is used for the diffusive terms. Possibilities to extend the analysis for higher-order modelling of diffusive terms will be studied in the future work.

The numerical solutions shown in figure 2 are obtained by solving the self-similar equilibrium outer boundary-layer equations, see *e.g.* ref. [6]. The results have been verified by computing also full Navier-Stokes solutions which feature the same phenomena. This verifies also the analysis based on the simplified system of ordinary differential equations (8).

6 A REVIEW ON THE EXISTING $k - \omega$ MODELS

Some existing $k - \omega$ models of the form (1) are reviewed in this section. Possibilities to combine them with a nonlinear constitutive model are studied in the light of the results derived in section 5. The models to be discussed are: Wilcox's model from 1988 [7] and its more recent version from 1998 [6], Menter's BSL and SST models [8], two versions of Abid *et al.* model [9, 10, 11], high Reynolds-number asymptote of Peng's model [12], and finally Kok's TNT model [3], which has already been studied in the previous section. The coefficients of the models to be discussed are summarized in table 1.

6.1 Wilcox's models

Wilcox's models do not satisfy (12) and thus the power solutions are not valid. In these models $\sigma_k = \sigma_\omega$ and $\sigma_d = 0$. Such a choice of the diffusion coefficients allows solutions with constant ν_T , because k and ω decrease at the same rate (exponential decay) around the edge. This is an unfavourable situation, since the k and ω values outside the turbulent region (the free-stream values) strongly influence the solution, see ref. [1]. This kind of situation can be avoided by satisfying the constraints (24) – (26) or at least the constraints (12) – (14) and (18) in case of linear constitutive modelling. Neither of Wilcox's model versions is suitable to be combined with the EARSM, except if only fully turbulent internal flows are to be simulated. This is because they do not satisfy the constraint (22). Although the presented analysis is not valid for Wilcox's models, numerical tests have shown that the velocity profile gets a similar hook shape as seen in figure 2.

Table 1: The model coefficients of some of the existing $k - \omega$ models.

	$C_{\omega 1}$	$C_{\omega 2}$	σ_k	σ_ω	σ_d
Wilcox 1988	0.556	0.833	0.5	0.5	0.0
Wilcox 1998	0.52	0.8	0.5	0.5	0.0
Menter BSL Set 1 (inner)	0.553	0.833	0.5	0.5	0.0
Menter BSL Set 2 (outer)	0.44	0.92	1.0	0.856	1.712
Menter SST Set 1 (inner)	0.553	0.833	0.85	0.5	0.0
Menter SST Set 2 (outer)	0.44	0.92	1.0	0.856	1.712
Abid <i>et al.</i>	0.547	0.83	0.714	0.5	0.0
Abid <i>et al.</i> mod. by Gatski	0.561	0.83	0.714	0.454	0.0
Peng (high- Re asymptote)	0.42	0.833	1.25	0.741	0.75
Kok	0.556	0.833	0.667	0.5	0.5

6.2 Menter's models

Menter's $k - \omega$ SST model [8] is nowadays one of the most popular turbulence models in aeronautical CFD work as well as in other areas of aerodynamics. Menter eliminated the poor edge-behaviour of Wilcox's model by combining it (the 1988 version) with the Jones-Launder $k - \varepsilon$ model [13] in such a way that the latter is effective around the edges of boundary layers and also in free turbulent flows. This is achieved by transforming the $k - \varepsilon$ model into the $k - \omega$ form and switching between the two models using a specific blending function. Therefore, the model features two sets of model coefficients, from which only the outer values are active around the edges of turbulent regions. However, both coefficient sets are given in table 1. The resulting model version that employs constant C_μ is known as the BSL $k - \omega$ model. The final version, known as the $k - \omega$ SST model, is actually a step forward from the classical Boussinesq modelling, because the coefficient C_μ is strain-dependent. Menter's models do not satisfy (25), thus the analysis is not valid. Therefore, the behaviour of these models must be assessed based only on the numerical experience. The BSL $k - \omega$ model has later been furnished with the EARSIM as a constitutive model, see *e.g.* refs. [14, 15, 16, 17]. The resulting model behaves quite much like the SST model, but there are also some differences. One salient difference is that the velocity profile in the defect layer of a zero pressure-gradient boundary layer has a qualitatively wrong shape. The second derivative of U with respect to y has locally wrong sign in the outer layer. Menter's models, both the original models and the EARSIM versions predict unphysically sharp edges similarly as Kok's TNT model. However, the EARSIM-version of Menter's model does not give hook-like edge-solutions probably because $\sigma_k = 1$.

6.3 Abid-Rumsey-Gatski model

Abid, Rumsey, and Gatski [9] combined the Gatski-Speziale EARSIM [18] with a $k - \omega$ model that is closely related to the Wilcox 1988 model [7]. In comparison with Wilcox's original model, they elevated the value of σ_k from 0.5 to 0.714, see table 1. This model was later slightly modified by Gatski [10, 11], see table 1. The value of σ_k is still too low to satisfy the constraint (26). Note that these models employ a so-called equilibrium eddy-viscosity in the model for turbulent transport (diffusion). In other words, a constant $C_\mu = 0.088$ is used in those terms. The hook-shaped edge profile seems to be avoided this way. However, no analytical solution of power form can be found if C_μ is variable in this case. If the C_μ

given by the EARSIM is used in these terms, the hook-anomaly will arise. This has been verified by numerical computations where the Wallin-Johansson EARSIM was used instead of the Gatski-Speziale EARSIM. Using the variable C_μ in modelling all the diffusive terms seems more logical than using different diffusivities. This is also recommended by Wallin and Johansson [5]. More recently, Rumsey and Gatski [19] again modified the model by changing σ_k back to 0.5 and by multiplying the dissipation term of the k -equation by a function f_{β^*} adopted from Wilcox's 1998 model [6]. These modifications make the model essentially similar to Wilcox's 1998 model. Again, constant C_μ was used in the diffusive terms of the equations of k and ω in order to avoid the hook-like edge profiles.

6.4 Peng's model

Unlike the other models in this review, Peng's model [12] is a low-Reynolds number model. Its high Reynolds-number asymptote differs from all other $k - \omega$ models. The diffusion coefficients of this model have values quite different from Wilcox's models. Most importantly, $\sigma_k = 1.25$ which satisfies the constraint (26). It satisfies also the other constraints (24) - (26), thus its edge behaviour should be good also when combined with the EARSIM.

6.5 Kok's TNT model

Kok's $k - \omega$ TNT model [3] has already been assessed and shown to satisfy the constraints (12) - (14) and (18), but not the constraint (26). It was shown by analytical and by numerical means as unsuitable to be combined with nonlinear constitutive models. The original model with constant C_μ gives sharp-edged solutions as Menter's models. This may be somewhat unfavourable.

7 CONCLUSIONS

The behaviour of the family of two-equation $k - \omega$ turbulence models near the interfaces of turbulent and laminar flow regions (free-stream edges) have been studied in depth. Particular attention was paid to the scale determining models combined with nonlinear constitutive models. The simplified problem [2, 3] modelling the edge region was presented in a stationary coordinate system. The solution found by Kok [3] valid for linear constitutive modelling was revisited. An extended solution valid also for nonlinear constitutive models is presented assuming that C_μ follows a power function around the edge. The extended solution provides a new constraint for the diffusion coefficient of turbulent kinetic energy, $\sigma_k > 1$, to avoid unphysical edge-solutions. Most of the existing $k - \omega$ models are critically reviewed in the light of the obtained theoretical results. Many of them are shown to be unsuitable to be combined with nonlinear constitutive models.

8 ACKNOWLEDGEMENTS

This work has partly been carried out within the HiAer Project (High Level Modelling of High Lift Aerodynamics). The HiAer project is a collaboration between DLR, ONERA, Royal Institute of Technology in Sweden, Helsinki University of Technology (HUT), Technical University of Berlin, Alenia, European Aeronautic Defence and Space Company EADS Airbus, QinetiQ and Swedish Defence Research Agency (FOI). The project is managed by FOI and is partly funded by the European Union (Project Ref: G4RD-CT-2001-00448). This work is also supported by the Finnish Technology Agency (TEKES). The support from TEKES for this research is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] F.R. Menter. Influence of freestream values on $k - \omega$ turbulence model predictions. *AIAA Journal*, 30(6):1657–1659, 1991.
- [2] J.B. Cazalbou, P.R. Spalart, and P. Bradshaw. On the behavior of the two-equation models at the edge of a turbulent region. *Physics of Fluids*, 6:1797–1804, 1994.
- [3] J.C. Kok. Resolving the dependence on freestream values for the $k - \omega$ turbulence model. *AIAA Journal*, 38(7):1292–1295, 2000.
- [4] R. Ashworth, H. Bézard, A. Hellsten, M. Schatz, and Thiele F. The length-scale equation and near-wall modelling in EARSM. HiAer project report D2.2-1, 2002. Unpublished.
- [5] S. Wallin and A. Johansson. A complete explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 403:89–132, 2000.
- [6] D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries Inc., La Cañada, California, second edition, 1998.
- [7] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, 1988.
- [8] F.R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [9] R. Abid, C. Rumsey, and T.B. Gatski. Prediction of nonequilibrium turbulent flows with explicit algebraic stress models. *AIAA Journal*, 33(11):2026–2031, 1995.
- [10] T.B. Gatski. Prediction of airfoil characteristics with higher order turbulence models. Technical Report TM-110246, NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1996.
- [11] C.L. Rumsey, T.B. Gatski, S.X. Ying, and A. Bertelrud. Prediction of high-lift flows using turbulent closure models. *AIAA Journal*, 36(5):765–774, 1998.
- [12] S.-H. Peng, Davidson L., and Holmberg S. A modified low-Reynolds number $k - \omega$ model for recirculating flows. *Journal of Fluids Engineering*, 119:867–875, Dec. 1997.
- [13] W.P. Jones and B.E. Launder. The calculation of low-Reynolds-number-phenomena with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16:1119–1130, 1973.
- [14] M.B. Malone. Extension of a $k - \omega$ two-equation turbulence model to an algebraic Reynolds stress model. In *29th AIAA Fluid Dynamics Conference*. AIAA paper 98–2552, AIAA, 1998.
- [15] A. Hellsten and P. Rautahaimo, editors. *8th ERCOFTAC/IAHR/COST workshop on refined turbulence modelling*, Laboratory of Applied Thermodynamics, Report 127, Espoo, Finland, 1999. ISBN 951–22–4772–0.
- [16] L. Lorentzen and I.A.A. Lindblad. Application of two-equation and EARSM turbulence models to high-lift aerodynamics. In *17th AIAA Applied Aerodynamics Conference*. AIAA, 1999. AIAA paper 99–3181.

- [17] A. Hellsten and S. Laine. Explicit algebraic Reynolds-stress modelling in decelerating and separating flows. In *AIAA Fluids 2000*. AIAA, 2000. AIAA paper 2000-2313.
- [18] T.B. Gatski and C.G. Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 254:59-78, 1993.
- [19] C. L. Rumsey and T.B. Gatski. Recent turbulence model advances applied to multi-element airfoil computations. *Journal of Aircraft*, 38(5):904-910, 2001.

DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT CHANNEL FLOW USING FINITE DIFFERENCE SCHEME

T. BRANDT

Laboratory of Aerodynamics, HUT
P.O. Box 4400, FIN-02015 Espoo
e-mail: Tellervo.Brandt@hut.fi

ABSTRACT

In this paper, we present results from direct numerical simulation of fully developed turbulent channel flow at Reynolds number $Re_\tau = 360$ based on the friction velocity and on the channel height. We applied two explicit time integration methods: third-order Adams–Bashforth and Runge–Kutta methods. The latter was found to be more efficient for this case. The second-order central difference scheme was applied for the spatial derivatives on a staggered grid system. Pressure was solved from the Poisson-equation, where the homogeneous directions were transformed to Fourier-space to speed up the computation. We applied different grid resolutions and varied the domain sizes in the homogeneous directions. Due to a streamwise vortex system in the near-wall region, a better resolution was required in the spanwise than in the streamwise direction. We found that the domain length of 4 channel heights in the streamwise direction was adequate. In the spanwise direction, we tested the lengths of 1.6 and 3.2 channel heights of which the former was a bit short and the latter definitely long enough. We evaluated the dissipation of turbulent kinetic energy from our results according to two different definitions. The other is the actual definition, and the other is used in turbulence modeling. We found only a slight difference between the two.

1 INTRODUCTION

The starting point in direct numerical simulation of turbulence (DNS) is the group of non-linear partial differential equations — the Navier–Stokes equations. Although analytical solutions for these equations are known only for some laminar cases, at the moment it is widely believed that the Navier–Stokes equations describe also the flow of a turbulent fluid.

From the point of view of numerical simulations, the main problem with turbulence is the diversity of time and length scales present in the flow field. The largest flow structures are of the size of the characteristic dimensions of the geometry, and the lower limit for the flow structures is set by the Kolmogorov length scale [1]. Because of the nonlinear nature of turbulence, the smallest motions affect the main flow, and thus, either the computational grid has to be dense enough to capture all the length scales, or one has to trust on modeling. In direct numerical simulation, no models are applied and the entire flow field is solved from the Navier–Stokes equations. This sets huge requirements for the computer capacity, and thus DNS is not a tool for most engineering applications. However, DNS is a

valuable approach in research purposes. Moin and Manesh [2] provide a review of different applications, of which model validation and the study of boundary layer structure could be mentioned.

In this paper, we present results of DNS for a fully developed turbulent channel flow at a low Reynolds number $Re_\tau = 360$. This flow is a widely used test case for DNS and Large Eddy Simulations (LES), see e.g. [3] and [4]. Accurate DNS results for the same low-Reynolds-number-flow have been published by Kim *et. al* [5] and later also for two higher Reynolds numbers by Moser *et. al* [6]. The latter also provide a data base of the results for all three Reynolds numbers. This data base is commonly used as the reference in channel flow calculations.

For the calculations, we use explicit time integration methods and the second-order central difference scheme for spatial discretization. We test how the change in the domain lengths in the homogeneous directions affects the results. If the domain is too narrow in a homogeneous direction, the turbulent structures will be damped down. Also increasing grid resolution affects the results and, on the other hand, increases the computational effort. In our simulations, we vary the grid resolution in spanwise and wall-normal directions.

2 NUMERICAL METHODS

2.1 Governing equations and the coordinate system

For an incompressible flow, the governing equations are the continuity equation and the momentum equations — i. e. the Navier–Stokes equations. These equations may be written in the non-dimensional form as

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-u_i u_j + \frac{1}{Re_\tau} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad (2)$$

where u_i ($i = 1, 2, 3$) is the non-dimensional velocity component in the i th coordinate direction, p is the non-dimensional pressure and Re_τ is the Reynolds number. We scale the equations by the channel height h and the friction velocity u_τ , and thus the Reynolds number is here defined as

$$Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu}. \quad (3)$$

Hereafter u_i refers to velocity scaled by the friction velocity u_τ , x_i to coordinate scaled by the channel height h and p to pressure scaled by ρu_τ^2 .

In the channel flow, we have two homogeneous directions, the streamwise and the spanwise. In these directions, periodic boundary conditions are applied. No-slip condition is forced on the top and bottom walls.

In the chosen coordinate system, x -axis points in the streamwise direction, y -axis in the spanwise and z -axis in the wall-normal direction. Correspondingly, the streamwise velocity component is referred to as u , the spanwise as v and the wall-normal as w .

2.2 Pressure correction method

We apply explicit time integration methods and discretize Equation (2) in time as

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_{k=1}^N c_k F(\bar{u}^{n-k}) - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i} = u_i^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (4)$$

where upper indices refer to time-levels, c_k are the coefficients of the integration method, F represents the convection and diffusion terms in Equation (2) and u_i^* is called the predicted velocity. One could interpret this approach as integrating the pressure gradient with the Euler method. Since there is no independent equation for the pressure gradient, we use the continuity equation (Eq. (1)) to determine it. We take divergence of Equation (4) and require that the velocity field on time-level $n + 1$ is divergence free. Consequently, the Poisson-equation is obtained for pressure:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}. \quad (5)$$

We apply periodic boundary conditions for pressure, and thus only the fluctuating pressure is solved from Equation (5). The mean pressure gradient is used as a parameter to fix the mass flow via

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\Delta t} (U_b - \overline{u^{n+1}}), \quad (6)$$

where U_b is the fixed value of the non-dimensional mean bulk velocity ($U_b = 15.63$ [5]), and $\overline{u^{n+1}}$ is the streamwise velocity averaged over the cross flow area. The final streamwise velocity is once more corrected by pressure gradient as

$$u = u^{n+1} - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7)$$

Note that this correction is nothing but adding a constant (constant in space) in the velocity field. Thus, after this second pressure correction step, the velocity field is still divergence free.

When we fix the mass flow in time, the mean pressure gradient will fluctuate. It can be shown that in fully developed channel flow, the mean pressure gradient non-dimensionalized by the friction velocity should in average equal two [1]. The time variation of the mean pressure gradient from one of our simulations (Case 4 in Section 3) is plotted in Figure 1. The time-averaged mean pressure gradient over this period is approximately 1.96. This is due to numerical inaccuracy. We also repeated the simulation with a fixed mean pressure gradient and let the mass flow vary. This did not affect the statistics.

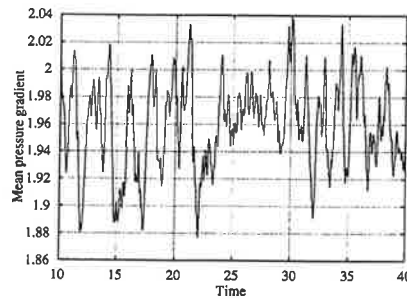


Figure 1: Mean pressure gradient from Case 4

2.3 Time integration

We applied different time integration methods in order to find a method, which would be reasonably accurate and still efficient. The tested methods were the third-order Adams-Bashforth and a low-storage third-order Runge-Kutta. The applied time step is determined

from condition

$$\Delta t = \min \left(\text{CFL} \left(\frac{u_i}{\Delta x_i} + \nu \frac{1}{\Delta x_i^2} \right)^{-1} \right), \quad (8)$$

where CFL is the Courant number, which is determined by the stability requirements of the chosen time integration method.

