OULUN YLIOPISTO
KONETEKNIIKAN OSASTO
Oulu

I SUOMEN MEKANIIKKAPÄIVIEN ESITELMÄT

Antti Pramila (toim.)

Raportti n:o 33

Oulu 1982

Päätoimittaja: prof. Tatu Leinonen
Osoite: Oulun yliopisto
Konetekniikan osasto
Linnanmaa
90570 OULU 57
FINLAND

UDK 531/534

ISBN 951–42–1308–4
ISSN 0357–0282

OULUN YLIOPISTO
Monistus- ja Kuvakeskus
Oulu 1982

ESIPUHE

Tämä raportti sisältää I Suomen Mekaniikkapäivillä Oulussa 21...22. toukokuuta 1982 pidetyt esitelmät. Ne on painettu offset-tekniikkaa käyttäen esitelmöitsijöiden lähettämistä painovalmiista arkeista, joten kukin kirjoittaja vastaa mahdollisista virheistään.

Ajatus mekaniikan ja lujuusopin alan ongelmien kanssa tekemisiin joutuvien tutkijoiden, suunnittelijoiden ja opettajien yhteisen symposion järjestämisestä on syntynyt Suomen Mekaniikan kansalliskomiteassa, joka antoi I Suomen Mekaniikkapäivät -nimen saaneen symposion toteuttamisen Oulun yliopiston konetekniikan osaston teknillisen mekaniikan laitoksen tehtäväksi. Käytännön järjestelyistä ovat huolehtineet laitoksella toiminut järjestelytoimikunta ja konetekniikan osaston kansliahenkilökunta.

Päivien pääesitelmät pitivät: prof. J. Carlsson (KTH, Ruotsi), prof. I. Holand (NTH, Norja), prof. M. Mikkola (HTKK) ja prof. M. Määttänen (OY). Nämä laajemmat yleiskatsaukset on merkitty sisällysluetteloon tähdellä.

Oulussa 12.5.1982

Antti Pramila
järjestelytoimikunnan puheenjohtaja

RAKENTEIDEN EPÄLINEAARISEN ANALYYSIN KEHITYSNÄKYMIÄ

Martti Mikkola
Teknillinen korkeakoulu, rakennusinsinööriosasto
Otaniemi

1 JOHDANTO

Uudet teknologian alat vaativat soveltajiltaan usein tavanomaisesta poikkeavia valmiuksia ja tavallista perusteellisempia selvityksiä ja analyyseja. Viime aikoina tällaisia haasteita ovat asettaneet ydintekniikka, off-shore-tekniikka ja osittain vasta esille tulevana arktinen tekniikka. Rakenteiden suunnittelun kannalta vaativia tehtäviä aiheuttavat poikkeavat olosuhteet ja kuormat, uudet tai erikoisissa olosuhteissa käytetyt rakennusaineet sekä mahdollisten onnettomuuksien vakavat seuraukset. Tällöin joudutaan selvittämään mahdollisimman täsmällisesti rakenteiden käyttäytyminen otaksuttujen kuormien ja olosuhteiden alaisena. Olennaisena tehtävänä on kantokyvyn ja muodonmuutosominaisuuksien määrittäminen. Kokemuksen ja kokeellisten tutkimusten lisäksi tarvitaan kehittyneitä analyysimenetelmiä, joilla kyetään riittävän tarkasti ennustamaan todellisen rakenteen toiminta. Analyysin teho riippuu tietenkin viime kädessä numeerisesta ratkaisemisesta, jonka tietokoneet nykyään mahdollistavat.

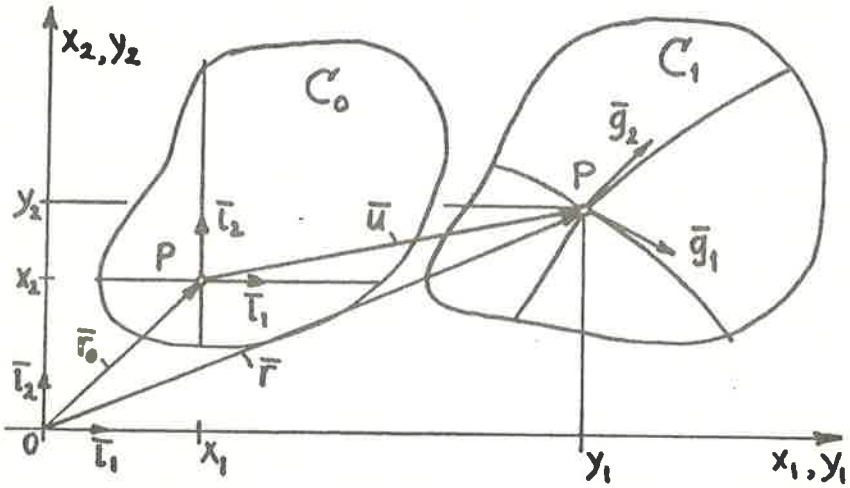
Tässä esitelmässä tarkastellaan rakenteiden epälineaarisen analyysin eräitä keskeisiä piirteitä. Suurista siirtymistä ja kiertymistä aiheutuva geometrinen epälineaarisuus ja sen vaikutukset muodonmuutoksiin ja tasapainoyhtälöihin hallitaan hyvin teoreettisella tasolla. Epälineaaristen yhtälöiden numeerisesta ratkaisemisesta on myös jo runsaasti kokemusta. Numeeristen menetelmien osalta kehitystyötä tarvitaan erityisesti menetelmien luotettavuuden selvittämiseen ja laskennan taloudellisuuden parantamiseen.

Aineiden konstitatiivinen käyttäytyminen suurten muodonmuutosten tai lämpötilan tai kosteuden alaisena on alue, jossa jatkuvasti riittää tutkimista.

2 KONTINUUMIMEKANIIKAN PERUSYHTÄLÖT

2.1 Muodonmuutostila

Tarkastellaan kiinteätä deformoituvaa kappaletta karteesisessa koordinaatistossa (kuva 1). Kappaleen deformoitumatonta alkutilaa hetkellä $t = 0$ merkitään C_0:lla ja lopputilaa hetkenä t C_1:llä. Kappaleen ainepisteen P asema alkutilassa ilmaistaan vektorilla $\bar{r}_0 = x_k\bar{i}_k$ ja tilassa C_1 vektorilla $\bar{r} = y_k(x,t)\bar{i}_k$, jolloin siirtymä on $\bar{u} = u_k\bar{i}_k = (y_k - x_k)\bar{i}_k$ ja $x_k = y_k(x,0)$. Ainepisteen P kautta kulkevat ainepisteisiin sidotut koordinaattiviivat x_k, jotka alkutilassa ovat kiinteiden koordinaattiakselien suuntaiset, muodostavat deformoituneessa tilassa käyräviivaisen konvektiivisen eli materiaalikoordinaatiston. Vastaavasti deformoitunessa tilassa P:n kautta



Kuva 1. Koordinaatiston määrittely.

asetetuilla koordinaattiakseleiden suuntaisilla suorilla olevat olevat ainepisteet ovat lähtöisin alkutilan käyräviivaisilta koordinaattiviivoilta y_k. Muodonmuutoksen määrittelyä materiaalikoordinaattien x_k avulla nimitetään Lagrangen tarkastelutavaksi ja avaruus-

koordinaattien y_k avulla Eulerin tarkastelutavaksi. Muodonmuutosgradientti on tensori

$$\underline{F} = y_{k,l}\bar{i}_k\bar{i}_l = \bar{g}_l\bar{i}_l = \underline{I} + \underline{H}\,, \tag{1}$$

missä $y_{k,l} \equiv \partial y_k/\partial x_l$

$\bar{g}_l = \bar{r}_{,l}$ materiaalikoordinaatiston kantavektori

$\underline{I} = \delta_{kl}\bar{i}_k\bar{i}_l$ yksikkötensori (δ_{kl} Kroneckerin symboli)

$\underline{H} \equiv u_{k,l}\bar{i}_k\bar{i}_l$ siirtymägradientti.

Vastaavasti määritellään muodonmuutosgradientti

$$\underline{F}^{-1} = \partial_l x_k\bar{i}_k\bar{i}_l = \bar{G}_l\bar{i}_l = \underline{I} - \underline{Z}, \tag{2}$$

missä $\partial_l x_k \equiv \partial x_k/\partial y_l$

$\bar{G}_l = \partial_l\bar{r}_o(y,t)$ y_l-koordinaattiviivojen "alkukuvan" kantavektori

$\underline{Z} \equiv \partial_l u_k\bar{i}_k\bar{i}_l$ siirtymägradientti.

Tarkastellaan kahta P:stä lähtevää alkutilan materiaalista viiva-alkiota $d\bar{r}_o$ ja $\delta\bar{r}_o$. Deformaatiossa ne kuvautuvat viiva-alkioiksi $d\bar{r} = \underline{F}\cdot d\bar{r}_o$ ja $\delta\bar{r} = \underline{F}\cdot\delta\bar{r}_o$. Lagrangen muodonmuutostensori $\underline{E}$ määräytyy sisätulojen erotuksesta

$$d\bar{r}\cdot\delta\bar{r} - d\bar{r}_o\cdot\delta\bar{r}_o = d\bar{r}_o\cdot(\underline{F}^T.\underline{F}-I)\cdot\delta r_o = 2d\bar{r}_o\cdot\underline{E}\cdot\delta\bar{r}_o, \tag{3}$$

Siirtymägradienttia $\underline{H}$ käyttäen saadaan

$$\underline{E} = (\underline{H} + \underline{H}^T + \underline{H}^T\cdot\underline{H})/2. \tag{4}$$

Vastaavalla tavalla saadaan Almansin muodonmuutostensori $\underline{e}$

$$d\bar{r}\cdot\delta\bar{r} - d\bar{r}_o\cdot\delta\bar{r}_o = d\bar{r}\cdot(\underline{I} - \underline{F}^{-1T}\cdot\underline{F}^{-1})\cdot\delta\bar{r} = 2d\bar{r}\cdot\underline{e}\cdot\delta\bar{r}, \tag{5}$$

jossa

$$\underline{e} = (\underline{Z} + \underline{Z}^T - \underline{Z}^T\underline{Z})/2 \tag{6}$$

$\underline{E}$:n ja $\underline{e}$:n komponenteilla on tutut lausekkeet

$$E_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l})/2 \tag{7}$$

$$e_{kl} = (\partial_l u_k + \partial_k u_l - \partial_m u_k \partial_m u_l)/2$$

Ainepisteen nopeus $\bar{v}$ on paikkavektorin materiaalinen aikaderivaatta

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{y}_k \bar{i}_k = v_k \bar{i}_k \tag{8}$$

Nopeuskenttä on kuitenkin tapana esittää avaruuskoordinaattien avulla, jolloin $v_k = v_k(y,t)$. Nopeusgradientti $\underline{L}$ muodostetaan avaruuskoordinaatistossa

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} = \partial_l v_k \bar{i}_k \bar{i}_l . \tag{9}$$

Se voidaan jakaa symmetriseen ja antisymmetriseen osaan

$$\underline{D} = (\underline{L} + \underline{L}^T)/2, \quad \underline{W} = (\underline{L} - \underline{L}^T)/2. \tag{10}$$

Muodonmuutosnopeustensori $\underline{D}$ on symmetrinen ja kiertymänopeustensori $\underline{W}$ antisymmetrinen. Niiden komponentit ovat

$$D_{kl} = (\partial_l v_k + \partial_k v_l)/2, \quad W_{kl} = (\partial_l v_k - \partial_k v_l)/2 \tag{11}$$

Muodostamalla sisätulon $d\bar{r} \cdot \delta\bar{r}$ materiaalinen aikaderivaatta todetaan, että Lagrangen muodonmuutostensorin aikaderivaatta on

$$\dot{\underline{E}} = \underline{F}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{F} \quad \text{eli} \quad \dot{E}_{kl} = y_{m,k} y_{n,l} D_{mn} . \tag{12}$$

Almansin muodonmuutostensorin materiaaliselle aikaderivaatalle saadaan lauseke

$$\dot{\underline{e}} = \underline{D} - \underline{L}^T \cdot \underline{e} - \underline{e} \cdot \underline{L} \tag{13}$$

joka ei kuitenkaan täytä objektiivisuusvaatimusta, ts. ole havaitsijan koordinaatistosta riippumaton, eikä siis kelpaa muodonmuutosnopeuden mitaksi niinkuin $\dot{\underline{E}}$ ja $\underline{D}$.

Pinta-alkion $d\bar{A}_o = d\bar{r}_o \times \delta\bar{r}$ muuttuminen deformaation tapahtuessa saadaan Nansonin kaavasta

$$d\bar{A} = d\bar{r}\times\delta\bar{r} = (\underline{F}\cdot d\bar{r}_o) \times (\underline{F}\cdot\delta\bar{r}_o) = Jd\bar{A}_o\cdot\underline{F}^{-1} = Jn_{ol}\bar{g}^l dA_o \qquad (14)$$

eli komponenttimuodossa

$$n_k dA = J\partial_k x_l n_{ol} dA_o \qquad (15)$$

missä $\bar{n}_o = n_{ok}\bar{i}_k$ pinta-alkion dA_o yksikkönormaali
$\bar{n} = n_k\bar{i}_k$ pinta-alkion dA yksikkönormaali
$J = \det(F)$ muodonmuutoksen Jacobin determinaatti
$\bar{g}^l =$ kontravariantti kantavektori

Tilavuusalkio $dV_o = d\bar{r}_o\cdot\delta\bar{r}_o \times d\bar{s}_o$ muuttuu deformaatiossa alkioksi $dV = d\bar{r}\cdot\delta\bar{r}\times d\bar{s} = JdV_o$. Massan säilymisestä seuraa $J = \rho_o/\rho$, jossa ρ_o ja ρ ovat tiheydet alku- ja deformoituneessa tilassa. Ottamalla huomioon kantavektorien derivaatat $\dot{\bar{g}}_k = \underline{L}\cdot\bar{g}_k$ ja $\dot{\bar{g}}^k = -\bar{g}^k\cdot\underline{L}$ saadaan J:n materiaaliseksi aikaderivaataksi

$$\dot{J} = J\partial_k v_k. \qquad (16)$$

2.2 Jännitystila

Tasapainoyhtälöt lausutaan yksinkertaisemmin kiinteässä avaruuskoordinaatistossa

$$\partial_l\sigma_{lk} + \rho f_k = \rho\dot{v}_k \text{ ja } \sigma_{kl} = \sigma_{lk}, \qquad (17)$$

missä σ_{kl} on Eulerin jännityskomponentti y_l-akselin suuntaan pinta-alkiossa, jonka normaali on y_k-akselin suuntaan, f_k tilavuusvoima massayksikköä kohti ja $\dot{v}_k = \dot{y}_k$ kiihtyvyys. Deformoituneessa tilassa määritelty jännitystensori $\underline{T} = \sigma_{kl}\bar{i}_k\bar{i}_l = \tau^{kl}\bar{g}_k\bar{g}_l$ voidaan esittää konvektiivisessa koordinaatistossa komponenttien τ^{kl} avulla, joita tässä nimitetään Cauchyn jännityksiksi. Jännitysvektori pinta-alkiossa $d\bar{A} = \bar{n}dA$ on $d\bar{t} = \bar{n}\cdot\underline{T}\,dA = n_k\tau^{kl}\bar{g}_l dA$. Nansonin kaavan (14) perusteella sama jännitysvektori $\bar{t}$ voidaan kirjoittaa muotoon $d\bar{t} = n_{ok}J\tau^{kl}\bar{g}_l dA_o = n_{ok}K^{kl}\bar{g}_l dA_o$. Tämä johtaa Kirchhoffin jännitys-

tensorin määritelmään

$$\underline{K} = K^{kl}\bar{g}_k\bar{g}_l = J\underline{T}. \tag{18}$$

Kirchhoffin jännitys on pseudojännitys, sillä se mitataan alkutilan pinta-alaa kohti: $d\bar{t} = dA\cdot\underline{T} = (Jd\bar{A}_o\cdot\underline{F}^{-1})\cdot\underline{T} = d\bar{A}_o\cdot\underline{F}^{-1}\cdot\underline{K}$. Kirchhoffin jännitystä voidaan pitää konvektoituvana jännityksenä, jonka "kuva" alkutilassa on 2. Piolan-Kirchhoffin jännitys $\underline{S} = S^{kl}\bar{i}_k\bar{i}_l$. Kuvaus välittyy deformaatiogradientin avulla

$$\underline{K} = \underline{F}\cdot\underline{S}\cdot\underline{F}^T \quad \text{tai} \quad \underline{S} = \underline{F}^{-1}\cdot\underline{K}\cdot\underline{F}^{-1T} \tag{19}$$

Yhtälöstä (19) käy ilmi, että $\underline{S}$:n ja $\underline{K}$:n komponentit ovat arvoltaan yhtä suuret $S^{kl} = K^{kl}$. Kun muodostetaan jännitysvektori $d\bar{t}_o = d\bar{A}o\cdot\underline{S}$ alkutilan pinta-alkiossa $d\bar{A}_o$, huomataan, että deformoituneen tilan vastaavan pinta-alkion jännitysvektori $d\bar{t}$ saadaan muunnoksella $d\bar{t} = d\bar{t}_o\cdot\underline{F}^T$. Tasapainoyhtälöiksi tulee tällöin

$$(S^{ln}y_{k,n})_{,l} + \rho_o f_{ok} = \rho_o\ddot{x}_k \text{ ja } S^{kl} = S^{lk}. \tag{20}$$

Useim käytetään nimellisjännitystä (Lagrangen eli 1. Piolan-Kirchhoffin jännitystä) $\underline{N} = N^{kl}\bar{i}_k\bar{i}_l$, joka määritellään alkutilan suhteen siten, että alkutilan pinta-alkiota $d\bar{A}_o$ kohti tuleva jännitysvektori $d\bar{t} = d\bar{A}_o\cdot\underline{N} = N^{kl}\bar{i}_l dA_o$ yhtyy suunnaltaan ja suuruudeltaan deformoituneen tilan vastaavan pinta-alkion $d\bar{A}$ jännitysvektoriin. Eri tavoin muodostettuja jännitysvektoreita vertaamalla saadaan yhteydet

$$\underline{N} = \underline{F}^{-1}\cdot K = \underline{S}\cdot\underline{F}^T. \tag{21}$$

Nimellisjännitystä käyttäen tasapainoyhtälöt voidaan kirjoittaa alkutilassa

$$N^{lk}{}_{,l} + \rho_o f_{ok} = \rho_o\ddot{x}_k \text{ ja } \partial_m x_l N^{km} = \partial_m x_k N^{lm}. \tag{22}$$

Nimellisjännityksen käyttöä rajoittaa sen epäsymmetrisyys.

Konstitutiivisia yhtälöitä varten tarvitaan jännitysten muutosnopeuksia. Eulerin jännityksen materiaalinen aikaderivaatta on $\dot{\sigma}_{kl} = \partial\sigma_{kl}/\partial t + v_m \partial_m \sigma_{kl}$. Tämä ei kuitenkaan ole sopiva konstitutiivisia yhtälöitä silmällä pitäen, niin kuin helposti havaitaan tarkastelemalla esim. y_3-akselin suhteen pyörivää sauvaa. Sauvan ollessa y_1-akselin suuntainen on $\sigma_{11} \neq 0$ ja $\sigma_{22} = 0$. Hetkenä, jolloin sauva on y_2-akselin suuntainen, on $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{22} \neq 0$. Jännitystensori siis muuttuu, vaikka jännitystila sauvan aineessa pysyy vakiona. Objektiivisuuden vaatimuksen täyttävä jännitysnopeus saadaan seuraavalla tarkastelulla. Oletetaan lähtökohdaksi yhtälöiden (19) ja (18) mukainen yhteys $\underline{S} = J\,\underline{F}^{-1} \cdot \underline{T} \cdot \underline{F}^{-1T}$, joka derivoidaan puolittain ajan suhteen

$$\dot{\underline{S}} = J\underline{F}^{-1}\cdot\dot{\underline{T}}\cdot\underline{F}^{-1T} + J\dot{\underline{F}}^{-1}\cdot\underline{T}\cdot\underline{F}^{-1T} + J\underline{F}^{-1}\cdot\underline{T}\cdot\dot{\underline{F}}^{-1T} + J\underline{F}^{-1}\cdot\underline{T}\cdot\underline{F}^{-1T}$$

Kaavan (9) mukaan saadaan $\dot{\underline{F}}^{-1} = -\underline{F}^{-1}\cdot\dot{\underline{F}}\cdot\underline{F}^{-1} = -\underline{F}^{-1}\cdot\underline{L}$. Eo. kaavasta saadaan silloin

$$\dot{\underline{S}} = J\underline{F}^{-1}\cdot(\dot{\underline{T}} - \underline{L}\cdot\underline{T} - \underline{T}\cdot\underline{L}^T + \operatorname{div}\bar{v}\,\underline{T})\cdot\underline{F}^{-1T} \tag{23}$$

Otaksuen, että tarkasteluhetkellä $\underline{S} \equiv \underline{T}$, jolloin $S^{kl} = \sigma_{kl}$, $J = 1$ ja $\underline{F} = \underline{I}$, saadaan

$$\dot{\underline{S}} = \check{\underline{T}} = \dot{\underline{T}} - \underline{L}\cdot\underline{T} - \underline{T}\cdot\underline{L}^T + \partial_k v_k \underline{T}, \tag{24}$$

missä $\check{\underline{T}} = \check{\sigma}_{kl}\bar{i}_k\bar{i}_l$ on Eulerin jännityksen Truesdellin derivaatta ja $\dot{\underline{T}} = \dot{\sigma}_{kl}\bar{i}_k\bar{i}_l$ sen materiaalinen aikaderivaatta. Konvektiiviseksi derivaataksi $\overset{\circ}{\underline{T}}$ nimitetään osaa $\overset{\circ}{\underline{T}} = \dot{\underline{T}} - \underline{L}\cdot\underline{T} - \underline{T}\cdot\underline{L}^T$. Zaremban-Jaumannin derivaatta $\overset{*}{\underline{T}}$ esittää jännityksen muuttumista aikahiukkasen mukana nopeudella $\underline{W}$ kiertyvässä koordinaatistossa $\overset{*}{\underline{T}} = \dot{\underline{T}} - \underline{W}\cdot\underline{T} - \underline{T}\cdot\underline{W}^T$. Konvektiivisen ja Zaremban-Jaumannin derivaattojen välinen yhteys on

$$\overset{\circ}{\underline{T}} = \overset{*}{\underline{T}} - \underline{D}\cdot\underline{T} - \underline{T}\cdot\underline{D} \tag{25}$$

Samanmuotoinen kaava pätee Kirchhoffin jännitykselle $\underline{K}$. Cauchyn ja Kirchhoffin jännitysnopeudet suhtautuvat toisiinsa kaavan

$$\dot{\underline{K}} = \dot{\underline{T}} + \operatorname{div}\bar{v}\,\underline{T} \tag{26}$$

mukaisesti, kuten yhteydestä (18) voidaan päätellä.

2.3 Virtuaalisen tehon periaate

Virtuaalisen tehon (tai virtuaalisten siirtymien) periaate on ekvivalentti tasapainoyhtälöiden kanssa, ja tavallisesti esim. elementtimenetelmän liikeyhtälöt muodostetaan sen avulla. Merkitään $\bar{v}^*$:llä virtuaalista nopeuskenttää tilassa C_t. Tasapainoyhtälöistä (17) sekä kappaleen pinnan tasapainoyhtälöistä $-n_l\sigma_{lk} + t_k = 0$ seuraa virtuaalisen tehon yhtälö

$$\int_V \underline{T}:\underline{D}^* \, dV + \int_V \rho\dot{\bar{v}}\cdot\bar{v}^* dV = \int_V \rho\bar{f}\cdot\bar{v}^* \, dV + \int_A \bar{t}\cdot\bar{v}^* \, dA \qquad (27)$$

Sovellutuksissa on kuitenkin tarkoituksenmukaista käyttää kiinteään alkutilaan referoituja yhtälöitä. Yhtälöstä (20) seuraa

$$\int_{V_o} \underline{S}:\dot{\underline{E}}^* dV_o + \int_{V_o} \rho_o\ddot{\bar{x}}\cdot\bar{v}^* \, dV_o = \int_{V_o} \rho_o\bar{f}_o\cdot\bar{v}^* \, dV_o + \int_{A_o} \bar{t}\cdot\bar{v}^* \, dA_o \qquad (29)$$

jossa $\bar{t} = \bar{n}_o\cdot\underline{S}\cdot\underline{F}^T$ on pintavoima alkutilan C_o pintayksikköä kohti. Yhtälön (28) materiaalinen aikaderivaatta on

$$\int_{V_o} (\dot{\underline{S}}:\dot{\underline{E}}^* + \underline{S}:\dot{\underline{H}}^T\cdot\dot{\underline{H}}^*)dV_o + \int_{V_o} \rho_o\dddot{\bar{x}}\cdot\bar{v}^* \, dV_o = \int_{V_o} \rho_o\dot{\bar{f}}_o\cdot\bar{v}^* \, dV_o + \int_{A_o} \dot{\bar{t}}\cdot\bar{v}^* \, dA_o \qquad (29)$$

Sekä kokonais- että päivitetty Lagrangen menetelmä perustuvat yhtälöihin (28) ja (29).

2.4 Elementtimenetelmä

Elementtimenetelmää käytettäessä siirtymiä $\bar{u}$ approksimoidaan lausekkeella $U = Nq$, jossa N on muotofunktioiden matriisi ja q siirtymäparametrien vektori. Nopeuskenttää $\bar{v}$ approksimoi lauseke $\dot{U} = N\dot{q}$. Lagrangen muodonmuutostensorin nopeudelle saadaan lauseke $\dot{E} = (B_o + B_1)\dot{q}$, jossa $\dot{E}$ on nyt ymmärrettävä vektoriksi. B_o on lineaarista

teoriaa vastaava matriisi, kun taas B_1 riippuu siirtymäparametrien q arvoista. Virtuaalisen tehon yhtälö (28) johtaa matriisimuotoiseen liikeyhtälöön

$$R(q) + M\ddot{q} = Q \tag{30}$$

missä $R = \int_{V_o} (B_o+B_1)^T S \, dV_o$ sisäisten voimien vektori

$M = \int_{V_o} N^T \rho_o N dV_o$ massamatriisi

$Q = \int_{V_o} N^T \rho_o f_o dV_o + \int_{A_o} N^T t dA_o$ ulkoisten voimien vektori

Yhtälöstä (29) seuraa puolestaan inkrementaalinen yhtälö siirryttäessä tilasta C_t tilaan $C_{t+\Delta t}$

$$^1K_t \Delta q + M^2\ddot{q} = {}^2Q - {}^1R \tag{31}$$

missä $^1K_t = K_o + K_1 + K_2$ on tangenttijäykkyysmatriisi

$K_o = \int_{V_o} B_o^{T1} D B_o dV_o$ lineaarinen jäykkyysmatriisi

$K_1 = \int_{V_o} (B_o^{T1} D^1 B_1 + {}^1B_1{}^1DB_o + {}^1B_1{}^1D^1B_1) dV_o$ geometrinen jäykkyysmatriisi

$K_2 = \int_{V_o} G^{T1} \tilde{S} G dV_o$ jännitysjäykkyysmatriisi

Yläindeksit 1 ja 2 viittaavat tiloihin C_t ja $C_{t+\Delta t}$. Jännitysjäykkyysmatriisin K_2 muodostaminen on selvitetty tarkemmin esim. teoksessa [3]. Konstitutiivinen yhteys $\underline{\dot{S}} = \underline{D} \cdot \underline{\dot{E}}$ on yhtälöä (31) johdettaessa otaksuttu tunnetuksi.

Yhtälöt (30) ja (31) ovat kokonais-Lagrangen menetelmän mukaisia, koska alkutila C_o säilyy referenssitilana. Mikäli referenssitilaksi valitaan esim. tila C_t, josta edetään tilaan $C_{t+\Delta t}$, käytetään päivitettyä Lagrangen menetelmää. Inkrementaalinen yhtälöryhmä on jälleen muotoa (31), mutta tangenttijäykkyysmatriisi K_t sisältää vain osat K_o ja K_2. Kaikki suureet on tietenkin laskettava tilassa C_t.

Siirtymäinkrementin ratkaisun jälkeen jännitys ${}^{2}\underline{S} = {}^{1}\underline{T} + \Delta\underline{S}$ on muunnettava uuden referenssitilan $C_{t+\Delta t}$ Eulerin jännitykseksi ${}^{2}\underline{T} = J^{-}\,{}^{1}\underline{F}\cdot{}^{2}\underline{S}\cdot{}^{1}\underline{F}^{T}$, jossa ${}^{1}\underline{F}$ on siirtymäinkrementtiä ΔU vastaava muodonmuutosgradientti.

3. KONSTITUTIIVISET YHTÄLÖT

Konstitutiiviset yhtälöt kuvaavat aineen mekaanista tai termomekaanista käyttäytymistä. Numeerisen ratkaisemisen myötä on tullut mahdolliseksi käyttää suhteellisen monimutkaisia materiaalimalleja, jotka yhä tarkemmin simuloivat todellisten aineiden ominaisuuksia. Pieniä muodonmuutoksia silmällä pitäen kehitettyjä teorioita voidaan käyttää usein myös geometrisesti epälineaarisissa tapauksissa, sillä aineen kokemat muodonmuutokset saattavat olla pieniä vaikka siirtymät ja kiertymät ovat suuria. Varsinaiset suurten muodonmuutosten teoriat kohtaavat teoreettisen käsittelyn lisäksi hankaluuksia esim. ainevakioiden kokeellisessa määrittämisessä.

Konstitutiiviset yhtälöt lausutaan yleensä objektiivisten jännitysnopeuksien ja vastaavien muodonmuutosnopeuksien välisinä. Sopivia pareja ovat $\overset{*}{\underline{T}}$ ja $\underline{D}$ sekä $\overset{*}{\underline{K}}$ ja $\underline{D}$. On huomattava, että $\dot{S}^{kl} = \dot{K}^{kl}$ ja $\dot{E}_{kl} = D_{kl}$. Myös $\dot{\underline{S}}$ ja $\dot{\underline{E}}$ ovat toisiaan vastaava pari. Konstitutiivinen yhtälö on siis esim.

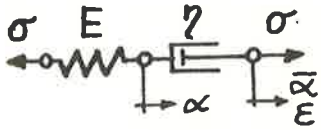
$$\overset{*}{\underline{T}} = \underline{\underline{C}}:\underline{D} \tag{32}$$

missä $\underline{\underline{C}}$ on hetkellinen konstitutiivinen tensori.

Materiaalimallien kehittäminen on usein tapahtunut fenomenologisella pohjalla koetuloksiin nojautuen. Fysikaalisesti hyväksyttäviltä teorioilta edellytetään ristiriidattomuutta termodynamiikan pääsääntöjen suhteen. Viime vuosina ns. sisäisten muuttujien teoria on saanut erityistä huomiota [4], [5]. Havaittavien konstitutiivisten muuttujien, muodonmuutosten ε ja lämpötilan T, lisäksi otetaan käyttöön joukko sisäisiä muuttujia α, joiden tarkoituksena on mahdollistaa teorian rakentaminen. Sisäinen energia u ja vapaa energia ψ (massayksikköä kohti määriteltynä) ovat tilanfunktioita, jotka riippuvat ε:sta, α:sta ja T:stä. Sisäisiä muuttujia vastaavat sisäiset voimat β (jotka ovat itse asiassa nollia, sillä ne eivät

esiinny jännitysten teholausekkeessa). Jännitykset σ ja sisäiset voimat β jaetaan kvasikonservatiiviseen ja dissipatiiviseen osaan $\sigma = \sigma^q + \sigma^d$, $\beta = \beta^q + \beta^d = 0$. Edelliset ovat johdettavissa potentiaalista, vapaasta energiasta ψ, $\sigma^q = \rho\partial\psi/\partial\varepsilon$ ja $\beta^q = \rho\partial\psi/\partial\alpha$. Termodynamiikan 2. pääsäännön mukaan entropian tuotto prosessissa on aina ei-negatiivinen. Paikallisesti tämä voidaan ilmaista Clausius-Duhemin epäyhtälönä, jonka mukaan dissipatiivinen teho $\sigma^d\dot{\varepsilon} + \beta^d\dot{\alpha} \geq 0$. Tästä edetään määrittelemällä dissipaatiofunktio φ, joka on ei-negatiivinen ja riippuu tilanmuuttujien lisäksi niiden nopeuksista. Suurimman dissipaatiotehon periaatteen mukaan dissipatiiviset voimat johdetaan dissipaatiofunktiosta $\sigma^d = \nu\partial\varphi/\partial\dot{\varepsilon}$, $\beta^d = \nu\partial\varphi/\partial\dot{\alpha}$, missä ν on verrannollisuuskerroin. Mikäli φ on $\dot{\varepsilon}$:n ja $\dot{\alpha}$:n homogeeninen neliömuoto, on $\nu = 1/2$ ja dissipatiiviset voimat ovat lineaarisia $\dot{\varepsilon}$:n ja $\dot{\alpha}$:n funktioita. Tämä on Onsagerin periaate, ks. [4].

Yksinkertaisena esimerkkinä tarkastellaan viskoelastista Maxwellin elementtiä (kuva 2). Kokonaisvenymä on $\varepsilon = \alpha + \bar{\alpha}$. Jousen venymä on $\alpha = \varepsilon - \alpha$ ja muodonmuutosenergia (vapaa energia) $\psi = E\alpha^2/2 = E(\varepsilon-\bar{\alpha})^2/2$. Tästä seuraa $\sigma^q = E(\varepsilon-\bar{\alpha})$, $\beta^q = -E(\varepsilon-\bar{\alpha})$. Viskoosin elementin venymä $\bar{\alpha}$ on sisäisenä muuttujana. Valitaan neliöllinen dissipaatiofunktio $\Phi = \eta\dot{\bar{\alpha}}^2/2$, jolloin $\sigma^d = 0$, $\beta^d = \eta\dot{\bar{\alpha}}$. Ehdosta $\beta = \beta^q + \beta^d = 0$ saadaan $\eta\dot{\bar{\alpha}} + E\bar{\alpha} = E\varepsilon$, josta $\bar{\alpha}$ voidaan ratkaista ja sijoittaa σ:n lausekkeeseen $\sigma = E(\varepsilon-\bar{\alpha})$.



Kuva 2. Maxwellin elementti.

4. NUMEERINEN RATKAISEMINEN

Epälineaaristen probleemoiden numeerinen ratkaiseminen suoritetaan yleensä Newton-Raphson-tyyppisillä iteratiivisilla tai energialausekkeen minimointiin tietyn strategian mukaisesti tähtäävillä etsintämenetelmillä. Suurimman suosion ovat saavuttaneet Newton-Raphson-algoritmit, joilla ratkaistaan tyyppiä (30) tai (31) olevia yhtälöryhmiä. Mikäli epälineaarisuudessa ei tapahdu jyrkkiä muutoksia, iterointi suppenee nopeasti. Vaikeuksia tuottavat rajapisteenmukai-

set epästabiilisuuskohdat, joissa tangenttijäykkyysmatriisi on singulaarinen. Viime aikoina on kehitetty Newton-Rapson-menetelmän modifikaatioita, joilla Jacobin matriisin (tangenttijäykkyysmatriisin) käänteismatriisi voidaan taloudellisesti päivittää tai joilla ratkaisu saadaan myös rajapisteen kohdalla [6],...,[10]. Kvasi-Newton-menetelmässä (ks. [6]) yhtälö $F(x) = 0$ ratkaistaan iteratiivisesti muodossa $K_i(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$. K_i on Jacobin matriisin approksimaatio. Ratkaisua parannetaan etenemällä suuntaan $d_i = K_i^{-1}F(x_i)$. Ns. BFGS-algoritmissa (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) K_i^{-1} lasketaan seuraavasti

$$K_i^{-1} = (I + w_i v_i^T)K_{i-1}^{-1}(I + v_i w_i^T), \tag{33}$$

missä $v_i = (\delta_i^T\gamma/\delta_i^T K_{i-1})^{1/2}K_{i-1}\delta_i - \gamma_i$

$$w_i = \delta_i/\delta_i^T \gamma_i$$

$$\delta_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\gamma_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Parannettu arvo on $x_{i+1} = x_i - s_i d_i$, jossa s_i on yhtälön $G(s) = d_i^T F(x_i - sd_i)$ nollakohta.

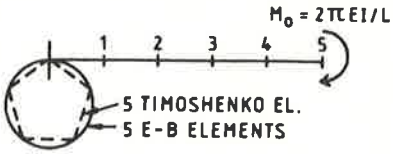
Dynaamisissa epälineaarisissa probleemoissa eksplisiittiset aikaintegrointimenetelmät ovat yleensä taloudellisempia kuin implisiittiset, joiden konvergenssi edellyttää tangenttijäykkyysmatriisin $K_t + \beta h^{-2}M$ päivittämistä. Kvasi-Newton-menetelmällä implisiittisten menetelmien taloudellisuutta voidaan parantaa [7].

5. ESIMERKKEJÄ

Teknillisen korkeakoulun rakennetekniikan laitoksessa on usean vuoden ajan tutkittu rakenteiden epälineaarista analyysia ja kehitetty ratkaisemiseen sopivaa tietokoneohjelmistoa [11],...,[21]. Erityisesti tekn.lis. Markku Tuomalan panos tietokoneohjelmiston tekemisessä on ollut ratkaiseva.

5.1 Ulokepalkki

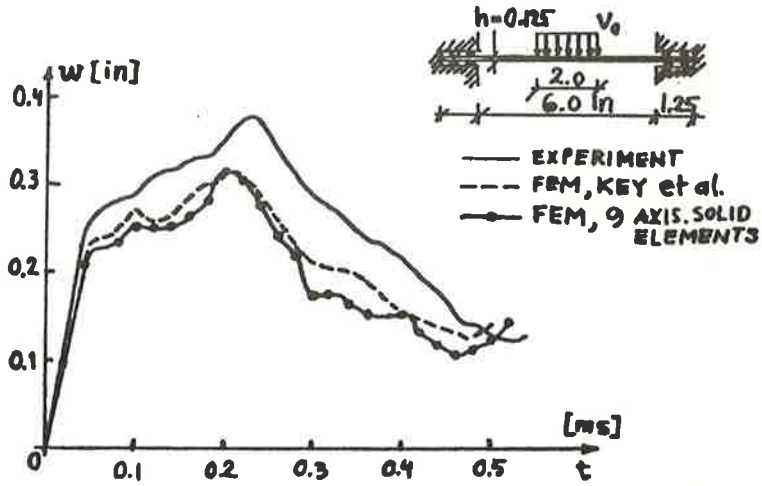
Yksinkertaisena testiesimerkkinä käy tasajäykkä uloke, jonka päässä vaikuttaa momentti. Viisi Euler-Bernoullin tai Timoshenkon teorian (leikkausmuodonmuutos mukana) mukaista 6-vapausasteista palkkielementtiä tuottaa hyvin tarkan tuloksen.



Kuva 3. Ulokepalkki.

5.2 Ympyrälaatta

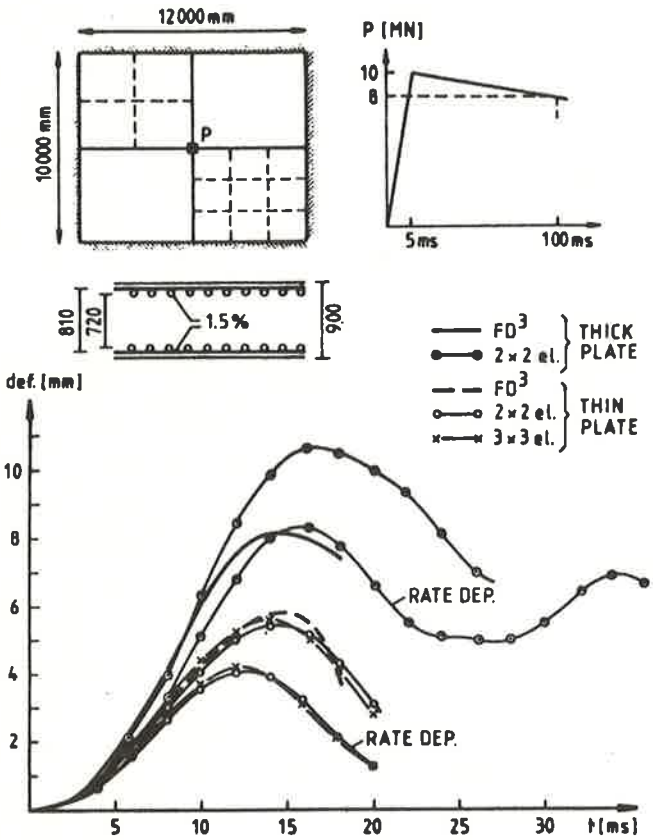
Kuvassa 4 on esitetty alumiinisen kiertymättömästi tuetun ympyrälaatan keskipisteen taipuma ajan funktiona [11], kun kuormana on tasan jakautunut impulssi v_0 = 4410 in/s laatan keskiosassa. Ainevakiot ovat $E = 1.04\ 10^7$ psi, $\sigma_m = 4.24\ 10^4$ psi, $E_T = 5.44\ 10^4$psi, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.508\ 10^{-4}$ lbf sec/in^4. Laskelmissa käytettiin suurten muodonmuutosten plastisuusteoriaa, pyörähdyssymmetristä kahdeksansolmuista isoparametrista elementtiä ja aikaintegroinnissa trapetsikaavaa.



Kuva 4. Ympyrälaatan keskipisteen taipuma.

5.3 Teräsbetonilaatta

Kuvassa 5 nähdään teräsbetonilaatan keskipisteen taipuma ajan funktiona. Kuormana on keskipisteeseen vaikuttava ajasta riippuva voima esim. vesisuihku [22]. Ainevakiot ovat betonille f_c = 22.7 MPa, f_t = 2.27 MPa, E_c = 33 GPa, ν_c = 0.15 ja teräkselle f_s = 400 MPa, E_s = 206 GPa ja tiheys ρ = 2400 kg/m^3. Betoniin sovellettiin plastisuusteoriaa, jossa toisena versiona oli muodonmuutosnopeuden mukana kasvava myötölujuus. Teräs otaksuttiin kimmoplastiseksi. Laskelmissa käytettiin ohuen laatan teorian mukaista 24-vapausasteista ja paksun laatan teorian mukaista 20-vapausasteista laattaelementtiä ja aikaintegroinnissa keskeisdifferenssimenetelmää.



Kuva 5. Teräsbetonilaatan keskipisteen taipuma.

6 KIRJALLISUUSVIITTEET

1 Malvern L.E.,
Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice-Hall, 1969.

2 Washizu K.,
Variational methods in elasticity and plasticity. 2. painos. Pergamon Press, 1975.

3 Zienkiewicz O.C.,
The finite element method. 3 painos. McGraw-Hill, 1977.

4 Ziegler H.,
An introduction to thermomechanics. North-Holland Publishing Company, 1977.

5 Schapery R.A.,
On a thermodynamic constitutive theory and its application to various nonlinear materials. Proc. IUTAM Symp., East Kilbride. Springer 1968, 259-285.

6 Matthies H. ja Strang G.,
The solution of nonlinear finite element equations. Int. J. Num. Meth. Eng. 14 (1979), 1613-1626.

7 Geradin M. ja Hogge M.A.,
Quasi-Newton iteration in nonlinear structural dynamics. 5. SMiRT Conference, Berlin 1979, Paper M7/1*.

8 Ramm E.,
Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, toim. W. Wunderlich, E. Stein ja K.-J. Bathe. Springer 1981, s. 63-89.

9 Rheinboldt W.C.,
Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems. Computers & Structures 13 (1981), 103-113.

10 Watson L.T. ja Yang W.H.,
Optimal design by a homotopy method. Applicable Anal. 10 (1980), 275-284.

11 Tuomala M.T.E.,
Eräiden yksinkertaisten rakenteiden staattisen ja dynaamisen vasteen analysointi elementtimenetelmällä. TKK, lis.työ, Otaniemi 1980.

12 Helenius A.,
Kimmoisen ja kimmoplastisen aineen malleja epälineaarisessa jatkuvan aineen mekaniikassa. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1980.

13 Myllymäki J.,
Lyhytaikaisesti kuormitettujen sauvarakenteiden dynaaminen vaste. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1980.

14 Piila P.,
Teräsbetonipalkkien ja levyjen analysointi elementtimenetelmällä. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1980.

15 Olin J.,
Betonin ominaisuudet nopeissa kuormituksissa. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1978.

16 Sinisalo H.,
Iskuaallon eteneminen sauvassa. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1977.

17 Kaira H.,
Taipuisten laattojen ja laakeiden kuorten geometrisesti ja materiaalisesti epälineaarinen analysointi elementtimenetelmällä. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1976.

18 Tuomala M.,
Taipuisten laattojen analysointi elementtimenetelmällä. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1974.

19 Saloviin K.,
Visko- tai elastoviskoplastisen laatan analysointi elementti-menetelmällä. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1975.

20 Karri J.,
Elementtimenetelmän soveltaminen teräsbetonilevyihin. TKK, dipl.työ, Otaniemi 1972.

21 Pajunen H.,
Elementtimenetelmän soveltaminen teräsbetonilevyihin. TKK. dipl.työ, Otaniemi 1972.

22 Mikkola M.J. ja Sinisalo H.S.,
Finite element analysis of transient nonlinear response of reinforced concrete structures. Nonl. FE anal. in struct. mech., toim. W. Wunderlich, E. Stein ja K.-J. Bathe. Springer 1981, s. 481-501.

TERÄSBETONIPALKISTOJEN EPÄLINEAARINEN ANALYSOINTI ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Mikko Kilpeläinen
Oulun yliopisto

1 JOHDANTO

Teräsbetonisten arinapalkistojen epälineaarista analysointia varten on Oulun yliopiston rakennetekniikan laitoksella kehitetty laskentamenetelmä, jota koskeva tutkimus on julkaistu viitteessä [1]. Vaikka se on laadittu nimenomaan arinapalkistoja varten, soveltuu se myös muiden teräsbetonipalkistojen laskentaan. Tämä esitys perustuu em. tutkimukseen. Tarkoituksena on kuvata menetelmän lähtökohdat ja pääpiirteet sekä verrata eräitä laskemalla saatuja tuloksia vastaaviin kokeellisesti saatuihin tuloksiin. Merkintöinä käytetään samoja merkintöjä kuin julkaisussa [1]. Tutkimuksen yhteydessä on laadittu kehitetyn laskentamenetelmän pohjalta tietokoneohjelma, jonka käyttöohjeet on esitetty julkaisussa [2].

2 LÄHTÖKOHDAT JA OTAKSUMAT

Laskentamenetelmää kehitettäessä on tehty joukko yksinkertaistavia otaksumia. Tärkeimmät otaksumat ja laskentaperiaatteet ovat seuraavat:

1. Laskenta perustuu elementtimenetelmään. Elementteinä käytetään yksiulotteisia palkkielementtejä. Kaksi- ja kolmiulotteista jännitystilaa ei oteta huomioon.
2. Palkiston geometria voi olla mielivaltainen (vino, suorakulmainen, eripituiset elementit, yksinkertainen tai jatkuva palkki jne.). Kuitenkin jokaisen elementin koko pituudella poikkileikkauksen tulee olla vakio, joko suorakaide-, L- tai T-poikkileikkaus.
3. Palkiston kuormat vaikuttavat pistekuormina elementtien solmu-

pisteissä kohtisuoraan palkiston tasoa vastaan.

4. Kuormitus on lyhytaikainen, monotonisesti kasvava kertakuormitus.
5. Palkkien on oltava aliraudoitettuja. Raudoitus on tunnettava ennen laskentaa.
6. Tuet voivat olla joko jäykästi kiinnitettyjä tai nivelöityjä kunkin vapausasteen suunnassa.
7. Elementtien päät voidaan määrittää nivelöidyiksi eri vapausasteiden suunnassa. Myös laskennan aikana voi elementtien päihin syntyä plastisia niveliä terästen myötäämisen johdosta.
8. Elementeissä syntyvä vääntö otaksutaan vapaaksi väännöksi.
9. Elementtien poikkileikkaukset pysyvät tasoina taivutuksen alaisessa rakenteessa.
10. Leikkausjäykkyyttä ei oteta huomioon elementin jäykkyysmatriisia muodostettaessa.
11. Betonin virumaa ei oteta huomioon.

3 MATERIAALIEN JÄNNITYS-MUODONMUUTOSOMINAISUUDET

3.1 Puristettu betoni

Puristetun betonin σ-ε-kuvaajaa aproksimoidaan polynomilla

$$\sigma_c = a_0 + a_1 \cdot \eta + a_2 \cdot \eta^2 + a_3 \cdot \eta^3 + a_4 \cdot \eta^4 \qquad (1)$$

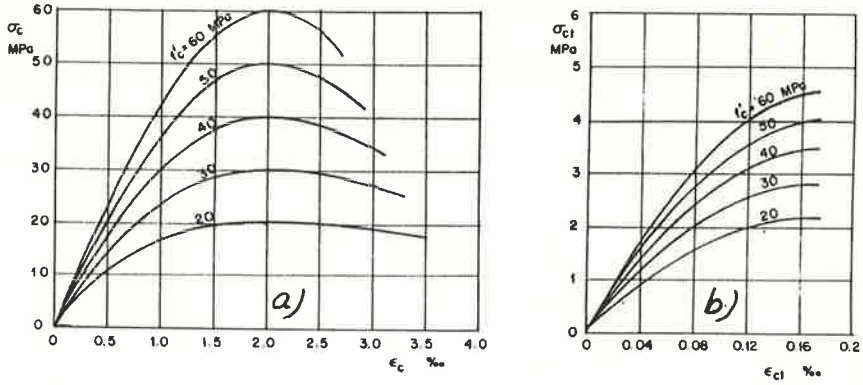
Määrittämällä polynomin kertoimet viidestä reunaehdosta saadaan puristetulle betonille kuvan 1a mukaiset σ-ε-kuvaajat.
Tällöin

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cy}}$$

$$E_c = 6200 \cdot \sqrt{f'_c}$$

$$\varepsilon_{cy} = 2{,}0 \text{ ‰} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{cu} = 3{,}9 - 0{,}02 \cdot f'_c \text{ ‰}$$



Kuva 1. Betonin σ-ε-kuvaajat puristuksessa (a) ja vedossa (b).