To obtain the solution on the new time level, Adams–Bashforth methods use results from the previous time levels. The third-order method may be written as

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t^n}{12} (23F(u^n) - 16F(u^{n-1}) + 5F(u^{n-2})). \quad (9)$$

The drawback of these methods is that in order to increase accuracy, we need to store more results from previous time-levels. In addition, these methods are of claimed accuracy only for a constant time step. The third-order Adams–Bashforth method allows Courant number 0.6.

In Runge–Kutta methods, the increased accuracy is gained by taking intermediate time steps inside physical ones. Runge–Kutta methods thus require information only from one previous time level, and maintain their accuracy even when the time step varies. The cost is extra computational effort. The equations have to be integrated several times in one time step — also the Poisson-equation. We applied third-order three-stage and four-stage Runge–Kutta methods. The three-stage method allows Courant number 1.7 and four-stage 2.8 [7]. The larger time step allowed by the four-stage method equalizes the extra cost of taking one more intermediate time step. Thus, the four-stage method turned out to be more efficient. The method may be written as

$$\begin{aligned} u^* &= u^n + \Delta t^n \frac{8}{17} F(u^n) \\ u^{**} &= u^* + \Delta t^n \left(\frac{17}{60} F(u^*) - \frac{15}{68} F(u^n) \right) \\ u^{***} &= u^{**} + \Delta t^n \left(\frac{5}{12} F(u^{**}) - \frac{17}{60} F(u^*) \right) \\ u^{n+1} &= u^{***} + \Delta t^n \left(\frac{3}{4} F(u^{***}) - \frac{5}{12} F(u^{**}) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

where u^* , u^{**} and u^{***} refer to solutions on the first, second and third intermediate time step, respectively. This Runge–Kutta method has the advantage that between the intermediate time steps, we have to store only the result from the previous intermediate time step.

We compared the third-order Adams–Bashforth and the four-stage Runge–Kutta methods in our first test case (Case 1 in Section 3). On a SGI Origin 2000, it took on average 866 CPU seconds to proceed 0.2 non-dimensional time units with the Runge–Kutta method (CFL= 2.4) and 902 CPU seconds with the Adams–Bashforth method (CFL= 0.6). Thus, the Runge–Kutta method was chosen to be used in the future calculations.

2.4 Spatial discretization

The spatial derivatives are evaluated with second-order central difference scheme on a staggered grid. Pressure points are located in the middle of a computational cell, and the velocity points on the boundaries. The streamwise velocity point is on the boundary

normal to the streamwise component etc. The staggered grid system is presented in Figure 2. Pressure points are marked with black squares, streamwise velocity points with black circles and wall-normal velocity points with white circles. The advantage of using the staggered

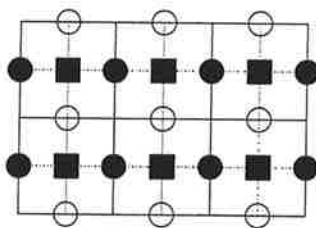


Figure 2: Staggered grid

grid is that we have a strong coupling between velocity and pressure and thus, oscillating pressure modes are avoided.

The discretized momentum equation for the streamwise velocity component (for the predicted velocity) may be written as

$$\frac{\Delta u_{i,j,k}^*}{\Delta t} = F_{i+1/2,j,k}^u - F_{i-1/2,j,k}^u + F_{i,j+1/2,k}^v - F_{i,j-1/2,k}^v + F_{i,j,k+1/2}^w - F_{i,j,k-1/2}^w, \quad (11)$$

where the flux vectors F^u , F^v and F^w are defined as

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j,k}^u &= -uu \Big|_{i+1/2,j,k} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j,k} \\ F_{i,j+1/2,k}^v &= -uv \Big|_{i,j+1/2,k} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{i,j+1/2,k} \\ F_{i,j,k+1/2}^w &= -uw \Big|_{i,j,k+1/2} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{i,j,k+1/2} \end{aligned} \quad (12)$$

The velocities on the boundaries of the control volume are calculated as averages of the neighboring values, and central difference scheme is applied for the spatial derivatives. The other momentum equations are treated in a similar manner.

When the Poisson equation (Eq. (5)) for pressure is discretized with the second-order central difference scheme, pressure will be connected with its six neighboring values. This makes solving the Poisson-equation time consuming. We can, however, decouple the derivatives by transforming the homogeneous directions into Fourier-space, and thus speed up the computation. The Poisson-equation after the transformation, may be written as

$$(-k_x^2 - k_y^2) \hat{p} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} = \mathcal{F} \left(\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right), \quad (13)$$

where $\hat{p}$ denotes the Fourier-transform of p , k_x and k_y the modified wavenumbers in x - and y -directions respectively and $\mathcal{F}$ the Fourier-transform operator. Even though we apply the Fourier-transform, we want to solve also the Poisson equation with second-order central difference scheme. This is why, instead of the actual wave numbers, we use the modified wavenumbers of the second-order central difference scheme (see e. g. [8]).

3 FULLY DEVELOPED TURBULENT CHANNEL FLOW

In this section, we present results from our channel flow simulations at a low Reynolds number of $Re_\tau = 360$. This corresponds to Reynolds number of 5600 based on the mean velocity. The simulations were first run for 10 non-dimensional time units. After this, the simulations were continued at least for 88 time units and the statistics were updated after each 0.2 time units.

3.1 The effect of the domain size on the results

We repeated the channel flow simulation in three channels with varying domain lengths in the homogeneous directions. The domain sizes and resolution are shown in Table 1. In Case 1 the channel was 2 channel heights long in the streamwise and 1.6 in the spanwise direction. In Case 2 we doubled both lengths. In Case 3 the spanwise domain length was the same as in Case 2 and the streamwise length was further enlarged to 6 channel heights. Kim *et. al* [5] and Moser *et. al* [6] had the domain length of 2π channel heights in the streamwise direction. In the spanwise direction, Kim *et. al* had the domain length of π and Moser *et. al* of $2/3\pi$ channel heights.

In the first three simulations, we kept the grid resolution as constant. Both the streamwise and the spanwise spacing was $\Delta x^+ = \Delta y^+ = 9$ in wall-units. In the wall normal direction, the first grid point was located at $z^+ \approx 0.63$ and the maximum spacing in the middle of the channel was $\Delta z^+ \approx 7$. In the streamwise direction, our resolution was finer than in the reference data ($\Delta x^+ = 12$ in [5] and $\Delta x^+ = 17$ in [6]), while in the spanwise direction our grid was coarser ($\Delta y^+ = 7$ in [5] and $\Delta y^+ = 5.9$ in [6]). In the simulation of [6], the first grid point was at $z^+ \approx 0.05$, and the maximum spacing in the wall-normal direction was $\Delta z^+ = 4.4$. The resolutions between our simulations and the reference data can not be compared exactly because of the differences in the applied numerical schemes. We used second-order central difference scheme, which requires double the resolution of spectral schemes for the same accuracy [2].

Table 1: Dimensions of the channel in Cases 1, 2 and 3

	streamwise			spanwise		wall-normal
	1	2	3	1	2 & 3	1 & 2 & 3
length / channel height	2.0	4.0	6.0	1.6	3.2	1.0
length in wall units	720	1440	2160	576	1152	360
number of grid points	80	160	240	64	128	80
resolution in wall units	9	9	9	9	9	7 (max)

The adequacy of the domain lengths in homogeneous directions can be studied via self-correlation function defined as the average of the product of velocity components separated by distance r

$$R_{u_i u_i}(r) = \overline{u_i(\vec{x}) u_i(\vec{x} + r \vec{e}_r)}, \quad (14)$$

where $\vec{e}_r$ is the unit vector pointing in the direction of separation, which in the channel flow is the streamwise or spanwise direction (no summation over index i). $R_{u_i u_i}$ should become close to zero when r approaches half the channel length, otherwise the domain restricts the flow. In Figure 3, we plot the self-correlation R_{uu} of the streamwise velocity component from Cases 1, 2 and 3 with both streamwise and spanwise separation. Here R_{uu} is scaled by its value at zero separation.

The structures that require the longest domain size in the streamwise direction are the elongated regions of high-speed and low-speed streamwise velocity in the near-wall region. These structures are maintained by a streamwise vortex system. On the left hand side of Figure 3, R_{uu} is evaluated with streamwise separation in the near wall region at $z^+ \approx 5$. The horizontal axis is scaled by the domain length in the streamwise direction. We notice that at least in Case 1, the domain is too short.

In the spanwise direction, the self-correlation is evaluated in the middle of the channel, where the spanwise flow structures are the longest. R_{uu} is plotted from Cases 1 and 2 in the right hand side of Figure 3. We notice that the original choice for the spanwise domain length (1.6h) was already quite good.

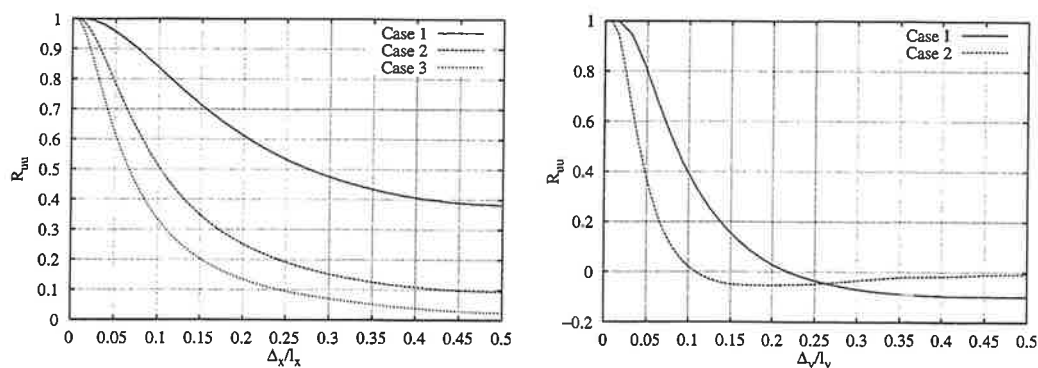


Figure 3: Self-correlation R_{uu} with streamwise (on left) and spanwise (on right) separation

The mean velocity profiles from Cases 1, 2 and 3 are shown in Figure 4 in wall coordinates together with the results of [6] hereafter referred to as MKM. All the cases match with the results of MKM as they should, since we fixed the mean velocity. The root mean squares of the fluctuating velocities $\sqrt{u'_i u'_i}$ are shown in Figures 4 and 5. Note that velocity is here scaled by the friction velocity u_τ . All the RMS-velocities are affected by the change in the domain sizes. However, the improvement between Case 1 and Case 2 is the most significant and there is not a large difference between the results of Case 2 and Case 3. Spanwise and wall-normal RMS-velocities remain underpredicted also in Case 3. The Reynolds stress $\overline{u'w'}$ from Cases 1, 2 and 3 is shown in the left hand side of Figure 6. Also this quantity is affected by the domain length but it remains underpredicted and causes the wrong slope in the total stress shown from Case 3 on the right hand side of Figure 6. For a fully developed channel flow, the slope of the total stress is the non-dimensional mean pressure gradient, and it should be equal to two [1]. Thus, the underprediction of $\overline{u'w'}$ induces the low value of mean pressure gradient discussed in Subsection 2.4.

3.2 The effect of the grid resolution on the results

Since it seemed that the domain lengths in Case 2 did not considerably restrict the solution, we next tested the effect of the grid resolution. We used the same domain lengths as in Case 2 and increased the resolution first in the spanwise direction (Case 4) and then in the wall-normal direction (Case 5). The domain sizes and resolutions are shown in Table 2. In Case 4 the spanwise resolution ($\Delta y^+ = 4.8$) is finer than used in the reference data [6]. In Case 5 the first grid point was located at $z^+ = 0.4$ and the maximum spacing in the middle of the channel was $\Delta z^+ \approx 6.2$. This is still coarser than in [6].

First, to examine the adequacy of the grid resolution, we look at the one-dimensional

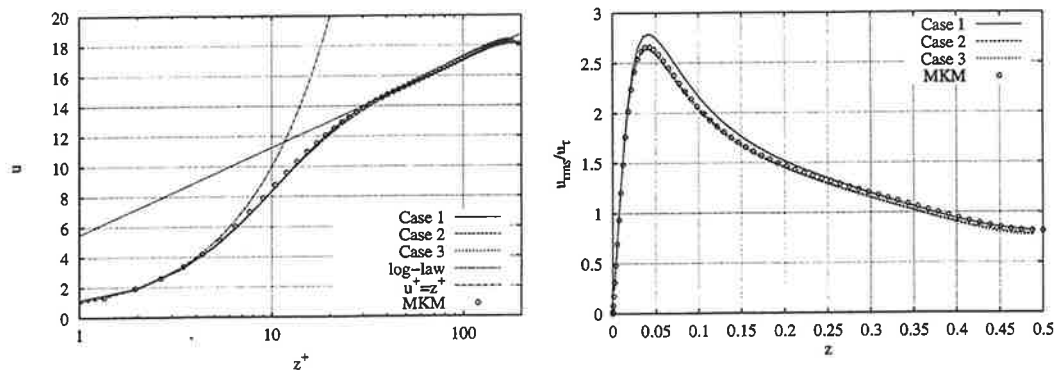


Figure 4: Left: Mean streamwise velocity. Right: RMS velocity $\sqrt{u'u'}$

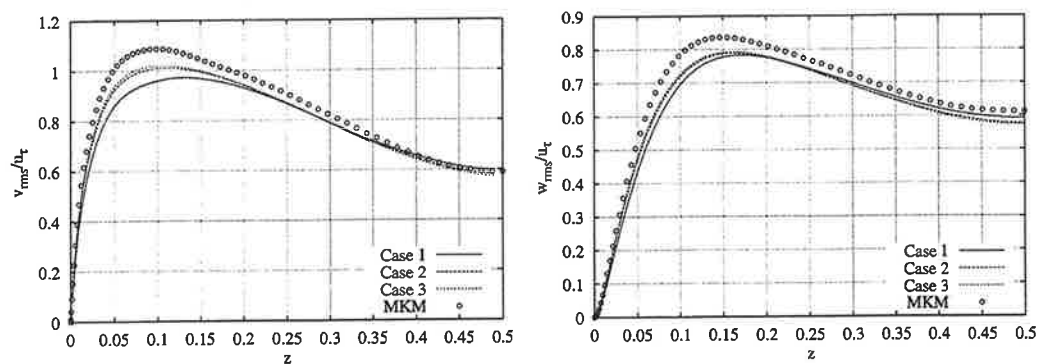


Figure 5: RMS velocities $\sqrt{v'v'}$ and $\sqrt{w'w'}$

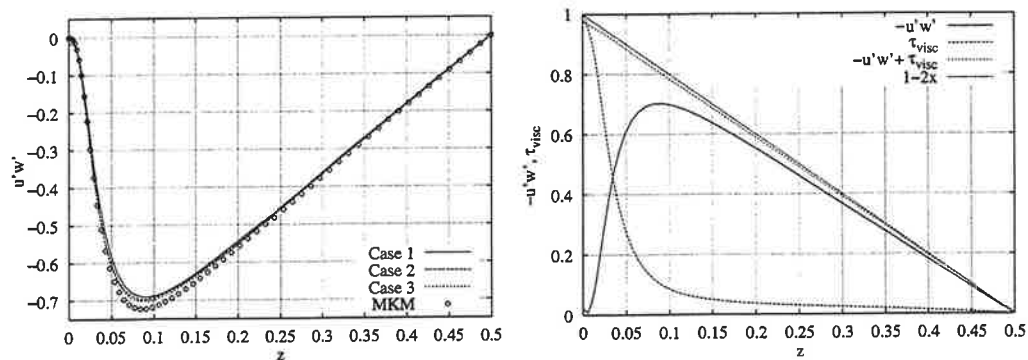


Figure 6: Left: The Reynolds stress $\overline{u'w'}$. Right: Total, viscous and turbulent stresses from Case 3.

Table 2: Dimensions of the channel in Cases 2, 4 and 5

	streamwise 4 & 5	spanwise 4 5		wall-normal 4 5	
length / channel height	4.0	3.2	3.2	1.0	1.0
length in wall units	1440	1152	1152	360	360
number of grid points	160	240	128	80	96
resolution in wall units	9	4.8	9	7 (max)	6.2 (max)

energy spectrum defined as the Fourier transform of the correlation function (Eq. (14))

$$E_{uu}(k_x) = \int_{x=0}^{l_z} R_{uu}(x) \exp(-ik_x x) dx. \quad (15)$$

The energy spectra for the streamwise velocity component from Case 3 in both streamwise and spanwise directions are plotted in Figure 7. These spectra are evaluated at $z^+ \approx 5$. In the streamwise direction (left hand side), the spectrum drops off several orders of magnitude. In the spanwise direction (right hand side), there remains considerable amount of energy also in the smallest wavenumbers and thus, the grid is probably not fine enough in this direction. In order to describe the streamwise vortices in the near-region, we need more accuracy in the spanwise direction. In Figure 8, we show the corresponding spanwise energy spectrum from Case 4, where the spanwise accuracy is increased. Now the accuracy seems to be adequate.

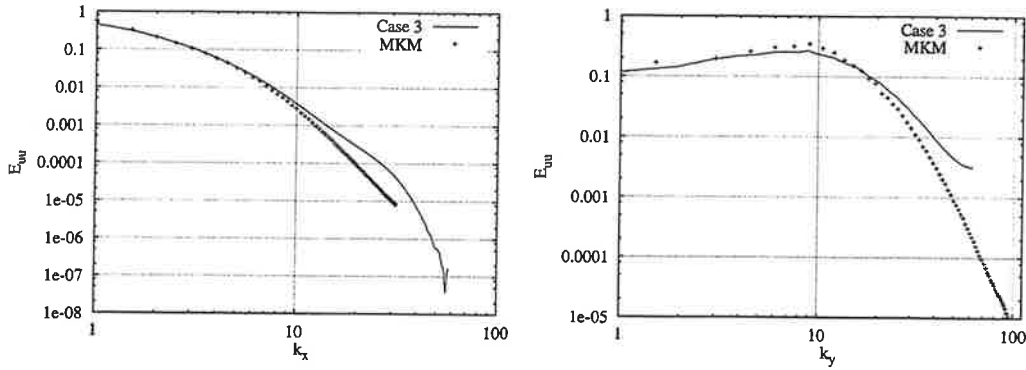


Figure 7: E_{uu} from Case 3 at $z^+ \approx 5$. Left: streamwise. Right: spanwise.

The wall-normal direction is not homogeneous, and thus the accuracy can not be studied by examining energy spectra. The only way to test it is to repeat the simulation with a denser grid. This is what is done in Case 5. We have the same accuracy in the streamwise and spanwise directions as in Case 2, and we increase the accuracy in the wall-normal direction.

Statistics from Cases 4 and 5 are compared to Case 2 and the results of [6] in Figures 9 and 10. It is seen in Figures 9 and 10 that increasing the accuracy in the spanwise direction considerably improves the prediction of the RMS-velocities. In Case 4, the spanwise and wall-normal RMS are only slightly underpredicted. The increased accuracy in the wall-normal direction in Case 5 also has some effect on the results. The improvement is quite small, but on the other hand, we did not increase the accuracy as much as in the spanwise direction in Case 4. However, we notice that the prediction of the Reynolds stress $\overline{u'w'}$

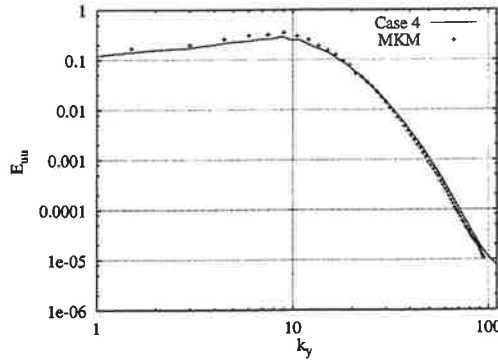


Figure 8: Spanwise E_{uu} from Case 4 at $z^+ \approx 5$.

in the right hand side of Figure 10 is not improved as much. This was already seen in the false mean pressure gradient in Subsection 2.4. We have not yet found any reason for the underpredicted Reynolds stress. It could be due to low accuracy in the wall-normal direction, but this requires further studies.

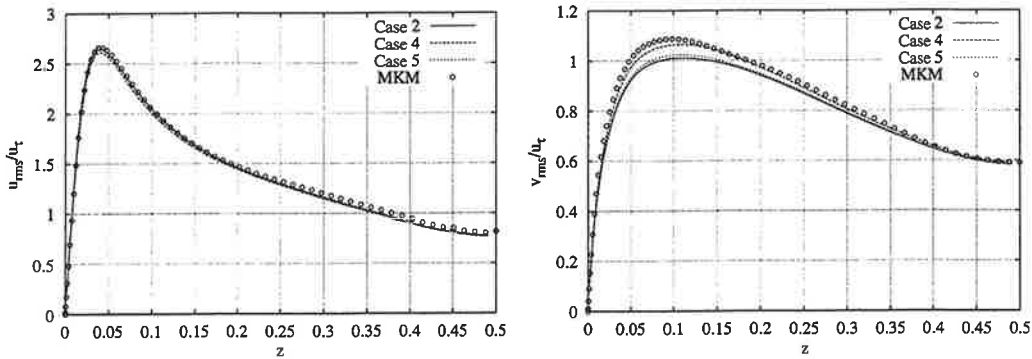


Figure 9: RMS velocities $\sqrt{u'u'}$ and $\sqrt{v'v'}$

In Figure 11, we depict the production and dissipation of turbulent kinetic energy in wall-coordinates from Case 2 and Case 4. Dissipation was calculated from two different definitions (labeled DEF 1 and DEF 2 in Figure 11). DEF 1 refers to the dissipation in the balance equation of the turbulent kinetic energy and DEF 2 to the definition of “epsilon” used in the context of turbulence models

$$\epsilon_{\text{DEF1}}^+ = 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^+} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^+} \right) \right)^2 \quad \epsilon_{\text{DEF2}}^+ = \frac{\partial u_i}{\partial x_j^+} \frac{\partial u_i}{\partial x_j^+}. \quad (16)$$

From Figure 11, we notice that there is only a very slight difference between these two definitions. Moreover, in Figure 11 we see that the production is equally well predicted in Cases 2 and 4. Instead, the plateau in the dissipation approximately at $z^+ \approx 10$ is much better predicted in Case 4. Thus, this is where the increased resolution is mainly effective.

4 CONCLUSIONS

In this paper, we have presented results from channel flow simulations at a low Reynolds number $\text{Re}_\tau = 360$. We tested two third-order time integration methods — Adams—

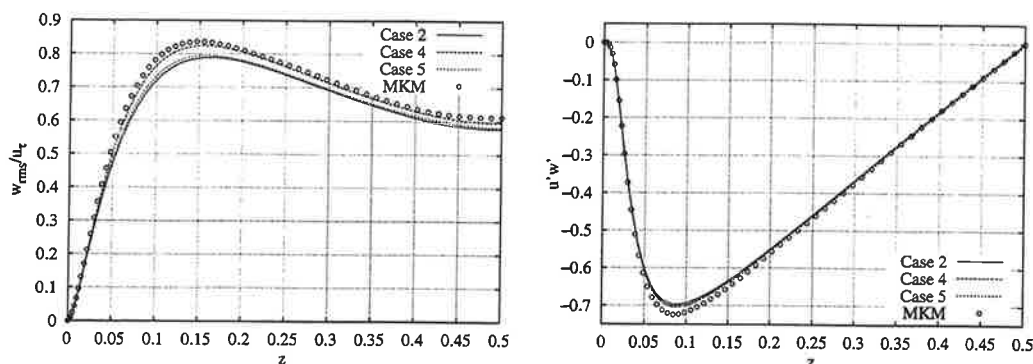


Figure 10: RMS velocity $\sqrt{w'w'}$ and the Reynolds stress $\overline{u'w'}$

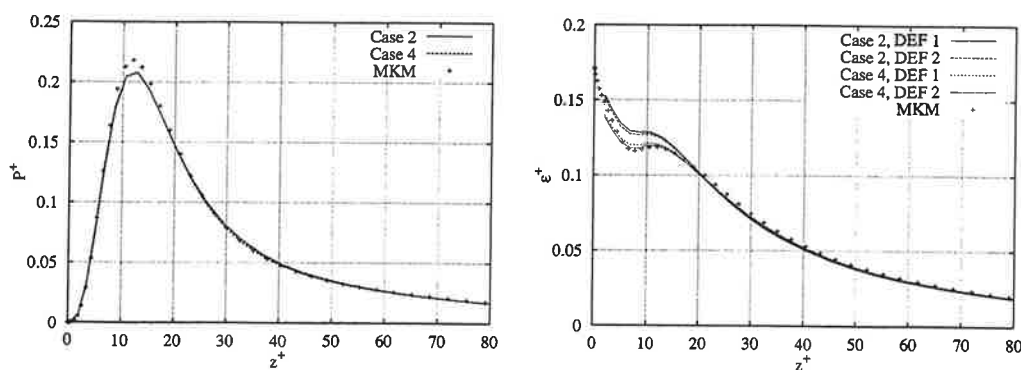


Figure 11: Production (left) and dissipation (right) of turbulent kinetic energy

Bashforth and a four-stage Runge–Kutta method. The applied Runge–Kutta method was found to be more efficient in this case.

We varied the domain lengths in the homogeneous directions. We found that in this case, the length of 4 channel heights in the streamwise direction and 3.2 channel heights in the spanwise direction were adequate. We also repeated the calculations in a six-channel-heights long domain, and found that the results were not essentially improved.

Once the adequate domain size was found, we tested the effect of the grid resolution. The resolution in the streamwise direction was already good, and actually, based on the energy spectra on the left hand side of Figure 7, even a coarser grid could have been sufficient. As a first guess we had the same resolution in the streamwise and spanwise directions. However, due to the streamwise vortex system in the near wall region of the channel, a better resolution was required in the spanwise direction. When the resolution in the spanwise direction was $\Delta y^+ = 4.8$ in wall-units, the results showed good agreement with the classical results of [6]. Only the Reynolds stress $\overline{u'w'}$ remained underpredicted, which resulted in the wrong mean pressure gradient. We did not find any reason why this quantity was less effected by the grid refinement than the RMS-velocities. This could be due to low accuracy in the wall-normal direction and it requires further studies. We also improved the resolution in the wall-normal direction but probably not enough, since that did not have a clear effect on the results. The results could possibly be improved further by increasing the accuracy more in the wall-normal direction. If one wants to economize on computation time, the accuracy in the streamwise direction could be lowered and the channel could be a bit narrower in the spanwise direction.

We evaluated the dissipation of turbulent kinetic energy from Cases 2 and 4 using two different definitions. The other is the actual dissipation and the other the definition used in turbulence modeling. There were only very small differences between these two. The increased grid resolution clearly improved the prediction of the dissipation plateau near the wall.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been funded by the Academy of Finland and the Finnish Cultural Foundation. The computer capacity was provided by CSC, the Finnish IT center for science. The used channel flow code is based on a code written by Dr. Boersma from TU Delft. These contributions are gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A First Course on Turbulence*. The MIT Press, 8 edition, 1972.
- [2] P. Moin and K. Mahesh. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 30:539–578, 1998.
- [3] F. M. Najjar and D. K. Tafti. Study of discrete test filters and finite difference approximations for the dynamic subgrid-scale model. *Physics of Fluids*, 8(4):1076–1088, 1996.
- [4] P. Majander and T. Siikonen. Evaluation of Smagorinsky-based subgrid-scale models in a finite-volume computation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40:735–774, 2002.
- [5] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177:133–166, 1987.
- [6] R. Moser, J. Kim, and N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Physics of Fluids*, 11(4):943–945, 1999.
- [7] A. Lundbladh, S. Berlin, M. Skote, C. Hildings, J. Choi, J. Kim, and D. Henningson. An efficient spectral method for simulation of incompressible flow over a flat plate. Technical Report 11, Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, 1999.
- [8] C. A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, volume 1. Springer, 1991.

A SIMPLE REYNOLDS STRESS TURBULENCE MODEL FOR VALIDATING ITS ALGEBRAIC TRUNCATIONS

K. SALO, A. HELLSTEN

Helsinki University of Technology, Laboratory of Aerodynamics
P.O.Box 4400, FIN-02015 HUT
e-mail: Katariina.Salo@hut.fi

ABSTRACT

A differential Reynolds stress model is implemented in a Navier-Stokes flow solver in order to assess and to further develop corresponding algebraic Reynolds stress models. In this paper, the differential and algebraic Reynolds stress models are introduced and the implementation is explained in detail. As an example of the development process the curvature correction technique is described. The results of two test cases show that the implementation of the new model is successful and that the curvature corrected algebraic Reynolds stress models are clearly more consistent with the underlying differential model than the standard algebraic Reynolds stress models.

1 INTRODUCTION

Turbulent flows are strongly affected by system rotation and streamline curvature. Even weak rotation and curvature may give significant effects on the turbulent stress tensor $\overline{u'_i u'_j}$. It is also well known that the standard eddy-viscosity turbulence models are completely insensitive to such effects, which is a severe defect in these models. Theoretically the differential Reynolds stress models (RSM) have potential to model these effects provided the modelling of each term is accurate enough. However, RSMs are very complicated and thus not very practical. It is not at all straightforward to implement a RSM, nor is it a computationally cheap way to obtain results. A reasonable compromise is to use algebraic Reynolds stress models (ARSM), which can be derived from the differential ones by making certain simplifications, i.e. neglecting the convection and diffusion of the Reynolds stress anisotropy. This can be done either in the fixed background coordinate-system or in some curvilinear stream-following system (curvature corrected ARSM). The consistency of the ARSM with the differential RSM in cases of curved mean-flow path largely depends on this choice. With the aid of the underlying differential Reynolds stress model the effect of the ignored transport terms can be found out, and furthermore, the ability of the curvature correction methods to approximate these terms can be reliably assessed. RS-models are also very useful in further development of the ARSMs. Improvements on Reynolds stress modelling could be transferred also to the algebraic level of modelling.

The algebraic models are implicit and thus not so easy to handle. ARS-models can be turned into explicit models (EARSM), which are both numerically and computationally more robust. The starting point of this study was that the EARSM-concept developed by Wallin & Johansson [1] had been implemented in the FINFLO flow solver and was in

use, but validating it was problematic without any proper point of comparison. In order to efficiently evolve further the EARS-model a corresponding RS-model was needed in the solver.

In the following the differential and algebraic Reynolds stress models are introduced. The implementation of a RSM is explained in detail and some results are analysed.

2 RSM AND ARSM

The differential Reynolds stress modelling is based on the transport equations derived for the Reynolds stress tensor

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(T_{ijk} + \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) = P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

where on the right-hand side there are the source terms: P_{ij} is the production term, Φ_{ij} the inter-component redistribution, and ε_{ij} the dissipation. T_{ijk} is the turbulent flux. The mean flow produces Reynolds stresses and is represented by the production term. It can also be understood as the rate of work done by the mean strain rate against the Reynolds stresses. The dissipation term stands for the rate at which turbulence kinetic energy is converted into internal heat. The redistribution term has zero trace in accordance with the continuity equation, so it does not have an effect on the turbulence kinetic energy of the flow. Instead it redistributes energy among the Reynolds stress components. The production term needs no modelling since it consists of known quantities such as mean flow velocity gradients and the Reynolds stress itself. The turbulent flux consists of turbulent transport, and pressure diffusion; these are usually called together as turbulent diffusion. They represent the rate of turbulence energy transport in the fluid by velocity and pressure fluctuations.

In the context of algebraic Reynolds stress modelling, it is convenient to transform (1) into the anisotropy form. The nondimensional Reynolds stress anisotropy tensor is defined as

$$a_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad (2)$$

where $k \equiv \overline{u'_i u'_i}/2$ is the turbulence kinetic energy. Using (2) and the transport equation for k , the Reynolds stress equations may be rewritten as

$$k \left(\frac{Da_{ij}}{Dt} - \mathcal{D}_{ij}^{(a)} \right) = \left(P_{ij} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} P \right) - \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon \right) + \Phi_{ij}, \quad (3)$$

On the left hand side of (3) there are the material derivative of a_{ij} and the diffusion of the anisotropy, which consists of the diffusion of the Reynolds stress and the diffusion of the turbulence kinetic energy as

$$\mathcal{D}_{ij}^{(a)} \equiv \frac{D_{ij}}{k} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k^2} D^{(k)}. \quad (4)$$

On the right hand side there are the production terms, dissipation terms, and the redistribution term, respectively.

The redistribution term can be modelled using the general quasi-linear model, which reads

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{ij}}{\varepsilon} - e_{ij} = & -\frac{1}{2} \left(C_1^0 + C_1^1 \frac{P}{\varepsilon} \right) a_{ij} + C_2 S_{ij} \\ & + \frac{C_3}{2} \left(a_{ik} S_{kj} + S_{ik} a_{kj} - \frac{2}{3} a_{lk} S_{kl} \delta_{ij} \right) - \frac{C_4}{2} (a_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} a_{kj}), \end{aligned} \quad (5)$$

where the strain rate and the vorticity tensors Ω_{ij} and S_{ij} , respectively are in their dimensionless form, i.e. normalised by the turbulent time scale $\tau = k/\varepsilon$. The model coefficients are set to values recalibrated by Wallin & Johansson [2]; see Table 1. Note that the anisotropic part of dissipation $e_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}/\varepsilon - 2/3\delta_{ij}$ is embedded in the model of redistribution.

Table 1: The values of the redistribution model coefficients

C_1^0	C_1^1	C_2	C_3	C_4
4.6	1.24	0.47	2	0.56

The dissipation term is modelled in terms of ε , the rate of dissipation of turbulence kinetic energy. Dissipation can be treated as isotropic, since the anisotropic deviator part of it is already included in the redistribution model. The modelled equation can be written as

$$\varepsilon_{ij} - e_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon. \quad (6)$$

ω has been chosen as the second-scale variable, so ε is calculated in terms of ω instead of being determined from a differential equation. ω and ε are related through

$$\varepsilon = C_\mu k\omega, \quad (7)$$

where $C_\mu = 0.09$.

The variable ω is calculated as Menter has suggested in his $k - \omega$ BSL model [3]. The transport equation for ω is

$$\frac{D\omega}{Dt} = \gamma \frac{\omega}{k} P - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (8)$$

On the left hand side of (8) there is the time derivative and the convection term. The first two terms on the right are production and destruction, respectively. The third one is diffusion and the fourth one is a so-called cross diffusion term.

The diffusion term of the Reynolds stress equation includes two parts that need modelling: the turbulent transport and pressure diffusion—the molecular diffusion can be computed as it is. The turbulent diffusion is modelled using scalar diffusivity gradient diffusion adopted from two-equation models. The modelled equation can be written as

$$T_{ijk} = -\overline{u'_i u'_j u'_k} - \frac{1}{\rho} \left(\overline{p' u'_i \delta_{jk}} - \overline{p' u'_j \delta_{ik}} \right) \approx \sigma C_\mu \tau k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}. \quad (9)$$

By substituting the general quasilinear model (5) into (3) the Reynolds stress model can be written as

$$\begin{aligned} \tau \left(\frac{Da_{ij}}{Dt} - \mathcal{D}_{ij}^{(a)} \right) = A_0 & \left[\left(A_3 + A_4 \frac{P}{\varepsilon} \right) a_{ij} + A_1 S_{ij} - (a_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} a_{kj}) \right. \\ & \left. + A_2 \left(a_{ik} S_{kj} + S_{ik} a_{kj} - \frac{2}{3} a_{ki} S_{lk} \delta_{ij} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

The coefficients $A_0, \dots, A_4$ are functions of the Reynolds stress model-coefficients given in Table 1.

The corresponding ARSM is obtained in the weak equilibrium limit where the left hand side of Eq. (10) is ignored, that is, the advection and diffusion of a_{ij} are dropped. It is

important to understand that the effect of ignoring the advection term Da_{ij}/Dt depends on the choice of coordinate system for representing the components of a_{ij} .