3.2 Vedetty betoni

Vedetyn betonin σ-ε-kuvaajaa aproksimoidaan polynomilla

$$\sigma_{ct} = b_0 + b_1 \cdot \eta + b_2 \cdot \eta^2 + b_3 \cdot \eta^3 \qquad (3)$$

Kun määritetään polynomin kertoimet neljän reunaehdon avulla, jotka kuvaajan tulee täyttää, saadaan taivutusvedossa betonille kuvan 1b mukaiset σ-ε-kuvaajat.
Tällöin

$$\eta = \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{cty}}$$

$$E_c = 6200 \cdot \sqrt{f'_c}$$

$$\varepsilon_{cty} = \varepsilon_{ctu} = 0{,}175 \text{ ‰} \qquad (4)$$

$$f_{ct} = 0{,}30 \cdot \sqrt[3]{f'^2_c}$$

Keskeisessä vedossa betonin vetolujuus lasketaan yhtälöstä

$$f_{ct} = 0{,}25 \cdot \sqrt[3]{f_c'^2} \qquad (5)$$

3.3 Teräs

Teräksen σ-ε-kuvaaja on Suomen rakentamismääräyskokoelman osassa B4 esitetyn kuvan mukainen. Tämän mukaan teräs on elastoplastinen materiaali. Malli soveltuu hyvin kuumavalssatulle harjateräkselle.

4 TERÄSBETONIPALKIN POIKKILEIKKAUKSEN HALKEILUKAPASITEETTI

Pelkässä taivutuksessa lasketaan positiivinen halkeilutaivutusmomentti yhtälöstä

$$M_{ropos} = \int_{A_{cc}} \sigma_c(\varepsilon_c) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \cdot x \cdot dA + \int_{A_{ct}} \sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}) \cdot \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{cty}} \cdot$$

$$(h-x) \cdot dA + D_s \cdot (x-d') + Z_s \cdot (d-x) \qquad (6)$$

Laskenta tapahtuu iteroimalla sisäisten voimien tasapainoyhtälön avulla. Negatiivinen halkeilutaivutusmomentti voidaan laskea vastaavalla tavalla.

Halkeiluvääntömomentti pelkässä väännössä saadaan yhtälöstä

$$T_{ro} = 1{,}33 \cdot \frac{K_{tro}}{K_{trw}} \cdot f_{ct} \cdot \frac{h \cdot b_w^2}{3{,}0 + \dfrac{2{,}6}{0{,}45 + \dfrac{h}{b_w}}} \qquad (7)$$

Tällöin

$$K_{trw} = 0{,}60 \cdot G_c \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{0{,}23}{0{,}18 + \dfrac{h}{b_w}}\right) \cdot h \cdot b_w^3 \qquad (8)$$

ja

$$K_{tro} = k \cdot (K_{trw} + \sum_{1}^{2} (0{,}267 \cdot G_c \cdot h_f^3 \cdot b_f) \qquad (9)$$

Suorakaide- ja L-poikkileikkaukselle k = 1, ja T-poikkileikkaukselle k = 1,15.

Pelkässä leikkauksessa lasketaan halkeiluleikkausvoima yhtälöstä

$$V_{ro} = (1{,}0 - \frac{(\frac{a}{d})^{4,8}}{29} \cdot e^{-\frac{a}{d}}) \cdot f_{ct} \cdot b_w \cdot z_{ro} \qquad (10)$$

a on leikkausjänne eli elementin pituus, ja z_{ro} saadaan yhtälöstä

$$z_{ro} = \frac{|M_{ro}|}{Z_s + Z_c} = \frac{|M_{ro}|}{D_s + D_c} \qquad (11)$$

Yhdistetyssä kuormituksessa halkeilu alkaa joko taivutusmomentin ja vääntömomentin yhteisvaikutuksesta palkin taivutukseen nähden vedetyllä reunalla tai vääntömomentin ja leikkausvoiman yhteisvaikutuksesta uuman pitemmän sivun puolivälissä poikkileikkauksen reunalla. Taivutusmomentti ja vääntömomentti toteuttavat halkeilun alkaessa vuorovaikutusyhtälön

$$\frac{M_r}{M_{ro}} + (\frac{T_r}{T'_{ro}})^2 = 1 \qquad (12)$$

Tällöin

$$T'_{ro} = 1{,}33 \cdot \frac{K_{tro}}{K_{trw}} \cdot f_{ct} \cdot \frac{0{,}54}{1{,}6 + \frac{h}{b_w}} \cdot h^2 \cdot b_w \qquad (13)$$

Halkeilun alkaessa vääntömomentin ja leikkausvoiman yhteisvaikutuksesta toteuttavat ne vuorovaikutusyhtälön

$$(\frac{T_r}{T_{ro}})^2 + 0{,}40 \cdot \frac{T_r}{T_{ro}} \cdot \frac{V_r}{V_{ro}} + (\frac{V_r}{V_{ro}})^2 = 1 \qquad (14)$$

5 TERÄSBETONIPALKIN POIKKILEIKKAUKSEN KUORMITUSKAPASITEETTI

Aliraudoitetun palkin murtuminen alkaa teräksen myötäämisellä. Koska myötäämisen alettua kuormitus ei kyseisessä poikkileikkauksessa voi enää sanottavasti kasvaa, voidaan tällöin katsoa poikkileikkauksen kuormituskapasiteetti saavutetuksi. Samoinkuin betonin halkeilu myös terästen myötääminen vaikuttaa teräsbetonirakenteen epälineaariseen käyttäytymiseen. Terästen myötäämisen alkaminen merkitsee myös plastisen nivelen muodostumista myötökohtaan.

Pelkässä taivutuksessa saadaan positiivinen taivutuskapasiteetti yhtälöstä

$$M_{uopos} = \int_{A_{cc}} \sigma_c(\varepsilon_c) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \cdot x \cdot dA + D_s \cdot (x - d')$$

$$+ Z_s \cdot (d - x) \qquad (15)$$

Negatiivinen taivutuskapasiteetti saadaan vastaavalla tavalla.

Pelkässä väännössä saadaan vääntökapasiteetti ristikkoanalogiaan perustuvasta yhtälöstä

$$T_{uo} = 2 \cdot A_o \sqrt{\frac{A_{sl} \cdot f_{yl} \cdot A_{st} \cdot f_{yt}}{u_o \cdot s}} \qquad (16)$$

Vastaavasti pelkässä leikkauksessa saadaan leikkauskapasiteetti yhtälöstä

$$V_{uo} = \sqrt{\frac{2 \cdot A_{sl} \cdot f_{yl} \cdot h_o \cdot A_{st} \cdot f_{yt}}{s}} \qquad (17)$$

Yhdistetyn kuormituksen alaisen palkin kuormituskapasiteetti lasketaan yleisimmin ns. ristikkoanalogiaan perustuen. Tällöin terästen myötääminen voi alkaa kolmella eri tavalla:

1. Alapinnan pitkittäisteräkset ja hakateräkset myötäävät.

Tällöin taivutusmomentti, vääntömomentti ja leikkausvoima toteuttavat vuorovaikutusyhtälön

$$\frac{M_u}{M_{uopos}} + \left(\frac{T_u}{T_{uo1}}\right)^2 + \left(\frac{V_u}{V_{uo1}}\right)^2 = 1 \qquad (18)$$

T_{uo1} ja V_{uo1} saadaan yhtälöistä

$$T_{uo1} = 2 \cdot A_o \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot A_s \cdot f_{yl} \cdot A_{st} \cdot f_{yt}}{u_o \cdot s}} \qquad (19)$$

$$V_{uo1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{A_s \cdot f_{yl} \cdot h_o \cdot A_{st} \cdot f_{yt}}{s}} \qquad (20)$$

2. Yläpinnan pitkittäisteräkset ja hakateräkset myötäävät. Vuorovaikutusyhtälö on tällöin

$$\frac{M_u}{M_{uoneg}} + \left(\frac{T_u}{T_{uo2}}\right)^2 + \left(\frac{V_u}{V_{uo2}}\right)^2 = 1 \qquad (21)$$

Nyt

$$T_{uo2} = 2A_o \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot A_s' \cdot f_{yl} \cdot A_{st} \cdot f_{yt}}{u_o \cdot s}} \qquad (22)$$

$$V_{uo2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{A_s' \cdot f_{yl} \cdot h_o \cdot A_{st} \cdot f_{yt}}{s}} \qquad (23)$$

3. Pitkittäisteräkset ja hakateräkset myötäävät uuman sillä sivulla, jolla leikkausvoiman ja vääntömomentin aiheuttamat leikkausjännitykset ovat samansuuntaiset. Vuorovaikutusyhtälö on

$$\left(\frac{T_u}{T_{uo3}}\right)^2 + \frac{T_u}{T_{uo3}} \cdot \frac{V_u}{V_{uo3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{b_o}{h_o}}} + \left(\frac{V_u}{V_{uo3}}\right)^2 = 1 \qquad (24)$$

T_{uo3} saadaan yhtälöstä (16) ja V_{uo3} yhtälöstä (17).

Koska myös betoni kantaa osan leikkausvoimasta, korvataan V_u eo. yhtälöissä erotuksella $V_u - V_c$. V_c on betonin leikkauskapasiteetti, joka saadaan yhtälöstä

$$V_c = f_{ct} \cdot b_w \cdot z_{uo} \tag{25}$$

Jos $V_c \geq V_u$, merkitään $V_c = V_u$, jolloin leikkausvoimasta aiheutuvat termit eo. yhtälöistä häviävät.

Jotta palkki toimisi ristikkoanalogian mukaisesti, tulee raudoituksen täyttää eräitä ehtoja. Laattapalkin kuormituskapasiteetin ristikkoanalogia arvioinee hieman liian pieneksi.

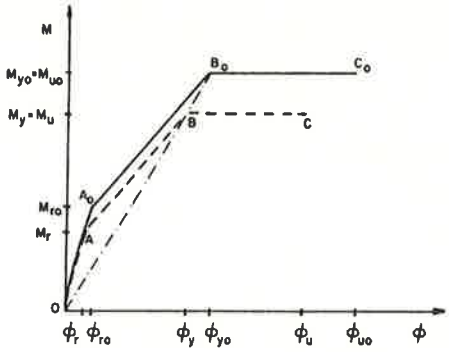
6 TERÄSBETONIPALKIN POIKKILEIKKAUKSEN JÄYKKYYSOMINAISUUDET

6.1 Taivutusjäykkyys

Poikkileikkauksen taivutusjäykkyyttä voidaan tarkastella Φ-M-kuvaajan avulla, jolloin Φ on käyristymä ja M on taivutusmomentti. Φ-M-kuvaajaa aproksimoidaan kolmesta osasta koostuvalla kuvaajalla kuvan 2 mukaisesti. Kuvaajan avulla määritellään taivutusjäykkyys sekanttijäykkyytenä yhtälöstä

$$K_m = \frac{M}{\Phi} \tag{26}$$

Välillä OA_o Φ-M-kuvaaja on käyrä siten, että K_m pienenee suoraviivaisesti arvosta K_{me} arvoon K_{mro}, kun M kasvaa nollasta arvoon M_{ro}. Janat A_oB_o, B_oC_o sekä AB ja BC sensijaan ovat suoria viivoja (kuva 2).



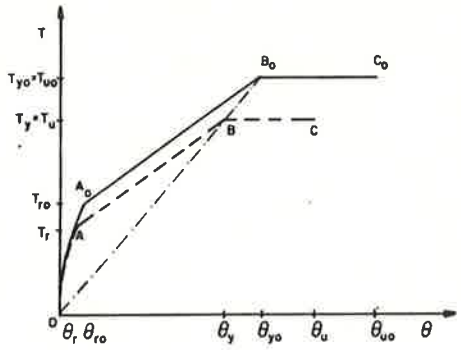
Kuva 2. Teräsbetonipalkin Φ-M-kuvaajan aproksimaatio shemaattisesti esitettynä. Pelkkä taivutus ———— , yhdistetty kuormitus – – – – .

6.2 Vääntöjäykkyys

Poikkileikkauksen vääntöjäykkyyttä voidaan tarkastella θ-T-kuvaajan avulla, kun θ on vääntymä ja T on vääntömomentti. Myös θ-T-kuvaajaa aproksimoidaan kolmesta osasta koostuvalla kuvaajalla kuvan 3 mukaisesti. Vääntöjäykkyys määritellään nyt sekanttijäykkyytenä yhtälöstä

$$K_t = \frac{T}{\theta} \tag{27}$$

Väli OA_o on käyräviivainen siten, että K_t pienenee suoraviivaisesti arvosta K_{te} arvoon K_{tro} vääntymän kasvaessa nollasta arvoon θ_{ro}.



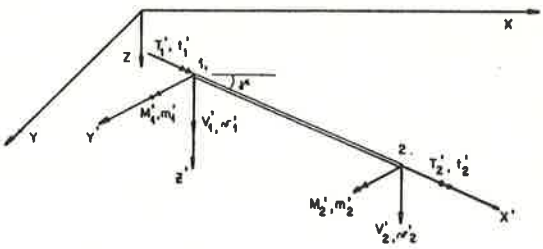
Kuva 3. Teräsbetonipalkin θ-T-kuvaajan aproksimaatio shemaattisesti esitettynä. Pelkkä vääntö ———, yhdistetty kuormitus – – – – .

Betonin halkeilun alkaessa tarkasteltavana olevassa poikkileikkauksessa muodostuu taitepiste A sekä Φ-M-kuvaajaan että θ-T-kuvaajaan samanaikaisesti riippumatta siitä, alkaako halkeilu taivutusmomentin ja vääntömomentin vai vääntömomentin ja leikkausvoiman yhteisvaikutuksesta. M_r ja T_r ovat poikkileikkauksessa halkeilun alkaessa vaikuttavat taivutusmomentti ja vääntömomentti. Vastaavasti terästen myötäämisen alkaessa muodostuu taitepiste B samanaikaisesti sekä Φ-M-kuvaajaan että θ-T-kuvaajaan. M_y ja T_y ovat siis poikkileikkauksessa myötäämisen alkaessa vaikuttavat taivutusmomentti ja leikkausvoima.

7 LASKENTAMENETELMÄ

7.1 Lineaarinen menetelmä

Lineaarinen laskentamenetelmä, josta modifioimalla epälineaarinen laskentamenetelmä saadaan, perustuu elementtimenetelmään. Tällöin solmupisteiden väliset palkin osat käsitellään yksiulotteisina palkkielementteinä. Niiden kummassakin päässä on kolme vapausastetta: taivutus, vääntö ja leikkaus. Palkkielementti, sen vapausasteet ja koordinaatistot on esitetty kuvassa 4.



Kuva 4. Palkkielementti, sen vapausasteet ja koordinaatistot.

Jokaisen elementin paikalliskoordinaatistossa on voimassa matriisiyhtälö

$$\mathbf{F}' = \mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\delta}' \tag{28}$$

Yleisessä koordinaatistossa on vastaavasti

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta} \tag{29}$$

Kun $\mathbf{E}$ on koordinaatiston muunnosmatriisi, saadaan

$$\mathbf{k} = \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{k}' \cdot \mathbf{E} \tag{30}$$

Muodostamalla palkiston jokaisessa solmupisteessä tasapainoyhtälö kunkin vapausasteen suunnalla saadaan koko rakenteelle matriisiyhtälö

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Delta} \tag{31}$$

$\mathbf{Q}$ on rakenteen kuormitusvektori, $\mathbf{K}$ on rakenteen jäykkyysmatriisi ja $\boldsymbol{\Delta}$ on rakenteen siirtymävektori.

Kun merkitään alaindeksillä s vapausasteita, joiden suunnassa rakenne on tuettu ja siirtymä siis nolla ja alaindeksillä f muita vapausasteita, saadaan rakenteen siirtymät yhtälöstä

$$\boldsymbol{\Delta}_f = \mathbf{K}_{ff}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_f \tag{32}$$

ja tukireaktiot yhtälöstä

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{K}_{sf} \cdot \mathbf{K}_{ff}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_f \tag{33}$$

Elementin nurkkapistesiirtymät saadaan yhtälöstä

$$\boldsymbol{\delta}' = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\delta} \tag{34}$$

ja nurkkapistevoimat yhtälöstä (28).

7.2 Epälineaarinen analyysi

Epälineaarinen menetelmä perustuu myös elementtimenetelmään. Tehtävän ratkaisuun käytetään kuormainkrementtitekniikkaa. Rakenteen voimasuureet ja siirtymät haetaan jokaisessa kuormittamisvaiheessa iteroimalla, ja rakenteen jäykkyysmatriisia muutetaan jokaisen iteraatiokierroksen jälkeen. Yhtälö (31), jossa käytetään ns. sekanttijäykkyyttä, on siis ratkaistava jokaisella iteraatiokierroksella.

Iteroinnin suppenevuus tarkistetaan vertaamalla elementtien nurkkapistevoimien ja -siirtymien uusia arvoja edellisellä iteraatiokierroksella saatuihin arvoihin. Jos epäyhtälö

$$\frac{1}{12 \cdot n} \cdot \sum_{1}^{6n} \left(\left| \frac{{}^{t+1}\delta_i' - {}^{t}\delta_i'}{{}^{t}\delta_i'} \right| + \left| \frac{{}^{t+1}F_i' - {}^{t}F_i'}{{}^{t}F_i'} \right| \right) < \varepsilon \tag{35}$$

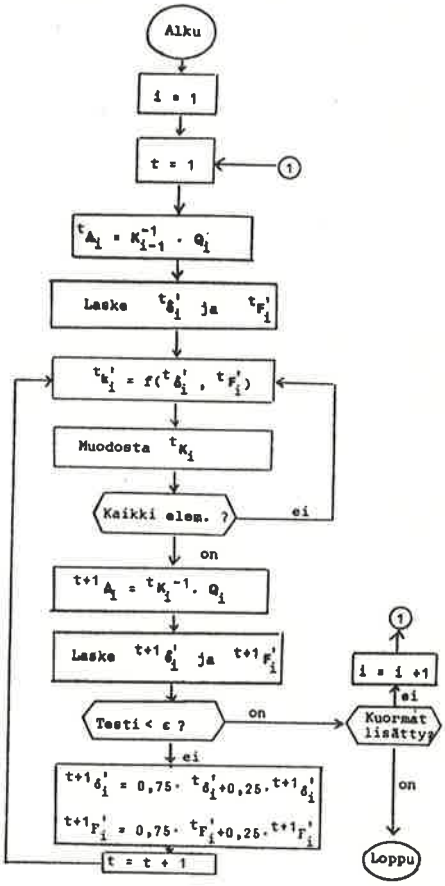
ei ole tällöin voimassa, annetaan nurkkapistesiirtymille ja -voimille uudet arvot yhtälön

$$\begin{aligned} {}^{t+1}\delta_i' &= 0{,}75 \cdot {}^{t}\delta_i' + 0{,}25 \cdot {}^{t+1}\delta_i' \\ {}^{t+1}F_i' &= 0{,}75 \cdot {}^{t}F_i' + 0{,}25 \cdot {}^{t+1}F_i' \end{aligned} \tag{36}$$

mukaisesti. n tarkoittaa elementtien lukumäärää, ε laskentatark-

kuutta ja yläindeksi t iterointikierrosta.

Kun merkitään i:llä kuormitusvaihetta ja t:llä iteraatiokierrosta, voidaan laskennan kulku esittää lohkokaavion muodossa seuraavasti:



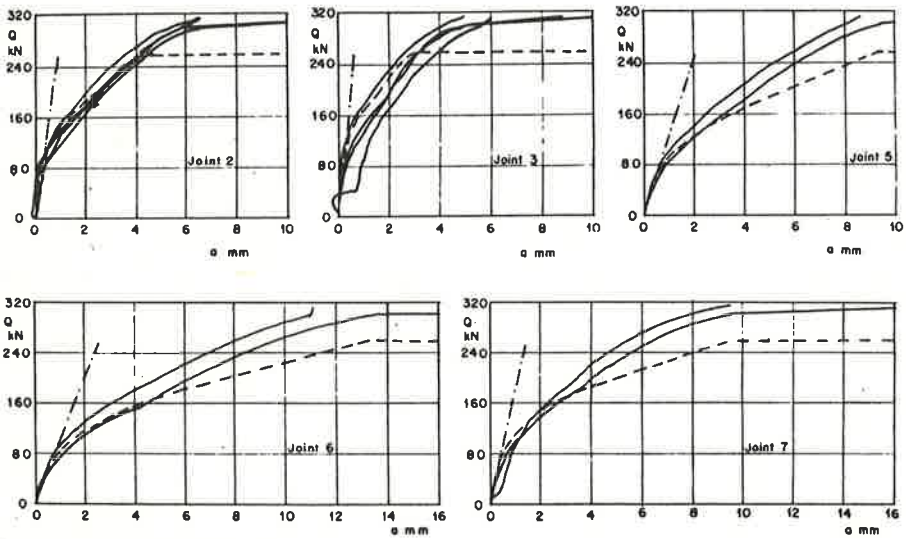
Kuormaa jatkuvasti lisättäessä alkaa terästen myötäessä syntyä plastisia niveliä rakenteeseen. Käytetyssä laskentamenetelmässä nivelet voivat muodostua vain elementin päihin, joihin voi muodostua taivutus-, vääntö- tai leikkausnivel tai niiden yhdistelmä. Nivelen muodostuttua asetetaan ko. poikkileikkauksessa vaikuttavat

myötövoimasuureet ulkoisiksi kuormiksi nivelen molemmille puolille. Kun niveliä on muodostunut riittävästi, muuttuu rakenne mekanismiksi, jolloin rakenteen myötökuorma on saavutettu.

Palkkielementin jäykkyysmatriisi määritetään jokaisella iteraatiokierroksella muotofunktion avulla. Taivutusmomentti ja käyristymä ilmaistaan muotofunktion avulla. Integroimalla työyhtälö koko elementin yli saadaan elementin jäykkyysmatriisin taivutustermit nurkkapistevoimien ja -siirtymien funktiona. Jäykkyysmatriisin vääntötermit määritetään kuitenkin tarkkuussyistä muotofunktioiden käytöstä poikkeavalla iteratiivisella menettelyllä.

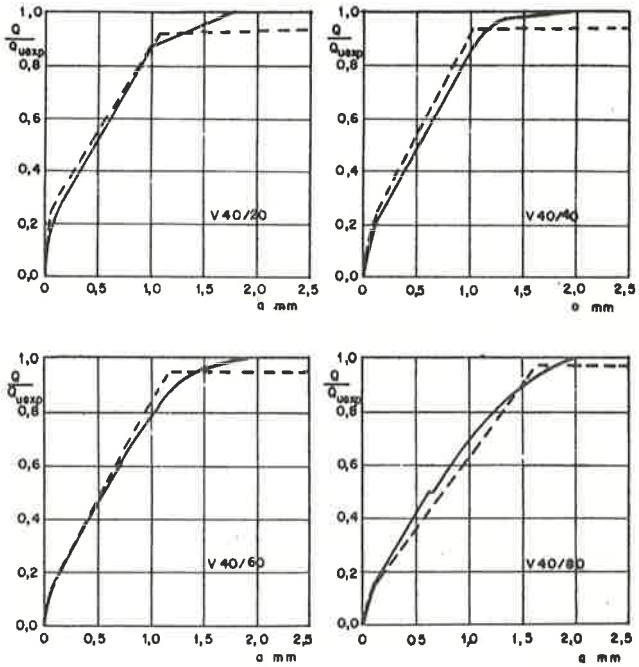
8 LASKENTATULOSTEN VERTAILU ERÄISIIN KOETULOKSIIN

Viitteessä [1] julkaistun tutkimuksen yhteydessä rakennettiin ja kuormitettiin arinapalkisto, jonka solmupisteiden taipumat on esitetty kuormituksen funktiona kuvassa 5. Voidaan todeta, että laskentatulokset ovat ns. varmemmalla puolella sekä myötökuorman että taipumien suhteen.



Kuva 5. Arinapalkiston kokeellisesti ja laskemalla saadut taipumakuvaajat kuormituksen funktiona [1]. Koe ———— , teoria — — — — .

Viitteessä [3] on esitetty neljän palkin kokeellisesti saadut taipumien kuvaajat kuorman funktiona. Kuvassa 6 kuvaajia on verrattu laskennallisesti saatuihin käyriin. Voidaan todeta, että vastaavuus on hyvä.



Kuva 6. Neljän suorakaidepalkin keskikohdan taipumat kuormituksen funktiona [3] . Koe ———— , teoria - - - - .

9 LOPPUSANAT

Laskentamenetelmää kehitettäessä tehdyistä lukuisista yksinkertaistavista olettamuksista huolimatta voitiin sen avulla saatujen tulosten korreloivan koetulosten kanssa verraten hyvin. Laskentatulokset näyttävät olevan yleensä varmemmalla puolella sekä muodonmuutosten että myötökuorman suhteen. Käyttötilakuormituksen vaikuttaessa erot ovat lähes olemattomia. Betonin halkeilu näyttää tapahtuvan laskentamallin mukaisesti.

Tutkittaessa laskennallisesti väännön vaikutusta arinapalkiston muodonmuutoksiin ja voimasuureisiin todettiin sen olevan hyvin pieni. Vaikutus on sitä pienempi mitä suurempi on palkkien korkeuden suhde laatan paksuuteen. Myös kimmoteorian mukaan väännön vaikutus on hyvin pieni, joten se yhteensopivuusväännössä voidaan käytännön laskelmissa jättää huomioonottamatta. Myös laattapalkin puristuslaatan toimivan leveyden vaikutus osoittautui pieneksi. Vaikutus on sitä pienempi mitä heikompi raudoitus on.

Laskentaan tarvittavaa tietokoneaikaa lisää se, että rakenteen jäykkyysmatriisi uusitaan ja yhtälöryhmä ratkaistaan jokaisella iteraatiokierroksella. Sitä voidaan lyhentää vähentämällä iterointitarkkuutta sekä integroimispisteiden ja kuormainkrementtien määrää. Sopiva iterointitarkkuus näyttää olevan 0,03. Kuormainkrementin tulisi olla n. 10...15 % myötökuormasta ja integroimispisteitä 5...7 kpl kussakin elementissä.

10 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Kilpeläinen Mikko, Nonlinear struktural analysis of reinforced concrete beam grids.
Acta Universitatis Ouluensis. Series C, Technica No 18. Department of Civil Engineering, University of Oulu, Oulu, 1981, 119 s.

[2] Kilpeläinen Mikko, Teräsbetonisen arinapalkiston epälineaarinen analysointi elementtimenetelmällä.
Ohjelmaseloste. Tietojenkäsittelyopin laitos, Oulun yliopisto, sarja D1. Oulu, 1982, 16 s.

[3] Rechardt T. & Tiira S., Teräsbetonipalkin taivutusjäykkyydestä.
Valtion teknillinen tutkimuslaitos. Raportti Sarja III, Rakennus 82. Helsinki, 1965.

VETOAKESTÄMÄTTÖMÄSTI TUETUN KIMMOISEN PILARIN NURJAHDUS

Markku Heinisuo
Tampereen teknillinen korkeakoulu

1 JOHDANTO

Nurjahduskuormituksen määritystä tapauksessa, jossa pilari on tuettu lineaarisilla jousilla on käsitelty paljon kirjallisuudessa (Brush, 1975, Timoshenko, 1961). Seuraavassa tarkastellaan pilarin poikittaisstabiliutta, kun pilarin tuenta ei muutu lineaarisesti siirtymän kasvaessa. Käytännössä tällainen tilanne tulee kysymykseen, kun pilari on tuettu päistään vetoakestämättömästi. Allekirjoittanut on löytänyt kirjallisuudesta tältä alalta vain Timoshenkon [2] käsittelemän tapauksen, jossa pilarin päät oletetaan pyöristetyiksi. Jos saumoja on äärettömän tiheässä, niin päädytään Angervon [3] kaavoihin. Saumavälin ollessa äärellinen on ratkaisu esitetty julkaisuissa Parland [4] ja Parland [5]. Jos taas saumaväli on "äärettömän" pitkä, niin ratkaisua ei tiettävästi ole aikaisemmin esitetty.

Pilarin poikittaisstabiliuteen vaikuttaa saumassa syntyvä kiertymä. Kun tämä kiertymä tunnetaan, niin pilaria voidaan käsitellä palkkiteorian mukaan (Parland, [4]). Saumassa syntyvälle kiertymälle on löydetty (Koivula, 1981) erittäin hyvä likimääräiskaava, jota käytetään seuraavassa. Johdantona varsinaiseen tehtävään esitetään jäykän pilarin poikittaisstabiliuden laskenta. Nurjahduskuormitukselle P_{cr} saadaan tällöin analyyttinen lauseke, kun tuki oletetaan kimmoiseksi puolitasoksi.

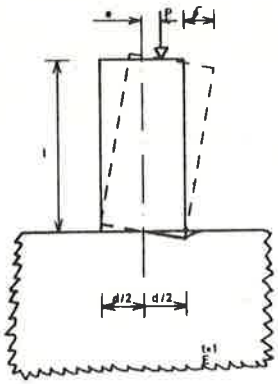
2 JÄYKÄN PILARIN STABILIUS

Tarkastellaan jäykkää pilaria, jonka leveys on d, vahvuus 1 ja korkeus l (kuva 1). Pilari on tuettu kimmoisella puolitasolla,

jonka vahvuus on 1 ja kimmomoduli E. Sauma pilarin ja puolitason välissä on vetoakestämätön ja kitkaton. Puristavan voiman P epäkeskisyys saumassa on

$$e_0 = e + \delta, \qquad (1)$$

missä e on kuormituksen epäkeskisyys ja δ on pilarin poikittaissiirtymä yläpäässä (kuva 1). Nyt



Kuva 1. Jäykkä pilari.

$$\delta = \varphi l, \qquad (2)$$

missä φ on saumassa tapahtunut kiertymä. Toisaalta (Galin, 1961) tasojännitystilassa

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{16\ Pe_0}{\pi E d^2}, & (0 \le e_0 \le \frac{d}{4}), \\[2ex] \dfrac{P}{\pi E(\frac{d}{2} - e_0)}, & (\frac{d}{4} \le e_0 \le \frac{d}{2}), \end{cases} \qquad (3)$$

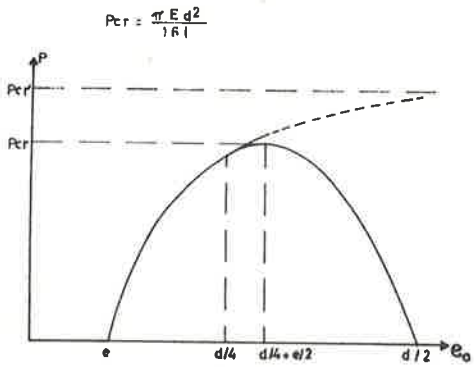
mikä voidaan johtaa tunnetun (Muskhelishvili, 1953) puolitason ratkaisun perusteella. Sijoittamalla tulokset 2 ja 3 kaavaan 1 saadaan yhtälö, mistä kuormitus P voidaan ratkaista epäkeskisyyden e_0 funktiona. Tulos on

$$P = \begin{cases} \dfrac{\pi E d^2}{16\ l}(1 - \dfrac{e}{e_0}), & (0 \le e_0 \le \frac{d}{4}), \\[2ex] \pi E(\frac{d}{2} - e_0)(e_0 - e), & (\frac{d}{4} \le e_0 \le \frac{d}{2}). \end{cases} \qquad (4)$$

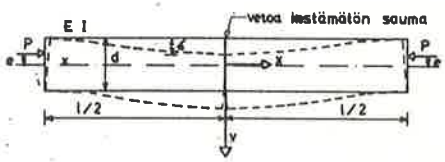
Koska epäkeskisyys e_0 määrittää yksikäsitteisesti siirtymän δ, niin funktion $P(e_0)$ kuvaajaa voidaan pitää kuormitus-poikittaissiirtymäkuviona. Funktion $P(e_0)$ kuvaaja on esitetty kuvassa 2a. Maksimikohta on $e_0 = \frac{d}{4} + \frac{e}{2}$ ja nurjahduskuormitus

$$P_{cr} = \frac{E(\frac{d}{2} - e^2)}{4\ l} \qquad (5)$$

Kuvassa 2a on myös vetoakestävän sauman mukainen ratkaisu



Kuva 2a. "P- δ -kuvio".



Kuva 2b. Kimmoinen pilari.

piirretty katkoviivalla. Tämän kuvaajan arvot lasketaan kaavan 4 ensimmäisellä osalla kaikilla epäkeskisyyden e_0 arvoilla. Seuraavassa lasketaan periaatteessa samalla tavalla kimmoisen pilarin nurjahduskuormitus, kun tuki oletetaan jäykäksi.

3 KIMMOINEN PILARI

Tarkastellaan kuvan 2b pilaria. Keskellä kohdassa x = 0 on vetoakestämätön sauma. Pilarin toinen puolikas voidaan korvata jäykällä tuella. Kulmanmuutos saumakohdassa voidaan esittää (Parland, 1967) kaavalla

$$\varphi = \frac{k^2 d^2}{2}\ \alpha(m), \qquad (6)$$

missä termi k riippuu kuormituksesta P ja taivutusjäykkyydestä EI kaavan

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{7}$$

mukaan ja d on pilarin sivumitta (kuva 2b). Parametri α on riippuvainen ainoastaan kuormituksen resultantin suhteellisesta epäkeskisyydestä

$$m = \frac{6e_0}{d} \tag{8}$$

sauman kohdalla, missä e_0 on epäkeskisyys kohdassa $x = 0$. Nyt on voimassa (kuva 2b)

$$e_0 = e + \delta \tag{9}$$

joten

$$m = \frac{6e}{d} + \frac{6\delta}{d}. \tag{10}$$

Parametrille α ei kirjallisuudessa ole esitetty tarkkaa arvoa. Sen sijaan sille on laskettu ylä- ja alarajat (Koivula, 1981). Erittäin hyvä (virhe < 2 %) likimääräiskaava (Koivula, 1981) on

$$\alpha(m) = \begin{cases} \frac{\sqrt{r}}{3} \cdot (m-1)^{r+2}(3-m)^{r-2}[2(2+r)-m(1+r)], & (1 \le m \le 3), \\ & (r = 0{,}536), \\ 0, \quad (0 \le m < 1) & \end{cases} \tag{11}$$

jota seuraavassa käytetään. Kaavan 11 käyttöedellytykset ovat, että kitkaton kosketuspinta säilyy tasona ja sauvojen pituus on suurempi kuin 4d. Nämä edellytykset ovat nyt täytetyt.

Kuvan 2b palkilla on taivutusmomentti kohdassa x

$$M(x) = P(e + v(x)), \quad (0 \le x \le \tfrac{l}{2}). \tag{12}$$

Palkkiteoriassa

$$M(x) = -EIv''(x), \tag{13}$$

missä v(x) on taipuma kohdassa x. Kaavojen 12 ja 13 perusteella saadaan differentiaaliyhtälö

$$EIv''(x) + Pv(x) = -Pe, \tag{14}$$

jonka ratkaisu on tunnetusti

$$v(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) - e, \tag{15}$$

missä A ja B ovat integroimisvakioita. Ne lasketaan reunaehtojen

$$\begin{cases} v(\frac{l}{2}) = 0, \\ v'(0) = -\frac{\varphi}{2} \end{cases} \tag{16}$$

perustella. Tulos on

$$\begin{cases} A = \dfrac{\varphi \tan(\frac{kl}{2})}{2k} + \dfrac{e}{\cos(\frac{kl}{2})}, \\ B = -\dfrac{\varphi}{2k}. \end{cases} \tag{17}$$

Siirtymä δ (= v(0)) voidaan nyt laskea. Suhteellinen epäkeskisyys m sauman kohdalla on kaavan 10 perusteella

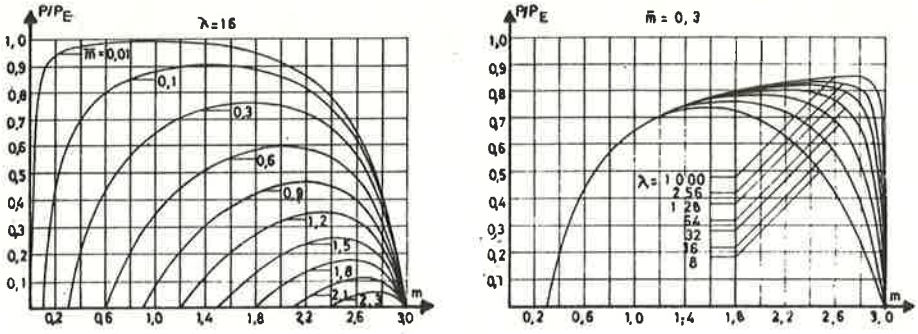
$$m = \frac{6A}{d}, \tag{18}$$

mistä saadaan sijoittamalla kaavoista 17 ja 6 yhtälö

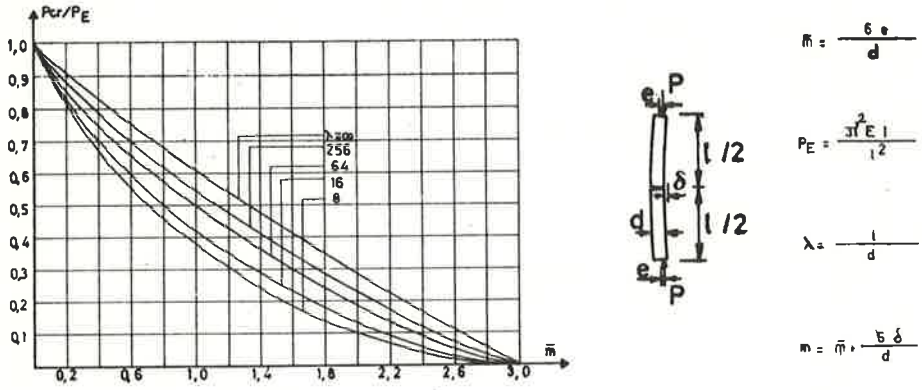
$$\frac{3t\alpha(m)\tan(t)}{\lambda} + \frac{\bar{m}}{\cos(t)} - m = 0, \tag{19}$$

missä

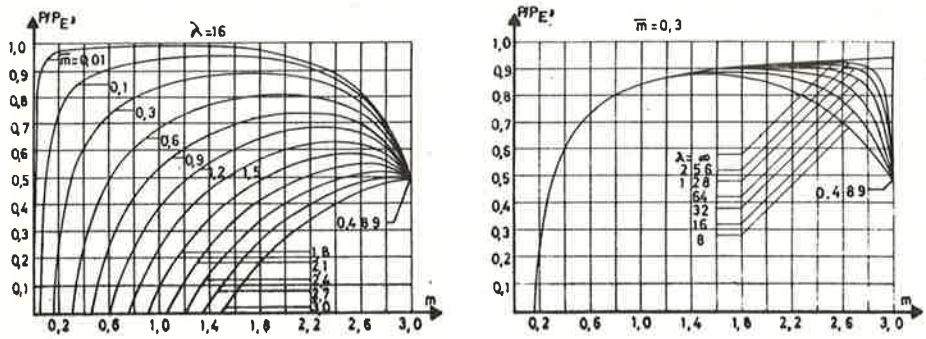
$$t = \frac{kl}{2}, \qquad \lambda = \frac{l}{d}, \qquad \bar{m} = \frac{6e}{d}. \tag{20}$$



Kuva 3a ja b. Kimmoisen pilarin "P-δ-kuvia".



Kuva 4. Kimmoisen pilarin nurjahduskuormitus.

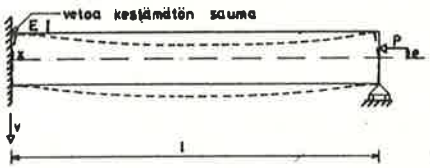


Kuva 5a ja b. Kimmoisen pilarin "P-δ-kuvia".

Transkendenttisesta yhtälöstä 19 voidaan kuormitus P ratkaista numeerisesti eri epäkeskisyyden m arvoilla. Näin saadaan edellisen kohdan mallin mukaan kuormitus-poikkittaissiirtymäkuvio, jonka kuormituksen maksimikohtana on nurjahduskuormitus. Kuvassa 3a ovat eri epäkeskisyyksiä e vastaavat käyrät, kuin hoikkuus $\lambda = 16$. Kuvassa 3b ovat samat käyrät laskettuna epäkeskisyyden arvolla $\bar{m} = 0,3$ sekä hoikkuuden λ eri arvoilla. Kuvissa 3a ja 3b on esitetty myös ehjän palkin ($\varphi \equiv 0$) käyrät (secant formula). Kuvassa 4 ovat nurjahduskuormitukset P_{cr} epäkeskisyyden e funktiona. Kuvasta 3b havaitaan, että hoikkuuden kasvaessa kuormituskäyrä laskee jyrkästi maksimikohdan jälkeen.

Tämän vuoksi tätä teoriaa tulee käytännön rakenteissa soveltaa vain vähemmän hoikkiin tai väliaikaisiin rakenteisiin.

Kuvan 6 pilarin nurjahduskuormitus voidaan määrittää samalla menetelmällä kuin edellisessä tapauksessa. Tämän kaltaisella pilarilla on varmasti enemmän käytännön sovellutusmahdollisuuksia kuin edellisellä, koska sauman ollessa täysin auennut pilari toimii Eulerin pilarina. Jos käytetään kaavan 11 mukaista parametrin α arvoa niin, nyt rikotaan yhtä käyttöedellytystä vastaan. Sauman kautta välitetään leikkausvoimaa, jolloin sauma ei voi olla kitkaton. Oletetaan, että sauma on ns. täyden kitkan sauma, jolloin liukuminen saumassa on täysin estetty. On todettu (Heinisuo 1982), että kitkattoman ja täyden kitkan sauman siirtymäsuureet eivät paljon eroa toisistaan. Lisäksi käyttämällä kuvan 6 sauman muodonmuutoksen lausekkeessa kaavan 11 mukaista parametrin α arvoa saadaan "varmalla puolella" oleva arvio. Tämän perusteella sitä käytetään seuraavassa.



Kuva 6. Kimmoinen pilari.

Kuvan 6 palkilla taivutusmomentti kohdassa x on

$$M(x) = P(e + v(x)) - Q(l-x), \qquad (21)$$

missä Q on tukivoima palkin oikeassa päässä. Differentiaaliyhtälö on nyt muotoa

$$EIv''(x) + Pv(x) = Q(l-x) - Pe, \tag{22}$$

ja sen ratkaisu

$$v(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) - \frac{Q}{P}x + \frac{Q}{P}l - e. \tag{23}$$

Reunaehdot ovat

$$\begin{cases} v(0) = 0, \\ v'(0) = \frac{\varphi}{2}, \\ v(l) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Laskelmat antavat

$$\begin{cases} A = \dfrac{e[\sin(kl)-kl]+\frac{\varphi}{2}l\sin(kl)}{\sin(kl) - kl\cos(kl)}, \\ B = \dfrac{e[1-\cos(kl)]-\frac{\varphi}{2}l\cos(kl)}{\sin(kl) - kl\cos(kl)}, \\ Q = \dfrac{Pe}{l}\left\{\dfrac{kl[1-\cos(kl)]-\frac{\varphi l}{2e}\sin(kl)}{\sin(kl)-kl\cos(kl)}\right\}. \end{cases} \tag{25}$$

Keskiviivasta alaspäin mitattu epäkeskisyys e_0 palkin kohdassa $x = 0$ voidaan laskea momenttitasapainoyhtälöstä

$$Pe_0 = Ql - Pe. \tag{26}$$

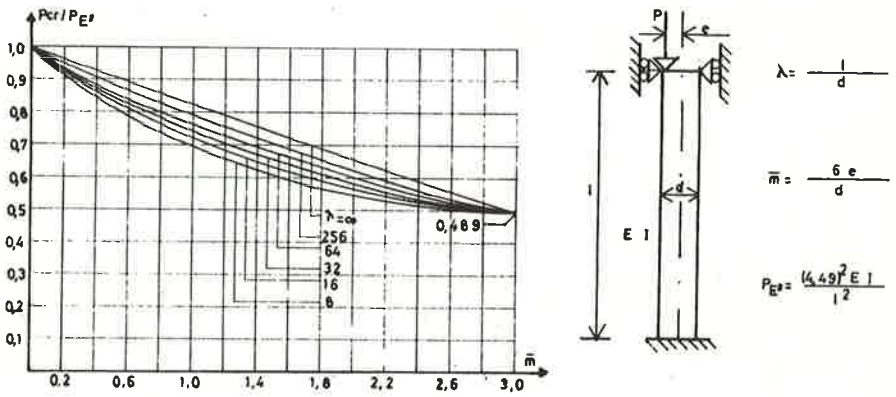
Sijoittamalla tukivoiman Q lauseke kaavaan 26 saadaan seiventämällä yhtälö ($m = 6e_0/d$)

$$m+\bar{m}\,\frac{\sin(\frac{t}{2})-\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})-\frac{t}{2}\cos(\frac{t}{2})}+\frac{3\alpha(m)\,t^2\,\sin(\frac{t}{2})}{8\lambda[\sin(\frac{t}{2})-\frac{t}{2}\cos(\frac{t}{2})]}=0, \qquad (27)$$

missä on käytetty samoja merkintöjä kuin edellä. Vastaavasti menetelmällä päädytään kuvissa 5a ja 5b esitettyihin käyriin. Nurjahduskuormitukset on esitetty kuvassa 7. Kun sauma on täysin auennut ($m \geq 3$), niin pilari toimii kahtena erillisenä Eulerin pilarina, mikä näkyy kuvissa. Kuvan 5 käyrien alkupisteet saadaan yhtälön

$$m-\frac{1}{2}\bar{m}+\frac{9\alpha(m)}{2\lambda}=0 \qquad (28)$$

nollakohdista. Yhtälöstä 27 päädytään yhtälöön 28 suorittamalla rajankäynti $P \to 0$.



Kuva 7. Kimmoisen pilarin nurjahduskuormitus.

4 YHTEENVETO

Edellä on esitetty pilarin poikittaisstabiliuden laskenta, kun pilari on tuettu päästään vetoakestämättömästi. Saumassa tapahtuva kiertymä voidaan ottaa huomioon reunahäiriönä. Pilarin tuenta muuttuu tällöin epälineaarisesti kuormituksen epäkeskisyyden funktiona. Nurjahduskuormitus lasketaan kuormitus-poikittaissiirtymäkuvion

maksimikohdasta. Jos pilari ei ole erityisen hoikka, kannattaa tämä holvivoiman nurjahduskuormitusta lisäävä vaikutus (vrt. kuvan 6 pilari ja Eulerin tapaus) ottaa käytännön sovellutuksissa huomioon.

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Brush, D. O. & Almroth, B.O., Buckling of Bars, Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1975.

[2] Timoshenko, S.P. & Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, 2nd ed. McGraw-hill, New York, 1961.

[3] Angervo, K., Über die Knickung und Tagfähigkeit eines excentrisch gedrückten Pfeilers ohne Zugfestigkeit. Valtion Teknillinen Tutkimuslaitos. Julkaisu 26. Helsinki 1954.

[4] Parland, H., The effect of cracks and of masonry block height on the buckling strength of a column. Valtion teknillinen tutkimuslaitos. Julkaisu 115. Helsinki 1967.

[5] Parland, H. & Heinisuo, M. & Koivula, R., On the Problem of Bending and Compression of Masonry Structures. Proc. of 6th IBMaC, Andil, Roma 1982.

[6] Koivula, R., Palkin vetoa kestämättömän liitoksen siirtymäparametrit. Tampereen teknillinen korkeakoulu. Diplomityö. Tampere 1981.

[7] Galin, L.A., Contact Problems in the Theory of Elasticity (alkup. 1953, käänn. Rva H. Moss), North Carolina State College, Releigh (N.C.), 1961.

[8] Muskhelishvili, N.I., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. (alkup. 1949, käänn. J.R.M. Radok), P. Noordhoff Ltd. Groningen, Holland, 1953.

[9] Heinisuo, M. Lisensiaattityö (julkaisematon).

EPÄHOMOGEENISEN FYSIKAALISESTI EPÄLINEAARISEN PILARIN KANTOKYKY

TkL Simo Virtanen
Tampereen teknillinen korkeakoulu
Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Pilareiden kantokyvyn laskemisessa on epälineaarisuuden ottaminen huomioon lisääntynyt voimakkaasti. Sarja [1] on esimerkiksi tutkinut betoni- ja teräsbetonipilareita käyttäen betonille ja teräkselle epälineaarisia jännitysmuodonmuutoskäyriä, lisäksi hän on huomioinut taipumasta aiheutuvan kuormituksen lisäepäkeskisyyden. Ågårdh [2] käsittelee epälineaarisia rakenteita yleisemmin eikä ainoastaan pilareita, mutta hän olettaa lineaarisen momenttijakautuman jättäen pois aksiaalisen voiman toisen kertaluvun vaikutuksen momenttiin.