As suggested by, for example, Rodi & Scheuerer (1983) [4], and later pointed out by Girimaji [5], Gatski & Jongen [6] and Wallin & Johansson [2], the best ARSM for curved flows is obtained by ignoring the anisotropy advection in a suitable curvilinear coordinate system that follows the flow in some sense. This way, the part of the material derivative of a_{ij} arising from the flow curvature may be approximated as

$$\frac{Da_{ij}}{Dt} \approx - \left(a_{ik} \Omega_{kj}^{(r)} - \Omega_{ik}^{(r)} a_{kj} \right), \quad (11)$$

where $\Omega_{ij}^{(r)}$ depends only on the transformation from the inertial Cartesian background frame to the curvilinear system. Note, that the transformation matrix varies in space. For details, see [2]. This term can be included in the ARSM, in fact, by only modifying the vorticity tensor because $\Omega_{ij}^{(r)}$ is of similar tensorial form as Ω_{ij} (skew-symmetry). Redefining the vorticity tensor in (10) as

$$\Omega_{ij}^* = \Omega_{ij} - \frac{\tau}{A_0} \Omega_{ij}^{(r)} \quad (12)$$

corresponds to assuming the weak equilibrium in the given curvilinear system. The vorticity modification owing to curvature $\Omega_{ij}^{(r)}$ is related to the rotation rate vector $\omega_k^{(r)}$ of the local basis of the curvilinear system by $\Omega_{ij}^{(r)} = -\epsilon_{ijk} \omega_k^{(r)}$. The rotation rate vector $\omega_k^{(r)}$ may be approximated using the method proposed recently by Wallin & Johansson [2]. This method is based on such curvilinear coordinate system where the material derivative of the strain rate tensor is minimized. Also methods based on an acceleration coordinate system have been proposed in the literature, but this approach has recently been shown inconsistent owing to the singular behaviour of the acceleration basis [7]. The general form of the Wallin & Johansson method reads

$$\omega_i^{(r)} = \frac{\Pi_S^2 \delta_{ij} + 12 \text{III}_S S_{ij} + 6 \Pi_S S_{ik} S_{kj}}{2 \Pi_S^3 - 12 \text{III}_S^2} S_{pl} \dot{S}_{lq} \epsilon_{pqj}, \quad (13)$$

where $\Pi_S = S_{kl} S_{lk}$ and $\text{III}_S = S_{kl} S_{lm} S_{mk}$ are the second and third invariants of the strain-rate tensor, respectively. In two dimensional incompressible mean flows this reduces to

$$\omega_3^{(r)} = \frac{S_{11} \dot{S}_{12} - S_{12} \dot{S}_{11}}{2(S_{11}^2 + S_{12}^2)}. \quad (14)$$

This is identical to the formula derived by Gatski and Jongen [6] strictly for two-dimensional mean flows.

The same explicit solution [1] is valid for the standard ARSM (iWJ) based on the plain vorticity tensor Ω_{ij} and for the variant (CC-WJ) for curved flows where Ω_{ij} is replaced by Ω_{ij}^* . The resulting EARS-models will be assessed against its parent RSM in Section 4.

3 IMPLEMENTATION

The Reynolds stress turbulence model is coupled (see Ref. [8]) to the two-dimensional version of the Navier-Stokes solver FINFLO developed at Helsinki University of Technology in the Laboratory of Aerodynamics [9]. FINFLO employs the finite volume method as a discretization method and utilises structured multi-block grids. The solution method is an implicit time integration and a multigrid cycle is used to accelerate convergence.

The solution procedure starts by calculating the source terms of the Reynolds stress equations (1) and ω equation (8), which are modelled as described in the previous section.

Then the fluxes of the continuity, momentum, energy, Reynolds stresses, and ω equations are computed. The convective and diffusive parts of the flux are treated separately since they have different kinds of mathematical and consequently numerical properties. Diffusion causes fewer problems thus it is fairly easy to handle it with central difference. Convection is more troublesome by nature and some more complicated methods need to be used to calculate it.

3.1 EXPLICIT PHASE

The convective fluxes are computed separately on each cell face. The fluxes can be evaluated in the local coordinate system, or in their Cartesian form, because of the rotational invariance of the flux vector. After calculation, the fluxes can be transformed back into the global coordinates. The convective flux can therefore be obtained from

$$\hat{F} = T^{-1} F(TU), \quad (15)$$

where T is a rotation matrix and F is the flux in the local system.

The inviscid fluxes are evaluated with Roe's flux-difference splitting method [10]: a locally one-dimensional Riemann problem is solved approximately on each cell surface. Unfortunately the problem becomes unsolvable when a Reynolds stress model is used. The anisotropic Reynolds stress components appearing in the momentum and energy equations render it impossible to solve the eigenvectors of the Jacobians of the fluxes. Fortunately there is a way round this problem: the Reynolds stress components in the momentum and energy equations are divided into deviatoric and isotropic parts as

$$\overline{u'_i u'_j} = \underbrace{\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}}_{\text{deviatoric}} + \underbrace{\frac{2}{3} k \delta_{ij}}_{\text{isotropic}}. \quad (16)$$

Now the convective fluxes, too, can be divided into two parts, whereby the first containing the isotropic share can be solved with Roe's scheme and the other one containing the deviatoric parts with plain central difference scheme.

The following form can be derived for the flux on the cell surface

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [F^l + F^r] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \tilde{\tau}_k |\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k, \quad (17)$$

where $\tilde{\lambda}_k$ denotes the eigenvalues and $\tilde{\tau}_k$ the right eigenvectors of $\tilde{A}$; these are averages of the precise eigenvalues and eigenvectors of the Jacobian matrix $A = \partial F / \partial U$. $\tilde{\alpha}_k$ represent the changes in the characteristic variables. The values denoted by superscripts l and r are obtained from MUSCL-type discretization, emphasizing the left or the right side, respectively.

There is no need to use the flux-difference splitting method of Roe on the solid boundaries: the convective velocity is zero on the wall, so it is obvious that everything vanishes except the pressure terms in the momentum equations. Usually, the wall pressure is evaluated with second-order extrapolation, but the current version of the code is written using zeroth order extrapolation. The effect of this simplification on calculations is negligible, since pressure changes very slowly in the wall-normal direction.

For evaluation of the remaining parts of the fluxes shifted control volumes are used. Applying the Gauss theorem to the control volume $V_{i+\frac{1}{2}}$ results in the following equation

for the derivative of ϕ with respect to x at $i + \frac{1}{2}$:

$$V_{i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} = S_{x,i+1,j} \phi_{i+1,j} - S_{x,i,j} \phi_{i,j} + S_{x,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - S_{x,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

which is actually the result of central differencing if the grid is Cartesian. The derivative with respect to y is similar. The values of left and right surfaces of the shifted volume are already known, but the top and bottom surface values have to be approximated. The usual way is to express them as averages of the four surrounding nodal values. The surface area components of the shifted volumes, along with the shifted volume itself can be obtained as averages: $S_{x,i,j} = \frac{1}{2}(S_{x,i+\frac{1}{2},j} + S_{x,i-\frac{1}{2},j})$, for example.

The derivatives of the viscous fluxes are approximated with a second-order one-sided formula on the solid walls.

For the boundary condition of ω see Ref. [11] or Ref. [12].

3.2 IMPLICIT PHASE

In the implicit phase the Reynolds stresses in the momentum and energy equations are modelled with an eddy-viscosity approach. The integration is not accurate in time but local time stepping is used so there is no need to be more accurate. The implicit phase tries to reach the solution quickly and considerably larger time step is permitted compared to explicit methods.

The discretized equations are integrated in pseudo-time applying LU-factorization [13], which is based on approximate factorization and the splitting of the Jacobians of flux terms. The Jacobians constructed here are not the true Jacobians of the flux terms and this sets a limit on the time step size. The approximative nature of the Jacobians used here arises from the fact that the splitting of the convection terms is not based on the method of Roe. In addition, the treatment of the viscous terms is simplified, and so is the linearization of the source terms. Approximate factorization is unconditionally stable, so it does not cause any further time step limits.

4 RESULTS

The implementation of the RSM was initially tested with a very simple test case, the boundary layer of a flat plate. It was chosen to verify that the new model is properly connected to the solver and that no crude programming errors resulted. Also two tests with rotated grids were made in order to ensure coordinate invariant implementation. The angle of the inflow was changed as well, in order to keep the situation exactly resembling the original one. The details of the test can be found in Ref. [8].

Two different test cases are considered in the following sections: the boundary layer on a convex-curved wall and the plane U-duct flow. Both test cases are computed using the differential Reynolds stress model and the standard EARS model derived in the inertial coordinate system. In addition, cases are also computed using two different curvature corrected EARS-models [14]: one based on the strain-rate method and one based on the streamline method. The latter method is not generalizable due to its lack of Galilean invariance, but it can be used as a reference here because the coordinate system can be attached to the apparatus. The results are compared with the experimental data.

4.1 BOUNDARY LAYER ON A CONVEX-CURVED SURFACE

One of the test cases is a curved boundary layer flow experimentally studied by So & Mellor [15], where the curvature effects are isolated: the mainstream pressure gradient is nearly zero and there is no separation. The effect of curvature in this flow can be considered as modest. The surface is convex and certain phenomena originating from the curvature can be seen in the results. Convex boundary layers have a stabilizing effect on Reynolds stresses, which will therefore decrease compared to the straight boundary layers.

The computational domain consists of a straight inlet duct, where the boundary layer initially develops, the curved section, and a straight outlet channel; see Fig 1. In the computations, the length of the inlet channel is chosen so that the displacement and momentum thicknesses of the boundary layer and the skin-friction coefficient are equal to experimental data at $s = 24$ in. The convex-wall geometry is the same as the shape of the experimental setup while the shape of the concave wall is designed in such way that the pressure distribution is as close to the measured one as possible.

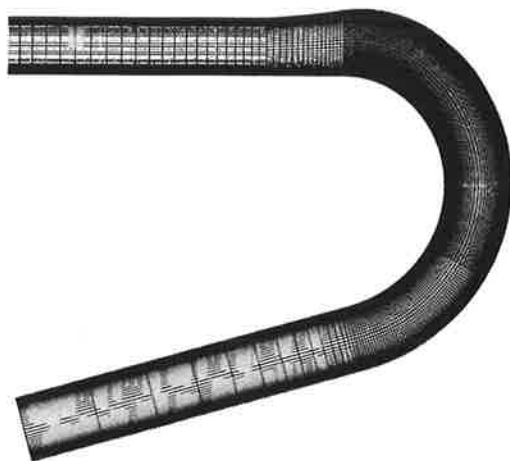


Figure 1: The computational grid

The grid used in the simulations consists of 320 control volumes in the streamwise direction and 128 in the local normal direction. The height of the cells adjacent to the convex wall is approximately 0.5 wall units. The computations were performed also using two coarser grids: 160×64 and 80×32 . The results obtained using the fine grid did not differ from the results obtained using the medium grid; thus the results are free from grid-dependency.

The standard EARSM converges somewhat faster than the Reynolds stress model when considering the number of iteration cycles needed in this case. Of course the calculation time used per one cycle has to be taken into account too: RSM needs approximately 1.5 times as long as EARSM. The stability limit of the EARSM was found to be much higher than that of the RSM. The clear differences in the maximum CFL numbers between the models explain—at least partly—the differences in the rate of convergence. The curvature correction seem to not remarkably affect the stability and the convergence rate of the computations in this case.

The skin-friction factor along the convex wall as well as the velocity and shear stress profiles are depicted in Fig. 2. The large peak in the friction coefficient at $s = 48$ in. is

caused by the sudden change in curvature. Clearly, the RSM and both CC-WJ EARSMS agree well with the measurements while the standard EARSM slightly overestimates the friction in the convex part as can be seen also from the shear stress profile.

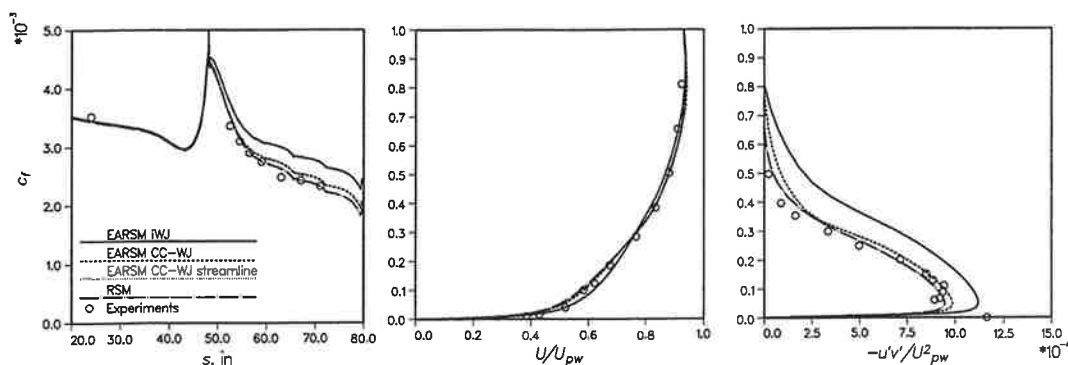


Figure 2: The friction factor, the velocity profile, and the shear stress profile. The y -axis in the latter two is distance from the convex wall in inches.

The velocity and shear stress profiles are presented in one section ($s = 71$ in.). The potential-flow velocity at the wall, U_{pw} , is used as the reference velocity. All models agree well with the measurements considering the velocity profile and the results differ from each other only slightly. The differences can be seen more clearly from the shear stress distribution. The turbulent shear stress $-u'v'$ is damped by the curvature effect. The RSM and the curvature corrected EARSMS capture this occurrence quite accurately while the standard EARSMS gives values too large. The streamline curvature enters in the RSM in two terms, the production and the advection. The standard EARSMS only involves the former effect, whereas the idea behind the curvature correction technique is to approximate the latter one. Thus it is clear that the standard EARSMS cannot capture the phenomenon correctly. The choice of the method to approximate $\omega_3^{(r)}$ makes no difference in this particular case.

4.2 PLANE U-DUCT FLOW

The plane U-duct flow experimentally studied by Monson et al. [16, 17] is a flow with strong curvature effect, since the radius of curvature is of the same order as the length scale of turbulence. In this case, however, the curvature effect is not so isolated as in the So & Mellor case discussed in the previous section: in addition to the streamline curvature, there are strong pressure gradients, flow separation, and some three-dimensional phenomena. Therefore, it is unrealistic to expect excellent agreement with the experiments.

The computational domain extends $4h$ upstream from the beginning of the curved section and $12h$ downstream from the end of the curved section; h is the channel height. The inlet boundary conditions were approximated from the experimental data. The computational grid consists of 288×160 control volumes in the streamwise and transverse directions, respectively. The heights of the volumes adjacent to the walls vary from 0.2 to 1.2 wall units. The simulations were repeated also using a coarser grid (144×80). No significant differences were found in the results obtained with the fine and coarse grids. The Reynolds number based on the channel height and the bulk velocity is 10^6 .

The velocity and shear stress profiles (in the curvilinear wall-tangential/normal system) are presented in Fig. 3 at two locations: in the beginning of the curved part ($\theta = 0^\circ$) and in the middle of it ($\theta = 90^\circ$). The differences in the velocity distributions are almost negligibly

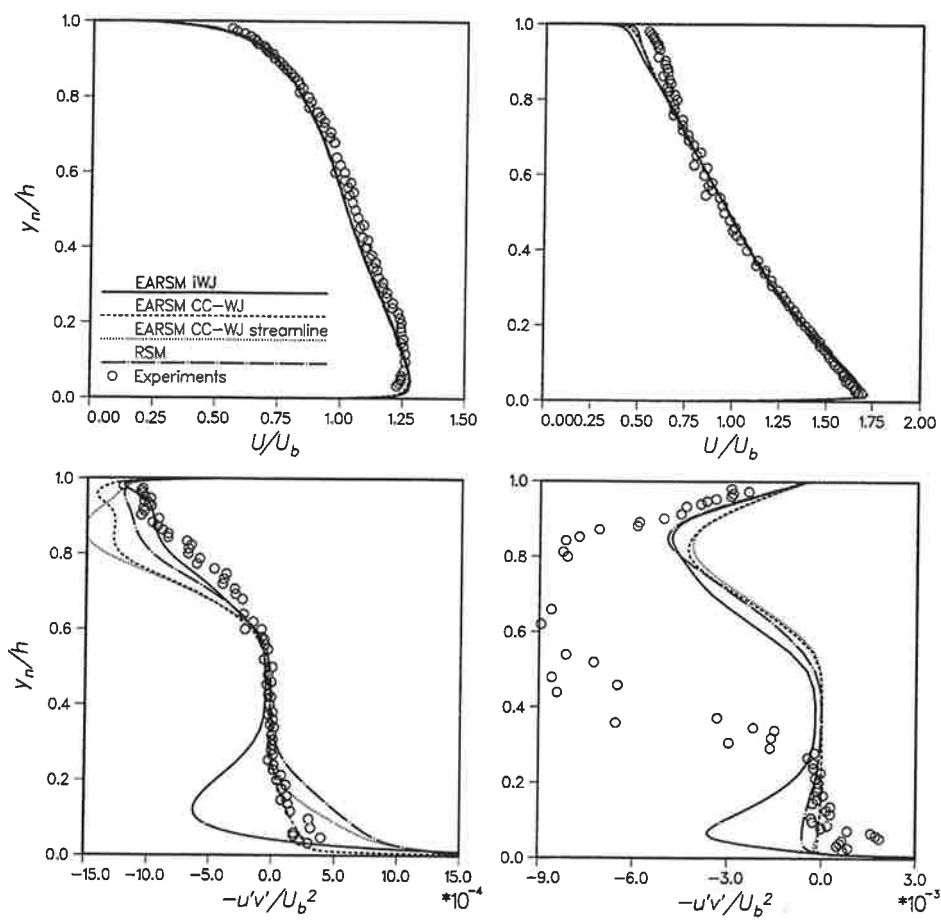


Figure 3: The velocity profiles (upper row) and shear stresses (lower row). On the left $\theta = 0^\circ$ and on the right $\theta = 90^\circ$.

small. This is because the pressure-gradient strongly dominates over the Reynolds-stress gradient in the mean-momentum equations.

The differences between the predicted shear stresses are large already in the beginning of the curved section. The strain-rate based correction allows best agreement with the measurements near the convex wall. The RSM and the streamline correction also give shear-stress profiles close to the measured data. The standard EARSMS predicts a shear-stress profile that largely follows the strain rate and is therefore of opposite sign with the experimentally observed values, except in the immediate vicinity of the wall. Near the outer wall, the CC-WJ variants seem to overestimate the shear stress to some extent while the standard EARSMS and the RSM give good results.

In the middle of the curved duct ($\theta = 90^\circ$), the shear stress is almost zero on the inner side of the duct, except in the near-wall region. The RSM and both CC-WJ EARSMS are in a quite good agreement with the experiments the curvature corrected EARSMS behaving slightly better while the standard EARSMS predicts rather large positive values. On the outer side of the duct, all models agree rather well with each other but not with the measurements: the predicted shear stresses are by far too low. This difference is likely due to streamwise Taylor-Görtler vortices typically found in concave-curved boundary layers, see Ref. [17]. Such vortices should be distinguished from the turbulent motion because they are quite deterministic in structure. The present two-dimensional computations obviously are not capable of capturing such vortices, and the turbulence models are not designed to handle such non-turbulent instability phenomena. The effect of these vortices is, however, included in the measured stresses. The effect of this is also seen in the velocity profiles near the outer wall. Experiments indicate fuller profile than the computations due to the enhanced mixing of the streamwise mean-momentum.

5 CONCLUSIONS

Theoretically the differential Reynolds stress models have potential to model complex flows provided the modelling of each term is accurate enough. However, RSMs are very complicated which leads to time-consuming computations. Moreover, it is not at all straightforward to implement such a model in a flow solver. On the other hand, the basic models are fast and easy to implement, but the results may not only be slightly inaccurate but seriously wrong. Therefore, a choice between efficiency and accuracy needs to be made. Explicit algebraic Reynolds stress models are a reasonable compromise. The accuracy of a corresponding differential Reynolds stress model is partly lost, but a more robust, effective, and easier-to-handle turbulence model is obtained. By further development the behaviour of the EARSMS can be modified to resemble the corresponding RSM without losing the benefits of algebraic equations. The curvature correction method has proven effective considering curved flows. With the aid of the underlying differential Reynolds stress model the effect of the ignored transport terms can be found out, and furthermore, the ability of the curvature correction methods to approximate these terms can be reliably assessed. Thus a differential Reynolds stress model was needed in the FINFLO flow solver.

The implementation of a differential Reynolds stress model was examined in detail. The RSM, the curvature corrected EARS-models, and the standard EARSMS were assessed in a boundary layer on a convex wall with modest curvature effect and in a U-duct flow with strong curvature effect. The predicted results were compared with the experimental data. The results show that the implementation of the RSM can be considered successful. The curvature-corrected methods were observed to approximate the ignored convection of the anisotropy tensor quite well in both cases giving results that are clearly in a closer agreement with the differential Reynolds stress model than the standard EARSMS.

6 ACKNOWLEDGEMENTS

This work has partly been carried out within the HiAer Project (High Level Modelling of High Lift Aerodynamics). The HiAer project is a collaboration between DLR, ONERA, Royal Institute of Technology in Sweden, Helsinki University of Technology (HUT), Technical University of Berlin, Alenia, European Aeronautic Defence and Space Company EADS Airbus, QinetiQ, and Swedish Defence Research Agency (FOI). The project is managed by FOI and is partly funded by the European Union (Project Ref: G4RD-CT-2001-00448). This work is also supported by the Finnish Technology Agency (TEKES). The support from TEKES for this research is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] S. Wallin and A. Johansson. A complete explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 403:89–132, 2000.
- [2] S. Wallin and A.V. Johansson. Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 23(5):721–730, 2002.
- [3] F.R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [4] W. Rodi and G. Scheuerer. Calculations of curved shear layers with two equation turbulence models. *Physics of Fluids*, 26:1422–1436, 1983.
- [5] S.S. Girimaji. A Galilean invariant explicit algebraic Reynolds stress model for turbulent curved flows. *Physics of Fluids*, 9(4):1067–1077, April 1997.
- [6] T.B. Gatski and T. Jongen. Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 36(8):655–682, 2000.
- [7] A. Hellsten. Curvature corrections for algebraic Reynolds stress modeling: a discussion. *AIAA Journal*, 40(9):1909–1911, 2002.
- [8] K. Salo. Implementing a Reynolds stress turbulence model in the FINFLO flow solver. Report B-55, HUT, Laboratory of Aerodynamics, 2003. ISBN 951-22-6391-2.
- [9] T. Siikonen. An application of Roe's flux-difference splitting for the $k - \epsilon$ turbulence model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21(11):1017–1039, 1995.
- [10] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2):357–372, 1981.
- [11] A. Hellsten. On the solid-wall boundary condition of ω in the $k - \omega$ -type turbulence models. Report B-50, Helsinki University of Technology, Laboratory of Aerodynamics, 1998. ISBN 951-22-4005-X.
- [12] A. Hellsten. Some improvements in Menter's $k - \omega$ SST turbulence model. In *29th AIAA Fluid Dynamics Conference*, Albuquerque, New Mexico, USA, 1998. AIAA paper 98-2554.
- [13] S. Obayashi and K. Kuwahara. An approximate LU factorization method for the compressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 63(1):157–167, March 1986.

- [14] A. Hellsten, S. Wallin, and S. Laine. Scrutinizing curvature corrections for algebraic Reynolds stress models. In *32nd AIAA Fluid Dynamics Conference*. AIAA, 2002. AIAA paper 2002-2963.
- [15] R.M.C. So and G.L. Mellor. Experiment on convex curvature effects in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 60(1):43-62, 1973.
- [16] D.J. Monson and H.L. Seegmiller. An experimental investigation of subsonic flow in a two-dimensional U-duct. Technical memorandum, NASA TM 103931, 1992.
- [17] D.J. Monson, H.L. Seegmiller, P.K. McConnaughey, and Y.S. Chen. Comparison of experiment with calculations using curvature-corrected zero and two-equation turbulence models for a two-dimensional U-duct. In *AIAA 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, Seattle, Washington, June 1990. AIAA Paper 90-1484.

LENNON SIMULOINTI

J. ÖSTRÖM

TKK / Aerodynamiikan laboratorio
PL 4400, 02015 TKK
e-mail: john.ostrom@hut.fi

TIIVISTELMÄ

Lentokaluston rakenteiden väsymisiän määrittämiseen liittyvissä tutkimuksissa tarvitaan tietoa käsiteltävän lentokoneen liikehännän aikaisista ohjainpintojen poikkeutuksista aerodynaamisten kuormien määrittämistä varten. Tästä syystä on kehitetty HUTFLY2 -lennonsimulointiohjelmisto, joka mahdollistaa monimutkaisen lennonohjausjärjestelmän mallintamisen lentokonemallin osana. HUTFLY2-ohjelmistoon on nyt laadittu Suomen ilmavoimien F-18C Hornet -torjuntahävittäjää kuvaava lentokonemalli. Mallin sisältävän simulaattorin avulla voidaan tutkia ohjainpintojen asentoja liikehännän aikana ja määrittää vaadittavat lähtötiedot aerodynaamisten kuormien laskentaa varten. Tutkimus on osa laajempaa Hornet-torjuntahävittäjän eliniän määrittämiseen liittyvää Suomen ilmavoimien rahoittamaa tutkimushanketta. Tässä artikkelissa esitetään lyhyesti sekä lennonsimulointiohjelmiston että lentokonemallin komponentit ja toiminta.

1 JOHDANTO

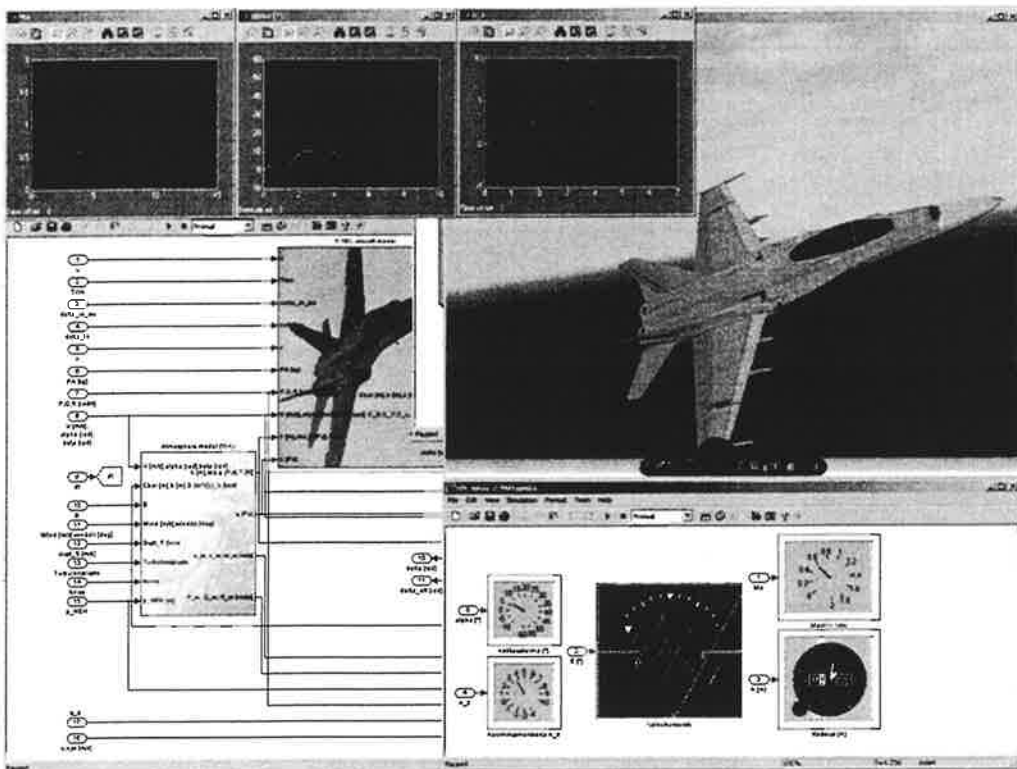
Lentomekaniikalla tarkoitetaan lentävien kappaleiden lentoratojen ja käyttäytymisen tutkimista ja ennustamista. Lentomekaniikan tutkimuksen yhtenä pääkeinona ovat tyypillisesti eritasoiset lentosimulaatiot, joissa kappaleiden lentoa lasketaan integroimalla ajan suhteen numeerisesti niiden liikettä kuvaavia, mekaniikan peruslaeista johdettuja differentiaaliyhtälöitä. Liikkeyhtälöitä varten on pystyttävä määrittämään lentokoneeseen kohdistuvat voimat ja momentit kullakin ajanhetkellä. Tähän vaaditaan tietämystä lentokoneen aerodynamiikasta, lennonohjausjärjestelmästä, massajakaumasta ja pulsiojärjestelmästä.

Lentokoneiden rakenneanalyysijä varten on pystyttävä määrittämään lentokoneeseen liikehtimisen aikana kohdistuvat aerodynaamiset kuormat. Niiden laskennallista määrittämistä varten on puolestaan oltava tietoa lentokoneen aerodynaamisesta muodosta. Lentokoneen ohjainpintoja poikkeuttamalla muutetaan lentokoneen aerodynaamista muotoa ja näin ollen ohjainpintojen poikkeutukset on määritettävä aerodynaamisia laskuja varten. Nykyaikaisten hävittäjälentokoneiden lennonohjausjärjestelmistä johtuen ohjainpintojen poikkeutusten määrittäminen ei ole suoraviivaista. Ohjainpintojen asennot eivät ole riippuvaisia vain hetkellisestä lentotilasta ja ohjaamon ohjainten asennosta. Ohjausjärjestelmä on ajasta riippuva ja ohjainpintojen asentoihin vaikuttaa myös aikaisempi liikehännä, kuormaustilanne sekä lentokoneen vaste liikkeen aikana. Näin ollen ohjausjärjestelmää ei voida tarkastella erillään, vaan tavoitteen saavuttaminen vaatii täydellisen lentosimulaation laadintaa. Tässä artikkelissa tutustutaan nykyaikaista hävittäjälentokonetta kuvaavaan lennonsimulointiohjelmistoon.

2 HUTFLY2 LENNONSIMULIOINTIOHJELMISTO

Edellä esitettyä tarvetta varten on kehitetty lennonsimulointiohjelmisto [1], joka mahdollistaa myös monimutkaisten ohjausjärjestelmien mallinnuksen simulaatioissa. Sivutuotteena on syntynyt myös reaaliajassa ohjattava lentosimulaattori. HUTFLY2 on *Matlab/Simulink* -ympäristössä [2] toimiva, kuuden vapausasteen lennonsimulointiohjelmisto, joka sisältää myös tarkasteluihin sopivia visualisointeja (kuva 1). Ohjelmisto on rakenteeltaan modulaarinen, joten sitä voidaan käyttää eri lentokoneiden lennon simulointiin. Simulaatiota voidaan käyttää joko eräajotyyppisenä tai reaaliaikaan synkronoituna, aika-askeleen ollessa välillä 0,001-0,01s. Reaaliaikaan synkronoinnin saavuttaminen riippuu täysin käytettävän lentokonemallin monimutkaisuudesta ja vaatii luonnollisesti riittävän tehokkaan tietokoneen. F-18C Hornet -lentokonemallia käytettäessä reaaliaikaan verrannollinen nopeus saavutetaan tietokoneella, jonka prosessorin kellotaajuus on luokkaa 2,0GHz ja muistin määrä 512Mt.

Lennonsimulointiohjelmisto on toteutettu *Simulink*-lohkokaaviona käyttäen vain peruslohkkoja. Näin toiminta on voitu varmistaa myös minimilisenssillä ja käännettäessä malli *Real-Time Workshop* -lisäosalla [2] nopeammin suoritettavaksi koodiksi. Laajuudeltaan simulaattori käsittää lentokonemallista riippuen noin 4000 lohkoa. Simulaattorin modulaarisuus on toteutettu liittämällä lentokonemalli simulaattoriin yhtenä osana, joka sisältää lennonohjausjärjestelmän, aerodynaaminen mallin, massajakaumamallin sekä moottorimallin. Lohkokaavioitasolla on pyritty ottamaan huomioon kaikki mahdolliset riippuvuudet alijärjestelmien välillä siirrettävissä signaaleissa. Simulaattorin muokkaaminen tarvittaessa on helppoa, mikä tosin saattaa aiheuttaa muutostarpeen lentokonemallin osiin. Ohjelmisto sisältää alkutilanteen määrittystä, ohjaustavan valintaa, simulaation suoritusta ja tulosten jatkokäsittelyä helpottavan valikkotyyppisen käyttöliittymän.



Kuva 1. HUTFLY2-simulaattori käytössä

Simulaatio-ohjelmistossa käytetyt visualisoinnit perustuvat pääosin VRML (*Virtual Reality Modeling Language*) -grafiikkaan [3]. Simulaation aikana lentokoneen lentoa voidaan tarkastella reaaliajassa erillisen kolmiulotteisen näkymän avulla (*Virtual Reality toolbox* [2]). Lasketusta lennosta voidaan tallennettujen tulosten perusteella tallentaa tiedostoon animaatio kolmiulotteisessa maailmassa. Animaatioita voidaan tarkastella vapaasti saatavilla olevaa selaimen lisäosaksi asennettavaa ohjelmaa käyttäen. Lennon laskennan aikana voidaan lentokoneen liiketilaa tarkastella myös *ActiveX*-komponentein (*Dials&Gauges toolbox* [2]) toteutetun yksinkertaisen lentokonemittariston avulla. Simulaatiota voidaan ohjata tiedostolla, muuttujilla tai tietokoneeseen kytketyillä ohjaimilla. Ohjaustavat mahdollistavat täten myös koelennoilla tallennettujen ohjauskomentojen syöttämisen simulaatioon tai lentosimulaattorimaisen pelaamisen.

2.1 ILMAKEHÄMALLI

Ilmakehämalli pitää sisällään maan ilmakehän stationaarit ominaisuudet [4] sekä epästationaarit ominaisuudet [5,6] 32km korkeuteen asti. Laskettavia stationaareja suureita ovat ilmanpaine, lämpötila ja tiheys, joiden avulla voidaan edelleen määrittää kineettinen paine ja Machin luku. Epästationaareja suureita ovat tuulien, puuskien ja turbulenssin aiheuttamat nopeus- ja kulmanopeuskomponentit. Tuuli- ja puuskaprofiilien sekä kuuden vapausasteen turbulenssimallin avulla voidaan tutkia lentokoneen vastetta ilmakehän häiriöihin. Lisäksi voidaan analysoida kohinaisten takaisinkytkentäsignaalien vaikutusta lennonohjausjärjestelmän toimintaan ja aikaansaada realistinen ympäristö tarkasteluille.

2.2 LIIKEYHTÄLÖT JA ASENNON ESITTÄMINEN

HUTFLY2 on lentokoneen lentoa tasaisen maan päällä laskeva kuuden vapausasteen simulaattori. Lentokoneen rakenteella ei siis ole vapausasteita. Simulaattorissa käytetään jäykän koneen liikeyhtälöitä, joissa rakenteen elastisuus huomioidaan stabiliteettiderivaatioissa (kvasistaattisten poikkeamien menetelmä). Aerodynaamisten voima- ja momenttikertoimien sekä tiettyjen lentokonetta ja lentotilaa kuvaavien parametrien avulla voidaan määrittää lentokoneeseen vaikuttavat aerodynaamiset voimat ja momentit. Nämä käännetään sopivaan koordinaatistoon, huomioidaan todellisen painopisteaseman ja referenssiaseman ero sekä lisätään muut vaikuttavat voimat ja momentit (propulsiojärjestelmä ja maan vetovoima). Näin saatujen lentokoneeseen vaikuttavien voimien ja momenttien avulla voidaan määrittää paikka ja asento maahan sidotussa koordinaatistossa. Liikeyhtälöissä asennon määrittämiseen käytetään tavallisesti *Eulerin* kulmia [7]. Kulma ϕ tarkoittaa lentokoneen kallistuskulmaa, θ pystyasentokulmaa ja ψ lentosuuntaa. HUTFLY2-ohjelmassa käytetään *Eulerin* kulmien sijasta niin kutsuttua neljän parametrin menetelmää (*Quaternion method*) [8,9]. Näin *Eulerin* kulmia käytettäessä lentokoneen pystyasennoissa esiintyvät singulariteetit voidaan välttää. Lentokoneen asennon määrittäminen neljän parametrin menetelmää käyttäen suoritetaan määrittämällä ensin lentokoneeseen kohdistuvien momenttien avulla kulmakihtyvyydet:

$$\dot{\omega} = -J^{-1}(\omega \times (J\omega + H)) + J^{-1}M \quad (1)$$

jossa J on inertiaatriisi (3x3), alkioina lentokoneen hitausmomentit ja -tulot. H on pyörienvien osien, kuten moottorien ahtimien ja turbiinien, kulmaliikemääriä kuvaava vektori (3x1) ja M lentokoneeseen kohdistuvia momenteja kuvaava vektori (3x1).