Tässä esityksessä on tarkoitus tutkia pilaria, jonka ominaisuudet ovat mahdollisimman yleiset. Pilarin poikkileikkaus ei ole homogeeninen, vaan se voi koostua useammasta eri materiaalista. Jännitysvenymäkäyrille käytetään polynomiapproksimaatiota. Poikkileikkauksen muoto ja materiaaminaisuudet saavat muuttua pilarin pituussuunnassa. Lisäksi pilarilla voi olla pituuskoordinaatin funktiona muuttuva alkukaarevuus. Pilarin ominaisuuksia rajoittavien oletusten määrä on pyritty saamaan pieneksi. Suurimman rajoituksen muodostanee symmetriaoletus. Esitys perustuu kirjoittajan lisensiaattityöhön [3], jonka lähtökohtana on ollut prof. Seppälän esittämä teoria [4].

2 TEORIAA

2.1 Perusoletukset

Tehdään seuraavat lähtöoletukset:

1° Bernoullin otaksuma tasoina pysyvistä poikkileikkaustasoista on

voimassa.

2° Pilarilla on symmetriataso, joka sisältää pilarin akselin. Sekä geometriset että materiaominaisuudet ovat symmetriset tämän tason suhteen.

3° Pilarin poikkileikkauksen jokaisen pisteen normaalijännitys voidaan esittää venymän polynomina. Polynomin asteluku m voi olla mielivaltainen äärellinen luonnollinen luku ($m \in \mathbb{N}$).

4° Pilarin kuormituksena voi olla kaksi yhtä suurta samalla symmetriatasossa olevalla suoralla olevaa vastakkaissuuntaista voimaa P, jotka vaikuttavat pilarin päätytasoihin, sekä kaksi symmetriatasossa pilaria taivuttavaa pilarin päihin vaikuttavaa yhtä suurta vastakkaisen pyörityskyvyn omaavaa voimaparia M_0.

5° Pilarin päät ovat joko vapaasti tai kimmoisesti tuetut.

6° Painovoiman vaikutusta pilariin ei oteta huomioon.

2.2 Normaalijännitys venymän polynomina

Poikkileikkauksen pisteen normaalijännitys on yleisesti neljän muuttujan funktio $\sigma = \sigma(i, u, w, \varepsilon)$. Tässä ε tarkoittaa venymää, i on pilarin akselia pitkin mitattu pituuskoordinaatti ja koordinaatit u ja w ilmoittavat pisteen paikan poikkileikkauksessa, u-akseli on poikkileikkauksen symmetria-akselilla. Oletetaan, että jännitys σ on koordinaattien u ja w suhteen porrasfunktio, toisin sanoen koko poikkileikkaus A voidaan jakaa äärellisen moneen homogeeniseen osa-alueeseen A_κ, joissa jokaisessa σ on riippumaton koordinaateista u ja w. Osa-alueiden muotoa ei ole rajoitettu, useimmiten käytetään suorakulmiota ja ympyrää. Tämä oletus ei käytännössä merkitse mitään rajoitusta tarkasteltavalle pilarille, sillä osa-alueet A_κ voidaan valita mielivaltaisen pieniksi. Näin ollen alueeseen A_κ liittyvä normaalijännitys σ_κ on vain kahden muuttujan funktio. Perusoletuksen 3° perusteella se voidaan kirjoittaa venymän polynomina

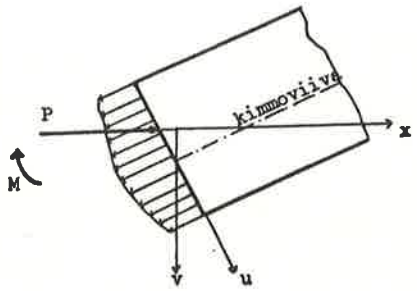
$$\sigma_\kappa = \sigma_\kappa(i,\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{m_\kappa(i)} \frac{1}{\nu!}\,\sigma_\kappa^{(\nu)}(i,0)\varepsilon^\nu = \sigma_B \sum_{\nu=0}^{m_\kappa(i)} c_{\nu\kappa}(i)\,\varepsilon^\nu . \qquad (1)$$

Tässä σ_κ on kehitetty Taylor-sarjaksi pisteessä $\varepsilon = 0$. Ylemmän summausrajan $m_\kappa(i)$ arvo riippuu osa-alueesta A_κ ja pituuskoordinaatista i. Yleensä polynomin asteluvuksi riittää viisi, jotta approksimaatio olisi tyydyttävä, kuten esimerkiksi Kilpeläinen [5] on todennut. Viimeisessä muodossa on summasta otettu yhteiseksi tekijäksi σ_B, joka voi olla jonkun aineen murtolujuus. Näin on saatu venymän kertoimet $c_{\nu\kappa}(i)$ paljaiksi luvuiksi. Polynomin ei tarvitse olla antimetrinen origon suhteen, siis veto- ja puristusmurtolujuuden itseisarvojen ei tarvitse olla yhtä suuria.

2.3 Tasapainoyhtälöt

Tarkastellaan kuvassa 1 esitettyä kimmoviivaa vastaan kohtisuoraa poikkileikkausta. Normaalijännityskentän resultantti on poikkileikkauksen normaalivoima

$$N = \iint_A \sigma(i,u,w,\varepsilon)dA \tag{2}$$



Kuva 1. Poikkileikkauksen jännityskenttä.

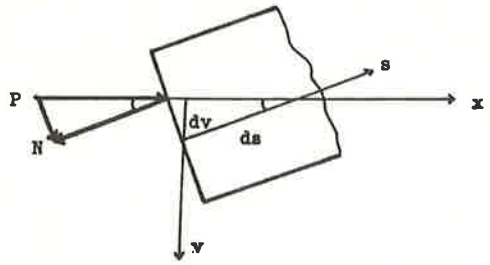
Momenttiehdosta saadaan yhtälö

$$Pv + M = \iint_A u\sigma(i,u,w,\varepsilon)dA \ . \tag{3}$$

Integrointialue on poikkileikkauksen se osa, joka ei ole murtunut. Niissä poikkileikkauksen osissa, joissa murtuminen on tapahtunut, on $\sigma \equiv 0$. v on kimmoviivan v-koordinaatti. Kun merkitään $\eta = dv/ds$, jossa s on poikkileikkauksen kimmoviivaa pitkin mitattu koor-

dinaatti, saadaan kuvasta 2, että

$$N = -P\sqrt{1-\eta^2}\ . \tag{4}$$



Kuva 2. Voimien P ja N välinen yhteys.

Kun siirretään yhtälöissä (2) ja (3) integraalit vasemmalle puolelle sekä käytetään normaalivoimalle kaavaa (4), saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} P\sqrt{1-\eta^2} + \iint_A \sigma(i,u,w,\varepsilon)dA = 0 \\ Pv + M - \iint_A u\sigma(i,u,w,\varepsilon)dA = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Tässä esiintyvät integraalit voidaan laskea, kun normaalijännityksen jakautuma poikkileikkauksessa on tunnettu ja se saadaan määritettyä perusoletuksen 1° avulla.

2.4 Taipumaviivan laskeminen

Pilarin poikkileikkauksen pituussäikeen venymä on koordinaatin u funktio

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = \left(1 - \frac{R}{r}\right)\left(\frac{p-u}{R-p}\right), \tag{6}$$

jossa R = R(i) on kimmoviivan kaarevuussäde, r = r(i) on pilarin kaarevuussäde kuormittamattomassa tilassa ja p on neutraaliakselin u-koordinaatti.

Sijoitetaan yhtälö (6) yhtälöön (1) ja saatu normaalijännityksen lauseke tasapainoyhtälöihin (5). Näin saaduista yhtälöistä sekä kaarevuuden lausekkeesta

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2v}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}} \qquad (7)$$

muodostetaan differentiaaliyhtälöryhmä, jossa tuntemattomina ovat funktiot $\eta = \eta(i)$, $p = p(i)$ ja $1/R = 1/R(i)$. Reunaehtoina ovat momenttitasapainoehdot pilarin päissä sekä voimatasapainoehto pilarin toisessa päässä.

Tämä reuna-arvotehtävä ratkaistaan eksponettioperaattorin avulla. Ratkaisun yhteydessä saadaan tuloksena myös pilarin taipumaviivan koordinaatit.

2.5 Kantokyvyn määrittäminen

Pilari kestää annetun kuormituksen, jos ja vain jos voima- ja momenttitasapainoyhtälöt toteutuvat. Näin ollen nämä yhtälöt sisältävät myös kantokykykriteerit. Määritellään kantokyky maksimaaliseksi kuormitukseksi, jolla molemmat tasapainoyhtälöt (5) toteutuvat pilarin jokaisessa poikkileikkauksessa. Lasketaan se seuraavasti. Valitaan kuormitukselle alkuarvo, jonka pilari varmasti kestää. Määritetään tätä kuormitusta vastaava taipumaviiva. Annetaan sen jälkeen kuormitukselle pieni lisäys ja lasketaan uutta kuormitusta vastaava taipumaviiva. Näin jatketaan kuormitusta lisäten, kunnes tasapainoa ei enää löydy.

3 SOVELLUTUSESIMERKKEJÄ

3.1 Betonipilari

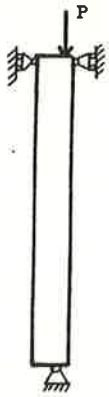
Edellä olevaan teoriaan perustuen on tehty Hewlett-Packard 9830A pöytätietokoneelle Basic-kielinen ohjelma pilarin kantokyvyn laskemiseksi. Ohjelman koko on noin kuusisataa käskyä. Tällä ohjelmalla

on laskettu seuraavat esimerkit.

Tarkastellaan kuvassa 3 esitettyä pilaria. Se on suora betonipilari, jonka pituus on 3 m ja poikkileikkaus on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 200 mm ja 300 mm. Pilari on tuettu kummastakin päästään nivelisesti ja kuormituksena on epäkeskinen voima P, jonka epäkeskisyys on 12,5 mm. Betonin jännitysvenymäkäyränä on käytetty paraabelia

$$\sigma(\varepsilon) = 30\ \text{GPa}\,(\varepsilon + 250\ \varepsilon^2)\ . \qquad (8)$$

Murtovenymä $\varepsilon_B = 0$ ja murtopuristuma $\varepsilon_{-B} = -0{,}002$.



Kuva 3.
Esimerkkipilari.

Laskenta aloitettiin arvosta P = 1,1 MN, jolla tasapaino löytyi. Tämän jälkeen lisättiin voiman suuruutta kymmenen prosenttia arvoon 1,21 MN ja määritettiin taipumaviiva. Arvolla P = 1,469 MN ei tasapaino enää ollut voimassa, mikä laskennassa näkyy siitä, että taipumaviivalle ei löydy ratkaisua. Tällöin palattiin takaisin edelliseen kuormitukseen ja kasvatettiin sitä vain 2,5 prosentilla ja jatkettiin tasapainon etsimistä. Tasapaino löytyi arvoilla 1,364 MN, 1,398 MN ja 1,433 MN. Näin kantokyky saatiin rajattua arvojen 1,433 MN ja 1,469 MN väliin. Väliä voidaan kaventaa halutun pieneksi käyttämällä pienempää voiman kasvuprosenttia. Kun verrataan saatua kantokyvyn arvoa 1,43 MN Seppälän [6] esittämillä kaavoilla laskettuun arvoon 1,45 MN, huomataan tulosten vastaavan toisiaan. Myös maksimitaipumia voidaan verrata keskenään. Taipumaviivasta saatu kantokykyä vastaava suurin taipuman arvo pilarin keskellä on 17,1 mm. Julkaisun [6] kaavojen mukaan taipuma on 17,7 mm.

Suoritetaan vertailu myös Sarjan esittämien [7] mitoituskäyrien avulla saatavaan arvoon. Olkoon pilari sama, mutta lisätään voiman epäkeskisyyttä arvoon 50 mm, koska edellä käytetty epäkeskisyys on liian pieni julkaisun [7] mitoituskäyrille. Käyrästön avulla saadaan kantokyvyksi 0,99 MN. Betonin jännityksen ja venymän välisenä yhtälönä on

$$\sigma(\varepsilon) = f_{cd} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cd}} \exp\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cd}}\right), \qquad (9)$$

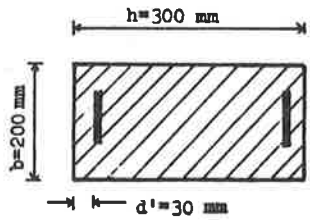
jossa f_{cd} on betonin myötöraja, jolle nyt käytetään arvoa -30 MPa, ja ε_{cd} on betonin myötöpuristuma suuruus -0,0022. Kun lasketaan kantokyky nyt esitettävällä menetelmällä, on yhtälön (9) esittämä funktio kehitettävä Taylor-sarjaksi pisteessä $\varepsilon = 0$. Kun otetaan sarjasta viisi ensimmäistä termiä, saadaan

$$\sigma(\varepsilon) = 37\ \mathrm{GPa}(\varepsilon + 454{,}545\ \varepsilon^2 + 103{,}306 \cdot 10^3\ \varepsilon^3 + 15{,}652 \cdot 10^6\ \varepsilon^4 + 1{,}779 \cdot 10^9\ \varepsilon^5)\ . \qquad (10)$$

Taipumaviiva saatiin laskettua kuormitukselle P = 0,968 MN mutta ei enää arvolla 0,992 MN, joten tulos vastaa vertailumenetelmällä saatua arvoa 0,99 MN.

3.2 Teräsbetonipilari

Toisena esimerkkinä on suora teräsbetonipilari, jonka poikkileikkaus on esitetty kuvassa 4. Raudoitusprosentti on 1,94. Pilarin pituus on 3 metriä ja se on päistään nivelisesti tuettu. Voiman epäkeskisyys on 60 mm. Betonin jännitysvenymäkäyrä on sama kuin betonipilarissa kuitenkin siten, että betonin murtovenymäksi on otettu nollan tilalle arvo $\sigma_B = 0{,}0001$. Teräksen $\sigma - \varepsilon$ käyrää on approksimoitu polynomilla



Kuva 4. Teräsbetonipilarin poikkileikkaus.

$$\sigma(\varepsilon) = 37\ \mathrm{GPa}(7{,}4\ \varepsilon - 0{,}375 \cdot 10^6\ \varepsilon^3 + 6{,}25 \cdot 10^9\ \varepsilon^5)\ . \qquad (11)$$

Teräksen murtovenymä on 0,005 ja murtopuristuma -0,005. Kantokyvyksi saatiin P = 1,26 MN. Vertailumenetelmällä [7] määritetty voiman arvo on 1,24 MN.

3.3 Tulosten tarkastelu

Lasketut esimerkit osoittavat, että esitettyyn teoriaan perustuva tietokoneohjelma toimii ja antaa luotettavia tuloksia. Se mahtuu hyvin pöytätietokoneeseen ja pystyy pienuudestaan huolimatta käsit-

telmään ominaisuuksiltaan mutkikkaitakin pilareita. Laskenta-aika on suhteellisen pitkä, mikä osittain johtuu käytetystä Basic-kielestä ja koneen HP 9830 A hitaudesta. Edellä esitettyjen esimerkkien kohdalla se oli useita tunteja. Pilarin poikkileikkauksen monimutkaisuus kasvattaa laskentatyötä lineaarisesti osa-alueiden lukumäärän funktiona, mutta toisaalta pilarin ominaisuuksien muuttuminen pituussuunnassa ei lisää paljonkaan laskenta-aikaa.

4 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Sarja Asko, Betoni- ja teräsbetonipilarin stabiilisuus. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Betonitekniikan laboratorio, tiedonanto 19, Otaniemi syyskuu 1972. 75 s.

[2] Ågårdh Lennart, Analytical and Numerical Analyses of Nonlinear Beam Elements. Doktorsavhandlingar vid Chalmers tekniska högskola, Göteborg 1974. 190 s.

[3] Virtanen Simo, Epähomogeenisen fysikaalisesti epälineaarisen pilarin kantokyky. Lisensiaattityö. Tampereen teknillinen korkeakoulu, konetekniikan osasto, Tampere 1979. 80 s.

[4] Seppälä Veikko, Über das nichtlineare Problem des Tragvermögens eines inhomogenen Stabes I. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A VI Physica 237, Helsinki 1967. 44 s.

[5] Kilpeläinen Mikko, Polynomin käyttö betonin jännitysmuodonmuutoskuvaajana. Rakenteiden Mekaniikka 12 (1979) 1, s. 1...11.

[6] Seppälä Veikko, On the Calculation of the Bearing Capacity of an Eccentrically Loaded Straight Concrete Column with a Parabola as its Stress-Strain Curve. Part I. Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series No 21, Helsinki 1963. 42 s.

[7] Sarja Asko, Betoni- ja teräsbetonipilareiden mitoituskäyrästöt. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Betonitekniikan laboratorio, tiedonanto 18, Otaniemi elokuu 1972. 93 s.

ENSIMMÄISEN ASTEEN ITSEKORJAAVA RATKAISUMENETELMÄ EPÄLINEAARISESSA ANALYYSISSÄ

DI Erkki Pulkkinen
Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

1 EPÄLINEAARINEN RAKENNEANALYYSI VOIMAKUORMITUKSELLE

Lineaarisessa rakenneanalyysissä siirtymävektori {q} voidaan ratkaista seuraavasta tunnetusta kaavasta, kun jäkkyysmatriisi [K] ja voimavektori {F} tunnetaan

$$\{F\} = [K]\{q\} \tag{1}$$

Vastaavasti samanlainen tasapainoyhtälö voidaan kirjoittaa epälineaarisessa rakenneanalyysissä seuraavalla tavalla

$$[K]\{q\} = \{F\} + \{Q^*(q)\}, \tag{2}$$

missä $\{Q^*(q)\}$ on näennäisvoimavektori, joka johtuu materiaalisesta että geometrisesta epälineaarisuudesta. Yleensä yhtälöä (2) ei voida ratkaista tarkasti, minkä takia on sopivampaa määritellä epätasapainovoimavektori {f} seuraavasti

$$\{f\} = -[K]\{q\} + \{F\} + \{Q^*(q)\} \tag{3}$$

Ratkaisumenetelmät voidaan jakaa eri luokkiin sen mukaan, miten ne täyttävät tasapainoyhtälön (2). Ensimmäinen luokka täyttää tasapainoyhtälön tarkasti. Ts. epätasapainovoimavektori $\{f\} = \{0\}$. Toinen luokka yrittää minimoida epätasapainon hakemalla derivaatan nollakohdan. Ts. epätasapainovoimavektorin derivaatta $\{\dot{f}\} = \{0\}$. Muita luokkia ovat itsekorjaavat ratkaisumenetelmät. Ensimmäisen asteen itsekorjaava ratkaisumenetelmä täyttää seuraavan ehdon

$$\{\dot{f}\} + Z\{f\} = \{0\} \tag{4}$$

Toisen asteen itsekorjaava ratkaisumenetelmä täyttää seuraavan ehdon

$$\{\ddot{f}\} + C\{\dot{f}\} + Z\{f\} = \{0\} \tag{5}$$

Epälineaarisessa rakenneanalyysissä kuormitus tapahtuu normaalisti inkrementaalisesti. Kokonaiskuormitus $\{F\}$ voidaan esittää kullakin kuormitusaskeleella normalisoidun kuormitusvektorin $\{\bar{F}\}$ ja kuormitusparametrin P avulla seuraavasti

$$\{F\} = P\{\bar{F}\} \tag{6}$$

Normalisoitu kuormitusvektori $\{\bar{F}\}$ on vakio, vaikka kuormitusta lisätäänkin inkrementaalisesti, ainoastaan kuormitusparametri P muuttuu.

Oletetaan lisäksi siirtymävektori $\{q\}$ ja näennäisvoimavektori $\{Q^*(q)\}$ kuormitusparametrin P funktioksi kullakin kuormitusaskeleella. Derivoimalla kaava (3) kuormitusparametrin P suhteen niin saadaan

$$\{\dot{f}\} = -[K]\{\dot{q}\} + \{\bar{F}\} + \{\dot{Q}^*(q)\} \tag{7}$$

Sijoitetaan kaava (4) kaavaan (7) niin saadaan

$$[K]\{\dot{q}\} = \{\bar{F}\} + \{\dot{Q}^*(q)\} + Z\{f\} \tag{8}$$

Näennäisvoimavektorin i:nnen termin derivaatta siirtymävektorin j:nnen termin suhteen voidaan esittää yhdistetyn funktion derivoimissäännön avulla seuraavasti

$$\{\dot{Q}_i^*(q)\} = [\partial Q_i^*/\partial q_j]\{\dot{q}_j\}, \tag{9}$$

missä $[\partial Q_i^*/\partial q_j]$ on epälineaarisen jäykkyysmatriisin $[K^*]$ ij:s termi. Epälineaarinen jäykkyysmatriisi $[K^*]$ voidaan kirjoittaa myös seuraavasti

$$[\partial Q^*/\partial q] = -[K^*] = -[K^{NL}] - [K^P] \tag{10}$$

missä $[K^{NL}]$ on geometrisesta ja $[K^P]$ materiaalisesta epälineaarisuudesta johtuva jäykkyysmatriisi.

Kaavasta (8) voidaan johtaa kaksi käyttökelpoista ratkaisumenetelmää. Sijoittamalla kaavat (9) ja (10) kaavaan (8) ja käyttämällä etudifferenssiä $\{\dot{q}\}$:lle niin saadaan seuraavaa

$$([K] + [K^{NL}] + [K^{P}])\{\Delta q\}_i = \{\Delta F\}_i + Z\Delta P\{f\}_{i-1} \tag{11}$$

Siirtymävektorin derivaatan $\{\dot{q}\}$:n etudifferenssi on muotoa

$$\{\dot{q}\}_m = \frac{1}{\Delta P}\{\Delta q\}_{m+1} = \frac{1}{\Delta P}(\{q\}_{m+1} - \{q\}_m) \tag{12}$$

Toinen käyttökelpoinen ratkaisumenetelmä saadaan käyttämällä näennäisvoimaa $\{\dot{Q}^{P}\}$:lle ja epälineaarista jäykkyysmatriisia $[K^{NL}]$ $\{Q^{NL}\}$:lle. Käytetään lisäksi etudifferenssiä $\{\dot{q}\}$:lle ja takadifferenssiä $\{\dot{Q}^{P}\}$:lle niin saadaan seuraavaa

$$([K] + [K^{NL}])\{\Delta q\}_i = \{\Delta F\}_i + \{\Delta Q^{P}\}_{i-1} + Z\Delta P\{f\}_{i-1} \tag{13}$$

Näennäisvoimavektorin derivaatan $\{\dot{Q}^*(q)\}$:n takadifferenssi on muotoa

$$\{\dot{Q}^*(q)\} = \frac{1}{\Delta P}\{\Delta Q^*(q)\}_m = \frac{1}{\Delta P}(\{Q(q)\}_m - \{Q(q)\}_{m+1}) \tag{14}$$

Kaava (11) tuottaa tarkemman tuloksen kuin kaava (13) ratkaistaessa sekä materiaalisesti että geometrisesti epälineaarisia ongelmia.

2 SIIRTYMÄKUORMITUS

2.1 Lineaarinen rakenneanalyysi siirtymäkuormitukselle

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan esittää seuraavasti, kun osa siirtymä- ja voimavektorista tunnetaan

$$\begin{bmatrix} K_{tt} & K_{te} \\ K_{te}^{T} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_t \\ q_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_t \\ F_e \end{Bmatrix} \tag{15}$$

missä $\{q_e\}$ ja $\{F_t\}$ ovat tunnetut osat siirtymä- ja voimavektoreita. $\{q_t\}$ ja $\{F_e\}$ ovat tuntemattomia. Tuntematon osa siirtymävektorista $\{q_t\}$ voidaan ratkaista kaavan (15) ensimmäisestä rivistä

$$\{q_t\} = [K_{tt}]^{-1}(\{F_t\} - [K_{te}]\{q_e\}) \tag{16}$$

Tämän jälkeen voidaan kaavan (15) toiselta riviltä laskea tunnettujen siirtymien kohdalla vaikuttava voima seuraavasti

$$\{F_e\} = [K_{te}]^T\{q_t\} + [K_{ee}]\{q_e\} \tag{17}$$

2.2 Epälineaarinen rakenneanalyysi siirtymäkuormitukselle

Määritellään epätasapainovoimavektori $\{f\}$ vastaavasti kuten normaalissa kuormituksessa

$$\begin{Bmatrix} f_t \\ f_e \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} K_{tt} & K_{te} \\ K_{te}^T & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_t \\ q_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_t \\ F_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_t^*(q) \\ Q_e^*(q) \end{Bmatrix} \tag{18}$$

Kuormitusvektorin tunnettu osa $\{F_t\}$ voidaan lausua normalisoidun kuormitusvektorin $\{\bar{F}_t\}$ ja kuormitusparametrin P_1 avulla seuraavasti

$$\{F_t\} = P_2\{\bar{F}_t\} \tag{19}$$

Vastaavasti voidaan siirtymävektorin tunnettu osa $\{q_e\}$ lausua normalisoidun siirtymävektorin $\{\bar{q}_e\}$ ja siirtymäparametrin P_2 avulla seuraavasti

$$\{q_e\} = P_2\{\bar{q}_e\} \tag{20}$$

Kaava (18) voidaan hajoittaa kahteen eri kaavaan seuraavasti

$$\{f_t\} = -[K_{tt}]\{q_t\} - [K_{te}]\{q_e\} + \{F_t\} + \{Q_t^*(q)\}$$

ja (21)

$$\{f_e\} = -[K_{te}]^T\{q_t\} - [K_{ee}]\{q_e\} + \{F_e\} + \{Q_e^*(q)\}$$

Derivoidaan kaavassa (21) $\{f_t\}$:n lauseke P_1:n suhteen ja $\{f_e\}$:n lauseke P_2:n suhteen niin saadaan seuraavaa

$$\{\dot{f}_t\} = -[K_{tt}]\{\dot{q}_t\} - [K_{te}]\{\dot{q}_e\} + \{\dot{\bar{F}}_t\} + \{\dot{Q}_t{}^*(q)\}$$

ja (22)

$$\{\dot{f}_e\} = -[K_{te}]^T\{\dot{q}_t\} - [K_{ee}]\{\dot{\bar{q}}_e\} + \{\dot{F}_e\} + \{\dot{Q}_e{}^*(q)\}$$

Käytetään kaavoja (4), (9), (10), (19) ja (20) ja etudifferenssiä $\{\dot{q}\}$:lle ja $\{\dot{F}_e\}$:lle niin saadaan seuraavaa

$$([K] + [K^*])\{\Delta q_t\}_i = -([K_{te}] + [K_{te}{}^*])\{\Delta q_e\}_i$$

$$+ \{\Delta F_t\}_i + Z\Delta P_1\{f_t\}_{i-1}$$

ja (23)

$$\{\Delta F_e\} = ([K_{te}]^T + [K_{te}{}^*]^T)\{\Delta q_t\}_i + ([K_{ee}] + [K_{ee}{}^*])\{\Delta q_e\}_i$$

$$- Z\Delta P_2\{f_e\}_{i-1}$$

Kaavan (23) alemmasta yhtälöstä voidaan nyt tunnettujen siirtymien kohdalla vaikuttava voima laskea, kun ensin ratkaistaan saman kaavan ylemmästä yhtälöstä tuntematon osa siirtymästä $\{q_t\}$.

3 LASKENTA-ALGORITMISTA

Tässä työssä käytetään ainoastaan kaavoja (11) ja (23) ensimmäisen asteen itsekorjaavalle ratkaisumenetelmälle. Ensimmäisellä kuormitusaskeleella lasketaan lineaarista käyttäytymistä vastaava siirtymän lisäys

$$\{\Delta q\} = [K]^{-1}\{\Delta F\} \tag{24}$$

Tämän jälkeen lasketaan venymät ja jännitykset siirtymien ja elastisen kimmomatriisin avulla. Jännityksistä tarkistetaan sopivalla myötöfunktiolla, onko rakenne myötänyt jossakin kohdassa. Jos

myötymistä on tapahtunut lasketaan materiaalisesta epälineaarisuudesta johtuva näennäisvoima $\{Q^P\}$ ja jäykkyysmatriisi $[K^P]$. Tämän jälkeen lasketaan geometrisesta epälineaarisuudesta johtuva näennäisvoima $\{Q^{NL}\}$ ja jäykkyysmatriisi $[K^{NL}]$. Tämän jälkeen voidaan laskea tangentiaalinen jäykkyysmatriisi $[K^T]$ seuraavasti

$$[K^T] = [K] + [K^{NL}] + [K^P] \tag{25}$$

Uuden askeleen alussa lasketaan epätasapainovoimavektori kaavasta (3) tai (21). Tämän jälkeen lasketaan siirtymien lisäykset kaavojen (11) tai (23) avulla ja lisätään ne aikaisemmin laskettuihin arvoihin. Kokonaissiirtymistä voidaan tämän jälkeen laskea venymät ja jännitykset. Tämän jälkeen menetellään kuin ensimmäiselläkin askeleella.

4 TULOKSET

Tässä esitelmässä tarkastellaan kahta esimerkkiä. Ensimmäisenä tarkastellaan paksun alumiinirenkaan elastisplastista muodonmuutosta säteensuuntaisen vetokuorman alaisena. Kuvassa 1 ovat renkaan geometria, käytetty elementtiverkko ja materiaaliominaisuudet. Myötöehtona käytetään von Mises'in ehtoa ja lineaarista isotrooppista lujittumista. Elementtinä on 20-solmupisteinen käyristettävä isoparametrinen elementti, jolla on 3 x 3 x 3 = 27 integrointipistettä. Alumiinirenkaan neljännes on jaettu 36 elementtiin. Kuvassa 2 on renkaan sisäpinnan halkaisijan muutos vetovoiman funktiona. Kuormitusaskeleena käytetään 2 ja 4 kN:n askelta. Kertoimelle ZΔP käytetään arvoa 1,2. Molempien kuormitusaskeleiden antama tulos on kohtuullisessa sopusoinnussa sekä kokeellisen että aikaisemmin laskettujen tulosten kanssa.

Toisena esimerkkinä tarkastellaan polystyreeniä, jossa on pallon muotoisia koloja. Rakennetta idealisoidaan kuutiolla, jonka keskellä on pallon muotoinen kolo. Kuormituksena vaikuttaa kuution kaikkiin sivutahkoihin Δ-suuruinen siirtymä. Kuvassa 3 on tarkasteltavaksi otettu geometria ja materiaaliominaisuudet. Myötöehtona käytetään von Mises'in ehtoa ja materiaalikäyttäytyminen oletetaan ideaalis-elastisplastiseksi. Elementtinä on sama elementti kuin edellisessä

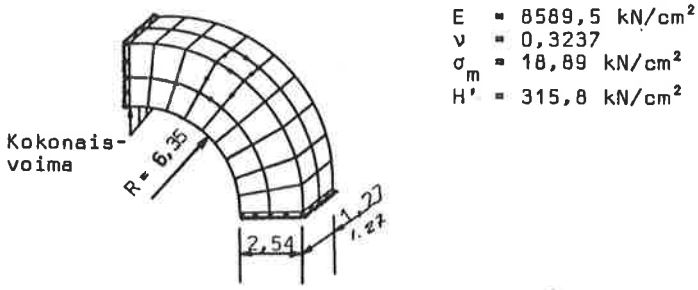
esimerkissä. Tarkasteltava rakenne jaetaan 3 elementtiin. Kuvassa 4 on sivutahkon siirtymä sisäänpäin kokonaisvoiman funktiona. Siirtymäaskeleena käytetään 0,3 ja 0,025 yksikönsuuruista siirtymää. Kertoimelle $Z\Delta P_1 = Z\Delta P_2$ käytetään arvoja 1,0 ja 1,3. Tuloksista nähdään, että suuremmalla siirtymäaskeleella kokonaisvoima karkaa oikeasta arvosta ylöspäin, mutta palautuu takaisin oikeaan arvoon, kun itsekorjaava termi ehtii vaikuttaa. Pienemmällä siirtymäaskeleella kokonaisvoima seurailee melko hyvin oikeata arvoa. Siirtymäkuormituksessa kertoimen $Z\Delta P$:n arvolla ei ole mitään vaikutusta lopputulokseen nähden.

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

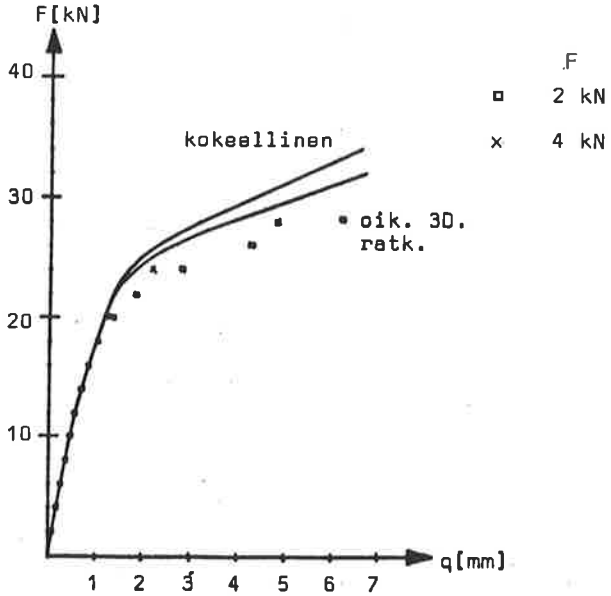
[1] Owen, D. R. J. & Salonen, E. M., Three-Dimensional Elasto-Plastic Finite Element Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering 9(1975)1, s. 209...218.

[2] Sticklin, J. A. & Haisler, W. E., Evalution of Solution Procedures for Material and/or Geometrically Nonlinear Structural Analysis. AIAA Journal 11(1973)3, s. 292...299.

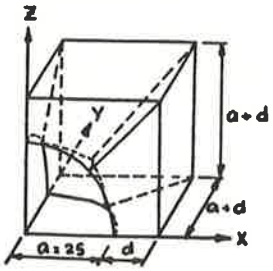
[3] Tillerson, J. R., Stricklin, J. A. & Haisler, W. E., Numerical Methods for the Solutions on Nonlinear Problems in Structural Analysis. Numerical Solution of Nonlinear Structural Problems. Detroit, Michigan, November 11...15, 1973. Publ. The American Society of Mechanical Engineerings. New York, N. Y., 1973. s. 67...102.



Kuva 1. Alumiinirenkaan geometria, elementtiverkko ja materiaaliominaisuudet [1].

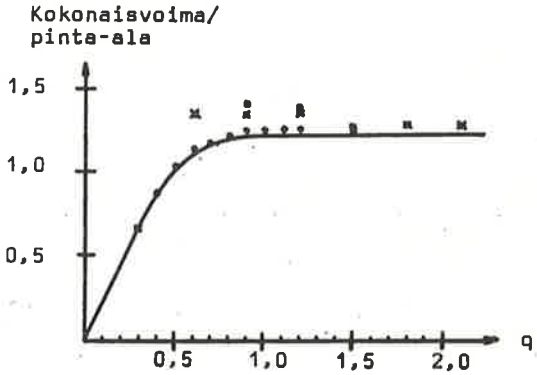


Kuva 2. Sisäpinnan halkaisijan muutos vetovoiman funktiona [1].



$E = 42$
$\nu = 0,3$
$\sigma_m = 1,07$
$H' = 0$

Kuva 3. Polystyreeni-kuution kahdeksas osa, elementtiverkko ja materiaaliominaisuudet [1].



	q	ZΔP	
o	0,025	1,0	ja 1,3
p	0,3	1,0	
q	0,3	1,3	

Kuva 4. Sivutahkon siirtymä kokonaisvoiman funktiona [1].

ELEMENTTIMENETELMÄSSÄ TARVITTAVA ESI- JA JÄLKIKÄSITTELY TIETOKONEAVUSTEISESSA SUUNNITTELUSSA

DI Esa Hietikko
Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Elementtimenetelmän käyttö rakenteiden statiikan ja dynamiikan analysoinnissa on tunnetusti tehokas ja usein ainut tapa saada nopeasti ja taloudellisesti näkyviä tuloksia aikaan. Perinteiset elementtimenetelmää hyväkseen käyttävät rakenneanalyysiohjelmistot ovatkin olleet puhtaita analyysiohjelmia. Tällaiset ohjelmat vaativat manuaalisen esi- ja jälkikäsittelyn, joka useissa tapauksissa on hankalaa, aikaavievää ja virhealtista.

Jo 60-luvulta lähtien on ohjelmistoihin pyritty lisäämään esi- ja jälkikäsittelyä suorittavia osia, mutta vasta viime vuosikymmenen lopulla on onnistuttu luomaan todella tehokkaita generointiohjelmistoja. Tähän on paljon vaikuttanut tietokonegrafiikan voimakas kehittyminen.

Kun käytettävissä on vuorovaikutteinen ohjelmisto, voidaan elementtimallin luomisprosessi suorittaa huomattavasti nopeammin ja vaivattomammin kuin manuaalisesti. Ja ennen kaikkea virheiden osuus pienenee huomattavasti, jolloin myös analyysin luotettavuus paranee. Ajansäästöt ovat huomattavia (tilanteesta riippuen n. 4...20 kertaisia) ja myös muita kustannussäästöjä saadaan aikaan (materiaali, prototyyppejä ei tarvita jne.).

2 OHJELMISTOJEN VUOROVAIKUTTEISUUDESTA

Mallin luomisprosessissa tarvitaan usein välitöntä kommunikointia analysoijan ja tietokoneen välillä. Näyttölaitteet ja keskustelu-

tyyppiset ohjelmistot ovat tärkeitä sisäänsyötössä. Erikoisesti vuorovaikutteisuus on erittäin tehokas työkalu suunnittelijoille ja analysoijille.

Elementtimenetelmäanalyysissä voidaan periaatteessa rajoittua kolmeen eri vuorovaikutteisuuden asteeseen: eräajo, puolittainen vuorovaikutteisuus ja täydellisen vuorovaikutteisuuden omaava graafinen järjestelmä.

Eräajotyyppisissä ohjelmistoissa vuorovaikutteisuus on hyvin vähäinen ja virhealttius suuri. Syöttö tapahtuu yleensä alfanumeerisesti joko näppäimistön tai reikäkorttien avulla.

Puolivorovaikutteinen järjestelmä eroaa eräajomuodosta lähinnä siinä, että graafista informaatiota saadaan syötön aikana ja syötettyjä suureita voidaan syöttöprosessin aikana muuttaa. Riippuen käytetyistä ohjelmistoista voidaan jo tällaisella järjestelmällä saavuttaa melkoisia ajansäästöjä ja parantaa luotettavuutta elementtimenetelmäanalyysissä. Toisaalta laitteistovaatimukset ovat lähes samat kuin eräajomuodossa.

Vuorovaikutteisen graafisen järjestelmän syöttö tapahtuu erikoisen graafisen järjestelmän avulla, jolloin laitteistovaatimukset ovat huomattavasti suuremmat kuin edellä mainituilla. Edelleen yleensä vuorovaikutteisen järjestelmän tietokone on kapasiteetiltaan liian pieni elementtimenetelmäanalyysiohjelman ajamiseen. Sen vuoksi käytettävissä on myös oltava isompi tietokone analyysiä varten ja joudutaan suorittamaan tiedon siirtoa tietokoneesta toiseen. Usein myös osia esi- ja jälkikäsittelyohjelmista on delegoitava isommalle tietokoneelle.

Koko analyysin suorittamiseen kuluva aika on graafisessa vuorovaikutteisessa järjestelmässä hieman pitempi kuin puolivuorovaikutteisessa järjestelmässä, mutta tarvittavien lisälaitteistojen määrä on huomattavasti suurempi.

Graafisten ohjelmistojen standardoinnin puuttumisen takia vuorovaikutteiset ohjelmistot ovat yleensä sidottuja yhteen tietokoneeseen.

Toisaalta tavallisesti graafinen vuorovaikutteinen järjestelmä on ns. valmisjärjestelmä (turn key system), johon kuuluvat ohjelmistot kaikkine tarvittavine laitteineen. Tällöin elementtimallintaminen on liitetty osaksi suurempaa suunnittelun ja valmistuksen yhdistävää integroitua järjestelmää.

Tietokonegrafiikan merkitys elementtimallin luonnissa on myös suuri. Vuorovaikutteisessa järjestelmässä yleensä malli on koko ajan näkyvissä kuvaputkella ja kaikki malliin tehdyt muutokset tulevat näkyviin välittömästi. Tällöin voidaan mahdolliset virheet havaita ja korjata välittömästi.

3 ELEMENTTIVERKON LUOMINEN TIETOKONEEN AVULLA

Yleisimmin on esikäsittelyohjelmistoissa elementtiverkon luomiseen käytetty kahta erilaista menetelmää. Näitä voidaan nimittää osittavaksi menetelmäksi ja kokoavaksi menetelmäksi. Osittavassa menetelmässä rakenne määritellään pisteiden, viivojen ja osapintojen avulla ja elementtiverkko generoidaan automaattisesti näiden mukaan. Kokoavassa menetelmässä määritellään aluksi rakenteen solmupistejako ja sen jälkeen elementit generoidaan solmupisteiden avulla. Kokoava menetelmä on käytössä lähinnä vuorovaikutteisissa järjestelmissä.

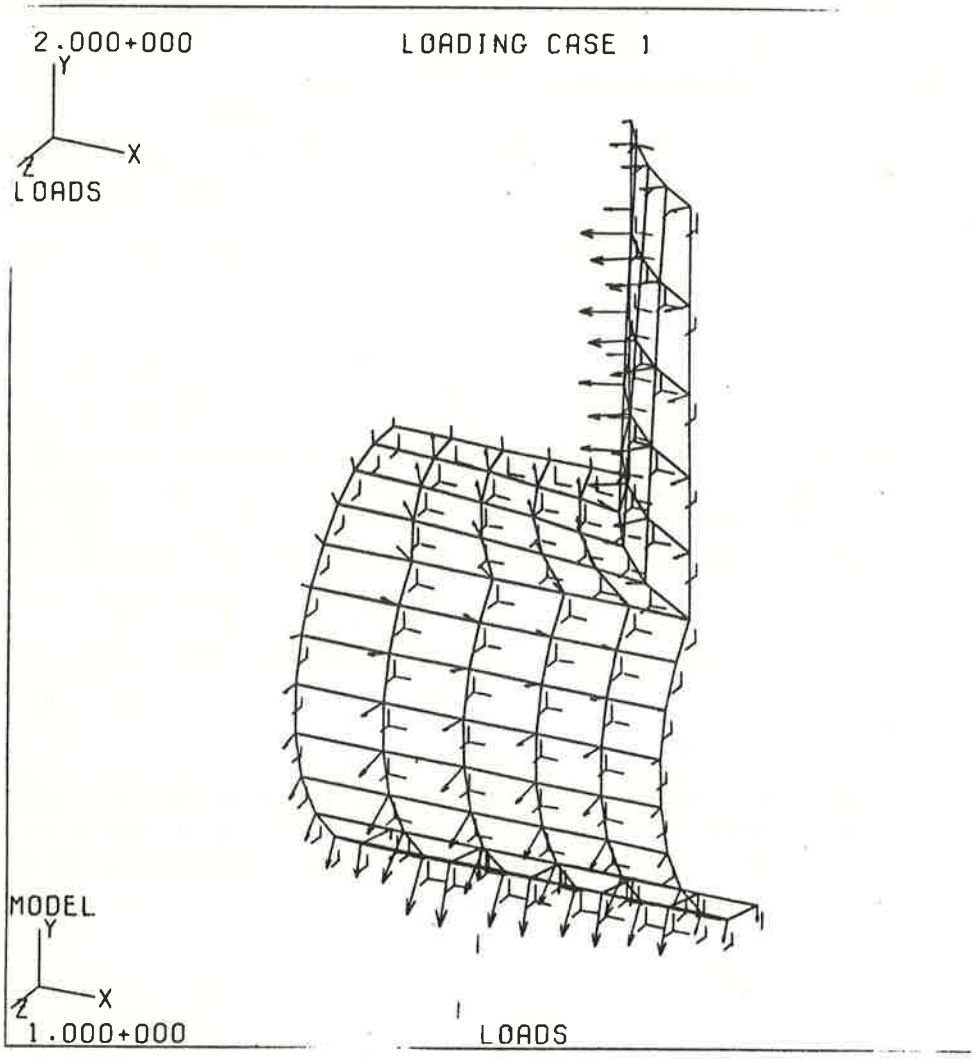
Kokoavassa menetelmässä hankaluutena on usein elementtien generointi, koska se edellyttää solmupistejoukolla varsin tiukkaa säännöllisyyttä. Osittavassa menetelmässä taas verkon tihentäminen tietyissä kohdin saattaa tuottaa hankaluuksia.

Saavutettu ajansäästö on kummassakin menetelmässä keskimäärin sama.

4 REUNAEHTOJEN JA KUORMITUSTEN GENEROINTI

Reunaehtojen ja kuormitusten generointimahdollisuutta on pidettävä lähes yhtä tärkeänä kuin verkon generointimahdollisuuttakin. Tunnetusti reunaehdoilla on hyvin suuri vaikutus analyysin tuloksiin. Jopa yhden solmupisteen yksi väärä reunaehto saattaa aiheuttaa tu-

loksiin hyvin suurta heittoa. Reunaehtojen graafisella tulostuksella voidaan niiden oikeellisuus tarkistaa nopeasti (kuva 1).



Kuva 1.

Kuormitusten generoinnissa on merkitystä lähinnä pinta- ja tilavuuskuormituksissa. Esimerkiksi useita satoja elementtejä sisältävän rakenteen keskipakokuormitusvektorin manuaalinen laskeminen on työn ja tuskan takana.

Kuormitusten graafisen esityksen merkitys on lähes yhtä tärkeä kuin reunaehdoillakin. Havainnollisin esitys saadaan aikaan piirtämällä kuormituksen resultanttivektori solmupisteisiin skaalattuna sopivasti (kuva 1).

5 ANALYYSIN JÄLKIKÄSITTELY

Jälkikäsittelyohjelmistot ovat yleensä lähinnä graafisia ohjelmistoja, joissa vuorovaikutuksen osuus on vähäisempi kuin esikäsittelyohjelmistoissa. Vuorovaikutteisen graafisen järjestelmän etu painottuukin jälkikäsittelyissä lähinnä siihen, että analyysin tuloksia voidaan käyttää hyväksi silloin, kun analyysi joudutaan suorittamaan uudelleen.

Normaalisti jälkikäsittelyohjelmistot tulostavat graafisesti rakenteen muodonmuutokset liioiteltuina deformaatioina. Tämä voidaan toteuttaa varsin yksinkertaisen tietokoneohjelman avulla varsinkin silloin, kun käytetyillä elementeillä ei ole siirtymien derivaattavapausasteita. Käytettäessä palkkielementtejä on ainakin visuaalisesti graafinen esitys enemmän todellisuuteen pohjautuva, jos muodonmuutoskuvaan piirretään palkkien todelliset taipumaviivat.

Muodonmuutosten havainnollisuutta voidaan lisätä piirtämällä pohjaksi elementtiverkko.

Rakenteen jännitysten tulostaminen graafisesti tapahtuu tavallisimmin pintaelementeillä tasajännityskäyrien muodossa. Palkkielementtien jännitystulostuksessa tulee lisätyötä, koska sisäänsyöttönä on annettava normaalien poikkipintasuureiden lisäksi poikkipinnan suurimmat etäisyydet neutraaliakselista. Tarkan taivutusmomenttikuvion määrittäminen tuottaa myös hankaluuksia silloin, kun rakenteella on kenttäkuormituksia. Pelkän taivutusteorian mukaan lasketut jännitykset eivät aina vastaa todellista kuvaa, sillä esimerkiksi estetystä väännöstä syntyvät lisäjännitykset saattavat olla hyvin suuria.

Volyymikappaleiden kolmiulotteisen jännitysfunktion kuvaaminen kaksiulotteisella graafisella laitteella ei onnistu suoraan. Yleisem-

min käytössä on menetelmä, jossa määritellään volyymikappaleeseen leikkaustaso ja tulostetaan jännitykset siinä tasajännityskäyrin. Tällöin jännitystulostuksessa joudutaan piirtämään useita kuvia ja hankaluuksia saattaa syntyä sopivien leikkaustasojen löytämisessä.

6 OHJELMISTOJEN VALINNASTA

Yhden suurimmista hankaluuksista muodostaa kaupallisten ohjelmistojen valinnassa niistä olemassaolevan tiedon vähäisyys. Valmistajat ovat yleensä haluttomia lähettämään käyttäjän manuaaleja, sen sijaan kauniita esitteitä löytyy. Esitteistä kuitenkin usein puuttuu juuri se oleellinen tieto, joka saattaisi vaikuttaa ratkaisevasti valintatilanteessa.

Erittäin hyvät yhteenvedot eri elementtimenetelmässä käytetyistä analyysi-, esi- ja jälkikäsittelyohjelmista ovat esittänset Fredriksson et al. /5/, /6/, ja se onkin suositeltavaa luettavaa em. ohjelmistojen harkitseville.

Kaiken kaikkiaan ohjelmistojen valintakriteerit vaihtelevat tapauskohtaisesti niin runsaasti, että mitään yleispäteviä ohjeita on vaikea mennä yksilöimään. Joka tapauksessa elementtimenetelmää usein tarvitsevan kannattaa selvittää omat mahdollisuutensa tietokoneen edullisimpaan käyttöön.

7 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Hietikko, E., Elementtimenetelmässä tarvittava esi- ja jälkikäsittely tietokoneavusteisessa suunnittelujärjestelmässä. Diplomityö. Oulu 1981. 112 s.

[2] Fredriksson, B., Mackerle, J., Persson, A. B. G., Finite element programs in integrated software for structural mechanics and CAD, Computer Aided Design 13(1981)1, s. 27... 39.

[3] Karjalainen, J. A., Tietokoneavusteisen suunnittelun perusteet. Luentomoniste. Oulu 1981.

[4] Krouse, J. K., CAD/CAM-bridging the gap from design to production. Machine Design 52(1980)13, s. 117...125.

[5] Fredriksson, B., Mackerle, J., Structural mechanics finite element computer programs, surveys and availability. Linköping, Sweden 1979.