Lentokoneen kulmanopeuksia kuvaavat vektori ω ja siitä laajennettu matriisi Ω_q ovat seuraavat:

$$\omega = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \Omega_q = \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

joissa P on kulmanopeus lentokoneen x -akselin, Q y -akselin ja R z -akselin suhteen. Akselit on esitetty kuvassa 2. Yhtälöstä 1 integroitujen kulmanopeuksien avulla voidaan määrittää lentokoneen uusi asento neljän parametrin menetelmällä integroimalla yhtälöä

$$\dot{q}_p = -\frac{1}{2} \cdot \Omega_q q_p + \lambda \cdot q_p \quad (3)$$

jossa q_p on neljä asentoparametria (q_0, q_1, q_2 ja q_3) sisältävä vektori. *Eulerin* teoreeman mukaan mikä tahansa reaalin yhden koordinaattijärjestelmän kierto toisen suhteen voidaan kuvata kierrolla tiettyyn kulmaan yhden kiinteän akselin suhteen. Tässä esitystavassa kolme ensimmäistä parametria ($q_0 \dots q_2$) ovat x -, y -, ja z -suuntaiset vektorit maahan sidotussa koordinaatistossa, jotka kuvaavat koneen pituusakselin. Viimeinen parametri (q_3) kuvaa kierron tämän akselin suhteen. Vektori on normeerattu pituudeltaan arvoon yksi, jonka ylläpitämiseksi integroinnissa on käytettävä ryömintäkorjausta. Ryömintäkorjauskertoimen voidaan määrittää seuraavasti:

$$\lambda = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \quad (4)$$

Neljän parametrin menetelmän avulla esitetystä asennosta päästään suuntakosinimatriisin (B) avulla havainnolliseen *Eulerin* kulmiin perustuvaan asentomäärittelyyn. *Eulerin* kulmien ja neljän parametrin esityksen väliseksi yhteydeksi suuntakosinimatriisin kautta saadaan:

$$B = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot (q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & 2 \cdot (q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) \\ 2 \cdot (q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot (q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) \\ 2 \cdot (q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) & 2 \cdot (q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

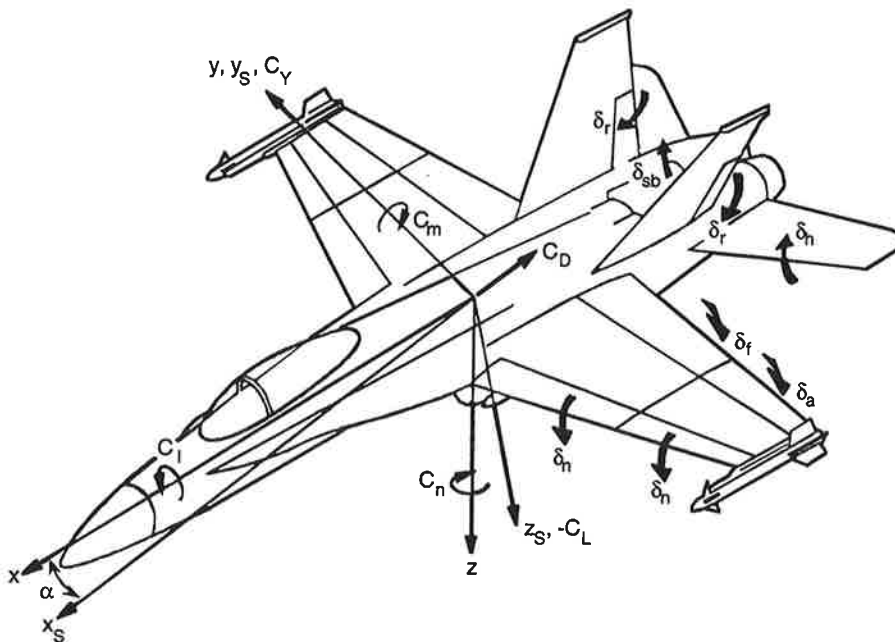
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{b_{23}}{b_{33}} \right) \quad \theta = -\sin^{-1}(b_{13}) \quad \psi = \tan^{-1} \left(\frac{b_{12}}{b_{11}} \right)$$

jossa b_{ij} -termit ovat B -matriisin alkioita. Muunnoksessa esiintyvä mahdollinen singulariteetti vältetään sopivalla ATAN-funktiolla. Suuntakosinimatriisia tarvitaan myös koordinaatistomuunnoksiin liikeyhtälöissä, joten sen laskenta ei aiheuta ylimääräistä työtä.

3 LENTOKONEMALLI

Lentokonemallin tulee kuvata mahdollisimman tarkasti lentokoneen aerodynamiikka, lennonohjausjärjestelmä, massajakauma sekä propulsiojärjestelmä. HUTFLY2-ohjelmiston kehitysvaiheessa käytettiin saatavilla ollutta F-16A -hävittäjälentokonetta kuvaavaa mallia. Tässä käsiteltävä lentokone, F-18C Hornet, on pääosin alumiinirakenteinen yksipaikkainen kaksimoottorinen Suomen ilmavoimien käytössä oleva torjuntahävittäjä. Lentokonemallia voidaan helposti muokata käsittämään myös kaksipaikkainen D-versio. F-18C -torjuntahävittäjässä on

kaikkiaan 11 itsenäistä digitaalisen lennonohjausjärjestelmän kontrolloimaa ohjainpintaa. Ohjainpinnat, niiden poikkeutusten merkkisäännöt ja lentokoneen akselit on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2. F-18C Hornet lentokonemallin aerodynaamisten kertoimien sekä ohjainpintapoikkeutusten merkkisäännöt ja lentokoneen akselistot [10]

3.1 AERODYNAAMINEN MALLI

Lentokoneen aerodynamiikan kuvaaminen on erittäin monimutkaista erityisesti liikehtimiskykyisten hävittäjälentokoneiden tapauksissa. Aerodynaaminen malli pitää sisällään tuulitunnelikokein sekä koelennoin määritettyjä voima- ja momenttikertoimien tekijöitä (stabiliteettiderivaattoja), joiden avulla muodostetaan lentotilaa vastaavat voima- ja momenttikertoimet (C_D , C_Y , C_L ja C_l , C_m , C_n). Kertoimista puolestaan saadaan dimensiolliset voimat ja momentit kertomalla ne kineettisellä paineella, valitulla referenssipinta-alalla ja momenttien osalta myös sopivilla referenssipituuksilla. Stabiliteettiderivaatat on tallennettu taulukoihin, joista ne haetaan lineaarisella interpolaatiolla lentotilan mukaisesti. Tyypillisiä hakuparametreja pituusliikkeen stabiliteettiderivaatoille ovat kohtauskulma, Machin luku ja lentokorkeus, lateraaliliikkeen stabiliteettiderivaatoille myös sivuluisukulma. Kuten aikaisemmin todettiin, stabiliteettiderivaatat sisältävät lentokoneen rakenteen elastisuuden aerodynaamiset vaikutukset. Tyypillisesti vaikutus huomioidaan erillisen, esimerkiksi kineettisestä paineesta riippuvan, korjauskertoimen avulla. Aerodynaamiset voima- ja momenttikertoimet muodostetaan stabiliteettiderivaattoja sisältävien polynomilausekkeiden avulla. Esimerkiksi F-18C:n mallissa vastuskerroin määritetään seuraavasti:

$$C_D = C_{D_{basic}} + C_{D_{corr}} + C_{D_{\delta_n}} \cdot \delta_n + C_{D_{\delta_f}} \cdot \delta_f + (C_{D_{e_R}} + C_{D_{e_L}}) + C_{D_{\delta_{SB}}} \cdot \delta_{SB} + C_{D_x} \quad (6)$$

jossa vastuskerroin on jaettu seuraaviin osiin:

$C_{D_{basic}}$ Machin luvusta ja kohtauskulmasta riippuva perusvastus

$C_{D_{\delta_n}}$, $C_{D_{\delta_f}}$ johto- ja jättöreunalaippapoikkeutusten (δ_n , δ_f) aiheuttamat vastuslisät

$C_{D_{e_R}}$ ja $C_{D_{e_L}}$ oikean ja vasemman korkeusvakaimen poikkeutusten aiheuttama vastus

$C_{D_{corr}}$ vastuskorjaus normaalivoimakertoimen ja Machin luvun mukaan

$C_{D_{\delta_{SB}}}$ lentojarrupoikkeutuksen (δ_{SB}) aiheuttama vastuslisä

C_{D_x} muut vastuslisät, joita ovat esimerkiksi ulkoisten kuormien vastus

Aerodynaamisen mallin sisältämä datapisteiden määrä vaihtelee tyypillisesti muutamasta tuhannesta kymmeneen tuhansiin. HUTFLY2-simulaattoriin muodostettu F-18C:n aerodynaaminen malli sisältää noin 108000 datapistettä 77 taulukossa. Taulukkojen dimensioiden määrä vaihtelee yhdestä neljään. Datapisteiden suuri määrä johtuu matriisien hakukriteerien yhdistämisestä, jolloin yhdellä esihaualla voidaan määrittää usean stabiilitetiderivaatan indeksit. Indeksihakujen määrää (27) on näin saatu vähennettyä noin kolmanneksella ja mallin toimintaa nopeutettua. Mallin aerodynaaminen data on talletettu helposti tarkasteltavassa ja muokattavassa muodossa Excel-tilaukoihin, joista se voidaan apuohjelman avulla päivittää automaattisesti *Matlabiin*.

F-18C -lentokone-malli on muodostettu valmistajan dokumenttien [10,11] perusteella ja se kattaa käytännössä koko lentokoneen lentoalueen suuria negatiivisia kohtauskulmia lukuun ottamatta. Malli kuvaa lentokoneen aerodynaamiikkaa "Fighter Escort"-kuormauksessa (2 AIM-9 -ohjusta siivenkärkiripustimissa ja 2 AIM-7 -ohjusta runkoripustimissa) ja "Auto-flap-up"-konfiguraatiossa (AFU). Mallin nopeusalue on Mach 0,2-2, kohtauskulma-alue n. -10-90°, sivuluisikulma-alue -20-20° ja lentokorkeusalue 0-60000ft. Alueiden ulkopuolella parametrien arvot ekstrapoloidaan. Aerodynaamiseen malliin voidaan tarvittaessa lisätä lentoonläh- ja laskeutumiskonfiguraatiossa käytettävät taulukot.

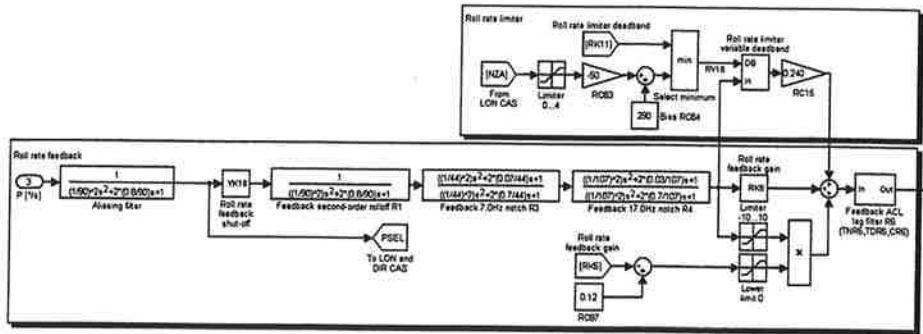
3.2 LENNONOHJAUSJÄRJESTELMÄN MALLI

Hävittäjälentokoneiden ohjaustekniikalle on tyypillistä useiden ohjainpintojen poikkeuttaminen samanaikaisesti tietyn liikkeen aikaansaamiseksi. Koneen lennonohjausjärjestelmä päättää lentäjän ohjauskomentoihin ja kuhunkin lentotilaan sopivista ohjainpintojen poikkeutuksista. Lentäjä ei välttämättä tiedä, mitä ohjainpintaa tiettyssä tilanteessa poikkeutetaan. Simuloitaessa nykyaikaisen hävittäjälentokoneen lentoa onkin selvää, että lennonohjausjärjestelmä lentotilaa mittaavine sensoreineen on pystyttävä mallintamaan tarkasti.

F-18C -malliin on mallinnettu viimeisin versio Suomen ilmavoimien koneissa olevasta digitaalisesta lennonohjausjärjestelmästä. Mallinnettu lennonohjausjärjestelmä on hieman yksinkertaistettu valmistajan dokumenteissa [12,13] esitetystä. Lennonohjausjärjestelmän ja muiden sen tarkkailemien järjestelmien oletetaan toimivan häiriöttä, eikä signaalivalintalogiikoita tai toimintaa häiriötilanteissa ole mallinnettu. Tässä vaiheessa malli sisältää aerodynaamista mallia vastaavan lennonohjausjärjestelmän toimintatilan. Valmius muiden tilojen käyttöön on säilytetty ja järjestelmä voidaan hyvin pienin muutoksin saattaa toimimaan niissä. Lentoonläh- ja laskeutumisvaiheessa käytettävän "Power Approach"-tilan käyttäminen vaatii kuitenkin vastaavan konfiguraation mallintamisen aerodynaamiseen malliin.

Järjestelmä on mallinnettu *Simulink*-lohkokaaviona käyttäen peruslohkkoja, joita mallissa on noin 2500. Mallista on muodostettu sekä alkuperäisen järjestelmän mukainen diskreetti versio että jatkuva-aikainen approksimaatio. Diskreetin mallin suuresta laskentataajuudesta johtuen erot

mallien välillä ovat mitättömät. Esimerkkinä lennonohjausjärjestelmämallin rakenteesta on kuvassa 3 esitetty kallistusohjauskanavan kallistuskulmanopeustakaisinkytkentä.

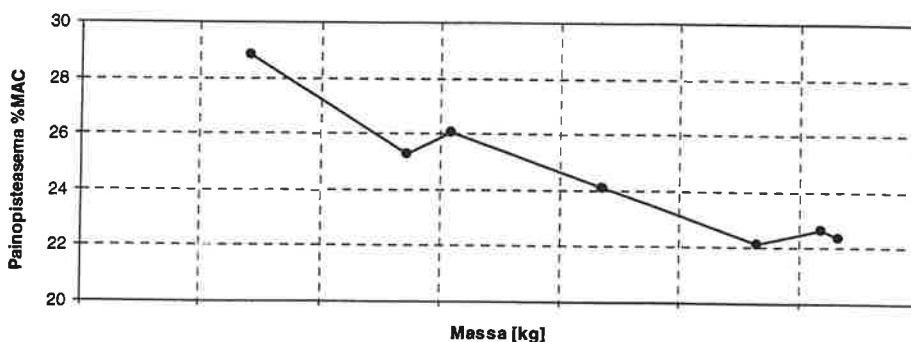


Kuva 3. F-18C:n lennonohjausjärjestelmän kallistusohjauskanavan osa

Aktuaattorimalleina käytetään valinnan mukaan joko monimutkaisia lohkokaaaviomalleja tai yksinkertaista siirtofunktiota sopivalla muutosnopeusrajoituksella. Aktuaattorimalleihin on myöhemmin tarkoituksena lisätä ohjainpinnan aerodynaamisen saranamomentin mukaan määrittyvä suurin muutosnopeus. Tällä hetkellä muutosnopeuden maksimiarvot ovat kuormittamattomien aktuaattoreiden arvoja.

3.3 MASSAJAKAUMAMALLI

Lentokoneen massa, hitausmomentit ja painopisteasema muuttuvat polttoaineen määrän ja kuormaustilanteen mukaan. Lentokoneen massajakaumamalli kuvaa näitä ominaisuuksia ja niiden muuttumista lennon aikana. Tarkimmissa massajakaumamalleissa otetaan huomioon myös polttoaineen loiskekulman vaikutus lentokoneen liikehtiessä. Koska F-18C:n aerodynaaminen malli sisältää tässä vaiheessa vain tietyn kuormauksen, rajoittuu massajakaumamalli tähän tilanteeseen. Näin ollen massa, painopisteasema ja hitausmomentit sekä -tulot ovat vain polttoaineen massan funktioita. Propulsiojärjestelmämallista saatavan polttoaineen massavirran avulla massajakaumamallissa määritetään uusi polttoaineen massa ja edelleen muut suureet. Suureiden määrittäminen on toteutettu aerodynaamista mallia vastaavasti taulukoista interpoloimalla. Kuvassa 4 on esitetty lentokoneen pituussuuntaisen painopisteaseman muuttuminen polttoaineen määrän funktiona, ja siitä voidaan havaita eri polttoainetankkien sijainnin vaikutus painopisteaseman siirtymiseen.



Kuva 4. Pituussuuntaisen painopisteaseman riippuvuus polttoaineen massasta

3.4 PROPULSIOJÄRJESTELMÄMALLI

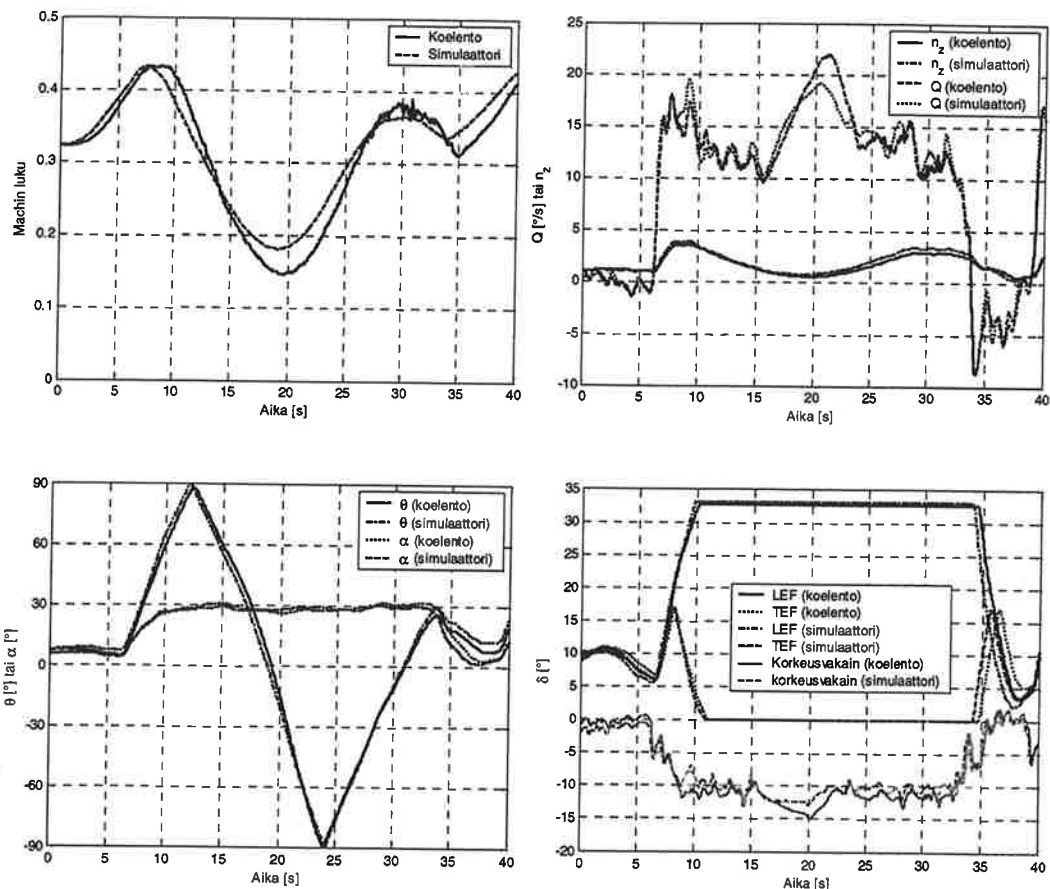
Lentokoneeseen vaikuttavat aerodynaamisten voimien ja momenttien sekä maan vetovoiman lisäksi propulsiojärjestelmän aikaansaamat voimat ja momentit. Niiden määrittämiseksi on mallinnettava lentokoneen propulsiojärjestelmä. Propulsiojärjestelmän malli voi olla yksinkertainen sopivilla viiveillä varustettu työntövoimataulukko tai monimutkainen tarkasti moottorin fysiikkaa kuvaava malli. Massajakaumamallia varten on pystyttävä mallintamaan polttoaineen massavirta. Moottorimallissa määritetään myös moottorien pyörievien osien kulmaliikemäärä, joka on verrannollinen moottorien pyörimisnopeuteen (~työntövoimaan). Simulaattori on toteutettu siten, että tarvittaessa propulsiojärjestelmämallin avulla voidaan kuvata myös työntövoimansuuntausta käyttävät moottorit.

F-18C:n mallissa käytetään yksinkertaista lähestymistapaa, koska tarkkaa tietoa moottorin toiminnasta ei ole ollut saatavilla. Lentokoneeseen sidottu koordinaatisto on valittu siten, että moottorien työntövoimavektori yhtyy x -akseliin. Moottorien työntövoima määritetään kaasukahvan asennon, ajan, Machin luvun ja lentokorkeuden funktiona interpoloiden muodostetuista työntövoimataulukoista. Moottorimalliin on lisätty viiveitä mallintamaan moottorin kiihtyvyyttä.

4 LENTOKONEMALLIN VALIDOINTI JA KÄYTTÖ

Edellä esitettyjen komponenttien avulla voidaan muodostaa tarkasteltua lentokonetta kuvaava lennonsimulointiohjelmisto. Simulaatioita voidaan ohjata eri tavoin ja niistä tuloksina saadaan lentokoneen rataa, asentoa, lentotilaa, ohjainpintojen asentoja ja muita tarkasteltavan lentokoneen ominaisuuksia kuvaavia parametreja. Ennen kuin tuloksia voidaan käyttää muissa tutkimuksen osa-alueissa, on niiden riittävästä oikeellisuudesta varmistuttava. Simulaattorissa käytettävän lentokonemallin validointi on ensiarvoisen tärkeää. Validoinnissa pyritään soveltamaan mahdollisimman laajasti tunnettua tietoa lentokoneen ja lennonohjausjärjestelmän toiminnasta. Validoinnin pääkeinoina olevia taajuusvaste- ja aikahistoriavertailuja voidaan suorittaa valmistajan dokumenteissa esitettyihin tietoihin. Aikahistoriavertailuja voidaan myös tehdä Suomessa koelennoilla tallennettuun dataan.

Esimerkkinä simulaation ja F-18C -lentokonemallin validoinnista ja toimivuudesta esitetään vertailu koelennolla lennetyyn silmukkaan. Koelennolla on tallennettu lentokoneen lentotilaa kuvaavat parametrit ja lentäjän ohjainliikkeet. Simulaattorilla on laskettu sama liike käyttäen koelennon lähtötilannetta ja tallennettuja lentäjän ohjausliikkeitä. Tärkeimmät lentotilaa kuvaavat suuret ja ohjainpintoa poikkeutukset on esitetty kuvassa 5.



Kuva 5. Lennetty silmukka; vertailu koelennon ja simulaattoritulosten välillä

Kuvaajista voidaan havaita, että lentokoneen vaste ja ohjainpintojen poikkeukset vastaavat koelentoilla tallennettuja melko hyvin. Virheitä aiheutuu erityisesti lentonopeuden eroista johtuen, koska lennonohjausjärjestelmän vahvistukset riippuvat pääasiassa juuri siitä. Ero lentonopeuksissa puolestaan johtuu pääosin moottorimallin antaman työntövoiman ja todellisen työntövoiman välisistä eroista. Ilman lämpötila ei tässä vaiheessa ole moottorimallissa mukana työntövoimaan vaikuttavana parametrina. Lisäksi koelennon kuormaus ei vastaa simulaatiossa käytettyä kuormausa. Massajakaumamallin suuret korjattiin koelentokuormauksista vastaaviksi, mutta aerodynaamisissa mallissa kuormauseroa ei voitu huomioida. Simulaattorissa oletettiin lentoarvoantureiden olevan ideaalisia. Todellisuudessa lentoarvojärjestelmän mitaamat parametrit saattavat erota todellisuudesta huomattavasti. Ilmakehä oletettiin standardi-ilmakehäksi ja näin ollen paikallisen lämpötilan vaikutus ilman tiheyteen ja Machin lukuun jää huomioimatta. Kaikki nämä tekijät voivat muuttaa tuloksia suuntaan tai toiseen.

Simulaattorin käyttäminen on laaditun käyttöliittymän avulla kohtuullisen yksinkertaista. Selvänä puutteena voidaan kuitenkin mainita tasapainotilan määrityksen mahdollistavan aliohjelman puute. Näin ollen lentokoneen lähtötilanne tulee määrittää tarkasti ennen simulaation suorittamista. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi suorittamalla simulaatio ilman ohjainkomentoja ja tallentamalla sopiva tila varsinaisen simulaation lähtötilanteeksi. Tämä on mahdollista, koska lennonohjausjärjestelmä pyrkii stabiiloimaan lentokoneen vaakalento.

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

F-18C -hävittäjälentokoneen eliniän määrittämiseen tähtäävissä tutkimuksissa pyritään selvittämään lentokoneeseen kohdistuvat kuormitukset. Aerodynaamisten laskujen lähtötiedoiksi vaaditaan tieto lentokoneen aerodynaamisesta muodosta, johon ohjainpintoikkeutuksilla vaikutetaan. F-18C -lentokoneen mallilla varustetulla HUTFLY2-lennonsimulointiohjelmistolla voidaan määrittää ohjainpintoikkeutukset lentokoneen liikehtiessä. Simulaation on todettu toimivan luotettavasti ja tuottavan riittävän tarkkoja tuloksia tämän kaltaisiin tutkimuksiin. Simulaattoria ja lentokonemallia pyritään tulevaisuudessa kehittämään. Aktuaattorimalleihin lisätään aerodynaamisten saranamomenttien vaikutukset ja itse ohjelmaan kehitetään tasapainotilanmäärittämisrutiini. Aerodynaamiseen malliin ja lennonohjausjärjestelmämalliin lisätään "Power Approach"-konfiguraatio tarpeen mukaan ja aerodynaamisiin taulukoihin lisätään eri kuormausvaihtoehtoja.

LÄHTEET

- [1] Öström J., Hävittäjälentokoneen lennonohjausjärjestelmän simulointi, Teknillinen Korkeakoulu, Diplomityö, Espoo, 2002, 153s
- [2] MathWorks Inc. internetsivusto, <http://www.mathworks.com/>
- [3] web 3D Consortium internetsivusto, <http://www.web3d.org/>
- [4] Equations for Calculation of International Standard Atmosphere and Associated Off-Standard Atmospheres, ESDU 77022, Lontoo, 1977, 17s
- [5] Flying Qualities of Piloted Airplanes, MIL-F-8785C, 1980, 93s
- [6] NASA-HDBK-1001, Section 2: Winds, August 11, 2000
- [7] Roskam J., Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls Part I, DARcorporation, 1998, ISBN 1-884885-17-9, 576s
- [8] Stevens B.L. ja Lewis F.L., Aircraft Control and Simulation, John Wiley & Sons Inc., 1992, ISBN 0-471-61397-5, 617s
- [9] Cooke J. M. et al, NPSNET: Flight Simulation Dynamic Modelling Using Quaternions, Naval Postgraduate School, 1994, 23s
- [10] MDC A7247, R. J. Pelikan and R. L. Swingle, F/A-18 Stability and Control Data Report, Vol I: Low Angle of Attack, McDonnell Aircraft Company, 1982
- [11] MDC A7247, C. R. Hobbs, F/A-18 Stability and Control Data Report, Vol II: High Angle of Attack, McDonnell Aircraft Company, 1981
- [12] MDC A7813, Groll, D. B., R. K. Hess, W. D. Hodges, and R. F. Moomaw, F/A-18 Flight Control System Design Report, Volume I, System Description and Theory of Operation, McDonnell Aircraft Company, 1996
- [13] MDC A7813, Groll, D. B., R. K. Hess, W. D. Hodges, and R. F. Moomaw, F/A-18 Flight Control System Design Report, Volume II, Flight Control System Analysis – Inner Loops, McDonnell Aircraft Company, 1984

ELEKTRONIIKAN JÄÄHDYTYKSEN HAASTEITA VIRTAUSLASKENNALLE

K. KEIKKO

PIC Engineering Oyj, Electronics
Elektroniikkatie 3
FIN-90570 OULU, FINLAND

TIIVISTELMÄ

Työn tavoitteena on kuvata ongelmakenttää, joka kytkeytyy suutinteknologioiden (rajoitettu suutinvirtaus, pisaroitu suihkuvirtaus) ja mikrokanavistojen soveltamiseen elektroniikan jäähdytyksessä. Työssä keskitytään niihin fysikaalisiin ilmiöihin, jotka kytkeytyvät lämmönsiirtoon jäähdytettävältä pinnalta virtausaineeseen. Lisäksi otetaan huomioon sovelluskohteen asettamat erityisvaatimukset.

Suutinteknologiaihin ja mikrokanavistoihin pohjautuvia jäähdytysprosesseja on vaikea hallita, koska fysikaalisten ilmiöiden määrä on suuri. Siten prosesseihin vaikuttavia parametrejakin on paljon, kuten virtausaineen neste- ja kaasufaasin aineominaisuudet (tiheys, viskositeetti, ominaislämpö, lämmönjohtavuus, pintajännitys), virtausnopeus ja suutinparametrit (halkaisija, muoto, etäisyys jäähdytettävästä pinnasta, suihkun kulma). Näiden parametrien kytkeytyminen lämmönsiirtoprosessiin on tunnettava ennen kuin teknologioita voidaan soveltaa elektroniikan jäähdytykseen.

1. JOHDANTO

Elektroniikan lämpövirrantiheydet kasvavat pakkaustiheyksien kasvaessa sekä miniatyyrisoinnin ja puolijohdetekniikan kehityksen seurauksena. On ennustettu, että komponenttitasolla maksimi-arvo nousee yli 100 W/cm^2 seuraavan kymmenen vuoden aikana /1/. Puhallinjäähdytyksen teho on riittämätön näin suurille lämpövirrantiheyksille. Kaupallisesti saatavilla olevat vesijäähdytteisetkään jäähdytyslevyt eivät ole riittävän tehokkaita jäähdyttämään näin suuria tehotiheyksiä. Pinta-alaltaan suhteellisen suurien jäähdytyslevyjen soveltuvuus on muutenkin huono, koska elektroniikassa huipputehot ovat tyypillisesti paikallisia. Kehitteillä onkin paikallisia jäähdytysmenetelmiä, joiden tehokkuus pohjautuu lämmönsiirtoketjun johtumisvastusten minimoimiseen sekä tehokkaaseen konvektiiviseen lämmönsiirtoon nesteessä.

Työssä kuvataan paikallisia jäähdytysmenetelmiä, joiden tehot kirjallisuudessa esitettyjen kokeellisten tulosten perusteella riittävät elektroniikan kasvavien lämpövirrantiheyksien jäähdytykseen. Potentiaalisina paikallisina jäähdytysmenetelminä suurille lämpövirrantiheyksille nähdään suutinteknologiat (rajoitettu suutinvirtaus ja suihkuvirtaus) ja mikrokanavistot. Molemmissa teknologioissa toimitaan virtausteknisesti vaativissa oloissa. Virtauslaskentaohjelmistot eivät tarjoa insinööriä varten näiden jäähdytysmenetelmien simulointiin. Alan lehdissä julkaistu materiaali on rajoittunut kokeellisiin tuloksiin.

Jäähdytysjärjestelmän suunnittelussa on otettava huomioon ne erityisvaatimukset, jotka kohdistuvat elektroniikkatuotteisiin (Taulukko 1). Luotettavuus on kriittisin tekijä. Järjestelmän on toimittava häiriöttömästi ääriolosuhteissakin, jotka saattavat vaihdella ääripäästä toiseen samalla tuotteella. Komponenttien liitoslämpötilat on kuitenkin pystyttävä pitämään alhaisina ja sovelluskohteesta

riippuen saatetaan vaatia myös tasaista pintalämpötilaa. Lisäksi toimintaympäristön lämpötila saattaa olla korkea, jolloin jäähdytysaineen ja jäähdytettävän pinnan välinen lämpötilaero jää pieneksi. Useissa sovelluskohteissa tehotasot vaihtelevat ajan funktiona.

Elektroniikkatuotteita koskevat tiukat standardit ja direktiivit. Lämpötekniisten vaatimusten lisäksi lämpösuunnittelu kytkeytyy esim. meluun ja turvallisuuteen, ja siten niitä koskevat standardit on otettava huomioon.

Taulukko 1. Elektroniikan asettamat erityisvaatimukset jäähdytysjärjestelmälle.

Vaatus elektronikkatuotteelle	Vaatus jäähdytysjärjestelmälle
Luotettavuus	- häiriötön toiminta
Toimivuus - alhaiset liitoslämpötilat - tasainen pintalämpötila	- toimittava pienellä jäähdytettävän pinnan ja virtausaineen välisellä lämpötilaerolla - hallittu jäähdytysprosessi
Vaihtelevat käyttöolosuhteet - laaja lämpötila-alue (n. -50...100 °C) - lämpötilasyklit - värinä - partikkelit	- nesteen kiehumispiste riittävän korkea - nesteen jäätymispiste riittävän alhainen - nesteen aineominaisuuksien lämpötilariippuvuus huomioitava - lämpölaajeneminen huomioitava - mekaanisesti luja rakenne - suljettu kierto
Valmistettavuus	- valmistettava rakenne
Käytettävyyys	- kevyt - purettavissa huoltoa varten
Kustannukset	- edulliset valmistus-/käyttökustannukset - liuoskierto
Standardit / direktiivit, esim: - melu - paloturvallisuus - ympäristö	- ei suuria nopeuksia / paineiskuja - nesteen leimahduspiste riittävän korkea - ympäristöä vähän kuormittavat materiaalit - suljettu liuoskierto

2. METODIT

2.1. Soveltuvat virtausaineet

Vesiliuoksien käyttö jäähdytysnesteenä rajoittuu epäsuoraan jäähdytykseen, koska vesi ei ole yhteensopiva elektroniikkakomponenttien kanssa. Toimintaympäristön lämpötilan ollessa 0 °C alapuolella veden sijasta on käytettävä alhaisemman jäätymispisteen omaavia vesiliuoksia. Epäsuoraan elektroniikan jäähdytykseen soveltuvina vesiliuoksina on esitetty esim. propyleeniglykoli- tai vetyperoksidiliuoksia /2/. Propyleeniglykolin viskositeetti on huomattavasti korkeampi kuin veden (Taulukko 2), mikä heikentää sen soveltuvuutta. Vetyperoksidin tapauksessa on otettava huomioon, että sen ominaisuudet riippuvat voimakkaasti ja usein epämonotonisesti seossuhteesta /16/. Myös metanolia on esitetty potentiaalisena vaihtoehtona /2/, mutta sen alhainen leimahduspiste (12 °C) rajoittaa käyttöä elektroniikkasovelluksissa.

Elektroniikan suoraan jäädytykseen soveltuvat dielektriset virtausaineet. Tutkimuksissa eniten käytetyt virtausaineet ovat FC-72 ja FC-87. FC-87:n alhaisen kyllästyslämpötilan seurauksena saattaa pumpun kavitaatio aiheuttaa ongelmia, ja siten sen käyttö elektroniikkasovelluksissa on rajallista [3]. FC-nesteiden lämpötekniset ominaisuudet ovat huomattavasti heikompia kuin vedellä (Taulukko 2). Myös pintajännitys on oleellisesti alhaisempi.

Taulukko 2. Aineominaisuuksia (Lämpötilassa $T=25\text{ }^{\circ}\text{C}$, ellei toisin mainita).

Neste	T_{kieh}	$T_{\text{jääh}}$	ρ	η	σ	λ	c_p	ΔH_v	Ref.
	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	kg/m^3	Pas	N/m	$\text{W/m}^{\circ}\text{C}$	$\text{J/kg}^{\circ}\text{C}$	kJ/kg	/ /
vesi	100	0	996	$8,7\text{e-}4$	$7,2\text{e-}2$	0,61	4073	2500	2, 4
propyleeni-glykoli, 50 til-%	220	-27	1039^2	$5,1\text{e-}3^2$		$0,35^2$	3490	1567	2, 5
vetyperoksidi, 50 p-%	114	-52	1190	$1\text{e-}3$	$7,6\text{e-}2^1$	0,54	3352^1	1950	6, 7
FC-72	56		1680	$6,4\text{e-}4$	$1\text{e-}2$	0,057	1100	88	8
FC-77	97		1780	$1,3\text{e-}3$	$1,3\text{e-}2$	0,063	1100	89	8
FC-87	30		1650	$4,5\text{e-}4$	$0,9\text{e-}2$	0,056	1100	103	8

Viittaukset : ¹ $T=20\text{ }^{\circ}\text{C}$, ² $T=27\text{ }^{\circ}\text{C}$.