[6] Fredriksson, B., Mackerle, J., Structural mechanics pre- and postprocessor programs, surveys and availability, Linköping, Sweden 1979.

VÄRÄHTELYMITTAUKSISTA KONEIDEN KUNNON DIAGNOSTIIKASSA

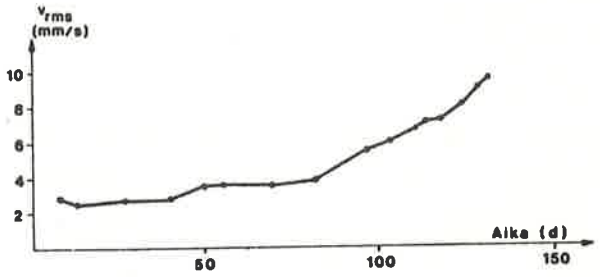
Sulo Lahdelma
Oulun yliopisto

1. JOHDANTO

Värähtelymittausten avulla saadaan tietoa syntyneestä viasta tavallisesti jo varhaisessa vaiheessa. Sopivin välein tehtävien uusintamittausten avulla pystytään seuraamaan vian kehittymistä, jolloin korjaustoimenpiteet kyetään suorittamaan suunnitellusti ennen varsinaisen vaurion syntymistä.

2. VÄRÄHTELYMITTAUSTEN PERUSTEITA

Jos kone on hyvässä mekaanisessa kunnossa, niin sen käynti on yleensä tasaista ja mitatut värähtelylukemat ovat alhaisia. Mikäli koneeseen syntyy vikoja, niin ne aiheuttavat ylimääräisiä dynaamisia voimia, joiden vaikutuksesta laakerointikohtien liike voimistuu. Näin ollen mittaamalla laakeripesien liikettä saadaan välillisesti tietoa koneen kunnosta (kuva 1).



Kuva 1. Paperikoneen pesupuristimen värähtelyn kokonaistason kasvaminen pihkaantumisen johdosta [1]. Alussa värähtelytason nousu on keskimäärin lineaarista, jonka jälkeen seuraa eksponentiaalivaihe.

Koska laakerointikohtien kokonaisliike muodostuu eri taajuuksilla vaikuttavien voimien yhteisvaikutuksesta, niin värähtelysignaalin lähempi tutkiminen käyttäen apuna taajuusanalyysia mahdollistaa vian syyn selvittämisen, jolloin kunnossapitotöiden suunnitelmallisuus paranee oleellisesti.

Antureina käytetään yleensä pietsosähköisiä kiihtyvyysantureita, joilla mitataan laakeripesän kiihtyvyyttä. Värähtelymittareissa on integrointielimet, jolloin kiihtyvyyden (m/s^2) ohella kyetään mittaamaan nopeutta (mm/s) ja poikkeamaa (µm).

Jonkin verran jalansijaa ovat saaneet akselin ja vertailukohdan välistä suhteellista liikettä mittaavat poikkeama-anturit. Niitä käytetään lähinnä turbiinien liukulaakerien kulumisesta johtuneiden kasvaneiden välysten paljastamiseen sekä epätasapainon toteamiseen akselin taipumisen perusteella.

3. VÄRÄHTELYJEN KOKONAISTASO

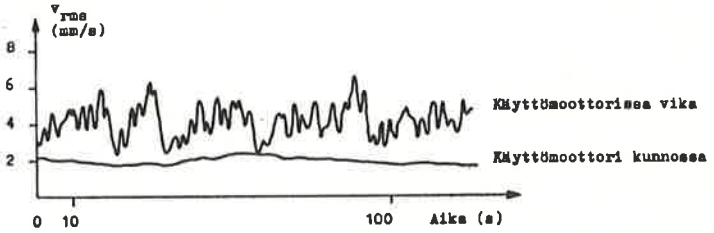
Kokonaistasomittauksilla pyritään selvittämään onko tutkittava kohde kunnossa vai ei. Mikäli värähtelyn kokonaistasossa ei tapahdu muutoksia, niin päätellään, että koneen kunto on säilynyt hyvänä. Normaalisti mitataan nopeuden tehollisarvoa [2] taajuusalueella 10...1000 Hz ja se määritellään seuraavasti:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} \qquad (1)$$

missä T integroimisaika
v värähtelynopeus.

Tavanomaisten kokonaistasomittausten etuihin kuuluu että ne on helppo suorittaa, mutta niiden avulla ei yleensä pystytä selvittämään vian syytä. Lisäksi normien mukaisilla taajuusalueilla tapahtuvat kokonaistasomittaukset eivät anna tietoa vierintälaakerien vioista niin varhaisessa vaiheessa kuin mitä muutoin olisi mahdollista saada.

Jos ei ole käytettävissä pitkäaikaisia kokonaistason mittaustuloksia (kuva 1), niin informaatiota on mahdollista kerätä mittaamalla joidenkin viereisten samanlaisten koneiden värähtelytasoja vertailupohjaksi. Kokonaistason tulostaminen piirturilla antaa lisätietoa tutkittavasta kohteesta. Esimerkiksi kuvan 2 tapauksessa viallisen jauhimen värähtelytasossa esiintyi voimakkaita vaihteluita, kun taas hyväkuntoisen jauhimen käynti oli hyvin tasaista.

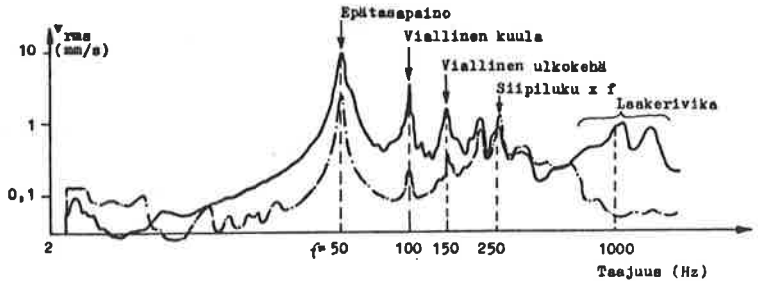


Kuva 2. Viallisen ja hyvässä kunnossa olevan jauhimen värähtelytasoa ajan funktiona [1].

4. TAAJUUSANALYYSI

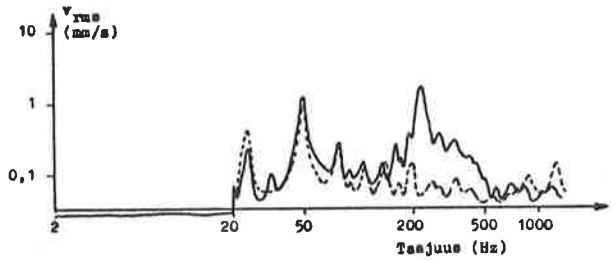
Taajuusanalyysin avulla saadaan tietoa värähtelyn aiheuttajasta eli viasta. Liitteessä 1 on esitetty yhteenvetona eri tutkijoiden käytännön kokemuksiin perustuva vianhakutaulukko [1]. Vertaamalla mittausten antamien spektrien huippukohtien taajuuksia vianhakutaulukon taajuuksiin on mahdollista tehdä diagnoosi vian syystä (kuva 3). Liitteen 1 voimakkuussarake koskee poikkeamamittauksia.

Viallisessa lauhdepumpussa ilmeni juoksupyörässä epätasapainoa sekä laakerivika. Voimakas huippu pyörimistaajuudella f = 50 Hz viittaa epätasapainoon. Kuulan pyörimistaajuudeksi saatiin liitteen 1 kaavan avulla 98 Hz β:n arvolla 10°. Nyt tällä taajuudella oli selvästi todettavissa terävä iskumainen piikki, jonka voimakkuus vaihteli ajan funktiona. Tarkastuksessa todettiin, että laakerin ulkokehä ja kuulat olivat selvästi vioittuneet.



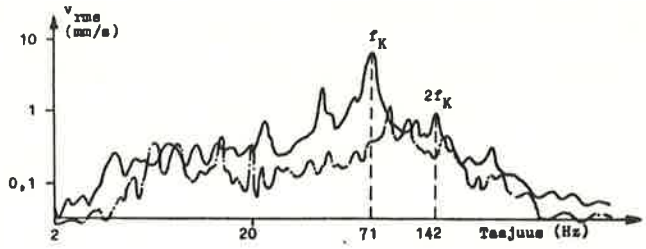
Kuva 3. Viallisen lauhdepumpun taajuusspektri [1]. Pistekatkoviivoitettu spektri saatiin korjauksen jälkeisessä tutkimuksessa.

Korjauksen jälkeen mitattiin kuvan 3 alempi spektri. Erikoisesti on syytä panna merkille se, että n. 100 Hz:n piikin sekä spektrin loppuosan tasot laskivat alle 1/10-osaan siitä, mitä ne olivat viallisen pumpun taajuusspektrissä.

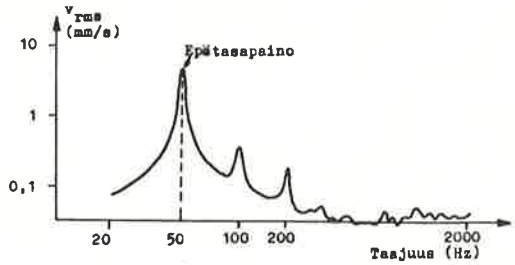


Kuva 4. Ylempi spektri on aiemmin mainitun viallisen jauhimen ja alempi spektri on hyvässä kunnossa olleen toisen jauhimen [1].

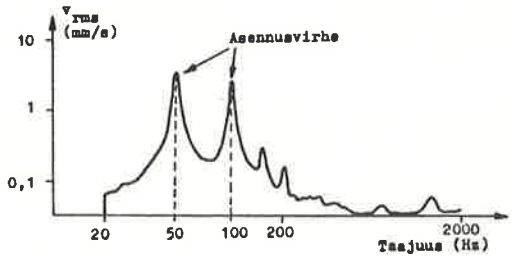
Kuvan 4 spektreissä on selvä ero taajuusalueella 150...500 Hz. Sähköisen vian olemassaolon paljasti virran katkaiseminen, jonka jälkeen viallinen jauhin pyöri tasaisesti. Sähkömoottorin avaamisen yhteydessä todettiin häkkikäämitysten vioittuneen, mistä oli seurauksena voimakkaasti vaihteleva vääntömomentti. Kuvissa 5...7 on vielä muutama esimerkki erilaisten vikojen vaikutuksesta taajuusspektriin.



Kuva 5. Telan kehänsuuntaisen aaltomaisuuden eli kantikkuuden vaikutus spektriin [1]. Voimakasta värähtelyä esiintyi taajuudella f_K = "kanttiluku" x telan pyörimistaajuus = 71 Hz. Vian kehittyessä edelleen nousi huippuja esille myös taajuuksilla 3 f_K ja 4 f_K [1,4].



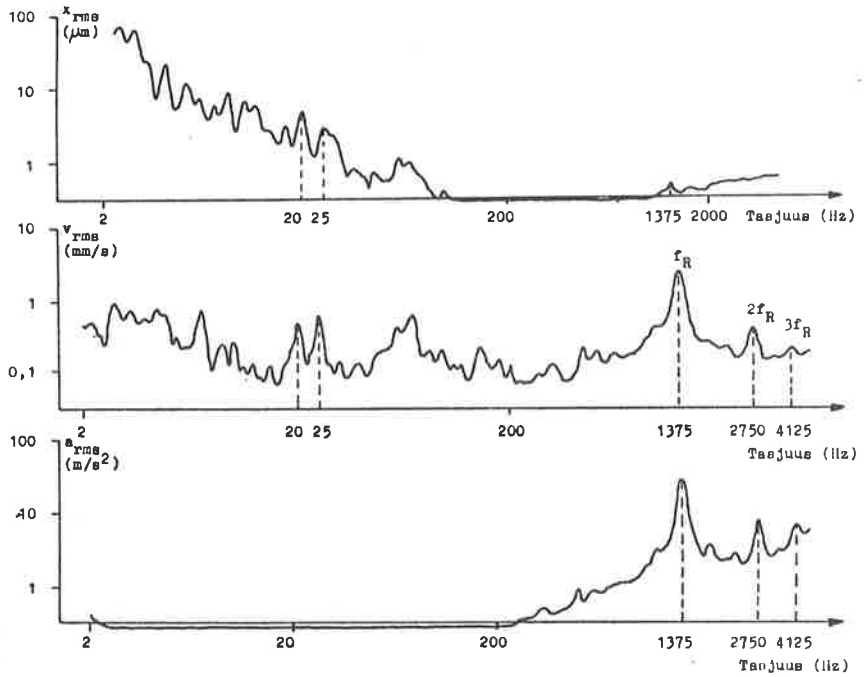
Kuva 6. Epätasapainossa olevan höyryturbiinin taajuusspektrissä on vain yksi voimakas värähtelykomponentti pyörimistaajuudella f = 50 Hz. [3].



Kuva 7. Höyrytyrbiinissa olevaa asennusvirhettä osoittaa se, että värähtelyä on selvästi sekä pyörimistaajuudella f = 50 Hz että taajuudella 2f = 100 Hz.

5. MITTAUSPARAMETRIN VALINNASTA

Yleisesti voidaan sanoa, että matalilla taajuuksilla poikkeamalukemat korostuvat. Nopeusmittaukset antavat tasaisen spektrin välialueella. Korkeilla taajuuksilla puolestaan kiihtyvyysarvot ovat hallitsevia. Kuten kuvasta 8 voidaan todeta, niin hammaspyörän ryntötaajuudella poikkeama-arvo on hyvin pieni, kun taas kiihtyvyysarvo on suuri.



Kuva 8. Hammasvaihteesta saatuja taajuusspektrejä eri mittausparametreja käyttäen [1]. Ryntötaajuus f_R = hammasluku x akselin pyörimistaajuus. Ensiöakselin pyörimistaajuus oli 25 Hz ja toisioakselin 20 Hz.

Kiihtyvyysmittauksista on tulossa entistä tärkeämpi väline pyrittäessä löytämään vierintälaakerien vikoja. Tämä johtuu siitä, että laakerivika on todettavissa korkeilla vierintäelimien resonanssitaajuuksilla paljon aikaisemmin kuin matalilla pyörimisnopeuteen verrannollisilla taajuuksilla [5,6].

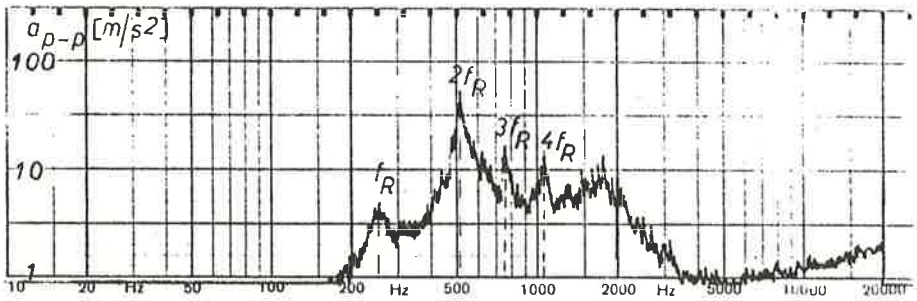
6. AUTOMAATTISISTA VALVONTASYSTEEMEISTÄ

Kehittyneissä valvontasysteemeissä on kiinteästi asennetut anturit, joista tulevia signaaleja käsitellään mikroprosessorin tai tietokoneen avulla. Valvontalaitteisto kerää tietoa eri mittauspisteistä halutuin aikavälein ja vertaa niitä muistissa oleviin hälytystasoihin.

Kun tietokoneen muistiin on tallennettu vianhakutaulukko, niin sovitun hälytysrajan ylityksen jälkeen on mahdollista saada tulostus, jossa on vioittunut kohde, värähtelytaso, hälytystaso, taajuusspektri sekä vian ilmeinen syy. Lisäksi muistiin tallennettujen aiempien mittauatulosten perusteella on mahdollista tulostaa ennuste vian kehittymisestä (vrt kuva 1).

Sen sijaan, että tietokoneen muistiin tallennettaisiin taajuusspektrit joka mittauskerralla, on edullisempaa tarkkailla vain vikojen kannalta oleellisia taajuusalueita. Kehittyneiden suodattimien ylä- ja alarajataajuus on ohjelmoitavissa halutun suuruiseksi. Esimerkiksi paperikoneen kuivatusosan käyttöpuolen telojen kunnonvalvontaan riittäisivät kuvan 9 mukaiset taajuusalueet. Kunkin alueen voimakkuus voitaisiin tallentaa muistiin joko tehollisarvona, huippuarvona tai huipusta huippuun-arvona. Tällöin olisi seurattavana kolme kuvan 1 tapaista käyrää. Kuvan 9 alueet I ja II on valittu siten, että ne sisältävät perustaajuuden sekä käytännössä esiintyvät monikerrat. Alueen III tulisi olla niin laaja, että se kattaisi ainakin muutamia ulkokehän alimpia ominaistaajuuksia. Vierintälaakerin vika näkyy usein selvästi ulkorenkaan ominaistaajuudella vaikka naarmuuntumista olisikin korkeamman ominaistaajuuden omaavalla sisäkehällä [6]. Toisaalta vierintälaakerin vika näkyy monesti paremmin toisella ja kolmannella ominaistaajuudella kuin ensimmäisellä [7].

Kuva 9. Paperikoneen kuivatusosan telojen kunnonseurannan keskeiset taajuusalueet.



Kuva 10. Paperikokeen kuivatusosan käyttöpuolelta mitattu taajuusspektri. Mittausparametrina on käytetty kiihtyvyyden huipusta huippuun-arvoa (a_{p-p}). Spektristä näkyy selvästi ryntötaajuus f_R = 258 Hz ja sen monikertoja.

Alueen III alarajataajuus olisi valittava niin korkeaksi, etteivät hammaspyörien ryntötaajuudet pääse vaikuttamaan mittaustuloksiin. Erään paperikoneen kuivatusosan laakerivikojen yhteydessä on todettu kiihtyvyyslukemien [8] kasvaneen selvästi taajuusalueella 6000...7000 Hz.

7. KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] LAHDELMA, S., Paperikoneen kunnossapitotoiminnan kehittämisestä. Diplomityö. Oulun yliopisto, konetekniikan osasto. Oulu 1977. 131 s.

[2] ISO 2372 Mechanical vibration of machines with operating speeds from 10 to 200 rev/s - Basis for specifying evaluation standards. International Standard, First edition - 1974-11-01. 9 s.

[3] LAHDELMA, S., Värähtelymittaukset. Helsinki 1978. Insinöörijärjestöjen Koulutuskeskus, Julkaisu 76-78, Teollisuuden mittaustekniikka IV: Paineen, voiman ja virtauksen mittaaminen. 24 s.

[4] LAHDELMA, S. & LESKINEN, R., Värähtelymittauksiin perustuvista valvontajärjestelmistä. Paperi ja Puu 62 (1980) 11, s. 721-723.

[5] BALDERSTON, H.L., The Detection of Incipient Failure in Bearings. Materials evalutation (June 1969), s. 121-128.

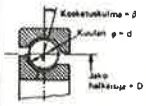
[6] MARTIN, R.L., Detection of Ball Bearing Malfunctions. Instruments & Control Systems 43 (December 1970) 12, s. 79-82.

[7] KELLUM, G.B., Investigation of Machinery Vibrations Induced by Defective Rolling Element Bearings. New York 1972. The American Society of Mechanical Engineers, Publication 72-PEM-25. 8 s.

[8] MAERSK-MÖLLER, H., Vibration measurement for maintenance. Pulp & Paper Canada 83 (January 1982)1, s. 56-58.

LIITE 1

VIANHAKUTAULUKKO

SYY	VOIMAKKUUS(μm)	TAAJUUS	VAIHE	HUOMAUTUKSIA
1. Epätasapaino	Verrannollinen epätasapainoon. Suurin radiaalisuunnassa	1 x n	Vaihe osoittaa yhtä vakaata vertailumerkkiä.	Yleisin syy värähtelyihin
2. Kytkimen tai laakerin asennusvirhe 3. Käyrä akseli	Suuri aksiaalisuunnassa. 50 % tai enemmän radiaalivärähtelyistä	Tavallisesti 1 x n Usein 2 x n Joskus 3...4 x n	Yksi, kaksi tai kolme vertailumerkkiä	Parhaiten tunnistettavissa suuren aksiaalivärähtelyn johdosta. Käytä mittakelloa tai muita mittalaitteita vian selvittämisessä. Jos koneessa on liukulaakeri eikä kytkimessä ole asennusvirhettä, niin tasapainota roottori.
4. Viallinen kuula- tai rullalaakeri	Vaihtelee	Yksityisten vierintäelinten sysäystaajuudet. Myös erittäin suuritaajuista värähtelyä (20...60 kHz)	Epävakaa	 **Sysäystaajuus f(Hz)** Ulkokehä vaurioitunut $f = \frac{N}{2} n_r (1 - \frac{d}{D}\cos\beta)$ Sisäkehä vaurioitunut $f = \frac{N}{2} n_r (1 + \frac{d}{D}\cos\beta)$ Kuula vaurioitunut $f = 0{,}5 \frac{D}{d} n_r \left[1 - (\frac{d}{D})^2 \cos^2\beta\right]$ N on kuulien tai rullien lukumäärä riviä kohti. n_r on sisä- ja ulkokehän pyörimistaajuuksien erotus.
5. Viallinen liukulaakeri		1 x n	Yksi vakaa vertailumerkki	Vertaa akselista ja laakeripesästä mitattuja arvoja toisiinsa.
6. Mekaaninen välys	Verrannollinen välykseen	2 x n	Kaksi vertailumerkkiä. Tavallisesti jonkin verran epävakaa	Esiintyy tavallisesti yhdessä epätasapainon ja/tai asennusvirheen kanssa.
7. Säteislaakerin väljä pesä		n/2 tai n/3		Väljyys esiintyy yleensä vain käyntinopeuksilla ja -lämpötilassa. Esim. turbiinit.
8. Kuluneet hammaspyörät	Alhainen	Hyvin korkea. Hammasluku x n ja sen monikerrat	Osoittaa useita vertailumerkkejä. Epävakaa	
9. Resonanssi	Suuri	Kriittinen pyörimistaajuus	Yksi vertailumerkki	Värähtely kasvaa voimakkaasti lähestyttäessä kriittistä pyörimistaajuutta.
10. Vialliset käyttöhihnat	Säännötön tai sykkivä	1, 2, 3 & 4 x hihnojen kierrostaajuus	Yksi tai kaksi vertailumerkkiä, jotka ovat tavallisesti epävakaita	Stroboskooppi kätevä työkalu viallisen hihnan toteamiseen
11. Kitka	Vaihtelee	Jatkuva kitka: useita eri taajuuksia Ajoittainen kitka: 1 tai 2 x n	Epävakaa	
12. Hydrauliset ja aerodynaamiset voimat	Yleensä alhainen	1 x n tai tuulettimen tai juoksupyörän siipien lukumäärä x n ja monikerrat		Epätavallinen häiriön syy lukuunottamatta resonanssitapausta
13. Öljykalvon pyörteily ja rikkoutuminen	Vaihtelee	Hieman alle puolet akselin pyörimistaajuudesta (0,42 ...0,48) x n	Epävakaa	Tulee kysymykseen koneissa, joilla on suuri pyörimistaajuus. Esim. turbiinit
14. Sähköinen epätasapaino		1 x n tai 1 tai 2 x synkronitaajuus	Yksi tai kaksi pyörivää merkkiä	Jos värähtelyn voimakkuus heikkenee äkillisesti, kun virta katkaistaan, syy on sähköinen.
15. Edestakaiset massavoimat		1, 2 & korkeampia kertalukuja x n		Luontaista mäntäkoneille, voidaan pienentää vain rakennetta tai alustan eristystä parantamalla.
16. Epäkeskeiset akselitapit	Tavallisesti pieni	1 x n	Yksi merkki	Moottoreissa ja generaattoreissa värähtely häviää, kun virta katkaistaan. Vaihteissa värähtely on voimakkainta hammaspyörän keskiviivan suunnassa. Jos vika on pumpussa tai puhaltimessa, yritä tasapainottaa.

n on pyörimistaajuus

MAASTOKÄYTTÖINEN DATALOGGERI

DI Jouko Kangas
Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Mitattaessa ja rekisteröitäessä antureista saatavia mittaustietoja sähköisesti mittauksen tarkkuuden parantaminen ja henkilökustannusten säästö voidaan saada aikaan automatisoimalla mittaus- ja rekisteröintiprosessi. Laitetta, joka suorittaa tämän, kutsutaan dataloggeriksi. Niiden koko vaihtelee pienistä 10 kanavan systeemeistä aina usean tuhannen kanavan systeemeihin. Sovellutukset ovat siis vaihtelevia, monien systeemien ollessa jopa räätälintyönä valmistettuja.

Oulun yliopiston konetekniikan osastolla on kehitetty mittalaite mekaanisten suureitten mittaamiseksi maasto-olosuhteissa. Laitteen kehittely ja konstruointi on suoritettu viimeisten kuuden vuoden aikana.

Päämääräksi asetettiin koekappaleen rakenteellisen lujuuden mittaaminen todellisissa toimintaolosuhteissa siten, että mittauslaitteiston omat häiriölähteet jäisivät mahdollisimman vähäisiksi. Lisäksi haluttiin mahdollisuus mitata myös muita kiinnostavia suureita kuten paine, siirtymä, voima, kiihtyvyys, lämpötila jne.

Luonnon olosuhteissa syntyneet rasitukset ovat täysin satunnaisia sekä suuruutensa että esiintymistiheytensä suhteen. Mittausmenetelmien ja tulosanalyysin täytyy olla sellaiset, että rasitetusta koekappaleesta saadut tiedot voidaan koota ja analysoida niin helposti kuin mahdollista. Kustakin mittauspisteestä on saatava riittävä määrä mittausarvoja luotettavan tilastollisen arvion saamiseksi.

2 MITTAUSLAITE

Peruslaite on dataloggeri, jonka ensimmäinen versio valmistettiin Digelius Oy:llä. Se on suunniteltu erityisesti venymäliuskamittauksiin. Laitteessa on 64 kanavaa, joista yksi on varattu siltajännitteen tarkkailuun ja 63 ulkoisten anturien liittämiseen. Jokaisella kanavalla on Wheatstonen sillan täydennysvastukset antaen mahdollisuuden neljännes-, puoli- tai kokosillan käyttämiseen. Voidaan käyttää tavallisia 1-hilaliuskoja tai rusettiliuskoja tasojännitystilan määrittämiseksi. Silta on mahdollista myös kokonaan ohittaa.

Yhteen mittauskierrokseen voidaan valita erilaisia kanava-alueita siten, että kanavien kokonaislukumäärä ei ylitä 64. Samaan kanava-alueeseen kuuluville kanaville annetaan yhteinen liuskavakio tai anturille ominainen muu vakio (jota ei käytetä hyväksi itse mittausprosessissa, vaan vasta tulosten käsittelyssä) sekä ohjelmoitava vahvistus G_2 (kuva 1).

Mittausnopeus (peräkkäisten mittauskierrosten aloitushetkien välinen aika) on käyttäjän valittavissa 1 ms tarkkuudella. Suurin sallittu nopeus riippuu mitattavien kanavien lukumäärästä. Täyttä kanavalukumäärää 64 voidaan mitata nopeimmillaan 26 ms välein ja yhtä kanavaa 1 ms välein.

Mittaukset voidaan aloittaa normaalin aloituksen lisäksi myös ns. AUTOSTART-liipaisulla. Tällöin mielivaltaiselle kanavalle asetetaan etukäteen signaalitaso, jonka ylitys positiivisella tai negatiivisella puolella aloittaa mittauksen. Tämän jälkeen mittaus jatkuu etukäteen sekunneissa annetun ajan ja loggeri jää odottamaan uutta mittauksen liipaisusignaalia tarkkaillen vain AUTOSTART-kanavan mittausarvoja.

Mikroprosessori 8085 ohjaa multiplekseriä, joka valitsee mittauskierrokseen kuuluvat kanavat vuorotellen. Venymäliuskamittauksissa kanavan mittaussignaali tulee Wheatstone-sillasta vahvistimien G_1 ja G_2 kautta A/D-muuntimeen. Vahvistimella G_1 on kiinteä vahvistuskerroin 100. Vahvistimen G_2 vahvistuskertoimet 1, 3, 10 tai 25 ovat ohjelmallisesti valittavissa.

Mikroprosessori 8085 lähettää mittaustiedot tämän jälkeen vuorotellen kahteen 4 ktavun puskurimuistiin. Kun toinen puskuri täyttyy, tyhjentää prosessori 8748 sen massamuistiin, joka on 3 M:n 4-raitainen datakasetti. Tämän talletuskapasiteetti on n. 2,6 Mtavua (tavu on tässä 8 bittiä). Yhdelle raidalle mahtuu 325 000 mittaustulosta, mikä on yleensä riittävä määrä mittausta kohti. Kasetille talletus ja sieltä luku tapahtuvat vakionopeudella 6 000 tavua eli 3 000 mittaustulosta sekunnissa.

Kuva 2 esittää prosessiliitäntää. Huomataan, että hyppylangoilla ja anturiliitännän erilaisilla kytkennöillä voidaan käyttää erilaisia siltakytkentöjä, sillan ohitusta tai sillan ja vahvistimen G_1 ja/tai suodattimen ohitusta. Seuraavassa esitetään mittausmahdollisuuksia venymäliuska-antureille tai muille antureille, joiden signaalin lähtötaso vaihtelee välillä 10 µV...10 V.

1° Venymäliuskamittaus <u>neljännes</u>sillassa: Aktiivi liuska kytketään anturiliitännän napoihin 1 ja 2. Hyppylangat I, II, III, IV, V, IX ja X ovat kiinni, toiset auki.

2° Venymäliuskamittaus <u>puoli</u>sillassa: Kaksi liuskaa (2 aktiivia tai 1 aktiivi ja 1 kompensointi) kytketään yhteen ulkopuolella, äärimmäiset johdot kytketään napoihin 1 ja 3, keskijohto napaan 5. Hyppylangat I, II, III, IV, V ja IX ovat kiinni, toiset auki.

3° Venymäliuskamittaus <u>koko</u>sillassa: Sillan syöttöjännite saadaan navoista 1 ja 3, signaali johdetaan napoihin 4 ja 5. Hyppylangat I, II, IV, V ja IX ovat kiinni, toiset auki.

4° Sillan ohitus antureilla, jotka antavat mittaussuureeseen verrannollista jännitesignaalia: Signaali napoihin 4 ja 5. Navat 5 ja 6 yhdistetään sopivalla vastuksella kellunnan eliminoimiseksi. Hyppylangat I, II, IV, V ja X ovat kiinni, toiset auki.

5° Sillan ja vahvistimen G_1 ohitus: Signaali napoihin 5 ja 6. Hyppylangat I, II, V, VI, VII ja X kiinni, toiset auki (suodatinta ei ohiteta) tai hyppylangat I, II, VI, VIII ja X kiinni, toiset auki (myös suodatin ohitetaan).

6° Mittaus kapasitiivisilla tai induktiivisilla antureilla kokosillassa: Ulkopuolinen AC-tehonsyöttö, signaali napoihin 4 ja 5. Hyppylangat I, II, IV, V ja X kiinni, toiset auki.

Hyppylanka IX sijaitsee ulkoisessa liitäntäkentässä. Hyppylangan X avulla saadaan vertailuvastus R_{ref} hyödynnetyksi myös puoli- ja kokosiltakytkennässä.

Laitteiston kehitykseen liittyen on tehty kaksi diplomityötä ja kolmas on paraikaa tekeillä. Ensimmäinen työ liittyi dataloggerin ensimmäisen version valmistukseen Digelius Oy:llä. Toisessa työssä dataloggeriin lisättiin Intel 8748-mikroprosessori huolehtimaan kasettiaseman toiminnasta, CPU-kortti ja A/D-kortti uusittiin, puskurimuistialue muunnettiin yhdestä 2 ktavun puskurista kahdeksi 4 ktavun puskuriksi. Mikroprosessorien ohjelmisto käsitti tässä vaiheessa 7 ktavua Assembly-ohjelmaa. Kolmannessa työssä ohjelmisto suunnitellaan kokonaan uudelleen pääosin PL/M-kielisenä dokumentoinnin selvyyden lisäämiseksi. Pääprosessori Intel 8080 vaihdetaan tyyppiin Intel 8085 A-2, CPU-kortti, A/D-kortti ja näyttö-näppäimistö-kortti uusitaan. Laitteeseen lisätään mahdollisuus toimia 8-kanavaisena DC-vahvistimena, jolloin mittaustuloksia ei talleteta kasetille, vaan ohjataan analogisesti ja digitaalisesti vahvistettuna suoraan 8-kanavaiselle analogiaulostuloyksikölle. Taajuusvaste on tällöin 700 Hz kanavien lukumäärästä riippumatta. Tässä työssä mikroprosessorien ohjelmat tulevat käsittämään n. 14 ktavua PL/M-ohjelmaa ja 1 ktavua Assembly-ohjelmaa.

Dataloggeri on sijoitettu lasikuituvahvisteiseen tukevaan koteloon, joka tekee laitteen täysin käyttökelpoiseksi maasto-olosuhteissa. Energialähteenä toimii kaksi akkua, jolloin ulkoista koekappaleen toimintaa häiritsevää energialähdettä ei tarvita. Mittalaitteen paino on 40 kg ja tehon tarve suurimmillaan 180 W, 24 V DC. Maastomittauksissa laitteisto koostuu dataloggerista, akuista ja antureista mittausjohtoineen.

3 MITTAUKSEN SUORITUS

Koekohteeseen liimataan venymäliuskat ja kiinnitetään muut tarvittavat anturit ennalta laaditun suunnitelman mukaisesti. Mittausjohdot liitetään dataloggerin anturien liitinkenttään edellä esitettyjä liitäntävaihtoehtoja noudattaen. Tässä vaiheessa aloitetaan myös yksityiskohtainen pöytäkirjanpito mittauskohteesta, anturi-kanavatunnistustaulukosta, anturitiedoista, mittaustavasta, mittausajankohdasta ja -paikasta, kokeitten tyypistä jne.

Ennen mittauksia suoritetaan kanavien nollatasapainotus l. trimmaus, mikä tehdään jokaiselle kanavalle erikseen. Erillinen kanava voidaan säätää myös lähelle toista laitaa, jos tiedetään kanavan mittausarvon muuttuvan vain vastakkaiseen suuntaan. Arvioidaan myös kullekin kanavalle odotettavissa olevan signaalin suuruutta sopivan vahvistuksen valitsemiseksi niin, että mittausalue tulisi mahdollisimman laajasti käyttöön ilman signaalin leikkautumista.

Aloitettaessa staattinen tai dynaaminen koe alkutilanteen tulisi olla niin rasitukseton kuin mahdollista. Ennen varsinaisen mittauksen aloittamista mitataan alkuarvot (24 mittakierrosta) kaikilta mittakierrokseen valituilta kanavilta ilman vertailuvastusta. Tämän jälkeen loggeri mittaa automaattisesti alkuarvot (24 mittakierrosta) 66.4 kΩ vertailuvastuksen kanssa. Näitä arvoja käytetään hyväksi venymäliuska-anturien skaalauskertoimen määrittämisessä.

Kokeen aikana mitatut mittaustulokset ovat poikkeamia ilman vertailuvastusta mitatuista alkuarvoista. Staattisissa testeissä yksi mittausarvo kanavaa kohti riittää periaatteessa, mutta tilastollisen tarkkuuden parantamiseksi otetaan useita arvoja, joista lasketaan keskiarvo. Dynaamisissa testeissä tarvittava mittausaika riippuu kokeen luonteesta, mittausnopeudesta ja mittauskierrokseen kuuluvien kanavien lukumäärästä. Kokeen aikana halutun mittauskanavan mittausarvoja voidaan seurata suoraan dataloggerin digitaalinäytöstä.

Mittaus voidaan suorittaa yhtenäisenä tai AUTOSTART-mittauksena, jolloin liipaisut voidaan myös suorittaa halutulla hetkellä käsikytkintä käyttämällä.

4 MITTAUSARVOJEN ANALYSOINTI

Digitaalimuodossa tallentavan mittaussysteemin suurin etu on tietokoneen hyväksikäytön mahdollisuus mittausarvojen analysoinnissa. Tulokset saadaan nopeasti ja niitä voidaan vaivattomasti käsitellä laadittujen käsittelyohjelmien puitteissa. Yksityiskohtainen tulosanalyysi saadaan tietokoneella välittömästi mittausten jälkeen.

Mittaustiedot puretaan kasetilta (kuva 3) mikroprosessorin 8748 ohjaamana vuorotellen kumpaankin puskurimuistiin, mistä prosessori 8085 lähettää ne digitaalisena joko sarjaliitännän RS-232-C välityksellä modeemin kautta yliopiston tietokoneelle UNIVAC 1100 tai rinnakkaisliitännän IEEE-488 välityksellä siihen sopivalle pöytätietokoneelle. Mittaustiedot voidaan myös lähettää analogisena korkeintaan 8 kanavaa kerrallaan D/A-muuntimen kautta esim. suorapiirturille, analogianauhurille tai analysaattorille. Tällöin purkunopeus on sama kuin mittausnopeus.

UNIVAC:in peräkkäistiedostossa olevien mittaustulosten käsittelyä varten on seuraavia ohjelmia:

1° Ohjelma "Desimaalilukutulostus" antaa halutulle rusettiliuskalle mittakierroksittain kunkin haaran venymän sekä niistä lasketut tasojännitykset, päävenymät ja suuntakulman desimaalilukuna tai halutuille yksittäisliuskoille (max 3 kerrallaan) venymän ja siitä lasketun jännityksen.

2° Ohjelma "Staattisen mittauksen tulostus" muodostaa tulostuksen mittauksesta, jossa koekappaleen kuormitusta on muutettu portaittain samoilla alkuarvoilla. Jokaisella portaalla on mitattu n mittakierrosta ja näiden n mittakierroksen arvoista ohjelma laskee rusettiliuskalle pääjännitysten keskiarvot, standardipoikkeamat, maksimiarvot ja suuntakulmien keskiarvon tai yksittäisliuskoille (max 2 kerrallaan) jännityksen keskiarvon, standardipoikkeaman ja maksimiarvon.

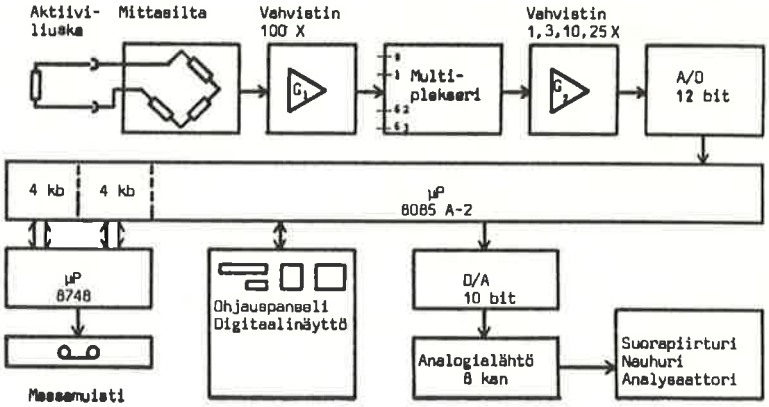
Maksimiarvot ilmaisevat mittausten tarkkuutta; keskiarvon pitäisi olla sama kuin maksimiarvon.

3° Ohjelma "Jakaumapiirros" laskee samat arvot kuin em. ohjelmakin, mutta koko mittauksen osalta. Tulostuksessa rusettiliuskan pääjännitykset ja suuntakulmat jaetaan ryhmiin niiden suuruudesta riippuen ja muodostetaan ryhmistä pylväsdiagrammi. Tällöin jännityksen tai suuntakulman esiintymistiheyden todennäköisyyskäyrä saadaan pylväsdiagrammin verhokäyränä. Yksittäisliuskalla vastaava muodostetaan jännitykselle.

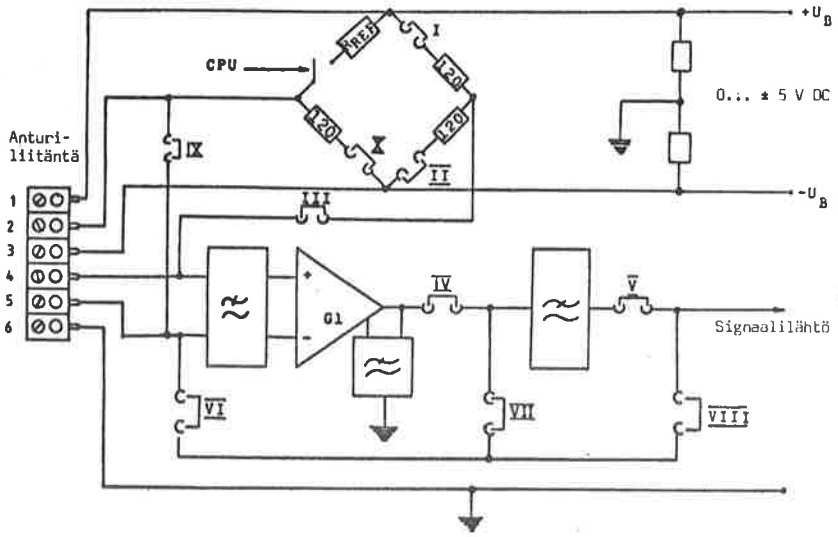
Lopuksi tulostetaan desimaalilukuna kaikkien rusettien ja yksittäisliuskojen koko mittausta koskevat keskiarvot, standardipoikkeamat ja maksimiarvot.

4° Ohjelma "Sekvenssipiirros" palauttaa dynaamisissa olosuhteissa mitatun jännityskehityksen piirturitulostusta muistuttavaksi pistejonoksi halutulla skaalauksella. Tämän voi todeta listauksesta, jolloin rivikirjoitin simuloi piirturia.

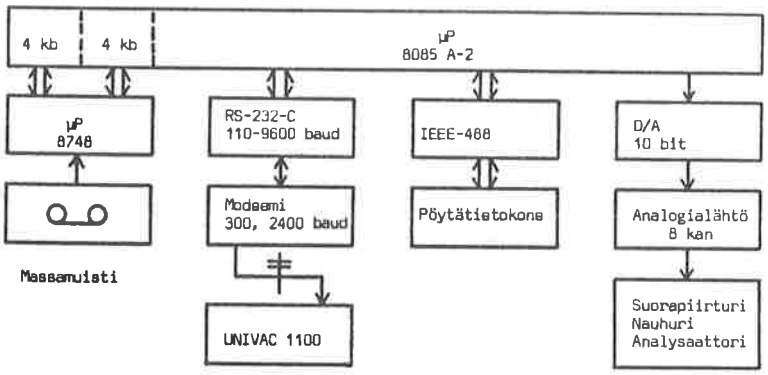
Ohjelmissa 1° ja 2° venymäliuskojen sijasta voidaan käyttää myös muita antureita, kuten paineanturi, siirtymäanturi jne. ja saadaan näille ominaisille mittaussuureille vastaavat tulostukset.



Kuva 1. Venymäliuskamittauksen lohkokaavio.



Kuva 2. Analogiasignaalianturien liitäntämahdollisuudet.



Kuva 3. Mittaustulosten purku lohkokaaviona.

HOLOGRAFINEN INTERFEROMETRIA VÄRÄHTELYANALYYSISSÄ

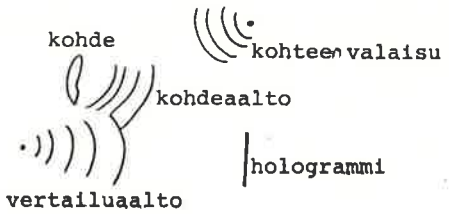
Vesa Karppinen
Joensuun korkeakoulu
Matematiikan ja fysiikan osasto

1 JOHDANTO

Holografiassa kohteen kuva tallennetaan filmille kohteesta difraktoituvan aallon ja vertailuallon interferenssinä (kuva 1). Filmille tallennetaan kohteen eri pisteistä tulevien aaltojen väliset vaierot. Kun hologrammia valaistaan vertailuaallolla, rekonstruoituu alkuperäinen kohdeaalto vaihe-eroineen ja kohteen kuva havaitaan kolmiulotteisena.

Holografiaan perustuva ainetta rikkomaton testausmenetelmä on nk. holografinen interferometria. Samalle filmilevylle tallennetaan joko kohdeaallot kahdesta eri tilasta tai tietyllä tavalla liikkuvan kohteen aaltorintama.

Täpläkuvauksessa valotetaan kohteen kuva koherentissa valaistuksessa ilman referenssiaaltoa. Kuva on kaksiulotteinen ja se muodostuu kirkkaista ja tummista täplistä. Menetelmä liittyy läheisesti holografiseen interferometriaan. Näillä kahdella eri menetelmällä saatava informaatio on osin samanlaista ja osin toisiaan täydentävää.



Kuva 1. Hologrammin tallennuksen periaatteellinen koejärjestely.

Seuraavissa luvuissa tarkastellaan lyhyesti ja vain pääpiirteittäin holografista interferometriaa ja täpläkuvausta värähdysten tutkimisessa.

2 KAKSOISVALOTUSTEKNIIKKA

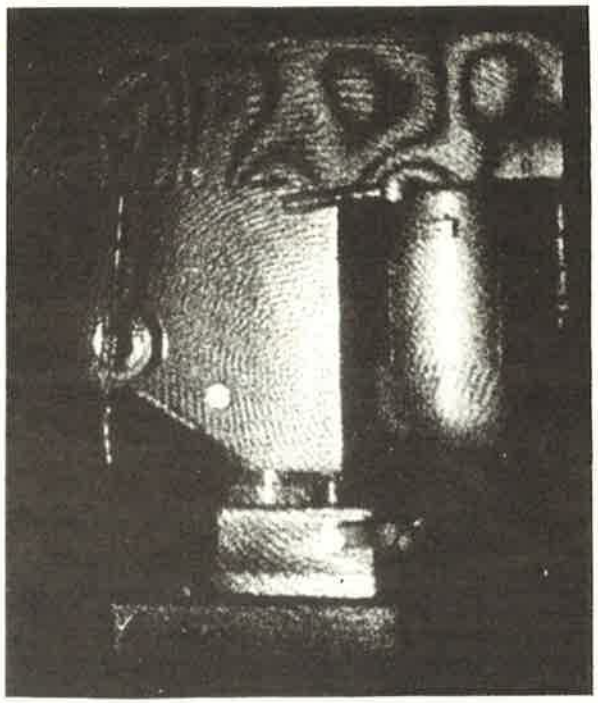
Samalle filmilevylle tallenetaan hologrammit kohteesta sen kahdesta eri tilasta. Värähdysiikkeitä tutkittaessa liike etenee valotusten välillä. Rekonstruoitaessa kaksoisvalotushologrammia interferoivat keskenään kaksi kohdeaaltorintamaa ja kohteen päällä nähdään kirkkaita ja tummia interferenssijuovia. Kahden tumman viivan välillä on aallonpituuden puolikkaan suuruinen siirros.

Värähdysliikkeitä tutkittaessa on valotusten oltava niin lyhyitä, että kohde ei ehdi liikkua niiden aikana. Tämän vuoksi valonlähteenä yleensä käytetään tehokkaita pulssilasereita. Näillä pulssien kesto on noin 25-50 ns. Näinollen suurtaajuisetkin värähdykset kyetään näillä pysäyttämään.

Ajasta riippuvia liikkeitä tutkittaessa on myös tiedettävä, missä liikkeen vaiheessa valotukset suoritetaan. Valotuseten välinen aika on myös tunnettava. Aikariippuvuus itse voi olla luonnollisesti minkalainen tahansa kunhan ajoitus saadaan sopivaksi.

Kuvassa 2 on interferenssiviivat, jotka esittävät värähdyksen vakionopeusviivoja. Viivat ovat porakoneen kiilahihnan suojakopassa, joka värähtelee porakoneen käydessä. Porakoneen pyörintänopeus oli kuvattaessa 8000 kierrosta minuutissa ja pulssien välinen aika 15 µs.

Viivakuvioitten tulkintaa helpottuu ja nopeutuu huomattavasti, jos liikkeen suunta tunnetaan. Kuvan 2 interferenssiviivat edustavat pintaa vastaan kohtisuoria siirroksia eli taipuisaa värähtelyä. Mikäli siirrosten suuntaa ei tunneta on siirrosvektorit määritettävä käyttämällä nk. usean pisteen analysointimenetelmää |1|.



Kuva 2. Porakoneen kiilahihnan suojakannessa esiintyviä siirrosviivoja. Kone oli kuvattaessa kuormittamaton ja sen pyörintänopeus oli 8000 rpm.

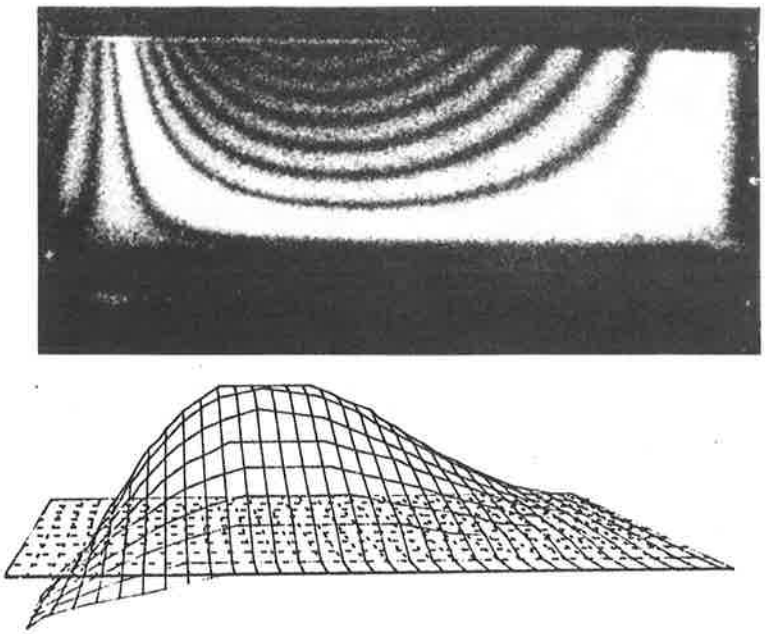
3. AIKAKESIARVOTEKNIIKKA

Tutkittava kohde voi liikkua (jaksollisesti) valotuksen aikana. Kun liikkeen jakson aika on huomattavasti pienempi kuin valotusaika muodostuu nk aikakeskiarvohologrammi. Liikkeen aikariippuvuuden mukaan kohteen intensiteettijakautumaa moduloi erimuotoiset tekijät |2|. Seuraavassa tarkastellaan vain yksinkertaisinta tapausta eli harmoonista liikettä.

Aikakeskiarvohologrammissa, joka on otettu harmoonisesti värähtelevästä kohteesta, tummat ja kirkkaat viivat esiintyvät ensimmäisen lajin nollannen kertaluvun Besselin funktion neliön määräämäl-

lä tavalla. Argumenttina on suoraan amplitudiin verrannollinen tekijä. Solmukohdat erottuvat helposti kuvan kirkkainpina alueina. Muut viivat ovat amplitudin yhtäsuuruuskäyriä. Taipuisille värähtelyille nämä ovat värähdysmuodon korkeuskäyriä.

Kuvassa 3 on turbiinin siiven eräs värähdysuoto. Hologrammi valotettiin siivestä sen värähellessä taajuudella 6.25 kHz. Solmukohta-alueet erottuvat selvästi ja viiden ensimmäisen tumman viivan edustamat amplitudit ovat mikrometreissä lausuttuna:0.1, 0.24, 0.36, 0.52 ja 0.66. Kuvan alaosassa on havainnollistettu värähdysmuotoa.



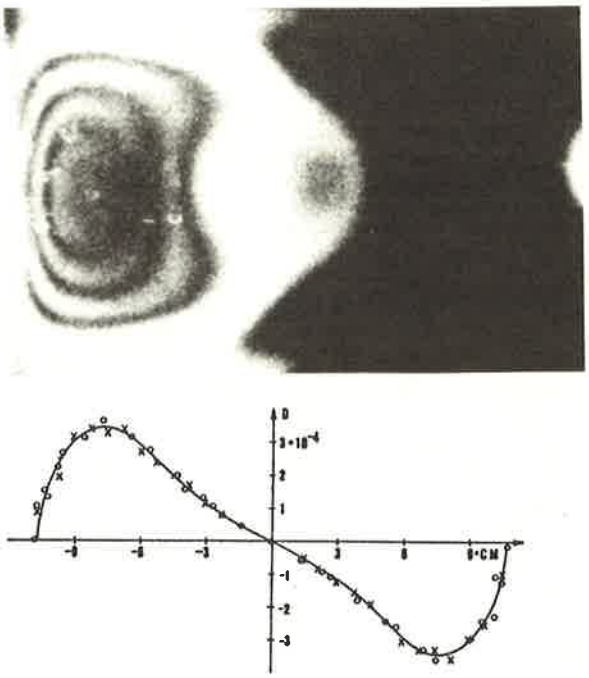
Kuva 3. Turbiinin siiven eräs ominaisvärähdysmuoto (6.25kHz) ja sen havainnollistus.

4 TÄPLÄKUVAUS

Täpläkuvauksesta voidaan erottaa samat menetelmät valotusten suhteen kuin holografiasta. Lisäksi täpläkuvaukseen tulevat kohteeseen fokusoitu tapaus ja valolähteeseen fokusoitu kuvaus. Näiden kahden fokusointitason avulla saadaan eroteltua pinnansuuntainen ja pintaa vastaan kohtisuora liike.

Taipuisia värähtelyjä tutkittaessa täpläkuvaus antaa pinnan kallistumakulman eli amplitudin ensimmäisen derivaatan pinnan suhteen. Hologrammista saadaan amplitudijakautuma (siirrosjakautuma).

Kuvassa 4 on ohuen levyn erään värähdysmuodon kallistumaviivat sekä kallistumajakautuma levyn keskiosassa. Kallistumakäyrä on mitattu kahdella eri täläkuvien analysointimenetelmällä [3].



Kuva 4. Ohuen levyn ensimmäisen ominaisvärähdysmuodon kallistumaviivat ja mitattu kallistumakäyrä pitkin levyn keskiosaa.

5 SOVELLUTUSMAHDOLLISUUKSISTA

Edellä esiteltyjä menetelmiä voidaan soveltaa monenlaisten käytännön ongelmien ratkaisemiseksi. Seuraavassa luettelomaisesti eräitä mahdollisia sovellutuksia: ominaisvärähdysmuotojen selvittäminen, värähdyksistä aiheutuvien jännitysten määrittäminen, pyörivien kappaleiden värähtelyjen selvittäminen, aaltojen eteneminen (iskut jne) sekä rakenteissa esiintyvien vikojen ja heikkouksien paljastaminen.

Holografisen interferometriassa mitattavat amplitudit ovat $\lambda/4 \rightarrow 10\lambda$. Modulointitekniikalla on mahdollista mitata amplitudeja, joiden suuruus on 0.01λ |4|. Täpläkuvauksessa herkkyyttä voidaan säätää muutmalla linssin aukkoa. Mittausalueeksi voidaan määritellä: $2\lambda \rightarrow 0.1$ mm.

6 KIRJALLISUUSLUETTELO

|1| Karppinen, V. and Varhimo, V., On the applicability of holographic interferometry and speckle photography to displacement measurements, Publ. Univ. of Joensuu , Series B_1.

|2| Vest, C.,M., Holographic interferometry, John Wiley and Son, New York, 1979.

|3| Karppinen, V., Virtual fringe analysis method in time-average speckle photography, Opt. Eng. Jan/Feb,1982.

|4| Ostrovsky, Yu.,I., Butusov, M.,M., Ostrovskaya, G.,V., Interferometry by holography, Springler-Verlag, Berlin, 1980.

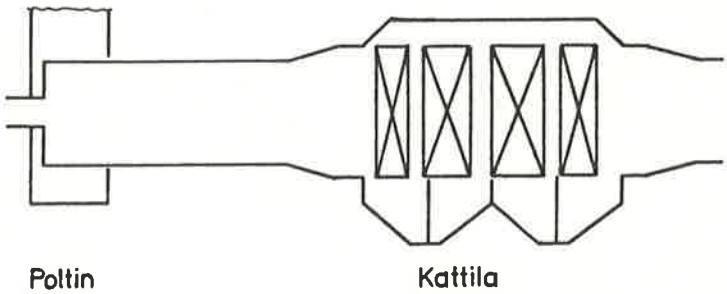
HÖYRYKATTILAN TULIPESÄN VÄRÄHTELYISTÄ

Tapani Nyman
A. Ahlström Oy

1 LÄHTÖTILANNE

Tämä tapaus koskee erään kupari- ja nikkelisulaton jälkipoltto-kattiloita.

Kupari ja nikkeli jalostetaan samantapaisilla rinnakkaisilla tuotantolinjoilla. Kummassakin prosessissa syntyneet palavat kaasut poltetaan maakaasua apuna käyttäen omissa, täysin samanlaisissa kattiloissa ennen joutumistaan savupiippuun. Kattilat kehittävät höyryä miltei yksinomaan konvektioputkistojen avulla.



Kuva 1. Kattilan rakenne

Laitoksen käyntiinajovaiheessa todettiin, että kummassakin kattilassa esiintyi suurehkolla tuotannolla voimakasta värähtelyä ja matalataajuista melua. Samalla myös poltin toisinaan sammui ja putkistossa esiintyi joitakin hitsisaumojen murtumia.

Värähtelyä esiintyi kattilan lähiympäristössä laajalti niin, että sen lähtökohtaa ei voitu paikallistaa.

Sitä ei saatu millään ajoteknillisillä keinoilla vaimenemaan muutoin kuin kuormitusta vähentämällä. Värähtelyn aiheuttajiksi epäiltiin joko poltinta tai putkiston aiheuttamaa pyörteilyä.

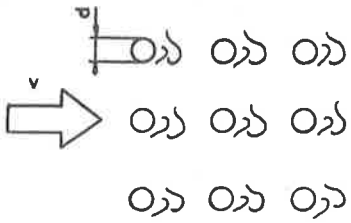
Nikkelilinjan kattilan konvektioputkistojen väliin asennettiin virtauksen suuntaisia levyjä tarkoituksena vaimentaa värähtelyä, mikäli se aiheutui putkien Karmann-pyörteistä. Toimenpiteellä ei ollut selvää vaikutusta. (Kuva 10)

Asian selvittämiseksi käynnistettiin värähtelytutkimus. Ilmiön aikaansaamiseksi tarvittavat tuotanto-olosuhteet esiintyivät harvoin ja epäsäännöllisesti. Minkäänlaisiin muutoksiin ja kokeiluihin kattilan käytön aikana ei ollut mahdollisuuksia.

Aluksi pyrittiin lyhyillä teoreettisilla tarkasteluilla selvittämään mistä voisi olla kysymys.

2 PYÖRTEIDEN AIHEUTTAMA POIKITTAISVÄRÄHTELY PUTKISTOSSA

Virtaavan kaasun aiheuttama pyörteily putkien jättöpuolella saa aikaan virtauksen poikkisuuntaisen herätteen joka saa kaasun ja putkiston värähtelemään.



Kuva 2. Kaasun pyörteily

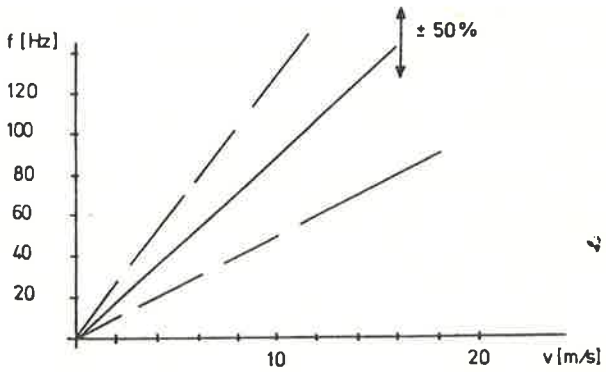
2.1 Värähtelyn taajuus

$$f = F \cdot \frac{v}{D}$$

f = taajuus (Hz)
F = Strouhalin luku
v = kaasun nopeus (m/s)
D = putken halkaisija (m)

Strouhalin luku riippuu putkien jaosta ja on luokkaa 0,2...0,3.

Taajuus virausnopeuden funktiona, kun putken halkaisija on 31,8 mm:



Kuva 3. Taajuus virtausnopeuden funktiona

Värähtelytilanteessa virtausnopeus kattilassa on n. 10 m/s, joten pyörteilytaajuus on luokkaa 80...100 Hz.

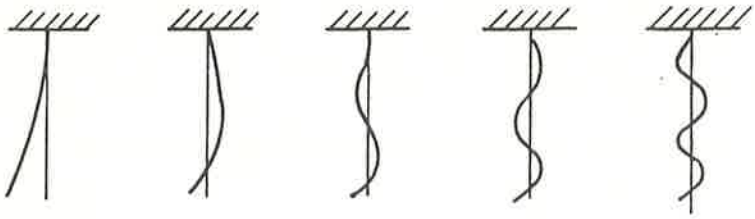
3 HÖYRYPUTKIEN TAIVUTUSVÄRÄHTELYN OMINAISTAAJUUDET

Putket on hitsattu yläpäästään jakotukkiin ja roikkuvat vapaasti.

$$f = \frac{C_o}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\mu l}}$$

E = kimmomoduli
I = neliömomentti
μ = massa/pituus
l = pituus
C_o = kerroin joka riippuu kiinnitystavasta ja värähtelymuodosta

Ominaistaajuudet putken arvoilla:
d = 31,8 mm, s = 3,6 mm, l = 5,1 m, täytetty vedellä



f_1 = 1 Hz f_2 = 6,4Hz f_3 = 18 Hz f_4 = 35Hz f_5 = 58 Hz (± 20%)
(C_o = 3,52) (C_o = 22,2) (C_o = 61,7) (C_o = 121) (C_o = 200)

Kuva 4. Putkien värähtelymuodot

Pyörteilytaajuus on selvästi korkeampi kuin putkien todennäköisimmät ominaistaajuudet, joten mitään resonanssivärähtelyä putkissa tuskin esiintyy, joka voisi aiheuttaa voimakasta väsytyskuormitusta.

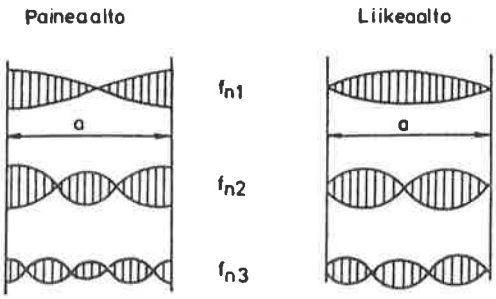
4 KAASUN SEISOVIEN AALTOJEN TAAJUUDET KATTILASSA

$$f_n = \frac{C}{2a} \cdot n$$

$$C = \sqrt{g \cdot R \cdot \varkappa \cdot T}$$

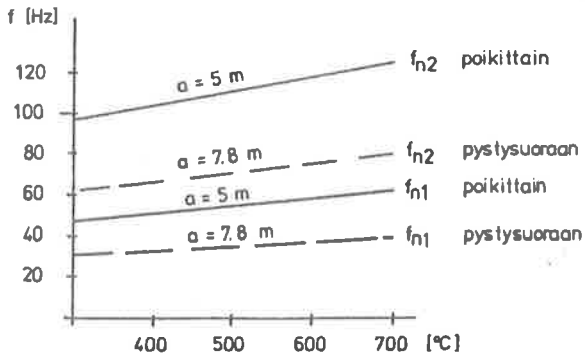
(n = 1, 2, 3...)
a = kattilan leveys (m)
c = äänennopeus m/s
g = 9,81 m/s^2
R = kaasuvakio
$\varkappa$ = polytrooppivakio
T = lämpötila (K)

Nyrkkisääntö: $C = 20\sqrt{T}$



Kuva 5. Seisovat aallot

Seisovan aallon taajuus lämpötilan funktiona.



Kuva 6. Seisovan aallon taajuus lämpötilan funktiona

5 VÄRÄHTELYMITTAUKSET

Kattilan, kaasukanavan ja poltinkanavan alueella suoritettiin painevärähtelymittauksia sellaisista kohdista, joista oli mahdollista.

Lisäksi mitattiin kattilan seinämien värähtelyä kiihtyvyysanturilla eri paikoista.

Tulokset käsiteltiin taajuusanalysaattorilla.

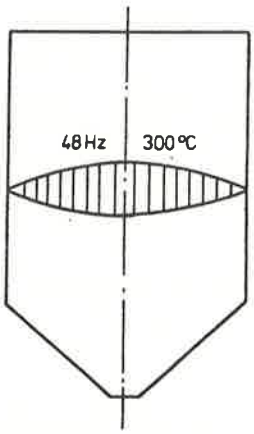
Mittaukset osoittavat, että nikkelilinjan kattilassa, jossa oli vaimennuslevyt, voimakkain värähtely oli taajuudeltaan 46 Hz ja kuparilinjan kattilassa 48 Hz.

Molemmissa tapauksissa tulkittiin, että kyseessä on kattilan poikittaissuuntainen seisova 1-kertaluvun aalto.

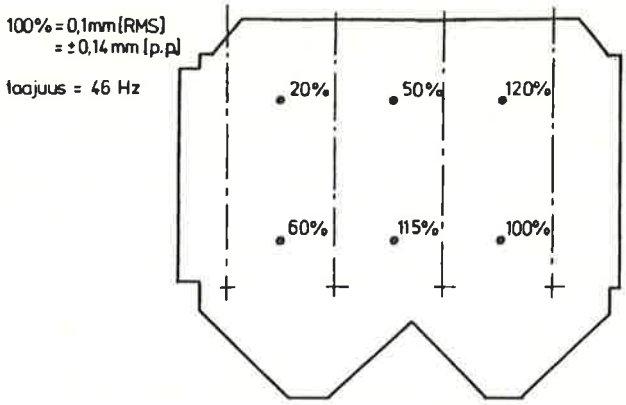
Polttimen ja kaasukanavan alueelta ei tätä värähtelyä löytynyt lainkaan.

Nikkelilinjan kattilassa värähtelyn voimakkuus oli selvästi pienempi, joka ainakin osaksi johtui vaimennuslevyistä.

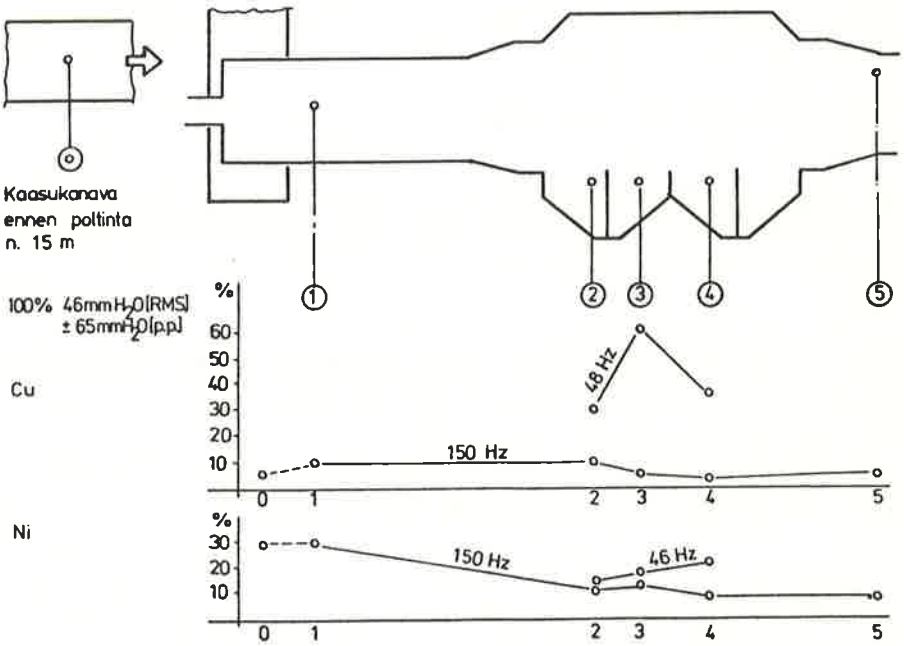
Taajuusanalyysi paljasti myös 150 Hz:n komponentin, joka polttimelta edettäessä vaimeni, eikä todennäköisesti ollut se etsitty värähtely.



Kuva 7. Seisova poikittaisaalto



Kuva 8. Ni-kattilan seinän värähtely



Kuva 9. Kaasun värähtely

6 TOIMENPITEET

Ilmiön lopputulos oli selvä, mutta alkuperäistä aiheuttajaa ei osattu luotettavasti mittauksilla tunnistaa.

Koska kattilan pohjassa on tuhkasuppilot väliseinineen tasaisin välimatkoin virtauksen etenemissuunnassa, syntyi olettamus, että kaasun ekspansio näitten suppiloiden ja kuristusseinämien kohdalla aiheuttaa voimakasta jaksollista pyörteilyä. Se saattaa olla syynä värähtelyyn.

Varmuuden vuoksi tehtiin asian ratkaisemiseksi kaksi toimenpidettä, ensiksi kuparilinjan kattilalla.

6.1 Värähtelyn vaimentaminen

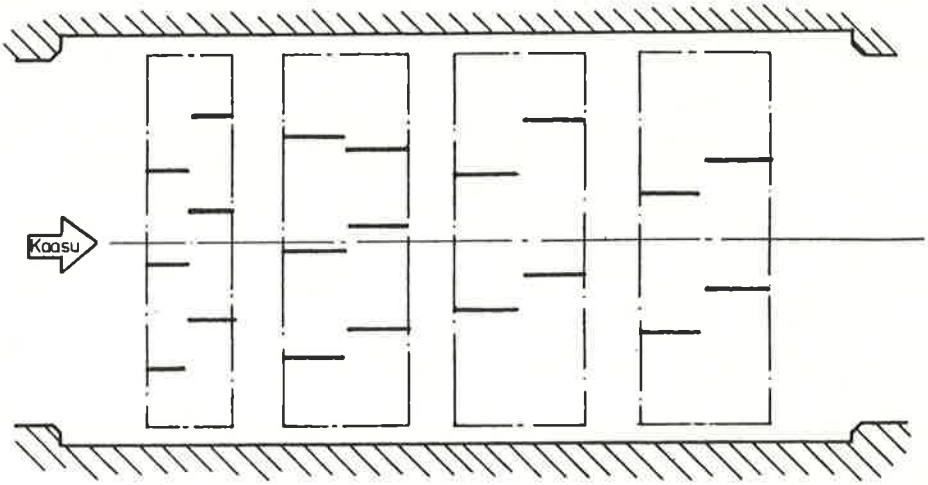
Koska kysymyksessä oli 1-kertaluvun seisova-aalto, jossa värähtelyn liikeamplitudin maksimi on kattilan keskellä, sijoitettiin vaimennuslevyt kattilan keskiosaan, hiukan epäsymmetrisesti.

6.2 Oletetun aiheuttajan poisto

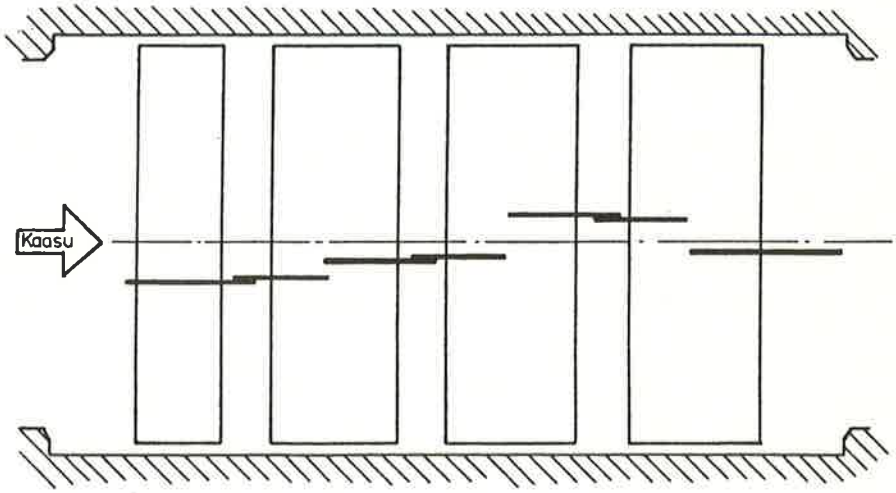
Tuhkasuppilot peitettiin suoralla levyllä. Tämä oli mahdollista koska koeajoissa oli osoittautunut, että tuhka voidaan poistaa muilla keinoilla paremmin.

Näiden toimenpiteiden jälkeen värähtely hävisi ja toiseenkin kattilaan päätettiin tehdä samanlaiset muutokset.

Ongelma poistui mutta epäselväksi jäi, mikä oli lopullinen syy ja kumpi toimenpiteistä oli ratkaiseva.



Kuva 10. Vaimennuslevyjen sijoitus ennen mittauksia (Ni-linja)



Kuva 11. Vaimennuslevyjen sijoitus mittausten jälkeen (Cu-linja)

7 KIRJALLISUUTTA

(1) Y.N. Chen:
Ursache und Vermeidung rauchgasseitiger Schwingungserscheinungen in Kesselanlagen infolge Berenngasdrall-Instabilität und Karman-Wirbelstrassen, Mitteilungen der UGB 51, Heft 2 April 1971.

(2) B.F. Ridal:
Experience of resonant vibrations on boiler plant, Journal of the instute of fuel, May 1971.

(3) I.D. Rogers et al:
Vibration prevention in boiler banks of industrial boilers, American Power Conference, 1977.

RAKENTEIDEN MONITAVOITTEINEN OPTIMOINTI

TkL Juhani Koski
Tampereen teknillinen korkeakoulu
Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Matemaattinen optimointiteoria on kahden viimeksi kuluneen vuosikymmenen aikana muodostunut tärkeäksi apuneuvoksi erilaisissa teknillisissä suunnittelutehtävissä. Tavallisesti on tällöin minimoitava tai maksimoitava jokin suunnittelijan asettama kohdefunktio siten, että ongelman rajoitusehdot toteutuvat. Tällä tavoin asetetun tehtävän ratkaisua on sitten käytetty suunnitteluprosessissa ohjeellisena tavoitteena lopullisen valinnan usein kohdistuessa johonkin optimikohdan lähellä olevaan pisteeseen. Kyseisen lähestymistavan puutteina on pidetty yhden järjestelmän hyvyyttä mittaavan kriteerin sekä epäyhtälörajoituksiin sisältyvien rajojen täsmälliseen määräämiseen liittyviä vaikeuksia. Edelleen voidaan yksitavoitteisen eli skalaarioptimoinnin puutteeksi katsoa sen vähäinen jousto, onhan ratkaisu lukkoonlyöty samalla kun optimointitehtävä on muodostettu. Herkkyystarkasteluja suorittamalla on mahdollista jossain määrin saada apua näihin ongelmiin, mutta tällöin tarkastelut yleensä rajoittuvat vain optimikohdan välittömään läheisyyteen.

Moniin käytännön suunnittelutehtäviin liittyy luonnostaan useita keskenään ristiriitaisia ja yhteismitattomia tavoitteita, jotka kaikki suunnittelijan tulisi ratkaisua etsiessään ottaa huomioon. Eräs verraten yleinen tapa käsitellä tällaista ongelmaa on muodostaa skalaariarvoinen kohdefunktio kriteerien painotettuna summana ja sen jälkeen soveltaa yksitavoitteisen optimoinnin ratkaisumenetelmiä. Tämän lähestymistavan huonona puolena voidaan pitää sitä, että se ei-konveksissa tapauksessa saattaa hukata suurenkin joukon hyviä ratkaisuehdokkaita. Lisäksi osoittautuu painokertoimien valinta, joka on keskeinen osa päätöksentekoa tässä menetelmässä, sangen mutkikkaaksi osatehtäväksi. Saatu optimiratkaisu voi nimittäin

olla hyvinkin herkkä painokertoimien suhteen. Erään varsin lupaavan mahdollisuuden tämän tapaisten useita kriteereitä sisältävien suunnitteluongelmien systemaattiseen käsittelyyn näyttäisi tarjoavan monitavoitteinen optimointi, jossa aihetta tarkastellaan aivan omista käsitteistä ja näkökulmista käsin yrittämättäkään heti palauttaa tehtävää yksitavoitteiseksi.

Vaikka monitavoitteinen eli vektorioptimointi juontaakin alkunsa jo vuodelta 1896 [1], laajempi kiinnostus tähän aiheeseen lähinnä optimointiteorian, operaatiotutkimuksen ja säätöteorian alueilla heräsi vasta kuusikymmentäluvun loppupuolella. Seuraavan vuosikymmenen aikana onkin aihetta sitten tutkittu voimaperäisesti useimpien julkaisujen käsitellessä päätöksentekoteoriaa yleisesti soveltamatta sitä varsinaisesti mihinkään erityisongelmaan [2]. Myös rakenteiden mekaniikan alueella on monitavoitteista optimointia jonkin verran käsitelty [3]-[13], mutta saatuja tuloksia voitanee pitää vasta alustavina lähestymistapaan sisältyvien mahdollisuuksien vielä odotellessa kokonaisvaltaista hyödyntämistään. Tässä kirjoituksessa on tarkoitus lyhyesti esittää vektorioptimoinnin peruskäsitteet sekä esimerkin avulla valottaa teorian soveltamismahdollisuuksia.

2 MONITAVOITTEINEN ONGELMA JA PARETO-OPTIMAALISUUS

Aluksi muodostetaan monitavoitteinen optimointiongelma ja esitetään tähän liittyvä optimaalisuuskäsite. Tarkastellaan minimointitehtävää

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

missä $\mathbf{f} : \Omega \to R^m$ on vektoriarvoinen kohdefunktio muotoa

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\, f_1(\mathbf{x}) \;\; f_2(\mathbf{x}) \ldots f_m(\mathbf{x}) \,]^T \tag{2}$$

jonka komponentit $f_i : \Omega \to R$ ovat kriteerejä. Muuttuja $\mathbf{x}$ kuuluu käypään joukkoon $\Omega \subset R^n$, joka määritellään yhtälö- ja epäyhtälörajoitusten avulla seuraavasti:

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \,,\; \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \} \tag{3}$$

Muodollisesti eroaa asetettu optimointiongelma (1) vastaavasta yksikriteerisestä tehtävästä siis vain vektoriarvoisen kohdefunktionsa puolesta.

Yleensä ei ole olemassa sellaista pistettä **x**, joka antaisi samanaikaisesti optimin kaikille m:lle kriteerille, joten skalaariongelmille käytetty optimaalisuuskäsite on tässä yhteydessä korvattava uudella. Monitavoitteisen optimointitehtävän ratkaisemisen tulisikin perustua Pareto-optimaalisuuden käsitteeseen.

Määritelmä. Vektoria $\mathbf{x}^* \in \Omega$ kutsutaan Pareto-optimaaliseksi ongelmalle (1) jos ja vain jos

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \text{ ja } \mathbf{x} \in \Omega \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$$

Sanallisesti ilmaistuna vektori $\mathbf{x}^*$ on Pareto-optimaalinen, jos ei ole olemassa sellaista käypää vektoria **x**, joka parantaisi jonkin kriteerin arvoa huonontamatta samalla vähintään yhden muun kriteerin arvoa. Skalaarioptimoinnissa on yleensä yksi optimiratkaisu luonteenomainen kullekin tehtävälle, kun sitävastoin Pareto-optimien joukko on tavallisesti ratkaisuna monitavoitteiselle ongelmalle.

Vaikka tehtävää (1) voidaankin pitää matemaattisesti ratkaistuna, kun Pareto-optimit on määritetty, jää suunnittelijan kannalta tärkeän lopullisen valinnan suorittaminen vielä auki. Tämä prosessi vaatiikin Pareto-optimien keskinäisiä paremmuusvertailuja, joihin tarvitaan sellaista lisätietoa, mitä alkuperäinen tehtävä (1) ei sisällä. Juuri tämä seikka tekee monitavoitteisen optimoinnin niin joustavaksi lähestymistavaksi käytännön tarpeita ajatellen: antaahan se suunnittelijalle verraten laajat mahdollisuudet osallistua päätöksentekoon vielä senkin jälkeen, kun optimointiongelman matemaattinen malli on muodostettu.

3 SOVELLUTUSESIMERKKI

Lujuusopillisissa suunnittelutehtävissä on rakenteen paino verraten usein käytetty optimaalisuuskriteeri jännitysten ja siirtymien ollessa yleensä rajoitettuja. Kyseisen tehtävänasettelun luonnollinen laajennus on sellainen, jossa rakenteen toiminnan kannalta tärkeimmät

siirtymät tuodaan vektorikohdefunktioon painon rinnalle. Tällöin siis tarkastellaan ongelmaa

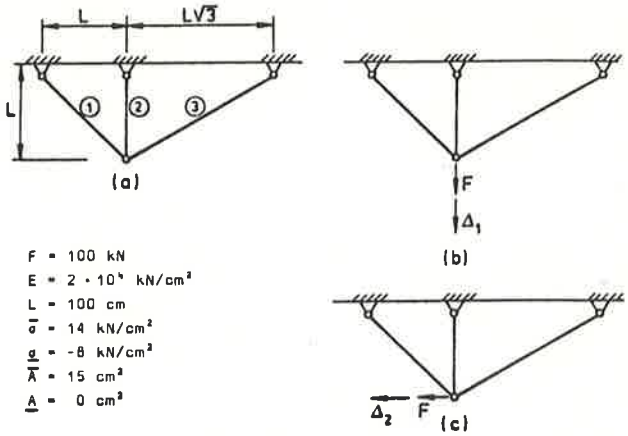
$$\min_{x \in \Omega} [W \; \Delta_1 \; \Delta_2 \; \ldots \; \Delta_{m-1}]^T \tag{4}$$

missä W on rakenteen paino ja loput komponentit Δ_i, $i = 1,2,\ldots,m-1$, ovat siirtymäkriteereitä. Sovellutusesimerkiksi näin muodostetusta tehtävästä on valittu kolmisauvainen hyperstaattinen tasoristikko, joka on esitetty kuvassa 1.

Kuormitustapauksia on kaksi, joihin kumpaankin liittyy oma siirtymäkriteerinsä. Optimointiongelma on kolmikriteerinen: ensimmäinen on rakenteen paino, toinen on kuormitetun solmun pystysiirtymä kuormitustapauksessa 1 ja kolmas on kuormitetun solmun vaakasiirtymä kuormitustapauksessa 2. Suunnittelumuuttujina ovat sauvojen poikkipinta-alat A_1, A_2 ja A_3, joille samoin kuin jännityksille on asetettu ala- ja ylärajat. Nämä kuten muutkin tarvittavat lähtötiedot on annettu kuvassa 1. Siirtymärajoituksia ei ole, joten kuuden muuttujarajoituksen lisäksi esiintyy optimointitehtävässä kaksitoista epäyhtälörajoitusta: kaksi jännitysrajoitusta jokaiselle sauvalle kummassakin kuormitustapauksessa. Tehtävän muodostamisessa on käytetty siirtymämenetelmää siten, että solmusiirtymät on otettu optimointimuuttujiksi sauvojen poikkipinta-alojen lisäksi. Näin ollen sisältyy ongelmaan vielä neljä yhtälörajoitusta, nimittäin tasapainoyhtälöt kummassakin kuormitustapauksessa.

Tehtävä on ratkaistu numeerisesti rajoitusmenetelmän avulla [10] ja muutamia Pareto-optimaalisia pisteitä, joiden pitäisi kattaa koko ratkaisujoukko verraten hyvin, on esitetty taulukossa 1. Minimaalisiksi ratkaisuiksi kutsutaan Pareto-optimien kuvapisteitä kriteeriavaruudessa. Tässä kolmitavoitteisessa esimerkissä on minimaalinen pinta mahdollista esittää graafisesti kuvan 3 osoittamalla tavalla. Siinä on painon tilalla käytetty ristikon tilavuutta, kuten on tavallista tehtävissä, missä kaikki sauvat ovat samaa materiaalia.

Kuvassa 2 on esitetty minimaalisen pinnan nurkkapisteitä vastaavat Pareto-optimaaliset rakenteet. Tuloksista nähdään, että molemmat siirtymäkriteerit saavat minimiarvonsa samanaikaisesti pisteessä, missä pinta-alamuuttujat ovat ylärajoillaan. Näin ei tilanne kuitenkaan yleisesti ole, vaan myös siirtymäkriteerit voivat olla kes-

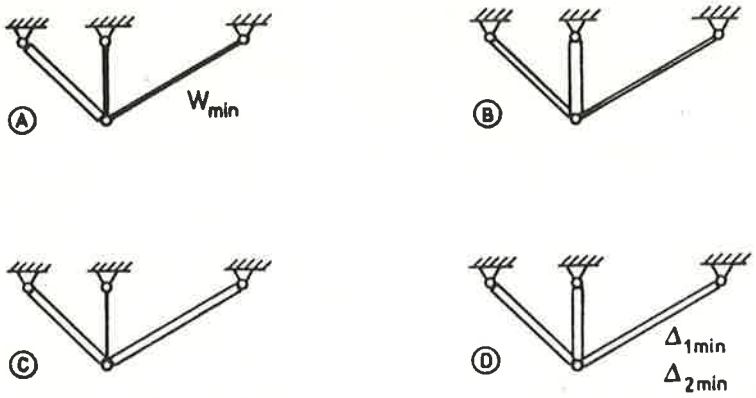


$F = 100$ kN
$E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm²
$L = 100$ cm
$\bar{\sigma} = 14$ kN/cm²
$\underline{\sigma} = -8$ kN/cm²
$\bar{A} = 15$ cm²
$\underline{A} = 0$ cm²

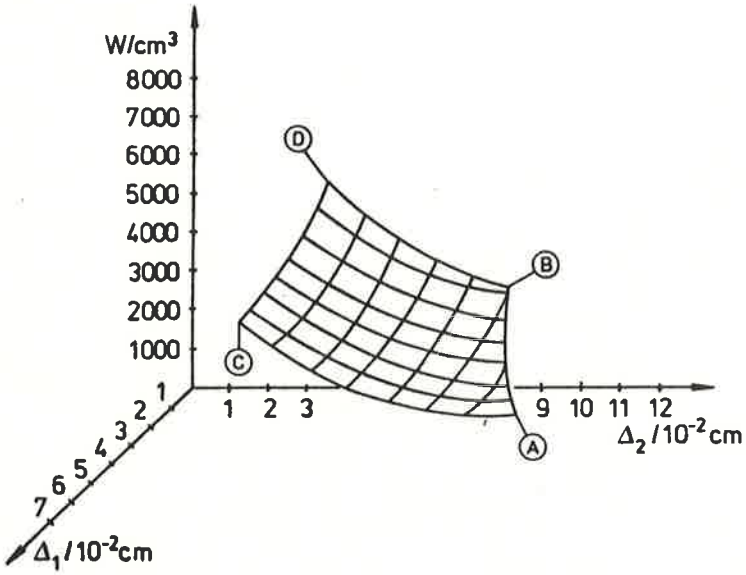
Kuva 1. Ristikkoesimerkki:
(a) rakenne,
(b) kuormitustapaus 1 sekä siihen liittyvä siirtymäkriteeri Δ_1,
(c) kuormitustapaus 2 sekä siihen liittyvä siirtymäkriteeri Δ_2.

Taulukko 1. Pareto-optimeja sekä vastaavia minimaalisia ratkaisuja esimerkkiristikolle.

A_1 cm²	A_2 cm²	A_3 cm²	W cm³	Δ_1 10^{-2}cm	Δ_2 10^{-2}cm	
9,966	4,400	4,272	2704	7,000	11,550	W_{min}
10,647	6,104	4,130	2942	5,657	11,056	
11,335	10,865	4,282	3546	3,643	8,999	
11,466	14,874	4,511	4011	2,800	9,500	
7,649	3,491	8,553	3141	7,000	8,597	
7,932	5,162	8,317	3301	5,657	8,597	
8,608	10,024	7,737	3767	3,643	8,597	
9,086	14,139	7,411	4181	2,800	8,540	
9,525	2,452	11,411	3875	7,000	6,629	
9,845	4,110	11,151	4033	5,657	6,629	
10,635	8,937	10,490	4496	3,643	6,629	
11,259	14,181	9,963	5003	2,633	6,620	
14,025	0,589	15,000	5042	7,000	4,907	
15,000	3,197	15,000	5441	5,006	4,660	Δ_{1min}
15,000	15,000	15,000	6621	2,294	4,656	Δ_{2min}



Kuva 2. Minimaalisen pinnan nurkkapisteitä vastaavat Pareto-optimaaliset ristikot. Sauvojen pituus- ja poikittaissuunnissa on käytetty eri mittakaavoja.



Kuva 3. Esimerkkiristikon minimaalinen pinta kriteeriavaruudessa.

kenään ristiriitaisia. Saatuja tuloksia voidaan suunnitteluprosessissa hyödyntää siten, että lopullista rakennevaihtoehtoa valittaessa koko käyvän alueen sijasta liikutaan vain minimaalisella pinnalla.

4 YLEISIÄ NÄKÖKOHTIA

Vektorioptimointia voidaan pitää skalaarioptimoinnin matemaattisena yleistyksenä, joka käytännön suunnittelijan näkökulmasta katsottuna tarjoaa systemaattisen menetelmän erilaisten, usein keskenään ristiriitaisten, suunnitteluvaatimusten huomioon ottamiseen. Pareto-optimaalisuuden käsite on luonnollinen perusta tehtävän ratkaisemiselle. Näin ollen voidaan Pareto-optimeja generoivan modulin katsoa olevan olennainen osa jokaista monitavoitteista suunnittelujärjestelmää. Ratkaisujen suuresta lukumäärästä johtuen on vektorioptimointitehtävän numeerinen ratkaiseminen jo muutaman kriteerin tapauksessa melko työlästä. Laskentaan liittyvien vaikeuksien voisi kuitenkin arvella lähitulevaisuudessa pienenevän tietokonetekniikassa tapahtuvan kehityksen ansiosta. Pareto-optimien määrittämisessä on mahdollista käyttää apuna skalaarioptimointia varten kehitettyjä numeerisia menetelmiä. Usein sovelletaankin sellaista ratkaisutyyliä, jossa alkuperäinen vektorioptimointitehtävä palautetaan joukoksi yksitavoitteisia ongelmia.

Tulosten esittäminen muodostuu myös helposti ongelmalliseksi Pareto-optimaalisten pisteiden runsauden vuoksi. Usein onkin tarkoituksenmukaista rajoittua tarkastelemaan pelkästään jotakin sopivasti valittua ratkaisujen osajoukkoa. Erään mahdollisuuden tämän tapaiseen lähestymistapaan tarjoavat erilaiset interaktiiviset menetelmät, joissa päätöksentekijä vaiheittain osallistuu suunnitteluprosessiin sen edetessä Pareto-optimista toiseen. Vektorioptimoinnin kytkeminen parhaillaan voimakkaasti kehittyviin tietokoneavusteisiin suunnittelumenetelmiin tuntuukin aivan erityisen lupaavalta lähitulevaisuuden tavoitteelta, joskin on muistettava, että monitavoitteinen päätöksentekoteoria on monilta osiltaan vasta muodostumassa.

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Pareto, V., Cours d'economie politique. F. Rouge, Lausanne 1896.

[2] Hwang, C.L. & Masud, A.S.M., Multiple objective decision making, methods and applications. Lecture Notes in Econom. and Math. Systems 164 (1979). 351 s.

[3] Stadler, W., Preference optimality and applications of Pareto-optimality. Multicriteria Decision Making, CISM Courses and Lectures No. 211. Ed. G. Leitmann & A. Marzollo. Springer-Verlag, Wien - New York 1975.

[4] Stadler, W., Natural structural shapes of shallow arches. J. Appl. Mech. Trans. ASME 44 (1977) 2, s. 291 - 298.

[5] Stadler, W., Natural structural shapes, the static case. Q.J. Mech. Appl. Math. 31 (1978) 2, s. 169 - 217.

[6] Leitmann, G., Some problems of scalar and vector-valued optimization in linear viscoelasticity. J. Optim. Theory Appl. 23 (1977) 1, s. 93 - 99.

[7] Baier, H., Über Algorithmen zur Ermittlung und Charakterisierung Pareto-optimaler Lösungen bei Entwurfsaufgaben elastischer Tragwerke. ZAMM 57 (1977), T318 - T320.

[8] Baier, H., Mathematische Programmierung zur Optimierung von Tragwerken insbesondere bei mehrfachen Zielen. Dissertation D17, Darmstadt 1978. 203 s.

[9] Koski, J., Truss optimization with vector criterion. Tampere 1979. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Julkaisuja 6. 52 s.

[10] Koski, J., Truss optimization with vector criterion, examples. Tampere 1980. Tampereen teknillinen korkeakoulu, konetekniikan osasto, teknillinen mekaniikka, Raportti 7. 48 s.

[11] Carmichael, D.G., Computation of Pareto optima in structural

design. Int. J. Numer. Methods Eng. 15 (1980), s. 925 - 929.

[12] Osyczka, A., An approach to multicriterion optimization for structural design. Proceedings of the International Symposium on Optimum Structural Design. The 11th ONR Naval Structural Mechanics Symposium, Tucson, Arizona, October 19 - 22. 1981.

[13] Koski, J., Multicriterion optimization in structural design. Proceedings of the International Symposium on Optimum Structural Design. The 11th ONR Naval Structural Mechanics Symposium, Tucson, Arizona, October 19 - 22, 1981.

KÄYRÄN JA POIKKILEIKKAUKSELTAAN MUUTTUVAN PALKIN LIIKEYHTÄLÖT

DI *Tapio Salmi*[1]
Tampereen teknillinen korkeakoulu
Konetekniikan osasto

1. JOHDANTO

Käyrien palkkien käyttöalue rakenne-elementtinä on laaja. Tasossa kaarevia palkkeja käytetään kaarirakenteina ja kaarevien siltojen kannatinpalkkeina sekä ohuiden kuorirakenteiden jäykistyspalkkeina. Avaruudessa käyrän palkin sovellutuksina ovat esimerkiksi jalankulkusiltojen, monoraiteiden ja kierreportaiden kannatinpalkit sekä kierrejousi. Pyrkimyksestä mahdollisimman keveisiin rakenteisiin sekä esteettisistä ja kostruktiivisista syistä palkit tehdään usein poikkileikkaukseltaan muuttuvaksi.

Käyrän palkin teorian uranuurtajia olivat *de Saint-Venant* (1843) ja *Kirchhoff* (1858) sekä *Clebsh* (1862) (*Szabó* [1]). Teorian tavallisimmin käsitelty erityistapaus on tasossa kaareva palkki, jolla ei ole alkukierevyyttä [2] - [10]. Tärkeän sovellutusalueen käyrän palkin teorialle muodostaa esikierevä ulokepalkki, esimerkiksi roottorin lapa [11] - [14].

Avaruudessa käyrän palkin tasapainoyhtälöt pienille muodonmuutoksille, kun palkin referenssiviiva on venymätön, esittää *Love* [15], kun taas *Washizu* [16] ottaa huomioon referenssiviivan venymisen sekä leikkausmuodonmuutoksen. *Wempner* [17] esittää tasapainoyhtälöt, kun palkin poikkileikkauksen rotaatiot ovat "kohtuulliset" ja poikkipintapainuma otetaan huomioon. Käyrän palkin siirtymien ja voimasuureiden välistä duaalisuutta tarkastelevat *Tabanok* ja *Farsad* [18]. Artikkeleissa [19] - [22] muodostetaan käyrän palkin isoparametrisia elementtejä, jotka toimivat yhdessä paksun tai ohuen kuorielementin kanssa.

---

[1]Kirjoittaja haluaa esittää kiitokset apul. prof. Hannu Outiselle kirjoitusta koskeneista hyvistä neuvoista ja ohjeista.

Tässä esityksessä johdetaan avaruudessa käyrän ja poikkileikkaukseltaan muuttuvan hoikan palkin liikeyhtälöt, kun palkin siirtymät ovat pieniä. Kinemaattisessa mallissa otetaan huomioon palkin referenssiviivan venyminen sekä leikkausmuodonmuutokset. Palkin poikkipintapainumaa ei sen sijaan oteta huomioon. Hitausvoimia laskettaessa palkin rotaatiosta johtuvat hitausvoimat otetaan huomioon. Saatuja yleisiä yhtälöitä sovelletaan palkille, jonka poikkileikkauksella on kaksi symmetria-akselia. Lopuksi esitetään ruuviviivan muotoisen palkin tasapainoyhtälöt.

2. KÄYRÄN PALKIN TEORIAN PERUSOLETUKSET

Palkkia sanotaan *käyräksi*, jos palkin ollessa kuormittamaton, sen pituussuuntaiset säikeet ovat taso- tai avaruuskäyriä. Valitaan joku palkin säikeistä *referenssiviivaksi* ja leikataan palkki tätä viivaa vastaan kohtisuoralla tasolla. Tämän tason ja palkin materiaalialueen leikkauskuviota kutsutaan palkin *poikkileikkaukseksi*.

Käyrän palkin teoria perustetaan seuraavassa suoran palkin teoriasta hieman yleistettyihin hypoteeseihin, jotka voidaan jakaa neljään kohtaan:

1. Palkki on *hoikka*. Tämä oletus tarkoittaa sitä, että palkin poikkileikkausmitat oletetaan pieniksi verrattuna palkin kaarevuus- ja kierevyyssäteisiin.
2. Palkin pisteiden *siirtymät ovat pienet*. Tämä oletus mahdollistaa liikeyhtälöiden kirjoittamisen palkin alkuaseman perusteella.
3. Palkin poikkileikkauksen suuntaiset normaalijännitykset ovat niin pieniä muihin jännityksiin verrattuna, että niitä ei tarvitse ottaa huomioon.
4. Palkin pisteiden siirtymät tapahtuvat siten, että referenssiviiva venyy ja taipuu sekä kiertyy, mutta palkin poikkileikkaustason oletetaan siirtyvän jäykkänä tasona. Tästä seuraa, että palkin poikkileikkauksen suuntaiset liukumakomponentit ovat nollia. Leikkausmuodonmuutosten likimääräiseksi huomioon ottamiseksi poikkileikkaustasoon kuuluvien materiaalipisteiden oletetaan siirtyvän siten, että loppuasemassa nämä pisteet ovat tasossa, joka on vinossa referenssiviivaa vastaan.

Tässä esityksessä johdetaan käyrän palkin kinemaattiset yhtälöt, materiaaliyhtälöt ja liikeyhtälöt, jotka perustuvat edellä asetettuihin hypoteeseihin. Palkin materiaalin oletetaan olevan *homogeenista, lineaarisesti kimmoista* ja *isotrooppista.*

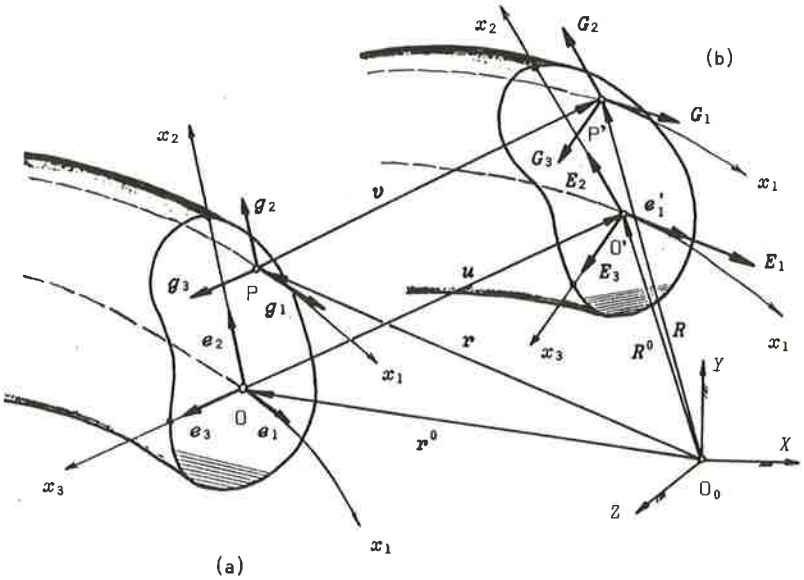
3. KINEMAATTISET YHTÄLÖT

Valitaan käyräviivainen koordinaatti x_1 pitkin palkin referenssiviivaa ja referenssiviivalle ortogonaaliset koordinaattisuorat x_2 ja x_3 siten, että nämä suunnat yhtyvät poikkileikkauksen *pääsuuntiin.* Liitetään näihin koordinaatteihin ortonormeerattu kantavektorijärjestelmä $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ kuvan 1 mukaisesti.