2.2. Soveltuvat jäädytysteknologiat

2.2.1. Rajoitettu suutinvirtaus (confined jet impingement)

Rajoitettua suutinvirtausta pidetään potentiaalisena menetelmänä suurten paikallisten lämpövirrantiheyksien jäädytykseen. Suutinvirtauksen soveltuvuutta elektroniikan suoraan jäädytykseen on tutkittu kokeellisesti. Virtausaine FC-72 on suihkutettu suoraan jäädytettävän sirun pintaan. Taulukossa 3 on esitetty testiparametrit. Myös erilaisia suutingeometrioita on testattu. Lämpötilaero jäädytettävän pinnan ja nesteen välillä on ollut $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ yksifaasivirtauksessa. [9]

Taulukko 3. Testiparametrit suutinvirtauksen tutkimuksessa. [9]

suuttimen leveys, W	0,127 – 0,508 mm
kanavan korkeus, H	0,127-5,08 mm
H/W	1-20
virtausnopeus	0,5-12 m/s

Tutkimusten perusteella suuttimen muodolla ei ole vaikutusta yksifaasivirtauksen lämmönsiirtoon. Suuttimen suoran osuuden pituuden suhde suutinaukon leveyteen pitää olla riittävän iso, jotta saadaan tasainen virtaus törmäyskohtaan ja virtauskanavaan. [9]

Suutinaukon muodolla on oleellinen vaikutus suutinvirtauksen lämmönsiirtoon. Suorakaiteen muotoinen suutinaukko soveltuu parhaiten elektroniikkakomponenttien jäädytykseen, koska sillä voidaan saada tasainen pintalämpötilajakauma. Törmäysalue on suurempi kuin pyöreällä aukolla ja virtausnopeus kanavassa on likimain vakio toisin kuin pyöreällä aukolla, jolloin virtausnopeus pienenee reunoja kohti. Pyöreän muotoisen suutinaukon ongelmana onkin epätasainen lämpötilajakauma jäädytettävällä pinnalla, koska lämmönsiirto heikkenee törmäyskohdan ympärillä nesteen levitessä reunoille. Tasaisempi pintalämpötila saataisiin useaa suutinta käyttäen,

mutta tällöin vierekkäisten suutinvirtausten törmäyskohtaan muodostuu vaikeasti hallittava virtauskenttä pyörteineen ja rajakerroksen irtoamiskohtineen. /9/

Tutkimusten mukaan lämmönsiirron tehokkuus riippuu voimakkaasti suutinaukon leveydestä, mutta ei kanavan korkeudesta. Jos aukon leveys on pieni suhteessa jäähdytettävään pintaan, törmäysalueen siirtoprosessien sijaan lämmönsiirron tehon määrää kanavavirtaus. Tällöin suutinvirtauksen nopeus ja jäähdytettävän pinnan koko ovat määrääviä tekijöitä. Nesteiden tilavuusvirran minimoimiseksi voidaan kasvattaa virtausnopeutta käyttämällä mahdollisimman pientä suutinaukkoa, mutta samalla suuttimen painehäviö kasvaa. Tasaisen, ennustettavan virtauksen saamiseksi virtausnopeuden pitää olla riittävän suuri. Alhaisilla suutinaukon virtausnopeuksilla kanavistoon muodostuu takaisinvirtausalueita. /9/

Pinnan ja nesteen välisiä siirtoprosesseja voidaan tehostaa kasvattamalla siirtopinta-alaa pinnan mikrorakenteilla. Kokeellisesti on tutkittu 1,02 mm syvyisiä 0,305 mm levyisiä uria, sekä 1,02 mm korkuisia neliskanttisia ripoja, joiden sivun pituus on 0,305 mm. Näiden avulla lämmönsiirto tehostuu huomattavasti, eikä painehäviö nouse oleellisesti, koska suurin häviö tulee suuttimessa. /10/

Faasimuutoksen hyödyntämistä rajoitetussa suutinvirtauksessa on myös tutkittu kokeellisesti. Etuna on suurten lämpövirtojen siirtyminen pienellä pintalämpötilan kasvulla. Kuplakiehumisen alueella toimittaessa pitää varmistua, ettei pinta kuivu ja ylikuumene. Kriittinen lämpövirrantiheys (CHF) ja pinnan kuivumismekanismi riippuvat virtausnopeudesta. /10, 11/

2.2.2. Pisaroitu suihkuvirtaus (spray cooling)

Pisaroitu suihkuvirtaus on toinen potentiaalinen menetelmä suurten paikallisten lämpövirrantiheyksien jäähdytykseen. Elektroniikkasovelluksissa suihku muodostetaan paineen avulla (plain orifice spray). Korkeapaineisen ilman avulla atomisoitu suihku vaatisi ilman poiston liuoskierrosta. Ilman läsnäolo monimutkaistaisi myös kondensoitumista. Suutinvirtaus on herkkä suuttimen virtaushäiriöille, joita voi syntyä pienienkin valmistusvirheiden seurauksena tai suuttimen tukkiutuessa. Suuttimateriaalin tulee olla korroosion ja eroosion kestävä, ja nestekierrossa tulee olla suotimet tukkeutumisen estämiseksi. /12/

Virtauksen pisaroitumiseen vaikuttavat suutinaukon ylävirran turbulenttiset voimat sekä alavirran aerodynaamiset voimat. /12/ Pisaroitumisen seurauksena muodostuu eri kokoisia pisaroita, jotka virtaavat eri nopeuksilla ja eri liikeratoja pitkin. Pisaroiden kuvaukseen käytetään Sauterin halkaisijaa, joka riippuu Weberin ja Reynoldsin luvuista. Suutinpaineen ja suuttimen etäisyyden jäähdytettävältä pinnalta on oltava riittävän isoja, jotta suihku on hydrodynaamisesti täysin kehittynyt ennen törmäystä. Heikko pisaroituminen heikentää oleellisesti lämmönsiirtoa. /3/

Pisaroidun suihkuvirtauksen soveltuvuutta elektroniikkakomponenttien suoraan jäähdytykseen on tutkittu kokeellisesti. Virtausaineena on käytetty FC-72:a, jota on suihkutettu suoraan jäähdytettävän sirun pintaan. Komponenttikotelon sisällä on ollut myös lauhdutin. Taulukossa 4 on esitetty testiparametrit. /3/

Taulukko 4. Testiparametrit suihkuvirtauksen tutkimuksessa. /3/

suutinaukon halkaisija	0,762-1,7 mm
suihkukulma	46,4-55,8 °
alijäähdytys	13-33 °C
tilavuusvirta	$3,53-7,57 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$
Sauterin halkaisija, SMD	110-225 μm

Optimaalinen jäähdytys saadaan silloin, kun suihkuvirtaus kohdistuu jäähdytettävän sirun koko pinnan alueelle. Tämä säädetään suutinkulmalla ja suuttimen etäisyydellä pinnasta. Oikein kohdennetulla suihkulla saavutetaan tasainen pintalämpötila. Sekä yksifaasilämmönsiirto että CHF kasvavat nesteen tilavuusvirran kasvaessa. Suurilla tilavuusvirroilla lämpövirrantiheyden kasvu lämpötilan funktiona ei ole kiehumisen alueella oleellisesti suurempaa kuin yksifaasivirtauksen alueella. /12/ Suurilla Weberin luvuilla (suuri tilavuusvirta, alhainen pintajännitys) tiheä pizarasuihku muodostaa paksun nestekalvon jäähdytettävän pinnan päälle, joka vaimentaa nukleoitumista. Sen sijaan pienillä Weberin luvuilla pisarat törmäävät suoraan jäähdytettävään pintaan. Höyrykuplat nukleoituvat tehokkaasti pinnalla seisovaan nesteeseen. Vaikka pisan virtausnopeus määrää paikallisen, hetkellisen lämmönsiirron tehokkuuden, nesteen tilavuusvirrantiheys määrää suihkun tehokkuuden. /3/

2.2.3. Mikrokanavistot (micro channel flow)

Suutinteknologioiden lisäksi mikrokanavistoihin pohjautuvia teknologioita pidetään potentiaalisina elektroniikan jäähdytykseen. Mikrokanavistojen hydraulinen halkaisija vaihtelee 1-200 μm /13/. Rajakerroksen paksuus on pieni, ja lämmönsiirto tehokasta. Myös siirtopinta-ala kasvaa suureksi. Pumpauksessa voidaan hyödyntää elektro-osmoosia /13, 14/.

Mikroskaalassa toimittaessa jäähdytettävän pinnan ja nesteen välisen faasirajapinnan ilmiöt korostuvat. Pinnankarheus ja rajapinnan elektrokineettikka vaikuttavat voimakkaasti virtaukseen, eikä kuvaukseen riitä Navier Stokesin yhtälöt. Virtaus muuttuu laminaarista turbulentiksi jo alhaisella Reynoldsin luvulla. Näennäinen viskositeetti ja kitkakerroin ovat huomattavasti suurempia kuin virtausopin teorioiden mukaan. /13/

Mikrokanavistoilla saavutetaan suuria lämmönsiirtotehoja ilman suutinvirtaustakin. Niitä voidaan hyödyntää myös epäsuorassa jäähdytyksessä kanavovimalla jäähdytyslevy. Kun mikrokanavistot ovat jäähdytyslevyn sisällä, lämmönsiirtoketjuun jää suhteellisen suuri vastus komponentin ja jäähdytyslevyn rajapintaan, vaikka käytettäisiin ns. interface-materiaaleja. Lämmönsiirto onkin tehokkaampaa rakenteessa, jossa mikrokanavistot ovat suoraan yhteydessä komponentin pohjalevyyn (base plate) /15/. Tehokkaimmassa rakenteessa kanavistot on sijoitettu suoraan alustaan (substrate) /15, 16/. Suorassa jäähdytyksessä on kuitenkin käytettävä dielektrisiä virtausaineita.

Mikrokanavistojen avulla voidaan saavuttaa tasainen pintalämpötila /14/, ja jäähdytysnesteen ja jäähdytettävän pinnan välinen lämpötilaero voi olla pieni /16/. Mikrokanavistorakenteet ovat mekaanisesti lujia. Lämpölaajenemisen kannalta alustaan kytketty kanavisto on paras /16/. Se on kuitenkin kallis valmistaa, ja siten soveltuvuus on rajoitettu kohteisiin, joissa pieni pakkaustilavuus on kriittinen tekijä /15/. Elektro-osmoosiin perustuva pumppu toimii hiljaisesti, eikä siinä ole mekaanisia osia /14/.

3. TULOKSET

Kirjallisuudessa esitettyjen kokeellisten tulosten yhteenvedo on koottu taulukkoon 5. Rajoitetun suutinvirtauksen yksifaasilämmönsiirron teho ei riitä jäähdyttämään 100 W/cm^2 :a. FC-nesteiden lämmönsiirron tehostamiseksi pitää kasvattaa siirtopinta-alaa mikrourilla, tai hyödyntää faasimuutosta. Faasimuutokseen pohjautuvien suutinteknologioiden jäähdytystehot ovat yli 100 W/cm^2 . Samoin mikrokanavistoihin pohjautuvien jäähdytysmenetelmien tehot.

Mikrokanavistojen painehäviöt ovat suhteellisen pieniä jäähdytystehoon nähden verrattuna suutinvirtauksiin. Pisaroidun suihkuvirtauksen häviöt ovat suurimmat.

Taulukko 5. Jäähdytysmenetelmien jäähdytystehoja ja painehäviöitä.

Jäähdytysmenetelmä	Maksimi jäähdytysteho W/cm^2	Painehäviö kPa	Lähde
Rajoitettu suutinvirtaus			
- yksifaasivirtaus	~20	0,070-140	9
- mikrouritus	275		10
- alijäähdytys + faasimuutos	250		11
- alijäähdytys + faasimuutos + mikrouritus	400		10
Pisaroitu suihkuvirtaus			
- alijäähdytys + faasimuutos	166 ^{/12/}	276 ^{/3/}	3, 12
Mikrokanavistot			
- jäähdytyslevyssä (heat sink)	>100		13
- alustalla (substrate)	>400	64	15

4. POHDINTA

Jäähdytysjärjestelmän yksinkertaisuuden ja tilantarpeen kannalta yksifaasilämmönsiirtoon pohjautuva jäähdytysprosessi olisi parempi kuin faasimuutosta hyödyntävä prosessi. Rajoitetun suutinvirtauksen yksifaasilämmönsiirron tehokkuus ylittää 100 W/cm^2 :n lämpövirrantiheyteen, kun jäähdytettävä pinta on mikrouritettu. Mikrokanavistojen yksifaasilämmönsiirron tehot voidaan saada vastaavalle tasolle jopa epäsuoralla jäähdytyksellä. Mikrokanavistorakenteiden painehäviöt suhteessa jäähdytystehoon ovat alhaisempia kuin suutinvirtaukseen pohjautuvilla rakenteilla.

Mikrouritettujen jäähdytyslevyjen (epäsuora jäähdytys) käyttöönottoa helpottaa kylmälevyjen (cold plate) käytöstä saadut kokemukset, koska vesiliuokset soveltuvat molempiin jäähdytysjärjestelmiin. Sen sijaan liuoksen koostumus voi olla erilainen. Mikrokaalassa toimittaessa ne aineominaisuudet, jotka hallitsevat rajapinnan ilmiöitä, ovat merkittäviä valintakriteerejä.

Lämpövirrantiheyksien kasvaessa yli 100 W/cm^2 tarvitaan suoraa nestejäähdytystä. Suorassa jäähdytyksessä virtausaineena voidaan käyttää vain dielektrisiä nesteitä. Näiden käytön hallinta tuo omat haasteensa, koska lämpötekniset ominaisuudet ja pintajännitys poikkeavat veden arvoista (Taulukko 2). Alustaan rakennetuilla mikrokanavistoilla voidaan jäähdyttää useiden satojen W/cm^2 lämpövirrantiheyyksiä yksifaasivirtauksella.

Faasimuutosta hyödyntävä jäähdytysjärjestelmä on monimutkaisempi. Jäähdytysjärjestelmän liuskiertoon ei voida kytkeä komponentteja sarjaan, vaan poistovirtaus on ohjattava

lauhdukselle. Komponenttikohtaiset lauhduttimet lisäävät komponenttien tilantarvetta, mikä on ristiriidassa miniaturisoinnin kanssa.

Suuren painehäviön lisäksi suutinvirtauksen huonona puolena on sen herkkyys virtaushäiriöille. Suuttimen tukkeutuminen, suuttimen valmistuksen epätarkkuus tai jäähdytettävän pinnan rosoisuus aiheuttavat häiriöitä, jotka muuttavat jäähdytettävän pinnan ohuen rajakerroksen virtausta. Hallitsematon jäähdytysprosessi saattaa aiheuttaa pinnan kuivumisen ja ylikuumenemisen. Jäähdytysmenetelmän luotettavuus on varmistettava ennen sen soveltamista elektroniikan jäähdytykseen.

5. MERKINNÄT

T _k ieh	kiehumispiste, °C
T _j ääh	jäätymispiste, °C
ρ	tiheys, kg/m ³
σ	pintajännitys, N/m
λ	lämmönjohtavuus, W/m°C
η	dynaaminen viskositeetti, Pas
ΔH_v	höyrystyslämpö, kJ/kg
c_p	ominaislämpö, J/kg°C
W	suuttimen leveys, mm
H	virtauskanavan korkeus, mm
SMD	Sauterin halkaisija, μ m
CHF	kriittinen lämpövirrantiheys, W/cm ²

6. LÄHTEET

- /1/ Lenkkeri, J. Liitos- ja pakkausteknologioiden kehitysnäkymät. Elektroniikan lämmönhallinta – lämpösuunnitteluseminaari, Oulu, 13.6.2002. Alkuperäinen lähde: National Technology Roadmap for Semiconductors, 1997.
- /2/ S.Gamble, Data on Coolants and Liquids Used in Computer Watercooling, 8.10.2002, www.overlockers.com/articles609
- /3/ Estes, K.A. Mudawar, I. Correlation of Sauter mean diameter and critical heat flux for spray cooling of small surfaces. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 38, No. 16, pp. 2985-2996, 1995.
- /4/ University of Waterloo, Microelectronics Heat Transfer Laboratory, Fluid Properties Calculator, 1997. www.mhtl.uwaterloo.ca/old/onlinetools_frame.html
- /5/ www.thermalfluidsinc.biz (4.11.2002)
- /6/ Esite: Kemira Pulp & Paper Chemicals, Vetyperoksidin ominaisuuksia. 2002.
- /7/ www.h2o2.com/intro/properties/physical.html (31.10.2002)
- /8/ Esite: 3M Innovation, Electronic Materials, Thermal Management Fluids and Services. 2000.
- /9/ Wadsworth, D.C. Mudawar, I. Cooling of a Multichip Electronic Module by Means of Confined Two-Dimensional Jets of Dielectric Liquid. Journal of Heat Transfer. Nov 1990, Vol. 112. pp.891-898.
- /10/ Wadsworth, D.C. Mudawar, I. Enhancement of Single-Phase Heat Transfer and Critical Heat Flux From an Ultra-High-Flux Simulated Microelectronic Heat Source to a Rectangular Impinging Jet of Dielectric Liquid. Journal of Heat Transfer. Aug 1992, Vol. 114, pp. 764-768.

- /11/ Mudawar, I. Wadsworth, D.C. Critical heat flux from a simulated chip to a confined rectangular impinging jet of dielectric liquid. Int. J. Heat Mass Transfer. 1991, Vol. 34, No. 6, pp. 1465-1479.
- /12/ Estes, K.A. Mudawar, I. Comparison of Two-Phase Electronic Cooling Using Free Jets and Sprays. Journal of Electronic Packaging. Dec 1995, Vol. 117. pp. 323-332.
- /13/ D. Li, MicroChannel Heat Sinks For Electronic Cooling; Liquid Flow and Heat Transfer in Microchannels; Mass Transfer and Mixing Processes in Electro-Osmotic Flow in Microchannels; Electro-Osmotic Flow in Microchannels, www.me.utoronto.ca/staff/profiles/dli (13.3.2002)
- /14/ K.Goodson, J.Santiago, T.Kenny, L.Jiang, S.Zeng, J.Koo, L.Zhang, S.Yao, E. Wang. Electroosmotic Microchannel Cooling System for Microprocessors. Electronics Cooling, Nov 2002.
- /15/ PCIM Europe, March 2002. pp. 27-29, 42
- /16/ J.Schulz-Harder, Direct Copper Bonded Substrates for Semiconductor Power Devices, www.curamik.com/pdf/02_pemc.pdf (19.3.2003)