Kun vektorikolmikko $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ liikkuu vakionopeudella pitkin referenssiviivaa, se kääntyy edetessään. Tätä kääntymisvauhtia voidaan esittää vektorilla

$$\boldsymbol{\kappa} = (\boldsymbol{e}_{2,1} \cdot \boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}_{3,1} \cdot \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{e}_{1,1} \cdot \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_3 \qquad (1)$$

jolloin on merkitty $\partial(\cdot)/\partial x_i = (\cdot)_{,i}$, $(i = 1,2,3)$.



Kuva 1 Deformoitumattoman palkin poikkileikkaus (a) ja deformoituneen palkin poikkileikkaus (b).

Kun määritellään *palkin alkukaarevuudet* κ_2 ja κ_3 sekä *alkukierevyys* τ relaatioilla

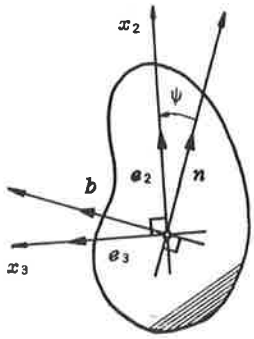
$$\kappa_2 \equiv \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_{1,1} = -\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_{2,1} \tag{2}$$

$$\kappa_3 \equiv \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_{1,1} = -\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_{3,1} \tag{3}$$

$$\tau \equiv \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_{2,1} = -\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_{3,1} \tag{4}$$

voidaan vektorikolmikon $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ kääntymisvauhti $\boldsymbol{\kappa}$ esittää muodossa

$$\boldsymbol{\kappa} = \tau\, \boldsymbol{e}_1 - \kappa_3\, \boldsymbol{e}_2 + \kappa_2\, \boldsymbol{e}_3 \tag{5}$$



Kuva 2 Oskuloivan koordinaatiston ja pääkoordinaatiston välinen yhteys

Merkitsemällä referenssiviivan oskuloivan koordinaatiston päänormaalin suuntaista ykkösvektoria $\boldsymbol{n}$, sivunormaalin suuntaista ykkösvektoria $\boldsymbol{b}$ ja tangentin suuntaista ykkösvektoria $\boldsymbol{t}$ saadaan kuvan 2 perusteella yhtälöt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \cos\psi\, \boldsymbol{n} + \sin\psi\, \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{e}_3 &= -\sin\psi\, \boldsymbol{n} + \cos\psi\, \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{6}$$

jossa ψ on vektoreiden $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{n}$ välinen terävä kulma.

Referenssiviivan kaarevuus k_1 ja *kierevyys* k_2 määritellään relaatioilla

$$\boldsymbol{t}_{,1} = k_1\, \boldsymbol{n} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{b}_{,1} = -k_2\, \boldsymbol{n} \tag{7}$$

Käyttämällä *Frenet*'n kaavoja päädytään palkin kaarevuuksien κ_2 ja κ_3 sekä kierevyyden τ ja referenssiviivan kaarevuuden k_1 ja kierevyyden k_2 ja kulman ψ välisiin yhteyksiin

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= k_1 \cos\psi \\ \kappa_3 &= -k_1 \sin\psi \\ \tau &= k_2 + \psi_{,1} \end{aligned} \tag{8}$$

Tuloksesta nähdään, että vaikka referenssiviiva olisi suora, jolloin sillä ei ole kierevyyttä eli $k_2 = 0$, niin palkilla voi olla kierevyys $\tau \neq 0$.

Merkitään palkin poikkileikkauksen pisteen P asemavektoria ennen palkin muodonmuutosta $\boldsymbol{r}$ ja muodonmuutoksen jälkeen $\boldsymbol{R}$ sekä referenssiviivan pisteiden vastaavia paikkavektoreita $\boldsymbol{r}^0$ ja $\boldsymbol{R}^0$ kuvan 1 mukaisesti. Pisteen P siirtymävektori

$$\boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r} \tag{9}$$

Referenssiviivan pisteiden siirtymävektori

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}(x_1,0,0) = \boldsymbol{R}^0 - \boldsymbol{r}^0 \tag{10}$$

Kuvan 1 perusteella voidaan vielä kirjoittaa

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^0 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{11}$$

Asetetaan deformoitumattoman poikkileikkauksen pisteeseen P ortogonaalinen vektorikolmikko $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$, jonka vektorit $\boldsymbol{g}_i$ (i=1,2,3) ovat koordinaattiviivojen x_i (i=1,2,3) tangenttien suuntaiset ja tällöin on voimassa

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{r}_{,i} \qquad (i=1,2,3) \tag{12}$$

Ottamalla huomioon, että $\boldsymbol{e}_{i,1} = \boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{e}_i$ eli

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{1,1} &= \boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{e}_1 = \kappa_2\,\boldsymbol{e}_2 + \kappa_3\,\boldsymbol{e}_3\\
\boldsymbol{e}_{2,1} &= \boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{e}_2 = -\kappa_2\,\boldsymbol{e}_1 + \tau\,\boldsymbol{e}_3\\
\boldsymbol{e}_{3,1} &= \boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{e}_3 = -\kappa_3\,\boldsymbol{e}_1 - \tau\,\boldsymbol{e}_2
\end{aligned} \tag{13}$$

ja että $\boldsymbol{e}_{i,2} = \boldsymbol{e}_{i,3} = 0$ sekä $\boldsymbol{r}^0_{,i} = \boldsymbol{e}_i$ saadaan yhtälöistä *(12)* ja *(13)* tulokset

$$\boldsymbol{g}_1 = (1 - x_2\kappa_2 - x_3\kappa_3)\,\boldsymbol{e}_1 - x_3\tau\,\boldsymbol{e}_2 + x_2\tau\,\boldsymbol{e}_3 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{e}_2 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{e}_3 \tag{16}$$

On huomattava, että $\boldsymbol{g}_1$ ei ole ykkösvektori, ja jos $\tau \neq 0$, se ei ole kohtisuorassa poikkileikkausta vastaan!

Kun palkki deformoituu, referenssiviivan tangentin suuntainen ykkösvektori $\boldsymbol{e}_1$ siirtyy deformoituneen palkin referenssiviivan tangentin suuntaiseksi ykkösvektoriksi $\boldsymbol{e}_1'$. Ajatellaan, että vektorikolmikko $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ siirtyy jäykkänä palkin deformoituessa siten, että deformoituneessa tilassa sitä vastaa ortonormeerattu vektori-

kolmikko e_1', e_2', e_3'. Merkitään vektorikolmikon e_1, e_2, e_3 tässä siirtymässä kokemaa jäykän kappaleen rotaatiota vektorilla

$$\theta = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3$$

Tällöin ovat voimassa yhteydet $e_i' = e_i + \theta \times e_i$ eli

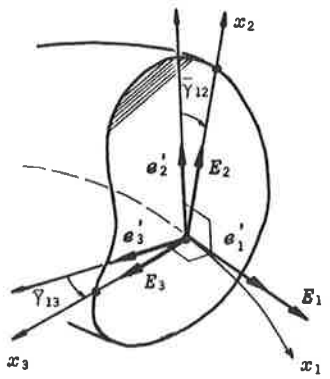
$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + \theta \times e_1 = e_1 + \theta_3 e_2 - \theta_2 e_3 \\ e_2' &= e_2 + \theta \times e_2 = -\theta_3 e_1 + e_2 + \theta_1 e_3 \\ e_3' &= e_3 + \theta \times e_3 = \theta_2 e_1 - \theta_1 e_2 + e_3 \end{aligned} \qquad (17)$$

Deformoituneessa tilassa poikkileikkauksen kokonaisrotaatio φ koostuu jäykän kappaleen rotaatiosta θ sekä leikkausmuodonmuutoksen huomioonottavasta rotaatiosta. Tätä liukumisesta johtuvaa osuutta (kuva 3) kokonaisrotaatioon merkitään

$$\gamma = \bar{\gamma}_{13} e_2' - \bar{\gamma}_{12} e_3' \approx \bar{\gamma}_{13} e_2 - \bar{\gamma}_{12} e_3 \qquad (18)$$

Kun rajoitutaan *pieniin rotaatioihin*, niin kokonaisrotaation lausekkeeksi saadaan

$$\varphi = \theta + \gamma \approx \theta_1 e_1 + (\theta_2 + \bar{\gamma}_{13}) e_2 + (\theta_3 - \bar{\gamma}_{12}) e_3 \qquad (19)$$



Kuva 3 Deformoituneen palkin referenssiviivan pisteeseen O' asetetut vektorikolmikot.

Asetetaan deformoituneen palkin referenssiviivan pisteeseen O' ortonormeeratun vektorikolmikon e_1', e_2', e_3' lisäksi vektorikolmikko E_1, E_2, E_3, siten, että E_1 on referenssiviivan tangentin suuntainen ja E_2 sekä E_3 ovat kääntyneen poikkileikkauksen tasossa. Vektorit E_2 ja E_3 asetetaan koordinaattiviivojen x_2 ja x_3 suuntaisiksi, joten ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, sillä hypoteesin 4 mukaan koordinaattiviivojen välinen kulma säilyy suorana.

Kun muodonmuutokset oletetaan pieniksi, niin referenssiviivan pisteiden muodonmuutoskomponentit ovat $\bar{\varepsilon}_{11}$ $2\bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\gamma}_{12}$ ja $2\bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\gamma}_{13}$. $\bar{\varepsilon}_{11}$ merkitsee referenssiviivan venymää.

Vektorit E_1 , E_2 ja E_3 voidaan tällöin kirjoittaa seuraavasti

$$E_1 = e_1' + \bar{\varepsilon}_{11}\, e_1' \tag{20}$$

$$E_2 = e_2' + \gamma \times e_2' = \bar{\gamma}_{12}\, e_1' + e_2' \tag{21}$$

$$E_3 = e_3' + \gamma \times e_3' = \bar{\gamma}_{13}\, e_1' + e_3' \tag{22}$$

Kiinnitetään deformoituneen palkin pisteeseen P', joka on alkutilan partikkelin P loppuasema vektorikolmikko G_1, G_2, G_3 (kuva 1) siten, että

$$G_i = R_{,i} \qquad (i=1,2,3) \tag{23}$$

Vektorit G_i ovat koordinaattiviivojen suuntaiset, mutta ne eivät ole ykkösvektoreita ja vain G_2 ja G_3 ovat keskenään ortogonaaliset.

Koordinaatisto x_1, x_2, x_3 valitaan partikkelikoordinaatistoksi, jolloin se ajatellaan kiinnitetyksi partikkeliin. Koordinaatisto kokee saman muodonmuutoksen kuin kappalekin. Tällöin pisteen P koordinaateilla x_i (i=1,2,3) on samat arvot deformaation jälkeenkin, vaikka partikkeli on siirtynyt uuteen asemaan P'. Käyräviivaisten koordinaatistojen x_1, x_2, x_3 alku- ja lopputilojen *metriikkatensorit* ovat

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j \qquad \& \qquad G_{ij} = G_i \cdot G_j \tag{24}$$

Määritellään *muodonmuutostensorin* komponentit relaatiolla (*Wempner* [17])

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial s_j} - \frac{\partial r}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial s_j} \right) \tag{25}$$

missä s_i tarkoittaa deformoitumattoman palkin koordinaattiviivan x_i (i=1,2,3) kaaren pituutta. Tällöin $s_2 = x_2$ ja $s_3 = x_3$, mutta tuloksen *(14)* mukaan

$$\left(\frac{d s_1}{d x_1} \right)^2 = g_1 \cdot g_1 = g_{11} = (1 - x_2 \kappa_2 - x_3 \kappa_3)^2 + (-x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau)^2 \tag{26}$$

Määritelmä *(25)* voidaan yhtälön *(23)* perusteella saattaa muotoon†

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \frac{\partial x_\alpha}{\partial s_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial s_j} \tag{27}$$

---

†Kun sama indeksi esiintyy tulossa kahdesti, on tuloon sovellettava *Einsteinin summasääntöä.*

Komponenteittain kirjoitettuna yhtälöstä *(27)* saadaan

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\,(G_{11} - g_{11})/g_{11} \tag{28}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\,(G_{12} - g_{12})/\sqrt{g_{11}} \tag{29}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\,(G_{13} - g_{13})/\sqrt{g_{11}} \tag{30}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \quad \& \quad \varepsilon_{23} = 0 \tag{31}$$

Relaatio *(25)* määrittelee muodonmuutostensorin komponentit pisteessä P paikallisessa karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa s_1, s_2, s_3, jonka kantavektorit valitaan siten, että niiden suunnat yhtyvät vektoreiden $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ suuntiin.

Kuvan 1 ja yhtälön *(10)* perusteella voidaan kirjoittaa

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^0 + x_2\boldsymbol{E}_2 + x_3\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{r}^0 + \boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{E}_2 + x_3\boldsymbol{E}_3 \tag{32}$$

Näin ollen

$$\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{r}^0_{,1} + \boldsymbol{u}_{,1} + x_2\boldsymbol{E}_{2,1} + x_3\boldsymbol{E}_{3,1} \tag{33}$$

missä

$$\boldsymbol{r}^0_{,1} = \boldsymbol{e}_1 \quad \& \quad \boldsymbol{u}_{,1} = (u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3)_{,1} \tag{34}$$

Käyttämällä hyväksi yhtälöitä *(13),(21)* ja *(22)* saadaan

$$\boldsymbol{u}_{,1} = (u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3)\,\boldsymbol{e}_1 + (u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3)\,\boldsymbol{e}_2 + (u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2)\,\boldsymbol{e}_3$$

Liitteen 1 mukaan vektoreiden $\boldsymbol{E}_2$ ja $\boldsymbol{E}_3$ derivaatat ovat

$$\boldsymbol{E}_{2,1} = (-\varphi_{3,1} - \kappa_2 - \kappa_3\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (-\kappa_2\varphi_3 - \tau\,\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_2 + (-\kappa_3\varphi_3 + \tau + \varphi_{1,1})\,\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{E}_{3,1} = (\varphi_{2,1} - \kappa_3 + \kappa_2\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\kappa_2\varphi_2 - \tau - \varphi_{1,1})\,\boldsymbol{e}_2 + (\kappa_3\varphi_2 - \tau\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_3$$

Tällöin kantavektoriksi $\boldsymbol{G}_1$ seuraa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_1 = {} & (1 + u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3 - x_2\varphi_{3,1} + x_3\varphi_{2,1} - x_2\kappa_2 - x_3\kappa_3 - x_2\kappa_3\varphi_1 + x_3\kappa_2\varphi_1)\boldsymbol{e}_1 \\ & + (u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3 - x_2\kappa_2\varphi_3 - x_2\tau\,\varphi_1 + x_3\kappa_2\varphi_2 - x_3\varphi_{1,1} - x_3\tau)\,\boldsymbol{e}_2 \\ & + (u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2 - x_2\kappa_3\varphi_3 - x_3\tau\,\varphi_1 + x_3\kappa_3\varphi_2 + x_2\varphi_{1,1} + x_2\tau)\,\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

Kun oletetaan, että palkki on hoikka ja siirtymät ovat pienet sekä käytetään liitteen 1 likituloksia (L.10) ja (L.11), saadaan metriikkatensorin komponentiksi

$$G_{11} = G_1 \cdot G_1 \approx 1 + 2u_{1,1} - 2\kappa_2 u_2 - 2\kappa_3 u_3 - 2x_2\varphi_{3,1} + 2x_3\varphi_{2,1} - 2x_2\kappa_2 +$$
$$- 2x_3\kappa_3 - 2x_2\kappa_3\varphi_1 + 2x_3\kappa_2\varphi_1 - 2x_3\tau\varphi_3 - 2x_2\tau\varphi_2$$

Lisäksi voidaan kirjoittaa approksimaatiot

$$g_{11} = g_1 \cdot g_1 \approx 1 - 2x_2\kappa_2 - 2x_3\kappa_3 \tag{35}$$

$$g_{11}^{-1} \approx 1 + 2x_2\kappa_2 + 2x_3\kappa_3 \tag{36}$$

Tällöin tuloksesta *(28)* seuraa muodonmuutostensorin venymäkomponentiksi

$$\varepsilon_{11} \approx u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3 - x_2\varphi_{3,1} + x_3\varphi_{2,1} - x_2\kappa_3\varphi_1 + x_3\kappa_2\varphi_1 - x_3\tau\varphi_3 - x_2\tau\varphi_2 \tag{37}$$

Kantavektoriksi G_2 seuraa

$$G_2 = E_2 = \bar{\gamma}_{12}\, e_1' + e_2' \approx \bar{\gamma}_{12}\, e_1 - \Theta_3\, e_1 + e_2 + \Theta_1\, e_3$$

joka merkinnöin $\Theta_3 - \bar{\gamma}_{12} = \varphi_3$ ja $\Theta_1 = \varphi_1$ sievenee muotoon

$$G_2 = -\varphi_3\, e_1 + e_2 + \varphi_1\, e_3 \tag{38}$$

Tällöin metriikkatensorin komponentiksi G_{12} saadaan

$$G_{12} = G_1 \cdot G_2 \approx u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3 - \varphi_3 + x_3\kappa_3\varphi_3 + x_3\kappa_2\varphi_2 - x_3\varphi_{1,1} - x_3\tau$$

Kun vielä otetaan huomioon, että

$$g_{12} = g_1 \cdot g_2 = -x_3\tau \tag{39}$$

$$(\sqrt{g_{11}})^{-1} \approx 1 + x_2\kappa_2 + x_3\kappa_3 \tag{40}$$

niin saadaan

$$2\varepsilon_{12} \approx u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3 - \varphi_3 + x_3\kappa_3\varphi_3 + x_3\kappa_2\varphi_2 - x_3\varphi_{1,1} \tag{41}$$

Vastaavalla tavalla laskemalla saadaan

$$G_3 = E_3 = \bar{\gamma}_{13}\, e_1' + e_3' \approx \varphi_2\, e_1 - \varphi_1\, e_2 + e_3 \tag{42}$$

$$G_{13} = G_1 \cdot G_3 \approx u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2 + \varphi_2 - x_2\kappa_2\varphi_2 - x_2\kappa_3\varphi_3 + x_2\varphi_{1,1} + x_2\tau$$

$$g_{13} = x_2\tau \tag{43}$$

$$2\varepsilon_{13} \approx u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2 + \varphi_2 - x_2\kappa_2\varphi_2 - x_2\kappa_3\varphi_3 + x_2\varphi_{1,1} \tag{44}$$

Merkitään palkin poikkileikkauksen pisteen P paikkavektoria paikalliskoordinaatistossa Ox_1, x_2, x_3

$$\mu^0 = x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{45}$$

ja määritellään "muodonmuutosvektori" relaatiolla

$$\boldsymbol{\epsilon} = \varepsilon_{11}\boldsymbol{e}_1 + 2\,\varepsilon_{12}\boldsymbol{e}_2 + 2\,\varepsilon_{13}\boldsymbol{e}_3 \tag{46}$$

Tällöin tulokset *(37),(41)* ja *(44)* voidaan kirjoittaa tiiviiseen asuun

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{u}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}_{,1} \times \boldsymbol{\mu}^0 \tag{47}$$

Referenssiviivalla $\boldsymbol{\mu}^0 = \boldsymbol{0}$, joten sen pisteisiin liittyvä muodonmuutosvektori on

$$\boldsymbol{\epsilon}^h = \boldsymbol{u}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{\varphi} \tag{48}$$

Pisteen P (kuva 1) siirtymävektoriksi $\boldsymbol{v}$ saadaan

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{E}_2 + x_3\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{\mu}^0 \tag{49}$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{v} = (u_1 - x_2\varphi_3 + x_3\varphi_2)\,\boldsymbol{e}_1 + (u_2 - x_3\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_2 + (u_3 + x_2\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_3 \tag{50}$$

Tuloksesta *(50)* nähdään, että poikkileikkauksen pisteiden koordinaattiviivojen suuntaiset siirtymäkomponentit muuttuvat lineaarisesti pisteen koordinaattien x_2 ja x_3 funktiona.

4. MATERIAALIYHTÄLÖT

Kun oletetaan, että palkin materiaali on homogeenista, isotrooppista ja lineaarisesti kimmoista, voidaan *jännitystensorin* kontravariantit komponentit σ^{ij} kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= E\,\varepsilon_{11} \\ \sigma^{12} &= 2G\,\varepsilon_{12} \\ \sigma^{13} &= 2G\,\varepsilon_{13} \end{aligned} \tag{51}$$

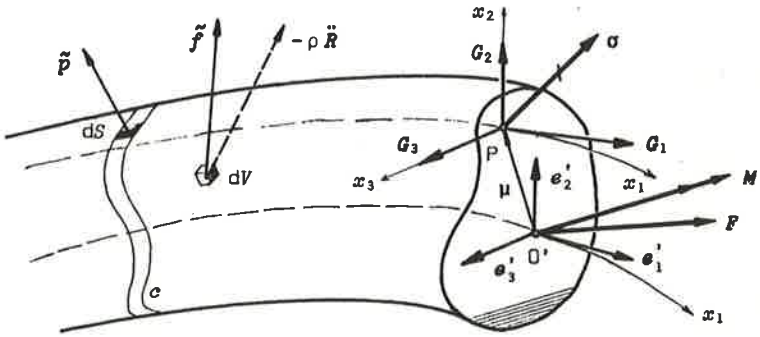
missä E on materiaalin kimmomoduuli ja G liukumoduuli. Hypoteesin 3 perusteella $\sigma^{22} = \sigma^{33} = \sigma^{23} = 0$.

5. POIKKILEIKKAUKSEN JÄNNITYSRESULTANTIT

Pisteen P' (kuva 4) poikkileikkauksen koordinaattitasoon x_2, x_3 liittyvä *jännitysvektori* σ voidaan kirjoittaa muodossa (*Fung* [23], s. 84, *Wempner* [17], s. 78)

$$\sigma = \sqrt{G_{11}}\, \sigma^{1j}\, G_j \approx \sqrt{g_{11}}\, \sigma^{1j}\, g_j \tag{52}$$

Likimääräistystä *(52)* tehtäessä on oletettu, että muodonmuutokset ja siirtymät ovat pienet, jolloin jännitysvektori voidaan kirjoittaa deformoitumattoman palkin geometrian avulla.



Kuva 4 Palkin poikkileikkauksen jännitysresultantit $\boldsymbol{F}$ ja $\boldsymbol{M}$.

Partikkelin P' paikkavektori (kuva 4)

$$\mu = R - R^0 \approx \mu^0 = r - r^0 = x_2\, e_2 + x_3\, e_3 \tag{53}$$

Tällöin poikkileikkauksen referenssiviivan pisteeseen O kootun dynaamin ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$) komponentit eli poikkileikkauksen *jännitysresultantit* ovat

$$F = F^i e_i = \iint_A \sigma\, dA \approx \iint_A \sigma^{1j}\, g_j \sqrt{g_{11}}\, dA \tag{54}$$

$$M = M^i e_i = \iint_A \mu \times \sigma\, dA \approx \iint_A \mu^0 \times \sigma^{1j}\, g_j \sqrt{g_{11}}\, dA \tag{55}$$

missä $dA = dx_2\, dx_3$.

Jännitysresultanttien *(54)* ja *(55)* laskemisessa voidaan hoikalle palkille käyttää likimääräistyksiä

$$\sqrt{g_{11}} \approx 1 \quad \& \quad \boldsymbol{g}_1 \approx \boldsymbol{e}_1 \tag{56}$$

jolloin saadaan approksimaatiot

$$F^1 \approx \iint_A \sigma^{11}\, dA \;, \quad F^2 \approx \iint_A \sigma^{12}\, dA \;, \quad F^3 \approx \iint_A \sigma^{13}\, dA \tag{57}$$

$$M^1 \approx \iint_A (\, x_2 \sigma^{13} - x_3 \sigma^{12}\,)\, dA \tag{58}$$

$$M^2 \approx \iint_A x_3 \sigma^{11}\, dA \;, \quad M^3 \approx -\iint_A x_2 \sigma^{11}\, dA \tag{59}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \sigma^{1j}\, \boldsymbol{e}_j \tag{60}$$

6. PALKIN LIIKEYHTÄLÖT

Deformoitumattoman palkin differentiaalielementin tilavuus

$$dV = ds_1\, dx_2\, dx_3 = \sqrt{g_{11}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \sqrt{g_{11}}\, dx_1\, dA \tag{61}$$

sekä palkin pinnan differentiaalisen alueen pinta-ala

$$dS = ds_1\, dc = \sqrt{g_{11}}\, dx_1\, dc \tag{62}$$

missä c on poikkileikkauskuvion reunakäyrän kaarenpituus.

Merkitsemällä palkin tilavuusvoimatiheyttä $\tilde{\boldsymbol{f}}$ sekä pintavoimatiheyttä $\tilde{\boldsymbol{p}}$ saadaan annettujen voimien referenssiviivalle lasketuksi resultoivaksi pituustiheydeksi

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(x_1) = \iint_A \tilde{\boldsymbol{f}} \sqrt{g_{11}}\, dA + \int_c \tilde{\boldsymbol{p}} \sqrt{g_{11}}\, dc \tag{63}$$

sekä referenssiviivalle kootun momentin pituustiheydeksi

$$\tilde{\boldsymbol{o}}(x_1) = \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times \tilde{\boldsymbol{f}} \sqrt{g_{11}}\, dA + \int_c \boldsymbol{\mu}^0 \times \tilde{\boldsymbol{p}} \sqrt{g_{11}}\, dc \tag{64}$$

Palkin päätypintaan referenssiviivan pisteeseen koottua annettujen päätypintaan vaikuttavien voimien dynaamia merkitään ($\tilde{\boldsymbol{F}}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}$).

Liikeyhtälöiden johtamisessa tullaan käyttämään *D'Alembertin* formalismia ja siihen liittyvää hitausvoima-ajattelutapaa. Tätä varten merkitään hitausvoimatiheyttä $-\rho\, \ddot{\boldsymbol{r}}$, missä ρ on tiheys ja $\ddot{\boldsymbol{r}}$ on palkin partikkelin kiihtyvyysvektori, jolloin on merkitty $d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = \ddot{\boldsymbol{r}}$.

Resultoivaksi hitausvoimien pituustiheydeksi seuraa

$$H = -\iint_A \rho \ddot{r} \sqrt{g_{11}}\, dA \tag{65}$$

ja resultoivaksi hitausvoimien momenttien pituustiheydeksi referenssiviivalle

$$MH = -\iint_A \mu^0 \times \rho \ddot{r} \sqrt{g_{11}}\, dA \tag{66}$$

Partikkelin kiihtyvyysvektori $\ddot{r}$ voidaan esittää myös muodossa $\ddot{r} = \ddot{v}$ missä v on partikkelin siirtymävektori *(50)*. Kirjoittamalla

$$\ddot{v} = (\ddot{u}_1 + x_3\ddot{\varphi}_2 - x_2\ddot{\varphi}_3)\, e_1 + (\ddot{u}_2 - x_3\ddot{\varphi}_1)\, e_2 + (\ddot{u}_3 + x_2\ddot{\varphi}_1)\, e_3 \tag{67}$$

ja ottamalla metriikkatekijään $\sqrt{g_{11}}$ mukaan vain lineaariset termit toisin sanoen $\sqrt{g_{11}} \approx 1 - x_2\kappa_2 - x_3\kappa_3$ voidaan lausekkeet *(65)* ja *(66)* kirjoittaa muotoon

$$H \approx -\iint_A \rho \ddot{v}\,(1 - x_2\kappa_2 - x_3\kappa_3)\, dA$$

$$MH \approx -\iint_A \mu^0 \times \rho \ddot{v}\,(1 - x_2\kappa_2 - x_3\kappa_3)\, dA$$

Käyttämällä lyhennysmerkintää

$$J_{ij} = \iint_A \rho\, x_2^i\, x_3^j\, dA \tag{68}$$

saadaan hitausvoimien ja hitausvoimien momenttien pituustiheyksien komponenteiksi

$$H^1 = -(J_{00} - \kappa_2 J_{10} - \kappa_3 J_{01})\,\ddot{u}_1 - (J_{01} - \kappa_2 J_{11} - \kappa_3 J_{02})\,\ddot{\varphi}_2 + (J_{10} - \kappa_2 J_{20} - \kappa_3 J_{11})\,\ddot{\varphi}_3 \tag{69}$$

$$H^2 = -(J_{00} - \kappa_2 J_{10} - \kappa_3 J_{01})\,\ddot{u}_2 + (J_{01} - \kappa_2 J_{11} - \kappa_3 J_{02})\,\ddot{\varphi}_1 \tag{70}$$

$$H^3 = -(J_{00} - \kappa_2 J_{10} - \kappa_3 J_{01})\,\ddot{u}_3 - (J_{10} - \kappa_2 J_{20} - \kappa_3 J_{11})\,\ddot{\varphi}_1 \tag{71}$$

$$MH^1 = (J_{01} - \kappa_2 J_{11} - \kappa_3 J_{02})\,\ddot{u}_2 - (J_{10} - \kappa_2 J_{20} - \kappa_3 J_{11})\,\ddot{u}_3 + \tag{72}$$

$$- [(J_{20} + J_{02}) - \kappa_2 (J_{30} + J_{12}) - \kappa_3 (J_{21} + J_{03})]\,\ddot{\varphi}_1 \tag{73}$$

$$MH^2 = -(J_{01} - \kappa_2 J_{11} - \kappa_3 J_{02})\,\ddot{u}_1 - (J_{02} - \kappa_2 J_{12} - \kappa_3 J_{03})\,\ddot{\varphi}_2 + (J_{11} - \kappa_2 J_{21} - \kappa_3 J_{12})\,\ddot{\varphi}_3$$

$$MH^3 = (J_{10} - \kappa_2 J_{20} - \kappa_3 J_{11})\,\ddot{u}_1 + (J_{11} - \kappa_2 J_{21} - \kappa_3 J_{12})\,\ddot{\varphi}_2 - (J_{20} - \kappa_2 J_{30} - \kappa_3 J_{21})\,\ddot{\varphi}_3 \tag{74}$$

Annetaan palkille pieni virtuaalinen siirtymäkenttä $\{\delta u, \delta\varphi\}$, missä $\delta u = \delta u_1 e_1 + \delta u_2 e_2 + \delta u_3 e_3$ ja $\delta\varphi = \delta\varphi_1 e_1 + \delta\varphi_2 e_2 + \delta\varphi_3 e_3$. Tällöin ulkoisten voimien virtuaalinen työ

$$\delta W_u = \Big|_a^b (\tilde{F} \cdot \delta u + \tilde{M} \cdot \delta\varphi) + \int_{x_1=a}^{b} (\tilde{q} \cdot \delta u + \tilde{\sigma} \cdot \delta\varphi)\, dx_1 \tag{75}$$

Palkin päätypintojen kohdilla käyräviivaisella koordinaatilla on arvot $x_1 = a$ ja $x_1 = b$. Sisäisten voimien virtuaaliseksi työksi saadaan

$$\delta W_s = -\int_a^b \iint_A \sigma^{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} \sqrt{g_{11}}\, dA\, dx_1 \tag{76}$$

joka merkinnöin *(46)* ja *(60)* voidaan esittää muodossa

$$\delta W_s = -\int_a^b \iint_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\epsilon} \sqrt{g_{11}}\, dA\, dx_1 \tag{77}$$

Toisaalta muodonmuutos-siirtymäyhtälön *(47)* perusteella saadaan

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \delta\boldsymbol{u}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \delta\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}_{,1} \times \boldsymbol{\mu}^0 \tag{78}$$

josta seuraa

$$\delta W_s = -\int_a^b \left[\iint_A \boldsymbol{\sigma} \sqrt{g_{11}}\, dA \cdot \delta\boldsymbol{u}_{,1} + \iint_A \boldsymbol{\sigma} \sqrt{g_{11}}\, dA \cdot \boldsymbol{e}_1 \times \delta\boldsymbol{\varphi} - \iint_A \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\mu}^0 \sqrt{g_{11}}\, dA \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_{,1} \right] dx_1$$

Ottamalla huomioon jännitysresultanttien lausekkeet *(57)*, *(58)* ja *(59)* voidaan sisäisten voimien virtuaalinen työ sieventää muotoon

$$\delta W_s = -\int_a^b \left(\boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{u}_{,1} + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_1 \times \delta\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_{,1} \right) dx_1$$

Osittaisintegroinnilla seuraa

$$\delta W_s = -\Big|_a^b \left(\boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \right) + \int_a^b \left(\boldsymbol{F}_{,1} \cdot \delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{e}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{M}_{,1} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \right) dx_1 \tag{79}$$

Hitausvoimien virtuaalinen työ on

$$\delta W_h = \int_a^b \left(\boldsymbol{H} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \right) dx_1 \tag{80}$$

Virtuaalisten siirtymien lauseen mukaan $\delta W_u + \delta W_s + \delta W_h = 0$. Kun virtuaalinen siirtymäkenttä $\{ \delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{\varphi} \}$ on mielivaltainen, niin tuloksista *(75)*, *(79)* ja *(80)* päädytään *käyrän palkin liikeyhtälöihin*

$$\boldsymbol{F}_{,1} + \tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} \tag{81}$$

$$\boldsymbol{M}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{F} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{0} \tag{82}$$

Liikeyhtälöissä *(81)*, *(82)* jännitysresultantit $\boldsymbol{F}$ ja $\boldsymbol{M}$ voidaan lausua siirtymien $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{\varphi}$ funktiona käyttämällä edellä johdettuja kinemaattisia yhtälöitä ja materiaaliyhtälöitä. Hitausvoimien pituustiheydet on lausuttu siirtymien funktioina tuloksissa *(69)*–*(74)*.

Käyrän palkin liikeyhtälöt ovat komponenttimuodossa

$$F^1_{,1} - \kappa_2 F^2 - \kappa_3 F^3 + \tilde{q}^1 + H^1 = 0 \qquad (83)$$

$$F^2_{,1} + \kappa_2 F^1 - \tau F^3 + \tilde{q}^2 + H^2 = 0 \qquad (84)$$

$$F^3_{,1} + \kappa_3 F^1 + \tau F^2 + \tilde{q}^3 + H^3 = 0 \qquad (85)$$

$$M^1_{,1} - \kappa_2 M^2 - \kappa_3 M^3 + \tilde{\sigma}^1 + MH^1 = 0 \qquad (86)$$

$$M^2_{,1} + \kappa_2 M^1 - \tau M^3 - F^3 + \tilde{\sigma}^2 + MH^2 = 0 \qquad (87)$$

$$M^3_{,1} + \kappa_3 M^1 + \tau M^2 + F^2 + \tilde{\sigma}^3 + MH^3 = 0 \qquad (88)$$

Virtuaalisten siirtymien lause antaa reunaehdoiksi

$$\Big|_a^b \left[(\tilde{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{F}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + (\tilde{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{M}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right] = \boldsymbol{0} \qquad (89)$$

josta seuraa, että palkin päissä $x_1 = a$ ja $x_1 = b$ on oltava

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} & \text{tai} \quad \delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad (90) \\ \tilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} & \text{tai} \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0} \qquad (91) \end{cases}$$

Asettamalla liikeyhtälöissä *(81),(82)* hitausvoimat nolliksi saadaan *käyrän palkin tasapainoyhtälöt*

$$\boldsymbol{F}_{,1} + \tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \qquad (92)$$

$$\boldsymbol{M}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{F} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{0} \qquad (93)$$

Tasapainoyhtälöitä *(92)* ja *(93)* kutsutaan usein *Kirchhoff-Clebsch-yhtälöiksi* (*Love* [15], s. 387).

Jos halutaan esittää liikeyhtälöt *(81)-(88)* referenssiviivan pisteiden siirtymäkomponenttien u_1, u_2, u_3 ja poikkileikkauksen rotaatiokomponenttien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ avulla, täytyy jännitysresultanttien $\boldsymbol{F}$ ja $\boldsymbol{M}$ lausekkeisiin *(57),(58),(59)* sijoittaa materiaaliyhteydet *(51)* sekä muodonmuutos-siirtymäyhtälöt *(37),(41),(44)*. Hitausvoimatermit sijoitetaan tuloksista *(69)-(74)* ja ulkoisten annettujen kuormitusten lausekkeet lasketaan tuloksista *(63)* ja *(64)*.

7. POIKKILEIKKAUKSELTAAN KAKSOISSYMMETRISEN KÄYRÄN PALKIN LIIKEYHTÄLÖT

Jos palkin poikkileikkauksella on kaksi symmetria-akselia, joiden leikkauspisteen kautta kulkeva pituussuuntainen säie valitaan referenssiviivaksi, voidaan jännitysresultantit *(57)*, *(58)*, *(59)* kirjoittaa materiaaliyhtälöitä *(51)* ja kaksoissymmetriaa hyväksi käyttäen muotoon

$$F^1 = EA\,(u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3) \tag{94}$$

$$F^2 = GA\,(u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau\, u_3 - \varphi_3) \tag{95}$$

$$F^3 = GA\,(u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau\, u_2 + \varphi_2) \tag{96}$$

$$M^1 = GI_0\,(\varphi_{1,1} - \kappa_2 \varphi_2 - \kappa_3 \varphi_3) \tag{97}$$

$$M^2 = EI_{33}\,(\varphi_{2,1} + \kappa_2 \varphi_1 - \tau\, \varphi_3) \tag{98}$$

$$M^3 = EI_{22}\,(\varphi_{3,1} + \kappa_3 \varphi_1 + \tau\, \varphi_2) \tag{99}$$

Tällöin on otettu huomioon muodonmuutos-siirtymäyhtälöt *(37)*, *(41)*, *(44)* ja otettu käyttöön lyhennysmerkinnät

$$I_{22} = \iint_A x_2^2\, dA \quad , \quad I_{33} = \iint_A x_3^2\, dA \quad , \quad I_0 = I_{22} + I_{33} \tag{100}$$

Kun yhtälössä *(97)* asetetaan $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$, niin kysymyksessä on suoran palkin vääntöön liittyvä jännitysresultantti. Yhtälöstä saadaan, että tällöin $M^1 = GI_0\,\varphi_{1,1}$, joka on tarkka vain ympyräsylinterille. Valittu kinemaattinen malli, joka jättää poikkipintapainuman huomioonottamatta, antaa vääntömomenttiresultantille *(97)* karkeahkon likiarvon, sitä huonomman, mitä kauempana palkin poikkileikkauksen muoto on ympyrästä.

Muodostamalla palkin poikkileikkaukseen liittyvistä taivutus- ja vääntöjäykkyyksistä *dyadi* (*Väisälä* [25], s. 147)

$$\bar{\bar{I}} = GI_0\, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + EI_{33}\, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + EI_{22}\, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \tag{101}$$

voidaan momenttiresultanttien lausekkeet kirjoittaa tiiviissä muodossa

$$\mathbf{M} = \bar{\bar{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,1} \tag{102}$$

Kun muodostetaan poikkileikkaukseen liittyvistä veto- ja leikkausjäykkyyksistä dyadi

$$\bar{\bar{A}} = EA\, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + GA\, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + GA\, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \tag{103}$$

saadaan voimien lausekkeet tiiviissä muodossa

$$\boldsymbol{F} = \bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\boldsymbol{u}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{\varphi}) \tag{104}$$

Kaksoissymmetriasta seuraa myös, että hitausvoimien lausekkeissa *(69)-(74)* kertoimet $J_{ij} = 0$, kun toinen tai molemmat indeksit i,j ovat parittomat. Tämän perusteella

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^1 &= -J_{00}\,\ddot{u}_1 + \kappa_3 J_{02}\,\ddot{\varphi}_2 - \kappa_2 J_{20}\,\ddot{\varphi}_3 \\ \boldsymbol{H}^2 &= -J_{00}\,\ddot{u}_2 - \kappa_3 J_{02}\,\ddot{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{H}^3 &= -J_{00}\,\ddot{u}_3 + \kappa_2 J_{20}\,\ddot{\varphi}_1 \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{MH}^1 &= -\kappa_3 J_{02}\,\ddot{u}_2 + \kappa_2 J_{20}\,\ddot{u}_3 - (J_{20} + J_{02})\,\ddot{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{MH}^2 &= \kappa_3 J_{02}\,\ddot{u}_1 - J_{02}\,\ddot{\varphi}_2 \\ \boldsymbol{MH}^3 &= -\kappa_2 J_{20}\,\ddot{u}_1 - J_{20}\,\ddot{\varphi}_3 \end{aligned} \tag{106}$$

Muodostamalla *massadyadi*

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}} = J_{00}\,\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + J_{00}\,\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + J_{00}\,\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{107}$$

sekä *hitausmomenttidyadit*

$$\bar{\bar{\mathbf{J}}}_0 = (J_{02} + J_{20})\,\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + J_{02}\,\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + J_{20}\,\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{108}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{J}}}_1 = J_{02}\,\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + J_{02}\,\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + J_{20}\,\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{109}$$

voidaan hitausvoimista kootut viivatiheydet $\boldsymbol{H}$ ja $\boldsymbol{MH}$ kirjoittaa tiiviissä muodossa

$$\boldsymbol{H} = -\bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} - \bar{\bar{\mathbf{J}}}_1 \cdot [(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{e}_1) \times \ddot{\boldsymbol{\varphi}}] \tag{110}$$

$$\boldsymbol{MH} = -\bar{\bar{\mathbf{J}}}_1 \cdot [(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{e}_1) \times \ddot{\boldsymbol{u}})] - \bar{\bar{\mathbf{J}}}_0 \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{111}$$

Näin päädytään käyrän palkin, jonka poikkileikkauksella on kaksi symmetria-akselia, liikeyhtälöihin

$$-\bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} - \bar{\bar{\mathbf{J}}}_1 \cdot [(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{e}_1) \times \ddot{\boldsymbol{\varphi}}] + [\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\boldsymbol{u}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{\varphi})]_{,1} + \tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \tag{112}$$

$$-\bar{\bar{\mathbf{J}}}_1 \cdot [(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{e}_1) \times \ddot{\boldsymbol{u}}] - \bar{\bar{\mathbf{J}}}_0 \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + (\bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,1})_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times [\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\boldsymbol{u}_{,1} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{\varphi})] + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{0} \tag{113}$$

Liikeyhtälöistä *(112)* ja *(113)* nähdään, että ne ovat sekä staattisesti, että dynaamisesti kytketyt.

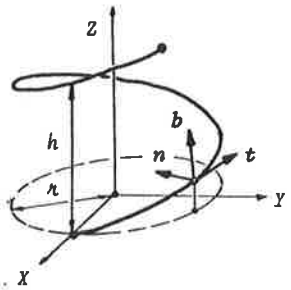
8. RUUVIVIIVAN MUOTOISEN PALKIN TASAPAINOYHTÄLÖT

Sovelletaan yhtälöitä *(83)-(88)* palkkiin, jonka referenssiviiva muodostaa avaruuteen *ruuviviivan*. Ruuviviivan säde on r ja nousu yhdellä kierroksella h. Ruuviviivan nousukulma $\alpha = \arctan(h/2\pi r)$. Ruuviviivan kaarevuus k_1 ja kierevyys k_2 ovat vakioita

$$k_1 = \frac{r}{r^2 + (h/2\pi)^2} = \frac{1/r}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{r}\cos^2\alpha \qquad (114)$$

$$k_2 = \frac{h/2\pi}{r^2 + (h/2\pi)^2} = \frac{h}{2\pi}\,\frac{1/r}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{r}\sin\alpha\cos\alpha \qquad (115)$$

Tarkastellaan palkkia, jonka poikkileikkauksen pääakselit ovat referenssiviivan jokaisessa pisteessä referenssiviivan päänormaalin n ja sivunormaalin b suuntaiset kuvan 5 mukaisesti. Tällöin palkin alkukaarevuudet κ_2 ja κ_3 sekä alkukierevyys τ ovat tulosten *(8)* mukaan



Kuva 5 Ruuviviivan muotoinen palkki.

$$\kappa_2 = k_1\cos 0^0 = k_1 = \frac{1}{r}\cos^2\alpha$$
$$\kappa_3 = -k_2\sin 0^0 = 0 \qquad (116)$$
$$\tau = k_2 = \frac{1}{r}\sin\alpha\cos\alpha$$

Merkitsemällä jännitysresultantteja $F^1 = N$, $F^2 = Q_n$, $F^3 = Q_b$, $M^1 = T$, $M^2 = M_n$ ja $M^3 = M_b$ saadaan yhtälöistä *(83)-(88)* ruuviviivan muotoisen palkin tasapainoehdoiksi

$$\begin{aligned}
&N_{,1} - \frac{1}{r}\cos^2\alpha\, Q_n + \tilde{q}^1 = 0\\
&Q_{n,1} + \frac{1}{r}\cos^2\alpha\, N - \frac{1}{r}\sin\alpha\cos\alpha\, Q_b + \tilde{q}^2 = 0\\
&Q_{b,1} + \frac{1}{r}\sin\alpha\cos\alpha\, Q_n + \tilde{q}^3 = 0\\
&T_{,1} - \frac{1}{r}\cos^2\alpha\, M_n + \tilde{c}^1 = 0\\
&M_{n,1} + \frac{1}{r}\cos^2\alpha\, T - \frac{1}{r}\cos\alpha\sin\alpha\, M_b - Q_b + \tilde{c}^2 = 0\\
&M_{b,1} + \frac{1}{r}\sin\alpha\cos\alpha\, M_n + Q_n + \tilde{c}^3 = 0
\end{aligned} \qquad (117)$$

Tasapainoyhtälöt *(117)* on johdettu myös kirjoituksessa *Kanerva* ja *Nordlund* [24] tarkastelemalla palkin differentiaalipalan tasapaino

9. KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] *Szabó I., Die Entwicklung der Elastizitätstheorie im 19. Jahrhundert nach Cauchy.* Die Bautechnik, Heft 4, April 1976.

[2] *Ylinen A., Kimmo- ja lujuusoppi, II osa.* 2.painos. Porvoo, Werner Söderström osakeyhtiö, 1970, sivut 477-543.

[3] *Henrych J., The Dynamics of Arches and Frames.* New York, Elsevier scientific Publishing Company, 1981.

[4] *Tene Y., Epstein M., & Sheinman I., Dynamics of curved beams involving shear deformation.* Int. Journal Solids and Structures, Vol.11, 1975 pp.827-840.

[5] *Wang T-M., & Guilbert M., Effect of rotary inertia and shear on natural frequencies on continuous circular curved beams.* Int. Journal Solids and Structures, Vol.17, 1981, pp.281-289.

[6] *Vlasov V., Thin walled elastic beams.* 2.th Edition. Israel program for Scientific Translations, Jerusalem 1961, pp.448-463.

[7] *Yoo C., & Fehrenbach J., Natural frequencies of curved girders.* Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.107, No. EM2 April, 1981, pp.339-353.

[8] *Roy D., Plane curved beam equations.* Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.108, No. EM1, February, 1982, pp.196-201.

[9] *Bickford W., & Strom B., Vibration of plane curved beams.* Journal of Sound and Vibration, 39(2), 1975, pp.135-146.

[10] *Wang T., Nettleton R., & Keita B., Natural frequencies for out-of-plane vibrations of continuous curved beams.* Journal of Sound and Vibration, 68(3), 1980, pp.427-436.

[11] *Carnegie W., The application of the variational method to derive the equations of motion of vibrating cantilever blading under rotation.* Bull. Mech. Eng. Educ., Vol.6, 1967, pp.29-38.

[12] *Hodges D., Torsion of pretwisted beams due to axial loading.* Journal of Applied Mechanics, Vol.47, June 1980, pp.393-397.

[13] *Krenk S., & Gunneskov D., Statics of thin-walled pretwisted beams.* Int. J. for numerical methods in engineering, Vol.17, 1981, pp.1407-1426.

[14] *Nagaraj V., & Sahu N., Torsional vibrations of non-uniform rotating blades with attachment flexibility.* Journal of Sound and Vibration, 80(3), 1982, pp.401-411.

[15] *Love A., Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Fourth Edition. Dover Publications, New York, 1944, pp.444-454.

[16] *Washizu K., Some considerations on a naturally curved and twisted slender beam.* Journal of Mathematical Physics, Vol.43, **1964**, pp. 111-116.

[17] *Wempner G., Mechanics of Solids with applications to thin bodies.* New York, McGraw-Hill Book Company, **1973**, pp.352-390.

[18] *Tabarrok B.,& Farsad M., On dualities in the oscillations of naturally curved and pretwisted rods.* Int. Journal Solids and Structures, Vol.12, **1976**, pp.601-609.

[19] *Ferguson G.,& Clark R., A variable thickness, curved beam and shell stiffening element with shear deformations.* Int. J. for numerical methods in engineering, Vol.14, **1979**, pp.581-592.

[20] *Jirousek J., A family of variable section curved beam and thick-shell or membrane stiffening isoparametric elements.* Int. J. for numerical methods in engineering, Vol.17, **1981**, pp.171-186.

[21] *Resende L.,& Doyle W., "NONPRI"-An effective nonprismatic three dimensional beam finite element.* Computers and Structures, Vol. 14, No 1-2, **1981**, pp.71-77.

[22] *Venkatesh A.,& Rao K., A laminated anisotropic curved beam and shell stiffening finite element.* Computers and Structures, Vol.15, No 2, **1982**, pp.197-201.

[23] *Fung Y., Foundations of Solid Mechanics.* New Jersey, Prentice-Hall, Inc., **1965**.

[24] *Kanerva P.,& Nordlund O-P., Ruuviviivan muotoinen avaruussauva.* Rakenteiden Mekaniikka, Vol.10, No 1, **1977**, sivut 21-37.

[25] *Väisälä K., Vektorianalyysi.* 5.painos. Porvoo, Werner Söderström Osakeyhtiö, **1966**.

LIITE 1: KANTAVEKTOREIDEN $\boldsymbol{E}_2$ JA $\boldsymbol{E}_3$ DERIVAATAT $\boldsymbol{E}_{2,1}$ JA $\boldsymbol{E}_{3,1}$.

Vektorit $\boldsymbol{E}_2$ ja $\boldsymbol{E}_3$ *(21),(22)* voidaan esittää pienille rotaatioille yhtälöiden *(17)* avulla muodossa

$$\boldsymbol{E}_2 = \bar{\gamma}_{21}\,\boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_2' \approx \bar{\gamma}_{21}\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \theta \times \boldsymbol{e}_2 \qquad (L.1)$$

$$\boldsymbol{E}_3 = \bar{\gamma}_{31}\,\boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_3' \approx \bar{\gamma}_{31}\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \theta \times \boldsymbol{e}_3 \qquad (L.2)$$

Tästä saadaan derivoimalla tulokset

$$\boldsymbol{E}_{2,1} = (\bar{\gamma}_{21,1} - \Theta_{3,1} - \kappa_2 - \kappa_3\Theta_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\kappa_2\bar{\gamma}_{21} - \kappa_2\Theta_3 - \tau\Theta_1)\,\boldsymbol{e}_2 + (\kappa_3\bar{\gamma}_{21} - \kappa_3\Theta_3 + \tau + \Theta_{1,1})\,\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{E}_{3,1} = (\bar{\gamma}_{31,1} + \Theta_{2,1} - \kappa_3 + \kappa_2\Theta_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\kappa_2\bar{\gamma}_{31} + \kappa_2\Theta_2 - \tau - \Theta_{1,1})\,\boldsymbol{e}_2 + (\kappa_3\bar{\gamma}_{31} + \kappa_3\Theta_2 - \tau\Theta_1)\boldsymbol{e}_3$$

Ottamalla huomioon, että

$$\varphi_1 = \Theta_1 \quad \& \quad \varphi_2 = \Theta_2 + \bar{\gamma}_{31} \quad \& \quad \varphi_3 = \Theta_3 - \bar{\gamma}_{21} \qquad (L.3)$$

derivaatoiksi seuraa

$$\boldsymbol{E}_{2,1} = (-\varphi_{3,1} - \kappa_2 - \kappa_3\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (-\kappa_2\varphi_3 - \tau\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_2 + (-\kappa_3\varphi_3 + \tau + \varphi_{1,1})\,\boldsymbol{e}_3 \qquad (L.4)$$

$$\boldsymbol{E}_{3,1} = (\varphi_{2,1} - \kappa_3 + \kappa_2\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\kappa_2\varphi_2 - \tau - \varphi_{1,1})\,\boldsymbol{e}_2 + (\kappa_3\varphi_2 - \tau\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_3 \qquad (L.5)$$

Soveltamalla yhtälöä *(17)* saadaan määritelmästä *(20)*

$$\boldsymbol{E}_1 = (1 + \bar{\varepsilon}_{11})\,\boldsymbol{e}_1' = (1 + \bar{\varepsilon}_{11})(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{e}_1) \qquad (L.6)$$

Toisaalta on voimassa

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{G}_1(x_1, 0, 0) = \boldsymbol{R}^0_{,1} = \boldsymbol{r}^0_{,1} + \boldsymbol{u}_{,1} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{u}_{,1} \qquad (L.7)$$

joten saadaan yhtälö

$$(1 + \bar{\varepsilon}_{11})(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{u}_{,1} \qquad (L.8)$$

Kun oletetaan, että $|\bar{\varepsilon}_{11}| \ll 1$, niin yhtälöstä (L.*8*) seuraa

$$\Theta_2 = -\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{u}_{,1} \quad \& \quad \Theta_3 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{u}_{,1} \qquad (L.9)$$

Toisaalta, kun oletetaan, että $|\bar{\gamma}_{21}|$ ja $|\bar{\gamma}_{31}|$ ovat pieniä rotaatio-komponenttien Θ_2 ja Θ_3 rinnalla, voidaan kirjoittaa

$$\varphi_2 \approx \Theta_2 = -\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{u}_{,1} = -u_{3,1} - \kappa_3 u_1 - \tau u_2 \qquad (L.10)$$

$$\varphi_3 \approx \Theta_3 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{u}_{,1} = u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3 \qquad (L.11)$$

VAPAAN KOSKETUKSEN RAJATILA

H. Parland
Tampereen teknillinen korkeakoulu

1 JOHDANTO

Jos rakenteen ainelujuudet noudattavat Coulomb'n murtumisehtoa ja vetolujuus on pieni, saavutetaan tietyissä kuormitusvaihteluohjelmissa sellainen tilanne, että jännityshuiput halkeamien kärjissä häviävät. Tätä tilaa sanomme vapaan kosketuksen rajatilaksi, koska se toteutuu ei-monoliittisessa rakenteessa ts. sellaisessa, jossa on vetoakestämättömiä saumoja ja joissa kosketuksen laajuus voi vapaasti vaihdella. Tämän rajatilan erikoispiirteitä selostetaan seuraavassa.

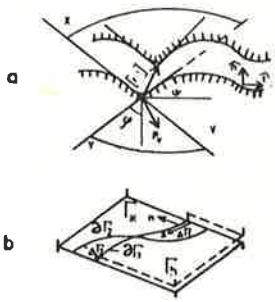
2 EI-MONOLIITTINEN RAKENNE

Voiman siirto saumassa Γ edellyttää tasapainon, $\hat{p}_{\nu\mu} = -\hat{p}_{\mu\nu}$, lisäksi, että sauma ei siirrä vetojännityksiä ja että jännitysvektori $\hat{p} = \hat{p}_{\nu\mu} = \sigma\hat{n}+\tau\hat{t}$ pysyy kitkakartion Y sisällä (kuva 1).

$$\hat{p}_\nu \cdot \hat{n}_\nu = \sigma_n \leq 0; \quad (\hat{p}\cdot\hat{t}_\nu) = |\tau| < |tg\phi|, |\sigma|\,|\hat{n}| = |\hat{t}| = 1 \qquad (1a\text{-}c)$$

Siirtymätila $\{u\}$ muuttuu halkeaman kohdalla epäjatkuvasti. Nämä epäjatkuvuudet $[u] = u_\mu(\alpha_1,\alpha_2) - u_\nu(\alpha_1,\alpha_2)$ määrittelevät saumasiirrosvektorin $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_n\hat{n}_\nu + \gamma_s\hat{t}_\nu = [\hat{u}]$. Välysvektorin $[r'] = (h+\gamma)\hat{n} + \hat{\rho}_s + \hat{\gamma}_s$ on pysyttävä kaltevuuskartion X sisäpuolella aineen läpitunkemattomuuden takia [1] .

$$\gamma_n \geq -h; \quad |\gamma_s + \rho|\, tg\vartheta < (\gamma_n + h) \qquad (2)$$



Kuva 1.

Läpitunkemattomuusehto, eräs kontinuumimekaniikan perusaksioma, ilmenee eksplisiittisesti vain saumoissa. Saumajännitysten p" työ siirrostilassa $\gamma'_{\mu\nu}$ on kitkaehdosta riippuen

$$(p''|\gamma)_\Gamma = \int \hat{p}''_{\nu\mu} \cdot \hat{\gamma}_{\mu\nu} d\Gamma = \int (\sigma''_n \gamma'_n + (\hat{t}' \cdot \hat{\gamma}''_s) d\Gamma \tag{3}$$

$$(p''|\gamma')_\Gamma = \int \hat{p}'' \cdot \hat{\gamma}' d\Gamma \lesseqgtr 0, \text{ jos } tg\upsilon = tg\phi \text{ ja } h,\rho = 0 \tag{4}$$

$$(p''|\gamma')_\Gamma \lesseqgtr \int |tg\phi| |\sigma''| |\gamma'_s| d\Gamma, \text{ jos } tg\check{\upsilon} = 0 \text{ ja } h,\rho = 0 \tag{4'}$$

Kulmaa $\upsilon=\phi$ vastaa nk. geometrinen, kulmaa $\check{\upsilon}=0$ dissipatiivinen eli reaalikitka. Yhtäläisyysmerkki on voimassa vain yhteenkuuluville p ja γ. Jännitykset täyttävät kappaleen sisällä ja sen ulkopinnalla A tasapainoehdot

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0, \quad \sigma_{ij} \cos n_i = p_j \quad (j=1, 2, 3) \tag{5}$$

Muodonmuutokset ε_{ij} riippuvat siirtymistä ja jännityksistä seuraavasti

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (i,j = 1, 2, 3) \tag{6}$$

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = E_{ijrs} \varepsilon_{rs}, \quad \varepsilon_{ij} = E^{-1}_{ijrs} \sigma_{rs} \tag{7}$$

jossa E_{ijrs} ovat aineen jäykkyysmatriisin alkiot. Kappaleen jännitystila $\{\sigma_{ij}\}$ voidaan käsittää jännitysvektorina S tilavuuden V määrittelemässä Hilbert-avaruudessa [2], jossa skalaaritulo ja normi ovat

$$(S_1|S_2) = \int \{\sigma_1\} [E]^{-1} \{\sigma_2\} dV = \int \sigma_{ij1} \varepsilon_{ij2} dV,$$

$$||S||^2 = (S|S) = \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 2W(\sigma) \tag{8}$$

W on kappaleen kimmoenergia. Jännitystilat $\sigma'_{ij} = E_{ijrs} \varepsilon'_{rs}$, jotka vastaavat homogeenisia ehtoja 2) ja 6) (h, =0) täyttäviä tiloja $\{\varepsilon', u'\gamma'\}$muodostavat L(V):ssä lineaarisen mahdollisten muodonmuutostilojen S' joukon, joka monoliittisessa rakenteessa (Γ=0)

muodostaa L(V):n aliavaruuden L'(V), mutta ei-monoliittisessa rakenteessa sen sijaan konveksin kartion K'(V). Jännitystilat σ'', jotka täyttävät homogeeniset ehdot 7) ($b_i=0$), muodostavat L(V):ssä mahdollisten tasapainotilojen S" joukon, joka monoliittisessa rakenteessa muodostaa aliavaruuden $L''(V)\subset L(V)$, mutta ei-monoliittisessa rakenteessa sen sijaan konveksin kartion $K''(V)\subset L(V)$. Vektoreiden S" ja S' skalaaritulo voidaan Gaussin integraalilauseen perusteella lausua p" ja $p''_{\nu\mu}$ voimien työn avulla, jos b, h, $\rho=0$.

$$(S''|S'')=\int\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij}dV=\int_A\hat{p}''\cdot\hat{u}'dA-\int_\Gamma\hat{p}''_{\nu\mu}\cdot\hat{\gamma}'_{\mu\nu}d\Gamma \qquad (9)$$

Reunaehdot lausutaan yleensä siten, että pinnan osalla A_p^* voimakuormitus $p=p_1$ annetaan ja osalla $A_u^*=A-A_p^*$ siirtymät $u=u_1$ annetaan. Silloin:

$$\hat{p}=\hat{p}_1+\hat{p}_o, \qquad \hat{u}=\hat{u}_1+\hat{u}_o \qquad (10)$$

jossa $\hat{p}_o$ A_u^*:lla ja $\hat{u}_o$ A_p^*:lla ovat määräämättömiä ja muualla häviäviä jakautumia. Koska lineaarikuvaukset p(S") ja u(S') ovat olemassa, vastaa reunaehtoja 10) vektorit $S''=S''_1+S''_o\in L''(V)$ ja $S'=S'_1+S'_0\in L'(V)$. S''_1 ja S'_1 ovat annetut vektorit. Tilat S''_o ja S'_o täyttävät homogeniset reunaehdot 10) ja sijaitsevat 0-kuormaa vastaavissa aliavaruuksissa $L''_o(V)$, $L'_o(V)$. Jos rakenne on monoliittinen ($\Gamma=0$), seuraa 9):stä, että $L''_o(V)\perp L'_o(V)$ siis $(S''_o|S'_o)=\int\hat{p}_o\cdot\hat{u}_o dA=0$. Tähän perustuu Pragerin ja Syngen kehittämä hyperympyrämenetelmä, jonka avulla voidaan rajata kimmoenergia W ja kehittää likiratkaisuja [2]. Ei-monoliittiseen rakenteeseen tätä menetelmää ei voida soveltaa, koska avaruudet $L''_o(V)$ ja $L'_o(V)$ eivät 9):n mukaan ole ortogonaalisia. Tulokseen päästään toista tietä ulkoisen kuormituksen tarkemman määrittelyn ja siihen liittyvän jäykkyyskäsitteen avulla. Kosketusprobleemoissa pintoja A_p^* ja A_u^* ei voida erottaa. Kuormituspinnaksi A* sanomme ulkopinnan osaa, jossa p ja u täyttävät ei-homogeeniset ehdot. Jäljellä olevalla osalla $A_o=A-A^*$ häviävät joko p tai u. Pinnalla A* määritellään kuormitusavaruudeksi sanottu Hilbertavaruus L(A*), jossa skalaaritulo ja normi ovat

$$(p_1|p_2)=\int_{A^*}\hat{p}_1\cdot\hat{p}_2dA, \quad ||p||=\sqrt{(p|p)} \qquad (11)$$

Kaavojen 10) mukaiset reunaehdot edustavat p:n ja u:n lineaarijoukkoja, jossa määräämättömät p_o ja u_o kuuluvat L(A*):n aliavaruuksiin $L''_o(A^*)$ ja $L'_o(A^*)$. Yksikäsitteiseen kuormien määrittelyyn päästään jakamalla kuormat p ja u ortogonaalisiin komponentteihin $p=p^*+p^o$, $u=u^*+u^o$, jossa $p^o \in L''_o(A)$, $u^o \in L'_o(A)$ ja $(p^*|p^o)=0$, $(u^*|u^o)=0$. Tällöin p* ja u* kuuluvat $L''_o(A)$:n ja $L'_o(A)$:n ortogonaalisiin komplementteihin $\tilde{L}''_o(A)$ ja $\tilde{L}'_o(A)$. Koska kuormitusvektorien P ja u normit ovat

$$||p||^2 = ||p^*||^2+||p^o||^2, \quad ||u||^2 = ||u^*||^2+||u^o||^2 \qquad (12)$$

edustavat kuormituksen perpendikulaareiksi sanotut p* ja u* niitä ehtoja 10) täyttäviä jakaumia, joilla on pienin normi. Reaalisen kitkan tapauksessa ei monoliittisen rakenteen kosketusprobleemalla ole yksikäsitteistä ratkaisua. Sen sijaan geometrisen kitkan tapauksessa on voimassa *komplementaarisuussääntö* [1]: *Ei-monoliittisen rakenteen reuna-arvotehtävän ratkaisu on yksikäsitteinen, jos avaruudet $L''(A^*)$ ja $L'(A^*)$ ovat ortogonaaliset, jolloin $(p^o|u^o)=0$, $\forall p^o \in L''_o(A^*)$ ja $\forall u^o \in L'(A^*)$ ja $(p|u) = (p^*|u^o)+(p^o|u^*)$.*

Kosketusprobleemoissa on useimmiten voimakuormitus annettu ehtoina

$$(p|g_i) = Q_i \qquad (i = 1...n) \qquad (13)$$

Jokainen yhtälö (i) määrittelee L(A*):ssa hypertason H_i. Yhdessä ne määrittelevät "hypersuoran" eli hypertasojen leikkauksen H_n. Aliavaruuden $L''_o(A^*)$ vektorit p^o täyttävät homogeeniset ehdot $(p^o|g_i) = 0$, jolloin $L''_o(A^*)$ ortogonaalinen komplementti on vektoreiden g_i virittämä n-ulotteinen aliavaruus $L''_n(A^*)$. Koska $u^o, p^* \in L'_n(A^*)$, on niiden täytettävä ehdot

$$u^o = \Sigma U^o_i g_i, \quad p^* = \Sigma P^*_j g_j, \quad \Sigma p^*_j (g_j|g_i) = Q_i \qquad (14)$$

Jos u* = 0, voidaan p*:n ja u^o:n avulla määritellä kuormitusjäykkyys

$$D(p^*) = \frac{||p^*||}{|u_{p^*}|} = \frac{||p^*||^2}{(p^*|u)}, \qquad (13)$$

joka ilmaisee kuorman p* pituuden suhteen siirtymän u projektioon u_{p^*} suunnassa p*.

Jos rakenteessa on välyksiä h>0, suurenee kosketuspinta Γ_k ja rakenteen jäykkyys kuorman kasvaessa. Jos välyksiä ei ole, mutta rakennetta on jännitetty, pienenevät Γ_k ja jäykkyys. Jos vihdoin rakenteessa vallitsee alkutilanteessa täydellinen kosketus ja jännityksetön tila, pysyy jäykkyys vakiona p*:n kasvaessa, mutta Γ_k pienenee epäjatkuvasti, kun p*=0 alkuarvosta Γ vakioarvoon Γ_k.

Koska ratkaisulle S on tässä tapauksessa voimassa $||S||^2=2W=(p^*|u^0)$, voidaan jäykkyys lausua S"-tai S'-normien avulla

$$D''(p^*) = \frac{||p^*||^2}{||S''||^2}, \quad D'(p^*) = \frac{||S'||^2}{(q|u')^2}, \; (q=p^*/||p^*||) \qquad (14)$$

Nämä lausekkeet eivät määrittele jäykkyyttä yksikäsitteisesti, mutta jos ki ka on geometrinen, ovat voimassa seuraavat suurimman ja pienimmän jäykkyyden periaatteet [1]:

LAUSE I: Luvallisen jännitystilan {p,S"} avulla määritelty jäykkyys*

$$D''(p^*) = \frac{||p^*||^2}{||S''||^2} = \frac{||p^*||^2}{2W\ (\sigma'')} \qquad (15)$$

saavuttaa todellisessa tilassa, jossa siirtymien jatkuvuus ja läpitunkemattomuusehdot ovat täytetyt, suurimman arvonsa.

LAUSE I': Luvallisen muodonmuutostilan {S', u', γ'} avulla määritelty jäykkyys

$$D'(p^*) = \frac{||S'||^2}{(q^*|u')^2} = \frac{2W(\varepsilon')}{(q|u')^2} \qquad (15')$$

saavuttaa todellisessa tilassa, joka täyttää tasapainoehdot ja saumajännitysten toispuoliset ehdot 1) pienimmän arvonsa.

Jos jähmeä kitkaton leimasin painetaan epäkeskisyydellä e kimmoiseen alustaan voimalla P (kuvat 3-6) täyttävät voimat p ehdot

$\int_{A^*} \hat{p}\cdot\hat{\imath}dy=N=-P$, $\int_{A^*} \hat{p}\cdot\hat{\imath}ydy=M=Pe$, $\int_{A^*} \hat{p}\cdot\hat{\jmath}dy=0$ $(A^*=d)$, jossa 13, 14)

mukaan $\hat{g}_1=\hat{\imath}$, $\hat{g}_2=\hat{\imath}y$, $\hat{g}_3=\hat{\jmath}$ saadaan, jos $(\hat{g}_1|\hat{g}_2)=0$, $A^*:-\frac{d}{2}\leq y\leq\frac{d}{2}$

$$\hat{p}^*=p_x\hat{\imath}=(p_1+p_2y)\hat{\imath}=\frac{P}{d}(1+\frac{ey}{i^2})\hat{\imath},\quad ||p^x||^2=\frac{P^2}{d}(1+\frac{e^2}{i^2}),\quad i^2=d^2/12$$

$$q_1=1/(\sqrt{d(1+(\frac{e}{i})'}),\quad q_2=ey/^{12}\sqrt{d\ 1+(\frac{e}{i})^2}\ ,\quad \hat{u}=(v^o+\omega^o y)\hat{\imath}+u_y^o(y)\hat{\jmath},$$

$(u_y^o(y)$ määräämätön). Jäykkyys voidaan lausua perpendikulaarin tai siihen verrannollisen puristusvoiman P avulla. Merkitsemällä arvoa e=0 vastaavaa puristusjäykkyys D(0):lla on

$$D(p^*)=\frac{P^1(1+(\frac{e}{i})^2)}{A^x(v+ev)},D(P)=\frac{P}{v+e\omega}=\frac{D(0)}{\delta(e)}\ ,\ D''(P)=\frac{P^2}{2W(\sigma'')},$$

$$D'(P)=\frac{2W(\sigma')}{(v+e\omega)^2}\ ,\ u_p^o=v+\omega e=\frac{P}{D(0)}\ \delta(e),\ v^o=\frac{P}{D(0)}\ \beta(e)$$

$$\omega^o=\frac{P}{D(0)}\ \alpha(e) \tag{15}$$

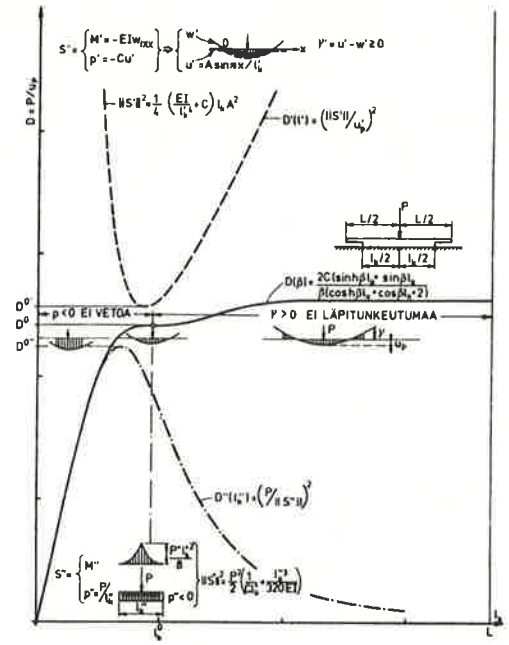
3. KOSKETUSPINNAN LAAJUUDEN VAIKUTUS

Tarkastamme yhtenäistä rakennetta, johon on leikattu halkeamia, joissa läpitunkemattomuutta vastaavat ehdot on eliminoitu, jolloin rakenne käyttäytyy kuten monoliittinen rakenne. Olkoot halkeaman Γ_h pintakoordinaatit α_1, α_2 ja halkeaman reunaa $\partial\Gamma$ määritelköot sellaiset parametrit $r_1,\ldots,r_n$ relaation $f(\alpha_1\alpha_2r_1\ldots r_n)=0$ avulla, että Γ_h kasvaa jokaisen r_i:n mukaan.

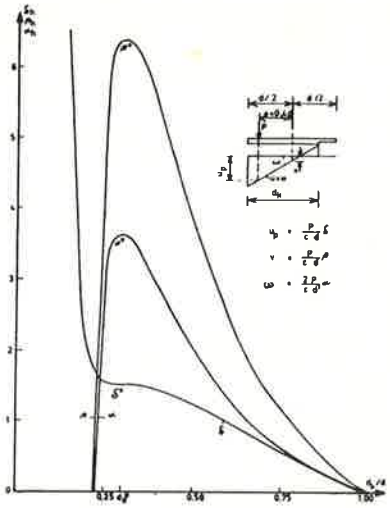
LAUSE II: Jos halkeama syvenee, pienenee rakenteen jäykkyys

$$\frac{\partial D}{\partial r_i}\leq 0 \tag{16}$$

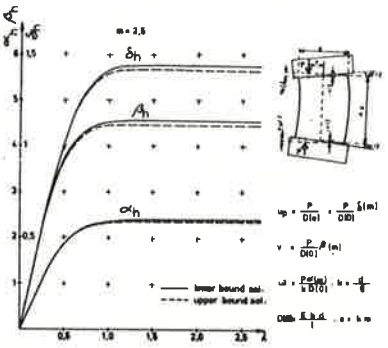
On olemassa eräs halkeaman rajatila $\partial\Gamma^o$, jossa D:llä on stationaariarvo ja infleksiopiste



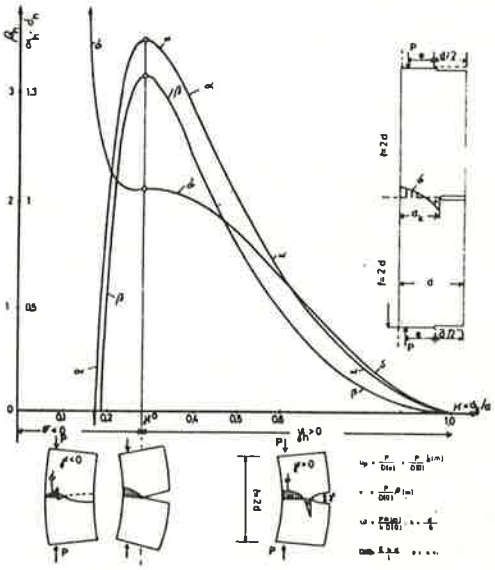
Kuva 2.
Winkler alustalla olevan palkin jäykkyys $D(l_k)$.



Kuva 3.
Jähmeä palkki Winkler alustalla. Siirtymäparametrit δ, β, α.



Kuva 4.
Suorakaiteen siirtymäparametrit δ,β,α vapaassa kosketuksessa.



Kuva 5.
Leikatun suorakaiteen siirtymäparametrit δ_h,β_h,α_h, 0 vapaa kosketus.

$$\left(\frac{\partial D}{\partial r_i}\right)_{r_o} = 0; \qquad \left(\frac{\partial^2 D}{\partial r_i \partial r_j}\right)_{r_o} = 0; \ \forall r_i,\ r_j \tag{17}$$

ja jossa halkeaman reunalla $\partial\Gamma^o$ *jännitykset häviävät* $p(\partial\Gamma^o)=0$.

Tod. Tarkastamme halkeamapintoja Γ_{h1} ja Γ_{h2} (kuva 1b) sekä niitä vastaavia ratkaisuja $\{\sigma_1, p_1, \varepsilon_1, u_1, \gamma_1\}$ ja $\{\sigma_2, p_2, \varepsilon_2, u_2, \gamma_2\}$ samassa kuormituksessa p^*. Tällöin

pinnalla $\Gamma_{h1} \cap \Gamma_{h2}$ $\quad \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2 \neq 0, \quad \hat{p}_1, \hat{p}_2 = 0$

pinnalla $\Delta\Gamma_1 < 0$ $\quad \hat{\gamma}_1 \neq 0, \ \hat{p}_1 = 0, \quad \hat{\gamma}_2 = 0, \quad \hat{p}_2 \neq 0$

pinnalla $\Delta\Gamma_2 > 0$ $\quad \hat{\gamma}_1 = 0 \quad \hat{p}_1 \neq 0 \quad \hat{\gamma}_2 \neq 0 \quad \hat{p}_2 = 0$

Koska tila $S=S_2-S_1$ on luvallinen sekä $L'(V)$ että $L''(V)$ avaruudessa ovat voimassa työyhtälöt

$$||\Delta S||^2 = \int(\sigma_{ij2}-\sigma_{ij1})(\varepsilon_{ij2}-\varepsilon_{ij1})dV = -\int_\Gamma (p_1-p_2)(\gamma_2-\gamma_1)d =$$

$$\int_{\Delta\Gamma_1} p_2\gamma_1 d + \int_{\Delta\Gamma_2} p_1\gamma_2 dA > 0 \tag{18}$$

$$||S_2||^2 = 2W(\sigma_1+\Delta\sigma) = 2W(\sigma_1) + 2\int\Delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij1}dV + 2W(\Delta\sigma)$$

$$\int\Delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij1}dV = -\int_{\Delta\Gamma_1}(\hat{p}_2-\hat{p}_1)\cdot\hat{\gamma}_1 d\Gamma = -\int_{\Delta\Gamma_1} p_2\gamma_1 d\Gamma$$

$$2\Delta W = 2(W(\sigma_2)-W(\sigma_1)) = \int_{\Delta\Gamma_2} p_1\gamma_2 d\Gamma - \int_{\Delta\Gamma_1} p_2\gamma_1 d\Gamma \tag{19}$$

Koska yhtälön 18) oikean puolen molemmat integraalit ovat positiivisia, suurenee W, jos $\Delta\Gamma_1=0$ ja pienenee, jos $\Delta\Gamma_2=0$. W kasvaa sen vuoksi monotonisesti Γ_n:n kasvaessa ja jäykkyys $D=||p^*||^2/2W$ pienenee.

Jos $\Delta\Gamma$:t supistuvat kapeiksi kaistoiksi alkioksi $d\Gamma_1=0$, $d\Gamma_2=\int dnds$, on $2dW=\int p_1\gamma_2 dnds \geq 0$. Jos tällöin löydetään sellaiset reunat $\partial\Gamma^o$, joissa $\hat{p}_1=0$, on ilmeisesti γ:n jatkuvuuden perusteella $dW=0$, joten $\partial\Gamma^o$:lla

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r_i}\right)_{r_o} = 0, \quad \left(\frac{\partial D}{\partial r_i}\right)_{r_o} = 0 \quad \forall r_i = r_i^o \tag{20}$$

Jos halkeamareuna siirtyy rajasta $\partial\Gamma^o$ rajalle $\partial\Gamma^{o\prime}$, muuttuvat parametrit vastaavasti $r_i' = r_i^o + \Delta r_i$. Jos muutokset Δr_i ovat joko kaikki positiivisia tai kaikki negatiivisia, on W:n W:n monotoonisen kasvun takia täytettävä kaksoisehto

$$\Delta W = \left\{ \pm\Sigma\left(\frac{\partial W}{\partial r_i}\right)_{r^o}|\Delta r_i| \pm \Sigma\Sigma\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_i \partial r}\right)_{r^o}|\Delta r_i \Delta r_j| \pm \right.$$

$$\left. \pm\Sigma\Sigma\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial r_l \partial r_s \partial r_t}\right)_{r^o}|\Delta r_i \Delta r_s \Delta r_t| \pm \cdots \right\} = \left\{ \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \right\} \tag{21}$$

Ehdon 20) perusteella tämä on riittävän pienillä Δr_i muutoksilla mahdollista vain, jos jokainen

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_i \partial r_j}\right)_{r^o} = 0 \tag{22}$$

Jos kuormitusehdot ovat 13):n mukaiset, saadaan parametrit U_i^o monoliittisen rakenteen työyhtälön avulla

$$\delta W = \int \delta\hat{p}\cdot\hat{u}dA = \Sigma\delta Q_i U_i^o \rightarrow U_j^o = \frac{\partial W}{\partial Q_j} \tag{23}$$

LAUSE III: Yleistetyillä siirtymillä U_i^o on rajatilassa ääriarvo.

<u>Todistus</u>. Jos kuormitusehtojen 13) osakuormista Q_i vain Q_j saa lisäyksen dQ, on uudessa rajatilassa $\{Q', r^{o\prime}\}$ $Q' = Q_j + dQ_j$, $Q_i' = Q_i$ kun $i \neq j$ ja $r_s^{o\prime} = r_s^o + dr_s^o$. Tässä tilassa saavat ehdot 20) ja 22) muodot 20'), 22'), joista seuraa 24)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r_s}\right)_{Q', r^{o\prime}} = \left(\frac{\partial W}{\partial r_s}\right)_{Q, r^o} + \Sigma\left(\frac{\partial W}{\partial r_s \partial r_t}\right)_{Qr^o} dr_t^o + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_s \partial Q_j}\right)_{Qr^o} dQ_j = 0 \tag{21'}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_s \partial r_t}\right)_{Q' r^{o\prime}} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_s \partial r_t}\right)_{Q, r^o} + \Sigma\left(\frac{\partial^3 W}{\partial r_s \partial r_t \partial r_l}\right)_{Qr^o} dr_l^o + \left(\frac{\partial^3 W}{\partial r_s \partial r_t \partial Q_j}\right)_{Qr^o} dQ_j = 0 \tag{22'}$$

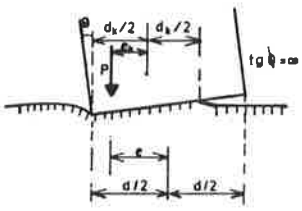
$$\left(\frac{\partial U_j}{\partial r_s}\right)_{Q,r_o} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial r_s \partial r_t}\right)_{Q,r_o^o} = -\Sigma\left(\frac{\partial^3 W}{\partial r_s \partial r_t \partial r_l}\right)_{Qr^o} \frac{\partial r_l^o}{\partial Q_j} \qquad (24)$$

Koska $\frac{\partial^2 U_j}{\partial r_s \partial r_t}$ kaavan 21) mukaan ei häviä kaikilla r_s^o ja r_t^o arvoilla, saavuttaa U_j^o ääriarvon. ■

Voidaan osoittaa, että jos kaikki leikkaukset ovat rajatilan leikkauksia, jolloin $\sigma,\tau=0$ $\partial\Gamma^o$:lla ja jännitykset $p\in Y$ Γ_k:lla ja $\gamma\notin X$ Γ_n:lla, jännitystila σ^o yhtyy vastaavaan ei-monoliittisen rakenteen vapaan kosketuksen jännitystilaan σ_k.

Koska leikatussa saumassa $d\Gamma_2$ $\hat{p}_1 \cdot \hat{\gamma}_2 \geq 0$ on $\gamma_{n2} > 0$, jos $\sigma_n > 0$ ja $\gamma_{n2} < 0$, kun $\sigma_2 > 0$. Koska σ ja γ_n muuttuvat jatkuvasti $\partial\Gamma$:n siirtyessä $\partial\Gamma^o$ toiselta puolelta toiselle, tämä merkitsee, että $\partial\Gamma^o$ muodostaa sen halkeaman rajaviivan, jonka sisäpuolella olevia $\partial\Gamma$-viivoja vastaa tiloja $\tilde{S}''$, joissa ehtoa $\sigma \leq 0$ vastaan on rikottu ja ulkopuolisia viivoja $\partial\Gamma$ vastaa läpitunkemattomuusehtoa rikkovia tiloja $\tilde{S}'$. Rajatila kuvaa siten havainnollisesti jäykkyyden ja siirtymäparametrien ääriarvojen riippuvuutta kosketuksen laajuudesta. Tämä mahdollistaa ratkaisun määrityksen varioimalla kosketuksen laajuutta (kuvat 2-4). Mikäli leikatun rakenteen ratkaisu tunnetaan, voidaan $\partial\Gamma^o$ määrätä ehdosta $p=0$. Jos ei pystytä eliminoimaan $\partial\Gamma$:llä olevaa singulariteettia, voidaan rajatila määrätä lauseen III avulla (kuva 6). [3]

Kuva 6.



$$\theta = \frac{1+\varkappa}{1+4\chi^2}\,\frac{2Pe_k}{\mu\pi d_k^2}\,; \quad d_k = d-n\,; \quad e_k = e-\frac{n}{2}$$

$$\left(\frac{\partial\,\phi}{\partial\,n}\right)_o = 0 \implies n^o = 4e-d\,; \quad d_k^o = 4e_k^o$$

$$\theta_{max} = \theta^o = \frac{1+\varkappa}{1+4\chi^2}\,\frac{P}{2\mu\pi(d-2e)}$$

4. KIRJALLISUUS

[1] Parland, H., On the stiffness of non-monolithic structures. VTT julkaisu 123 Helsinki 1968.

[2] Synge, J.L., Hypercircle in Mathematical Physics. Cambridge 1957.

[3] Milne-Thompson, L.M., Plane Elastic Systems. Berlin 1960.

REUNAELEMENTTIMENETELMÄ

DI Matti Lähteenmäki
Tampereen teknillinen korkeakoulu
Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Viime vuosikymmenen aikana on kaksi- ja kolmiulotteisten kontinuumiongelmien numeeriseen analysointiin kehitetty uusi menetelmä, jota kutsutaan reunaelementtimenetelmäksi. Menetelmän perustana on integraaliyhtälö, joka sitoo toisiinsa kappaleen pinnan siirtymät sekä pinta- ja tilavuusvoimat. Perusyhtälö ratkaistaan likimääräisesti elementtimenetelmällä, minkä jälkeen kappaleen sisäpisteiden siirtymä- ja jännitystila voidaan laskea tavallisella integroinnilla.

Menetelmän teoreettinen perusta luotiin jo viime vuosisadan lopussa [1], kun Somigliana johti perusintegraaliyhtälön. Käytännössä Somiglianan yhtälön analyyttinen ratkaisu onnistuu harvoin, ja näin ollen sen merkitys jäikin pitkäksi ajaksi melko vähäiseksi. Seuraavat edistysaskeleet otettiin vasta 60-luvun lopussa, jolloin tietokoneiden käyttö teki mahdolliseksi numeerisen ratkaisun. Ensimmäisenä menetelmää sovellettiin lineaarisen kimmoteorian tasostatiikan ratkaisemiseen [2] ja sen jälkeen vastaavaan kolmiulotteiseen tapaukseen [3], [4]. Tämän jälkeen tutkimuskenttä on laajentunut nopeasti käsittäen nykyisin jo mm. laattateorian, plastisuusteorian ja dynamiikan tehtävät.

Reunaelementtimenetelmän tärkein etu elementtimenetelmään nähden on siinä, että diskretisoitavan alueen muodostaa kappaleen reuna, ts. elementteihin jaettavan alueen dimensio on alentunut yhdellä. Numeerisessa ratkaisussa syntyvässä lineaarisessa yhtälöryhmässä on näin ollen vähemmän yhtälöitä. Elementtimenetelmästä poiketen siirtymä- ja jännitystila kappaleen sisällä voidaan ratkaista halutuissa pisteissä tarvitsematta käsitellä koko sisäosaa. Mikäli kiinnostavia sisäpisteitä on vähän, aiheutuu tästä huomattava etu. Toisinaan voi

tilanne olla niinkin edullinen, ettei sisäpisteitä tarvita lainkaan. Sisäpisteiden vapaa sijoittelu tekee mahdolliseksi myös jännitys-huippujen joustavan tutkimisen. Haittana mainittakoon, ettei reuna-elementtimenetelmässä saatavan lineaarisen yhtälöryhmän kerroinmatriisi ole symmetrinen eikä harva. Tämä pienentää dimension alenemisesta syntynyttä etua.

Seuraavassa luvussa johdetaan reunaelementtimenetelmän perusintegraaliyhtälö kolmiulotteisessa tapauksessa ja annetaan kaksiulotteisen tapauksen vastinkaavat. Johdossa käytetään tavanomaisia tensorianalyysin merkintäsopimuksia.

2 PERUSYHTÄLÖN JOHTO

Tarkastellaan lineaarisesti kimmoisen kappaleen V statiikkaa ortogonaalisessa karteesisessa koordinaatistossa. Materiaali oletetaan isotrooppiseksi ja homogeeniseksi. Kun tasapainodifferentiaaliyhtälöt lausutaan siirtymäkomponenttien u_i avulla, saadaan Navierin yhtälöt

$$\frac{G}{1-2\nu} u_{i,ij} + G u_{j,ii} + X_j = 0 , \tag{1}$$

missä X_j on tilavuusvoimakomponentti suuntaan x_j. Yhtälön (1) ratkaisun on lisäksi toteutettava siirtymien u_i ja pintavoimien t_i reunaehdot kappaleen reunalla $S = S_{u_i} \cup S_{t_i}$, eli

$$\begin{cases} u_i(x) = \bar{u}_i , & x \in S_{u_i} \\ t_i(x) = \bar{t}_i , & x \in S_{t_i} . \end{cases} \tag{2}$$

Pintavoimien reunaehdot voidaan Hooken lakia ja kinemaattisia yhtälöitä käyttäen esittää siirtymien avulla muodossa

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \frac{2G\nu}{1-2\nu} n_i u_{k,k} + G n_j (u_{i,j} + u_{j,i}) = \bar{t}_i , \quad x \in S_{t_i} , \tag{3}$$

missä n_i on pinnasta ulospäin suunnattu ykkösnormaalivektori.

Reunaelementtimenetelmässä käytetään hyväksi yhtälön (1) Kelvinin probleeman ratkaisua eli fundamentaaliratkaisua. Tällä tarkoitetaan yhtälön (1) ratkaisua äärettömälle kappaleelle, kun kuormituksena on pisteessä (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ykkösvoima suuntaan x_j. Kun merkitään

$$r = [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2} , \tag{4}$$

voidaan Kelvinin probleeman ratkaisu esittää tensorina [1]

$$U_{ij} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left(\frac{1}{r}\right) \left[(3 - 4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] . \tag{5}$$

Kaava (5) antaa siis äärettömän kappaleen pisteen $x = (x_1, x_2, x_3)$ siirtymän suuntaan x_i, kun kuormituksena on ykkösvoima pisteessä $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ suuntaan x_j. Tasomuodonmuutostilan vastaaava kaava on [2]

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3 - 4\nu)\delta_{\alpha\beta} \ln \frac{1}{r} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] . \tag{6}$$

Siirtymiä U_{ij} vastaavat pintavoimat lasketaan yhtälöstä (3). Ne voidaan esittää tensorina [3]

$$T_{ij} = - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2}\right) \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left(\delta_{ij} + \frac{3}{1-2\nu} r_{,i} r_{,j} \right) + n_j r_{,i} - n_i r_{,j} \right] . \tag{7}$$

Tasomuodonmuutostilan vastinkaava on [2]

$$T_{\alpha\beta} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r}\right) \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{2}{1-2\nu} r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) + n_\beta r_{,\alpha} - n_\alpha r_{,\beta} \right] . \tag{8}$$

Kappaleen V kahdelle jatkuvalle siirtymäkentälle u_i ja u_i' sekä niitä vastaaville tilavuus- ja pintavoimakentille (X_i, t_i) ja (X_i', t_i') on voimassa Bettin vastavuoroisuuslause [1]

$$\int_V u_i X_i' \, dv + \int_S u_i t_i' \, ds = \int_V u_i' X_i \, dv + \int_S u_i' t_i \, ds . \tag{9}$$

Olkoon piste ξ kappaleen V sisäpiste. Koska U_{ij} ja T_{ij} ovat singu-

laarisia kuormituspisteessä ξ, sovelletaan Bettin lausetta kappaleeseen V_0, joka saadaan poistamalla kappaleesta V ξ-keskinen ε-säteinen pallo. Käytetään siirtymäkenttänä u_i' tensoria U_{ij}, jolloin vastaava tilavuus- ja pintavoimakenttä on $(0, T_{ij})$. Tällä tavoin saadaan

$$\int_{S_0} u_i(x)\, T_{ij}(x,\xi)ds = \int_{V_0} X_i(x)\, U_{ij}(x,\xi)dv + \int_{S_0} t_i(x)\, U_{ij}(x,\xi)ds \ , \qquad (10)$$

missä S_0 on kappaleen V_0 reuna. Vaikka U_{ij} ja T_{ij} ovat singulaarisia pisteessä ξ, ovat raja-arvot

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{S_0} t_i(x)U_{ij}(x,\xi)ds = \int_S t_i(x)U_{ij}(x,\xi)ds \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{V_0} X_i(x)U_{ij}(x,\xi)dv = \int_V X_i(x)U_{ij}(x,\xi)dv \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{S_0} u_i(x)T_{ij}(x,\xi)ds = u_j(\xi) + \int_S u_i(x)T_{ij}(x,\xi)ds \end{cases} \qquad (11)$$

kuitenkin olemassa [3]. Yhtälöstä (10) saadaan, kun $\varepsilon \to 0$,

$$u_j(\xi) = \int_S [\, t_i(x)\, U_{ij}(x,\xi) - u_i(x)\, T_{ij}(x,\xi)]ds + \int_V X_i(x)\, U_{ij}(x,\xi)dv \, . \qquad (12)$$

Yhtälö (12) on kappaleen sisäpisteen siirtymän Somiglianan identiteetti [1]. Sen avulla voidaan laskea sisäpisteen siirtymä, kun reunasuureet tunnetaan. Kun Hooken lakiin sijoitetaan kinemaattiset yhtälöt, saadaan

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\, u_{k,k}\, \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \ . \qquad (13)$$

Pisteen ξ jännitykset lasketaan kaavojen (12) ja (13) avulla. Tulos voidaan esittää muodossa [3]

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_S [\, t_k(x)D_{kij}(x,\xi) - u_k(x)S_{kij}(x,\xi)]ds + \int_V X_k(x)D_{kij}(x,\xi)dv \ , \qquad (14)$$

missä tensorit D_{kij} ja S_{kij} ovat

$$D_{kij} = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k} + \frac{3}{1-2\nu}r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} S_{kij} = \frac{(1-2\nu)G}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{1}{r^3}\right)\Big\{ & 3\frac{\partial r}{\partial n}\Big[\delta_{ij}r_{,k} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i}) + \\ & - \frac{5}{1-2\nu}r_{,i}r_{,j}r_{,k}\Big] + \frac{3\nu}{1-2\nu}(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + \\ & + 3n_k r_{,i} r_{,j} + n_j\delta_{ki} + n_i\delta_{kj} - \frac{1-4\nu}{1-2\nu}n_k\delta_{ij}\Big\} . \end{aligned} \tag{16}$$

Tasomuodonmuutostilan vastaavat kaavat ovat [5]

$$D_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\delta_{\gamma\alpha}r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta}r_{,\alpha} - \delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma} + \frac{2}{1-2\nu}r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}\right) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} S_{\gamma\alpha\beta} = \frac{(1-2\nu)G}{2\pi(1-\nu)}\left(\frac{1}{r^2}\right)\Big\{ & 2\frac{\partial r}{\partial n}\Big[\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\delta_{\gamma\alpha}r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta}r_{,\alpha}) - \frac{4}{1-2\nu}r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}\Big] + \\ & + \frac{2\nu}{1-2\nu}(n_\alpha r_{,\beta}r_{,\gamma} + n_\beta r_{,\alpha}r_{,\gamma}) + 2n_\gamma r_{,\alpha}r_{,\beta} + n_\beta\delta_{\gamma\alpha} + n_\alpha\delta_{\gamma\beta} + \\ & - \frac{1-4\nu}{1-2\nu}n_\gamma\delta_{\alpha\beta}\Big\} . \end{aligned} \tag{18}$$

Tasojännitystilan yhtälöt saadaan sijoittamalla tasomuodonmuutostilan yhtälöihin vakion ν paikalle $\nu/(1+\nu)$.

Voidaan todeta, että kappaleen sisäpisteiden siirtymä- ja jännitystila saadaan yhtälöistä (12) ja (14) tavallisilla integroinneilla, mikäli reunapisteiden siirtymät ja pintavoimat tunnetaan. Näiden määräämiseen tarvittava yhtälö saadaan raja-arvotarkasteluilla yhtälöstä (12), kun annetaan sisäpisteen ξ lähestyä reunapistettä $\bar{\xi}$. Tulos voidaan esittää muodossa [4]

$$C_{ij}(\bar{\xi})u_i(\bar{\xi}) = \int_S [t_i(x)U_{ij}(x,\bar{\xi}) - u_i(x)T_{ij}(x,\bar{\xi})]ds + \int_V X_i(x)U_{ij}(x,\bar{\xi})dv . \tag{19}$$

Tensori C_{ij} on riippuvainen reunan S geometriasta pisteessä $\bar{\xi}$. Jos pinnalla on pisteessä $\bar{\xi}$ yksikäsitteinen tangenttitaso, niin [4]

$$C_{ij} = \delta_{ij}/2 . \tag{20}$$

Huomattakoon, että yhtälössä (19) $U_{ij}(x,\bar{\xi})$ ja $T_{ij}(x,\bar{\xi})$ ovat singu-

laarisia, kun $x = \bar{\xi}$. Integraalit onkin tulkittava Cauchyn pääarvoksi.

Yhtälö (19) on reunamenetelmien perusyhtälö. Käytännössä sen analyyttinen ratkaisu ei onnistu juuri koskaan. Numeerinen käsittely on tietenkin mahdollinen. Seuraavassa luvussa tarkastellaan perusyhtälön elementtimenetelmän mukaista ratkaisua.

3 NUMEERINEN RATKAISU

Ratkaistaessa yhtälöä (19) elementtimenetelmällä jaetaan kappaleen pinta osiin, joita approksimoidaan reunaelementeillä. Kolmiulotteisessa tapauksessa reunaelementit voivat olla tasomaisia kuten kolmiot ja nelikulmiot tai kaarevia kuten isoparametriset elementit. Kaksiulotteisessa tapauksessa reunaelementit voivat olla janoja tai käyrän kaaria. Tuntemattomina ovat siirtymät tai pintavoimat elementtien tietyissä pisteissä eli solmuissa. Tuntemattomien suureiden arvot elementin alueessa interpoloidaan solmusuureista.

Tarkastellaan esimerkkinä kolmiulotteista kappaletta ja sen tasomaista reunaelementtiä, jossa on yksi solmu elementin pintakeskiössä, ja kenttäsuureiden arvot oletetaan solmuarvojen suuruiseksi koko elementin alueessa. Oletetaan reunaelementtejä olevan N kappaletta ja merkitään kenttämuuttujien solmuarvoja $u_i(n)$ ja $t_i(n)$. Tällöin saadaan yhtälö (19) diskretisoitua solmupisteessä m muotoon

$$C_{ij}(m)u_i(m) = \sum_{n=1}^{N} [t_i(n) \int_{S_n} U_{ij}(x,m)ds - u_i(n) \int_{S_n} T_{ij}(x,m)ds] + b_j(m). \qquad (21)$$

S_n on elementin n alue ja

$$b_j(m) = \int_V X_i(x)U_{ij}(x,m)dv \qquad (22)$$

on tavallinen integraali, joka voidaan laskea numeerisesti. Kirjoittamalla yhtälön (21) mukainen yhtälö jokaiselle solmupisteelle saadaan 3N lineaarista yhtälöä, joissa on 3N tuntematonta. Merkitsemällä

$$\begin{cases} \Delta U_{ij}(m,n) = \int_{S_n} U_{ij}(x,m)ds \\ \Delta T_{ij}(m,n) = \int_{S_n} T_{ij}(x,m)ds \end{cases} \tag{23}$$

menee yhtälö (21) muotoon

$$\sum_{n=1}^{N} [C_{ij}(m)\delta_{mn} + \Delta T_{ij}(m,n)]u_i(n) = \sum_{n=1}^{N} \Delta U_{ij}(m,n)t_i(n) + b_j(m) \tag{24}$$

eli matriisimuodossa

$$[T]\{u\} = [U]\{t\} + \{b\} . \tag{25}$$

Reunaehtojen perusteella tunnetaan puolet solmusuureista. Järjestämällä kaikki tuntemattomat yhtälön vasemmalle puolelle saadaan lopulta lineaarinen yhtälöryhmä

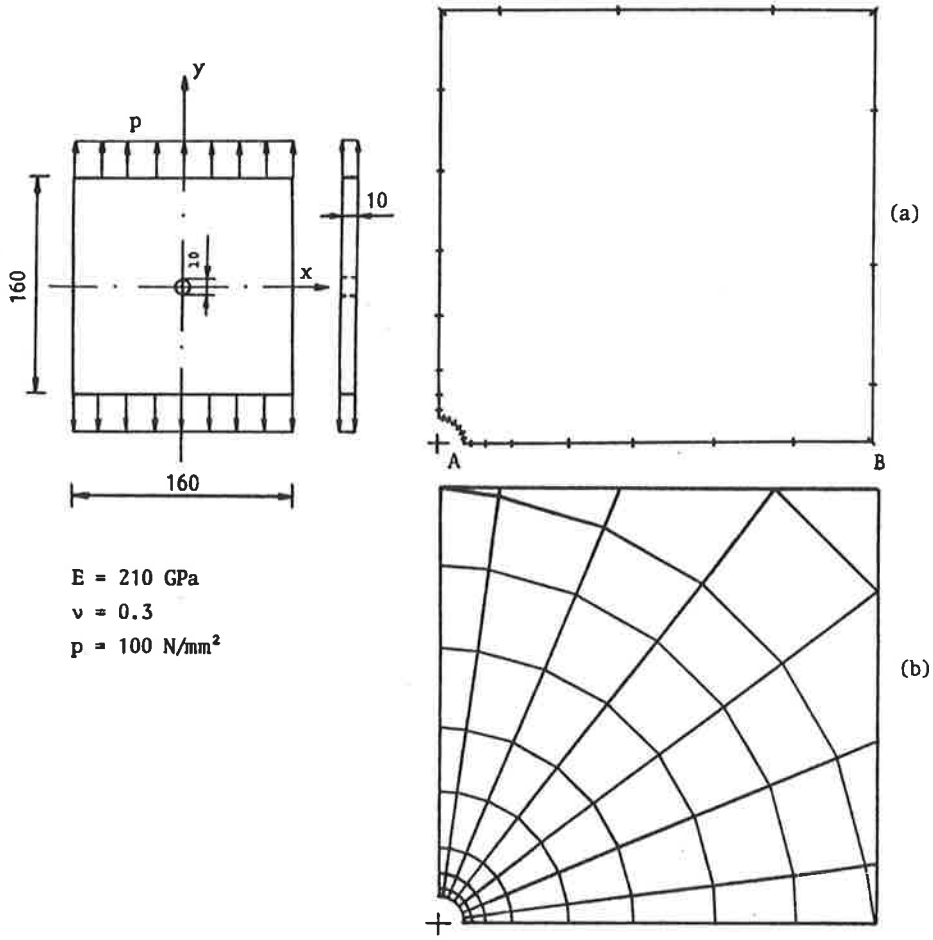
$$[A]\{\alpha\} = \{\beta\} . \tag{26}$$

Kun tuntemattomat on ratkaistu yhtälöstä (26), voidaan sisäpisteiden siirtymät ja jännitykset laskea yhtälöistä (12) ja (14) numeerisella integroinnilla.

4 ESIMERKKI

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista, kahdelta vastakkaiselta sivultaan tasaisen kuormituksen alaista neliölevyä, jossa on pieni reikä. Levyn statiikka on ratkaistu reunaelementtimenetelmäohjelmalla [5] käyttäen kuvan 1(a) elementtijakoa ja elementtimenetelmäohjelmalla SAP 6 kuvan 1(b) elementtijaolla. Koska reikä on levyn kokoon nähden pieni, voidaan tuloksia verrata myös Kirschin ääretöntä levyä koskevaan analyyttiseen ratkaisuun.

Reunaelementtimenetelmäratkaisussa levyn reuna on jaettu 31 vakioelementtiin ja elementtimenetelmäratkaisussa levy on jaettu 64 bilineaariseen nelikulmioon.



Kuva 1. Levy sekä sen jako (a) reunaelementteihin ja (b) elementteihin.

Taulukosta 1 nähdään reunaelementtimenetelmäohjelman antamien tulosten olevan tarkkuudeltaan suunnilleen samaa luokkaa kuin ohjelman SAP 6 tulokset. Reunaelementtimenetelmäohjelma vaati tässä tapauksessa huomattavasti vähemmän syöttötietoja kuin SAP 6. Kun jännitykset ja siirtymät laskettiin reunan lisäksi 20 sisäpisteessä, oli käytetty keskusyksikköaika vielä alle puolet ohjelman SAP 6 vaatimasta ajasta.

Taulukko 1. Leikkauksen A-B normaalijännityksen σ_y jakauma.

Koordinaatti		σ_y[MPa]	
x[cm]	Reunaelementti	SAP 6	Kirsch
0.5625	250.6	236.1	233.2
0.7500	153.9	154.8	151.9
1.0625	121.9	120.5	118.4
1.7500	105.3	106.6	105.1
2.8750	101.2	102.3	101.7
4.2500	99.3	101.0	100.7
5.7500	98.5	100.3	100.4
7.2500	102.9	99.3	100.2

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Love, A.E.H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edition. Dover, New York 1944. 643 s.

[2] Rizzo, F.J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly Journal of Applied Mathematics 25 (1967) 1, s. 83 - 95.

[3] Cruse, T.A., Numerical solutions in three dimensional elastostatics. International Journal of Solids and Structures 5 (1969) 12, s. 1259 - 1274.

[4] Cruse, T.A., An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers & Structures 4 (1974) 4, s. 741 - 754.

[5] Brebbia, C.A., The boundary element method for engineers. Pentech Press, London 1978. 189 s.

SUURTEN RAKENNEMALLIEN VÄRÄHTELYANALYYSI MOODISUPERPOSITIOMENETELMÄLLÄ

Apul.prof. Pentti Varpasuo
Helsingin Teknillinen Korkeakoulu

1 JOHDANTO

Kyseinen raportti on sivutuote ydinvoimalaitoksen reaktorirakennuksen analyysistä lentokonetörmäyskuormalle. Tämä analyysi suoritettiin kesällä 1980. Rakenteen diskretointi suoritettiin äärellisten elementtien menetelmää käyttämällä ja rakenteen vaste törmäyskuormalle määritettiin suoraa integrointia käyttäen. Jo tämän analyysin aikana heräsi ajatus saatujen tulosten luotettavuuden tarkistamisesta moodisuperpositiomenetelmää käyttäen. Aika ja resurssit kuitenkin loppuivat sillä kertaa kesken ja tehtävään palattiin uudestaan vasta syksyllä 1981, kun suurtietokoneen soveltuvuustutkimusten yhteydessä avautui mahdollisuus suorittaa suurta laskentakapasiteettia vaativien probleemien analysointia CRAY-1 suurtietokonetta käyttäen.

2 KÄYTETYN MALLIN KARAKTERISTISET ARVOT

Mallin muodostivat sisäkkäiset sylinterit ja rengaslaatat, joita eräin kohdin yhdistivät toisiinsa säteen suuntaiset seinät. Mallin rungon muodosti reaktorirakennuksen suojarakennussylinteri, joka päättyi puolipallokupoliin. Piirturikuva mallista on esitetty kuviossa 1.

Mallin nurkkapisteiden koordinaatit annettiin sylinterikoordinaatistossa. Mallin säteen suuntaisten leikkausten etäisyys toisistaan valittiin 15 asteeksi. Kussakin säteen suuntaisessa

leikkauksessa oli 60 nurkkapistettä. Malli muodostettiin symmetriseksi yhden tason suhteen siten, että malliin sisällytettiin kehän suunnassa vain puolet täyden ympyrän pituudesta. Näin ollen säteen suuntaisten leikkausten kokonaismääräksi saatiin 13. Nurkkapisteitten luku kussakin säteen suuntaisessa leikkauksessa oli 60, joten nurkkien luku koko mallissa tuli olemaan näin ollen 13 kertaa 60 eli 780. Tyypillinen säteen suuntainen leikkaus on esitetty kuvassa 2.

3 PERUSMAAN KUVAAMINEN MALLISSA

Perusmaa mallissa kuvattiin elastisella puoliavaruudella, jonka oletettiin alkavan kymmenen metrin pituisista kaivinpaaluista muodostetun paaluperustuksen alapuolelta. Paalut oletettiin jäykästi kiinnitetyiksi sekä "kovaan pohjaan" että peruslaattaan. Paalujen ja maaperän välinen yhteistoiminta paalujen poikkisuunnassa jätettiin huomiotta. Paalujen väleissä oleva maaperä kuvattiin 3-D elementeillä, joiden jäykkyys lisäsi paaluperustuksen horisontaalijäykkyyttä. "Kovan pohjan" kimmokertoimena, ominaispainona ja Poissonin vakiona käytettiin arvoja
$E = 4000\,[MN/m^2]$, $\rho = 0.018\,[MN/m^2]$ $\nu = 0.3$.

4 KÄYTETTY ELEMENTTITYYPPI SEKÄ MALLIN JÄYKKYYS-, VAIMENNUS- JA HITAUSOMINAISUUDET

Malli muodostettiin ns. LCCT-11 elementeistä (Linear Curvature Compatible Triangle), joiden avulla muodostettiin yleinen nelinurkkainen kuorielementti, jonka avulla kuorirakenteet diskretoitiin. Tällöin nelinurkkainen kuorielementti koostuu 12:sta kolmiosta. Nelinurkkaisten kuorielementtien luku mallissa oli 924. Vapausasteitten kokonaismäärä mallissa oli 4188. Näistä 2084 oli liitetty massa. Jäykkyysmatriisin puolinauhan leveys oli 391. Mallin kokonaismassa oli 202 000 tonnia. Vaimennusominaisuudet suorassa integroinnissa otettiin huomioon käyttämällä Raleighin vaimennusta ja vakioille α ja β valittiin arvot 3.14 ja 0.000628, jotka vastaavat 6 % vaimennusta 5 hertsin taajuudella

ja 20 % vaimennusta 100 hertsin taajuudella. Moodisuperpositiossa vaimennus valittiin 4 % kriittisestä kaikilla ominaismuodoille. Teräsbetoniseinien paksuus rakenteessa vaihteli puolesta puoleentoista metriin ja betonin dynaamiseksi kimmokertoimeksi valittiin E_D = 45 000 $[MN/m^2]$, ominaispainoksi ρ = 0.023 $[MN/m^3]$ ja Poissonin vakioksi ν = 0.15.

5 ANALYYSIMENETELMÄT

Suora integrointi suoritettiin käyttämällä Wilsonin Theta-menetelmää, jonka perustana on lineaarinen kiihtyvyysoletus kullakin aika-askeleella. Integrointiaskeleeksi valittiin 2 millisekuntia, jolloin taajuuksien aina 100 hertsiin asti voidaan olettaa tulevan riittävällä tarkkuudella integroiduiksi. Moodisuperpositiossa otettiin huomioon mallin 25 alinta ominaismuotoa, joiden avulla mallin siirtymähistoriat muodostettiin tutkituissa viidessä pisteessä kolmeen toisiaan vastaan kohtisuoraan suuntaan (kuva 2 pisteet 366, 378, 390, 406, 412). Ominaismuotoja yhdestä kahteenkymmeneenviiteen vastaavat kulmataajuudet, taajuudet, värähdysajat ja toleranssit on esitetty taulukossa 1.

6 KUORMITUS

Kuormitus vaikutti suojarakennussylinterin yläreunaan symmetriatasossa ja vaakasuoraan. Kuorman aikariippuvuus ja kuorman jakautumispinnan aikariippuvuus on esitetty kuvassa 3. Kuormitus vastaa 20 tonnin painoisen, 215 m/s nopeudella lentävän lentokoneen törmäyspulssia kiinteään esteeseen.

7 TIETOJA PROBLEEMAN RATKAISUN VAATIMISTA SUORITUSAJOISTA ERI TIETOKONEILLA

Honeywell H 66/17 keskisuurella tietokoneella SAP4-ohjelmaa käyttäen jäykkyysmatriisin dekomposointi kesti 7.5 tuntia.

Suorassa integroinnissa 75 askeleen pituisen vastehistorian osan määritys kesti 4.5 tuntia. Kolmen ominaisarvon ja kolmen ominaismuodon ratkaisu kesti 15 tuntia.

Cyber -175 suurella tietokoneella Stardyne-ohjelmaa käyttäen 25 ominaisarvon ja ominaismuodon ratkaisu kesti 80 minuuttia.

Cray-1 suurtietokoneella SAP4-ohjelmaa käyttäen 25 ominaisarvon ja ominaismuodon määritys kesti 908 sekuntia. Siirtymähistorioitten määritys moodisuperpositiolla kuudelle pisteelle kolmeen toisiaan vastaan kohtisuoraan suuntaan nollasta kolmeensataan millisekuntiin kesti 0.9 sekuntia.

8 SIIRTYMÄHISTORIAT

Kuvissa 4, 5, 6 ja 7 on esitetty siirtymähistoriat nollasta kolmeensataan millisekuntiin pisteille 366, 378, 390, 406, 412 ja 772 kolmeen toisiaan vastaan kohtisuoraan suuntaan. Kuvissa 4 ja 5 on esitetty siirtymähistoriat kuorman vaikutussuuntaan tutkituille viidelle pisteelle suoralla integroinnilla ja moodisuperpositiolla määritettyinä. Kuvassa 6 on esitetty siirtymähistoriat kuorman vaikutussuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa pisteille 366 ja 412, jotka vastaavat suojarakennuksen peruslaatan tasoa ja sylinteriosan yläreunan tasoa. Kuvassa 7 on esitetty siirtymähistoriat pystysuorassa suunnassa pisteille 366 ja 412 eli suojarakennuksen peruslaatan tasolle ja sylinteriosan yläreunan tasolle.

9 LOPPUPÄÄTELMÄT

Siirtymähistorioista suoralla integroinnilla ja moodisuperpositiolla määritettyinä voidaan tehdä seuraavat havainnot. Pisteissä lähellä perustustasoa törmäyssuunnassa ja vielä pystysuorassakin suunnassa siirtymien arvot kummallakin menetelmällä määritettyinä ovat yhdenmukaisia 30 % tarkkuudella. Perustustasosta etäämpänä vertikaalisuunnassa sijaitsevilla pisteillä

ei suoralla integroinnilla ja moodisuperpositiolla määritettyjen siirtymähistorioiden väliltä löydy minkäänlaista yhteensopivuutta. Voidaan olettaa, että mikäli moodisuperpositiossa otetaan huomioon kaikki ne ominaismuodot kuin suorassa integroinnissakin, eli käytetään samaa massojen jakaumaa nurkkapisteille, on tarpeen määrittää 100-300 ominaismuotoa ennen kuin suoran integroinnin ja moodisuperposition avulla saatujen siirtymähistorioitten välille saadaan yhteensopivuus.

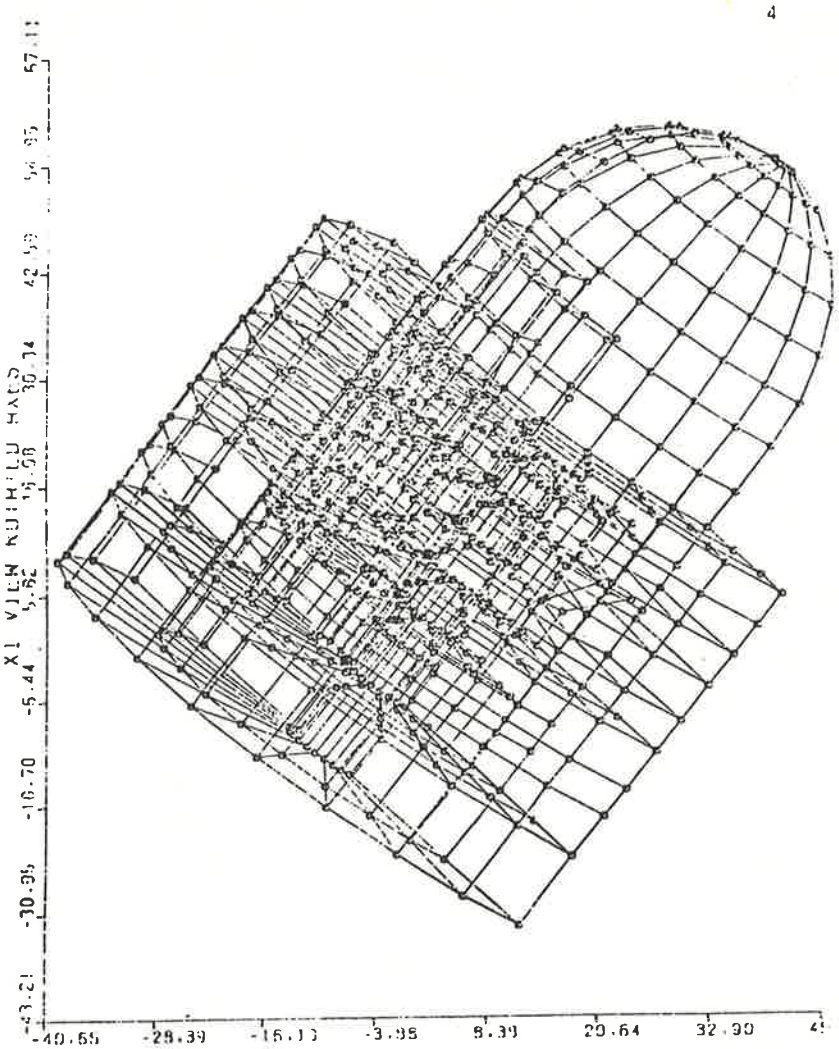
8 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] SAP4 Structural Analysis Program,Users Manual.
Earthquake English Research Center, Berkeley 1973.

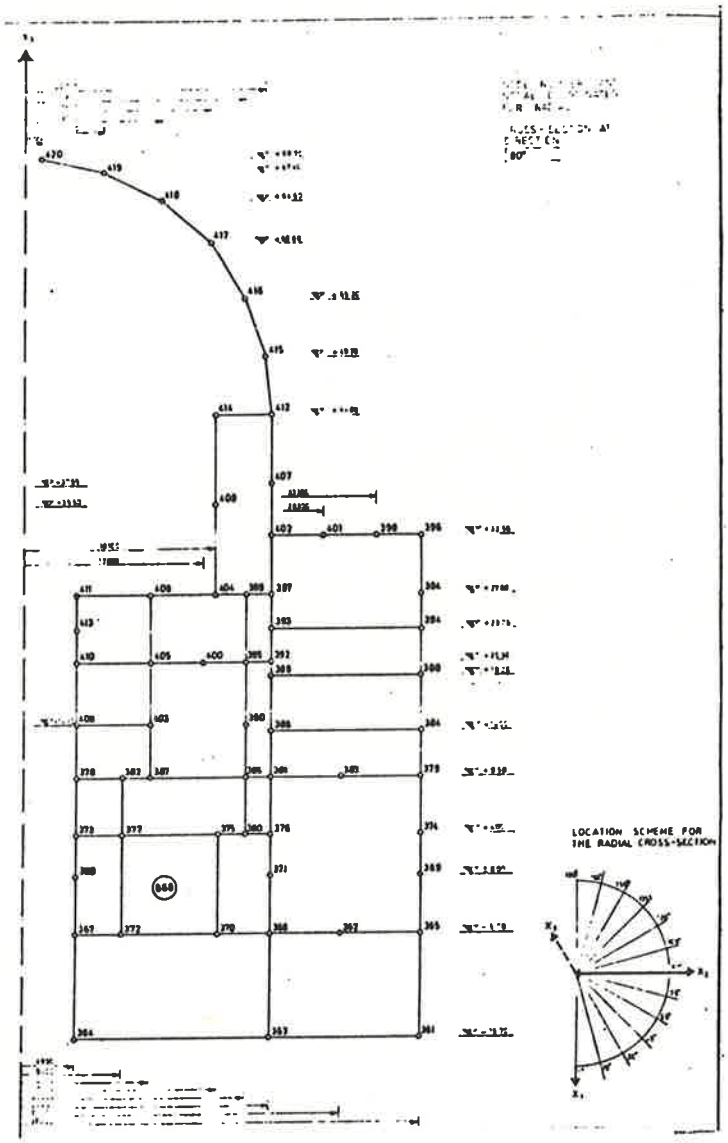
[2] MRI,Stardyne Users Manual.
Mechanics Research Inc., Minneapolis 1980.

Taulukko 1.

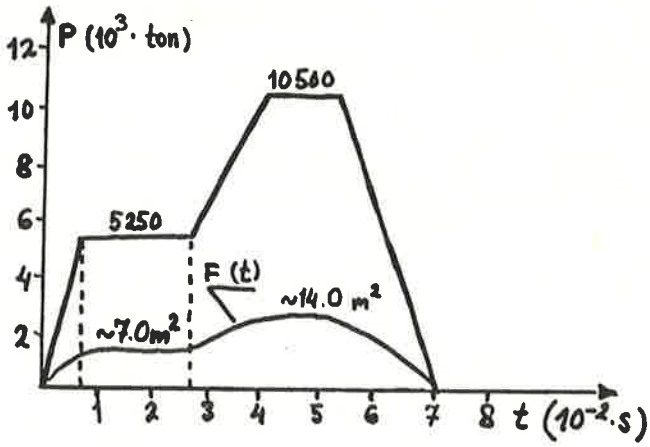
Moodi	Kulmataajuus rad/s	Taajuus krs/s	Värähdys-aika s	Toleranssi
1	7.3	1.2	0.859	0.5×10^{-13}
2	25.9	4.1	0.242	0.1×10^{-13}
3	31.8	5.1	0.197	0.7×10^{-14}
4	64.5	10.3	0.0973	0.3×10^{-9}
5	73.7	11.7	0.0851	0.5×10^{-7}
6	74.7	11.9	0.0840	0.4×10^{-7}
7	77.6	12.3	0.0809	0.5×10^{-6}
8	78.6	12.5	0.0798	0.4×10^{-6}
9	78.8	12.6	0.0797	0.2×10^{-6}
10	80.8	12.9	0.0776	0.2×10^{-5}
11	84.1	13.4	0.0746	0.2×10^{-4}
12	87.2	13.9	0.0720	0.4×10^{-4}
13	87.4	14.0	0.0718	0.3×10^{-3}
14	88.8	14.1	0.0707	0.6×10^{-4}
15	89.6	14.3	0.0701	0.6×10^{-3}
16	96.7	15.4	0.0649	0.1×10^{-2}
17	97.2	15.5	0.0645	0.3×10^{-3}
18	97.5	15.6	0.0644	0.3×10^{-2}
19	98.7	15.7	0.0636	0.2×10^{-2}
20	99.0	15.8	0.0634	0.3×10^{-2}
21	100.8	16.0	0.0623	0.1×10^{-2}
22	100.9	16.1	0.0622	0.1×10^{-2}
23	101.1	16.1	0.0621	0.1×10^{-2}
24	102.7	16.3	0.0612	0.9×10^{-2}
25	103.3	16.4	0.0608	0.5×10^{-2}
Korkein moodi	326.2	519.1	0.00192	



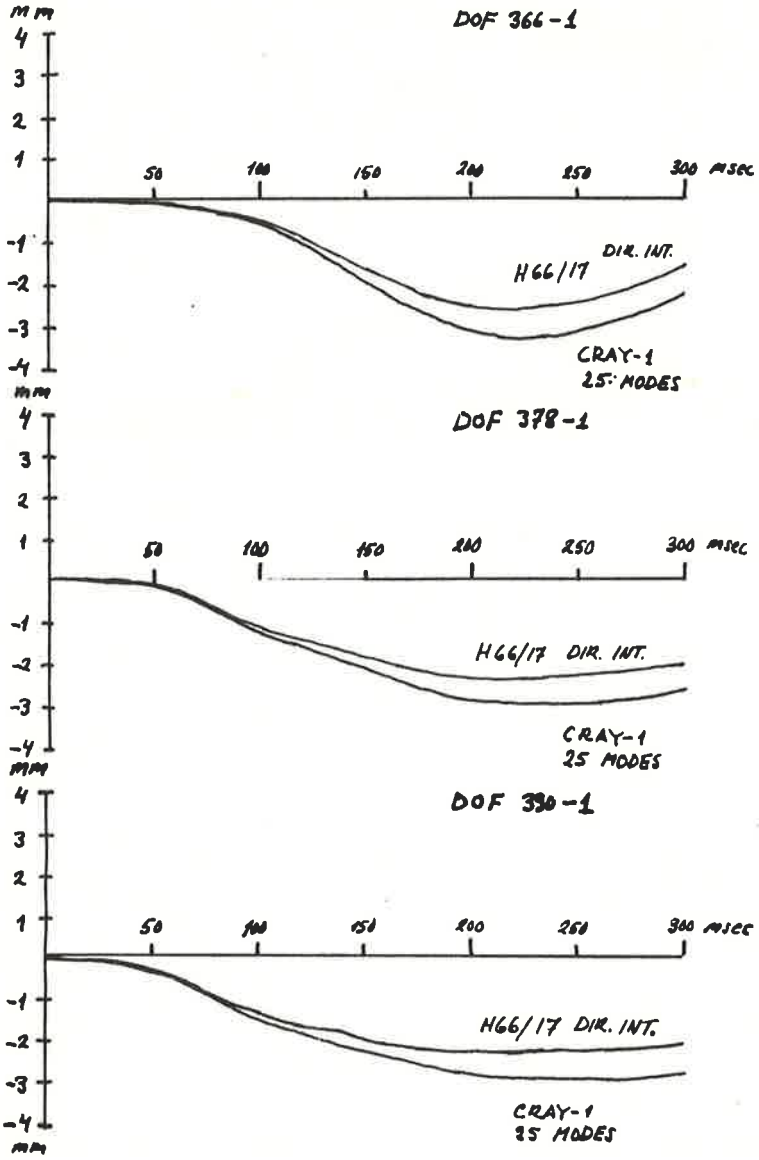
Kuva 1.



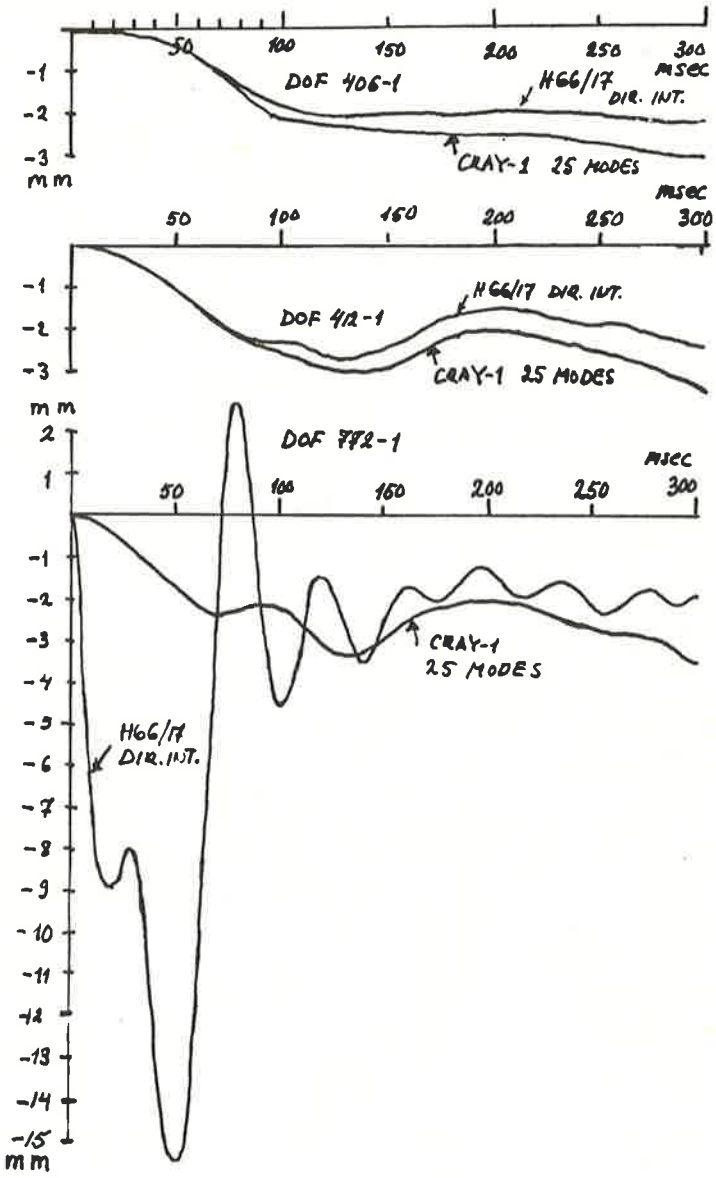
Kuva 2.



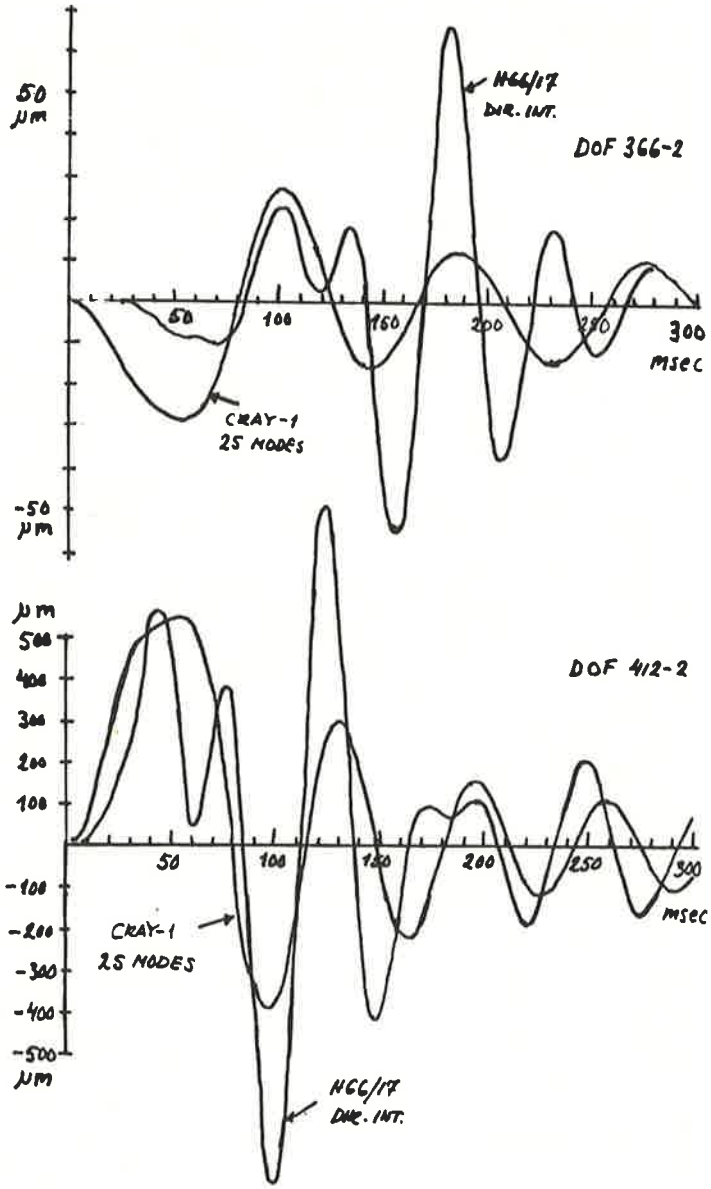
Kuva 3.


mm
DOF 366-1
4
3
2
1
50
100
150
200
250
300 msec
-1
-2
-3
-4
H66/17
DIR. INT.
CRAY-1
25 MODES
mm
DOF 378-1
4
3
2
1
50
100
150
200
250
300 msec
-1
-2
-3
-4
H66/17 DIR. INT.
CRAY-1
25 MODES
mm
DOF 390-1
4
3
2
1
50
100
150
200
250
300 msec
-1
-2
-3
-4
mm
H66/17 DIR. INT.
CRAY-1
25 MODES

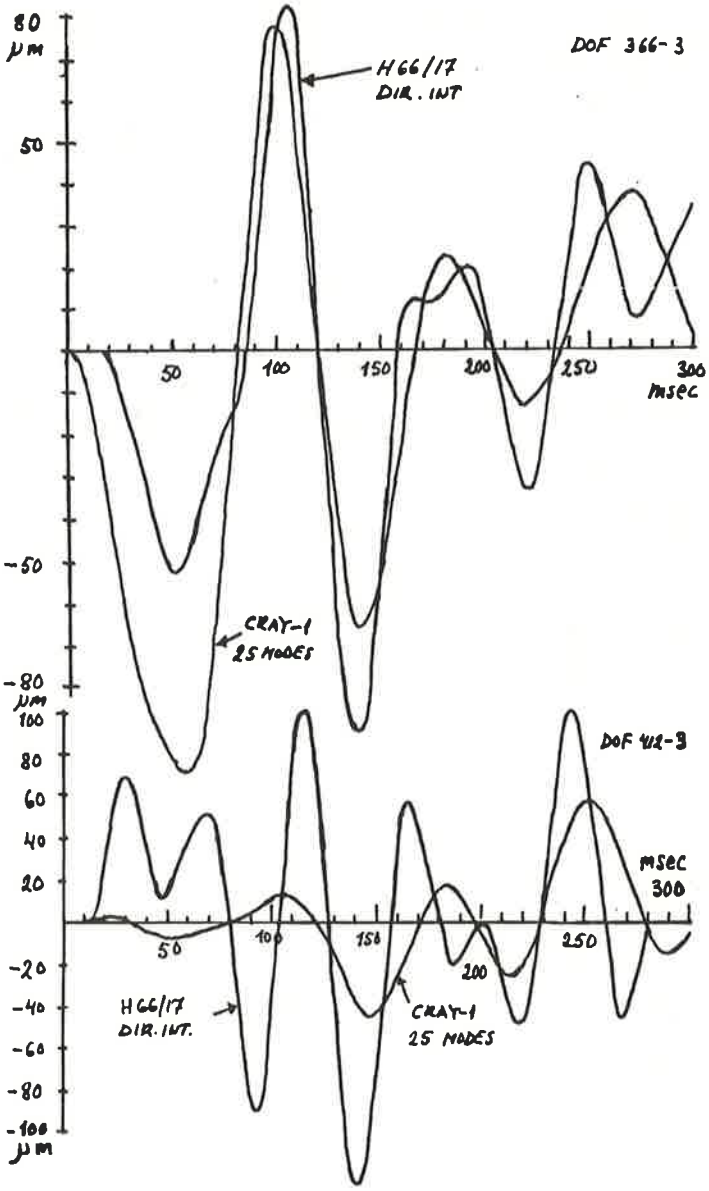
Kuva 4.


DOF 406-1
H66/17 DIR. INT.
CRAY-1 25 MODES
msec
mm
DOF 412-1
H66/17 DIR. INT.
CRAY-1 25 MODES
DOF 772-1
CRAY-1
25 MODES
H66/17
DIR. INT.

Kuva 5.


50
µm
-50
µm
HGG/17
DIR. INT.
DOF 366-2
50
100
150
200
250
300
msec
CRAY-1
25 NODES
µm
500
400
300
200
100
-100
-200
-300
-400
-500
µm
DOF 412-2
50
100
150
200
250
300
msec
CRAY-1
25 NODES
HGG/17
DIR. INT.

Kuva 6.


80
µm
50
-50
-80
µm
DOF 366-3
H66/17
DIR. INT
CRAY-1
25 MODES
50
100
150
200
250
300
msec
100
80
60
40
20
-20
-40
-60
-80
-100
µm
DOF 412-3
msec
300
H66/17
DIR. INT.
CRAY-1
25 MODES

Kuva 7.

LAIVAPOTKURIN NAVAN STAATTINEN JÄNNITYSANALYYSI

Jorma Köliö
Oy Control Data Ab

1 JOHDANTO

Syksyllä 1981 suoritettu analyysi liittyy Rauma-Repola Oy Lokomon tehtailla kehitettävään laivapotkurin napakonstruktioon. Laskennalla kartoitettiin jännitysten suhteen kriittiset alueet staattisiksi otaksuttujen käyttökuormien alaisina.

Elementtimenetelmämalli luotiin Femgen-esikäsittelijällä /1/ ja ratkaisu suoritettiin MSC/Nastran-ohjelmistolla /2/. Seuraavassa esitellään lyhyesti laskennan työvaiheet sekä joitakin malliin liittyviä erikoispiirteitä.

2 MALLIN GEOMETRIA

Mikäli geometria, materiaaliominaisuudet, tuet ja kuormitukset toistuvat jaksollisesti tietyn pyörähdysakselin suhteen, myös siirtymätila on jaksollinen. Mallia kutsutaan tällöin syklisesti symmetriseksi.

Kaikki käyttöolosuhteissa vaikuttavat kuormitukset omapainoa lukuunottamattta olivat syklisesti symmetrisiä 90 asteen jaksolla kuten geometriakin. Omapaino jätettiin sen vähäisen merkityksen vuoksi huomioimatta, joten voitiin käsitellä rakenteen neljäsosaa. Lisäksi geometria rajattiin potkurin lapojen ja navan liitospinnoilta, joilta kuormat johdettiin malliin. Pulttien reiät ja laipan pyöristykset kuvattiin todellisina. Kaarevien pintojen vuoksi pääelementeiksi valittiin 15- ja 20-solmuiset kiila- ja kuutioelementit, pultit kuvattiin palkkielementeillä.

Navan muoto johtaa väistämättä malliin, jonka jäykkyysmatriisin nauhanleveys on suuri. Samalla perusgeometrialla haluttiin ratkaista myöhemmin myös poikkeuksellisia kuormitustapauksia, jotka eivät olleet syklisesti symmetrisiä. Taloudellisuussyistä pyrittiin mahdollisimman tarkoin minimoimaan elementtimäärä ja päädyttiin seuraavankokoiseen malliin.

20-solmuisia elementtejä	208
15-solmuisia elementtejä	54
Palkkielementtejä	20
Solmupisteitä	1717
Vapausasteita	4473
Aktiivien sarakkeiden maksimimäärä	647
Aktiivien sarakkeiden lukum. neliöllinen ka.	335
Jäykkyysmatriisin termien lukumäärä	$\sim 1.39 \cdot 10^6$

3 KUORMITUSTAPAUKSET

Käyttöolosuhteiden kuormitukset koostuivat seuraavista osatekijöistä:

- lapojen kiinnittäminen esikiristetyillä pulttiliitoksilla
- vesipaineesta aiheutuvat kuormat
- vakiopyörimisnopeudesta aiheutuvat hitausvoimat

Kuormitukset laskettiin pultteja kuvaaville palkkielementeille pistevoimiksi sekä pintapainejakautumiksi solid-elementtien tahoille. Leikkausvoimat siirtyvät navan ja lavan väliin upotetun kiekon välityksellä. Nämä navan pinnan suuntaiset ympyränkaarelle jakautuneet voimat integroitiin elementtien muotofunktioita käyttäen ekvivalenteiksi solmuvoimiksi.

Suurimmat epätarkkuudet luultavasti esiintyvät kuormituksissa, mikä lienee yleistä laskennoissa, joissa analysoitava alue on rajattu kokonaisuudesta. Jännityshuiput olivat kuitenkin odotettavissa pultinreikien pohjilta sekä laipan pyöristyksen alueilta, jotka ovat etäällä kuormitetuista kohdista.

4 REUNAEHDOT JA LINEAARISET SIDEYHTÄLÖT

Napa on tuettu esikiristetyllä pulttiliitoksella potkuriakseliin. Tätä kuvaavat reunaehdot annettiin laipan ulkopinnalla.

Mallissa käytettiin runsaasti side-ehtoja, jotka ovat mallin kahden tai useamman vapausasteen välille kirjoitettuja vakiokertoimisia lineaarisia yhtälöitä /2/, /4/.

Syklisen symmetrian reunaehdot edellyttävät kolme kahden termin yhtälöä 90 asteen sektorin sivutahojen kaikkien vastinpisteiden välille.

Pultteja kuvaavien palkkien solmupisteet kiinnitettiin kierteen kohdalla oleviin solid-elementtien solmuihin sideyhtälöillä, joissa sauvan solmupisteen siirtymä on solid-elementtien solmusiirtymien keskiarvo.

Ristikkäiset pultinreiät aiheuttivat vaikeuksia mallin muodostuksessa. Analysoitavan sektorin sivutahojen solmujako oli saatava identtiseksi, jotta kyettiin antamaan syklisen symmetrian edellyttämät reunaehdot. Liitteessä 1 on esitetty leikkaus pultinreikien pohjan tasolta. Tällä tasolla on siirrytty epäsäännöllisestä elementtijaosta säännölliseen suorakaidejakoon side-ehtoja käyttäen.

Elementin sivutaholla sijaitsevan pisteen siirtymät määräytyvät muotofunktioiden ja tahon solmupisteiden siirtymien perusteella. Näin ollen voidaan kirjoittaa sideyhtälöt, jotka pitävät elementin taholla sijaitsevan pisteen taholla myös siirtyneessä muodossa. Menettely aiheuttaa liitoksen, jossa kyseisellä elementtityypillä siirtymät ovat yhteensopivia vain liitetyissä solmupisteissä (jos muotofunktiot lineaarisia, koko tahon siirtymät ovat yhteensopivia). Kuitenkin esitetyllä tavalla tehty liitos hyvin todennäköisesti käyttäytyy paremmin kuin epäsäännöllisten muotoisten ja erikokoisten elementtien avulla muunnettu verkko, johon tässä mallissa olisi muuten jouduttu.

Kaikenkaikkiaan sideyhtälöt osoittautuivat hyvin käyttökelpoisiksi. Haittapuolena on niiden edellyttämä lähtötietomäärä, tässä 758 yhtälöä, joista kertyi 4210 riviä. Lisäksi yhtälöiden kertoimet on annettava mahdollisimman monella merkitsevällä numerolla, koska näissä esiintyvä epätarkkuus vaikuttaa voimakkaasti ratkaisuun. Yhtälöt kirjoitettiin pienellä ohjelmalla tulostaen valmista lähtötietoa. Tarkkuussyistä käytettiin Nastranin pitkää lähtötietokenttää, 16 saraketta lukua kohden.

5 MALLIN LUOMINEN

Geometrian muodostuksessa käytettiin apuna Femgen-esikäsittelyohjelmaa /1/, joka valittiin, koska sen soveltuvuudesta ja myös puutteista oltiin tietoisia usean vuoden käytön perusteella.

Tämän ja aiempien töiden yhteydessä on havaittu seuraavat seikat:

- Esikäsittelijällä malli voidaan muodostaa elementtiblokeissa, joita on helppo monistaa, muunnella ja tarkistaa työn edistyessä.
- Koko geometriainformaatio tallentuu tietokantaan, jota ohjelma muuntaa ja täydentää kunkin toteutuksen aikana. Informaatio on hyvin jäsennelty ja myös käyttäjän omilla ohjelmilla luettavissa.
- Nykyinen Femgen-versio ei generoi kuormia eikä sideyhtälöitä, jotka kirjoitettiin omilla ohjelmilla tietokannan informaatiota hyväksikäyttäen.
- Femgenin ja Nastranin piirtomahdollisuudet eivät olleet riittäviä tämän mallin solmu- ja elementtinumeroiden sijainnin havainnollistamisessa, joten kirjoitettiin joitain Disspla-rutiineja /3/ käyttäviä ohjelmia liitteiden 2 ja 3 tapaisten kuvien piirtämiseksi.
- Tämän työn yhteydessä Femgen-ohjelmasta oli ratkaisevaa apua erityisesti mallin epäsäännöllisissä osissa, joita ei olisi voitu luoda elementtiohjelmien tarjoamilla inkrementaalisilla generointimahdollisuuksilla. Näissä alueissa sijaitsevat solmut ja elementit olisi muuten jouduttu antamaan yksitellen. Esikäsittelyohjelmista lienee eniten hyötyä juuri vaikeamuotoisissa 3-dimensioisissa kuori- ja solid-malleissa.

- Eräs Femgen-ohjelman eduista on, ettei se sido käyttäjää koko työn ajaksi graafisen työaseman ääreen. Ohjelmaa voidaan käyttää tehokkaasti vaikka vain osituskäyttöpäätteen ja siihen liitetyn piirturin avulla. Kunkin työvaiheen komentokäskyt voidaan haluttaessa valmistella etukäteen työpöydän ääressä, toteuttaa ne ketjussa ja kontrolloida tulosta joko piirturin tai graafisen kuvaputken avulla. Tarvittavat muutokset ja korjaukset voidaan jälleen tehdä joko välittömästi tai myöhemmin valmistellulla komentoketjulla.

6 RATKAISUVAIHE

Analyysiohjelmaksi valittiin MSC/Nastran /2/, koska ohjelmisto on erityisesti suunniteltu suurten tehtävien ratkaisemista silmälläpitäen. Olemme havainneet, että varsinkin suurissa ja keskisuurissakin malleissa, joissa nauhanleveydet ovat suuria (joihin kyseinen malli lienee luettavissa), MSC/Nastran on taloudellinen ohjelmavaihtoehto.

Esikäsittelijöitä käytettäessä lähtötiedosto on usein suuri, koska solmut ja elementit esitetään yksitellen. Myös sideyhtälöt lisäsivät lähtötietoja, joita tässä tehtävässä oli 8480 riviä.

Laskenta jaettiin seuraaviin osa-ajoihin:

- Useita pieniä tarkistusajoja
- Matriisien muodostus, jäykkyysmatriisin kolmiointi sekä ratkaisu ensimmäiselle kuormitustapaukselle
- Jatkoajo 7 lisäkuormitustapauksen ratkaisemiseksi

Jäykkyysmatriisin kolmiointi oli analyysin työläin vaihe. Jatkoajo 7 lisäkuormitustapauksen ratkaisemiseksi vei vain 1.2-kertaisen tietokoneajan ensimmäisen kuormitustapauksen ratkaisuun verrattuna.

7 JÄLKIKÄSITTELY

Tuloslistojen lukemisen helpottamiseksi kirjoitettiin pieni ohjelma, joka seuloi annetuilla vertailujännitystasoilla sijaitsevien elementtien numerot. Tämä oli tarpeen, koska Nastran tulostaa keskipisteen lisäksi jännitykset myös elementin kaikissa solmupisteissä.

Oli myös tarkoitus piirtää vertailujännitykset valituille tasoille numeroarvoina liitteen 3 tapaan. Koska laskenta antoi aihetta rakennemuutoksiin, se kuitenkin jätettiin tässä vaiheessa kustannussyistä tekemättä.

Lähinnä sideyhtälöiden tarkistamiseksi piirrettiin lisäksi useita siirtyneitä muotoja mallin eri osista.

Graafinen tulosten esittämismahdollisuus on elementtimenetelmälaskennoissa tärkeää hyvän yleiskuvan saamiseksi mallin toiminnasta. Vielä tässäkin vaiheessa saattaa myös paljastua virhe, joka muuten voisi jäädä huomaamatta.

8 TULOSTEN TARKKUUDESTA

Elementtimenetelmälaskennan tarkkuuden arviointi on vaikeaa. Tarkkuus voi myös vaihdella eri kuormitustapausten kesken, koska mallin kyky kuvata erilaisia siirtymätiloja vaihtelee. Lienee tarkoituksenmukaista arvioida etukäteen siirtymä- tai jännitysjakautumaa analysoitaville kuormitustapauksille ja suunnitella mahdollisimman tasapainoinen verkko näitä silmälläpitäen.

Konvergenssitarkastelu laskemalla samaa rakennetta eri verkkotiheyksillä ei yleensä tule kustannussyistä kysymykseen suurissa elementtimenetelmälaskennoissa, joten on tukeuduttava pienempien mallien sekä aiempien samantyyppisten laskentojen antamaan informaatioon.

Mikäli käytettävissä on kokeellisia jännitysmittaustuloksia, elementtimenetelmän antamaa tulosta voitaneen kalibroida näiden avulla. Toisaalta laskennan tulokset antavat tietoa mihin jännitysvenymäliuskat on paras sijoittaa, joten elementtimenetelmä ja kokeelliset mittaukset tukevat toisiaan rakenteiden suunnittelussa.

Koska kyseisen kohteen tuotekehittely on vielä kesken, laskennan tuloksista voidaan tässä vaiheessa sanoa vain, että ne antoivat runsaasti uutta tietoa rakenteen käyttäytymisestä sekä myös aihetta joihinkin rakennemuutoksiin.

9 LIITTEET

Liite 1: Verkkojaon muuttaminen lineaarisia sideyhtälöitä käyttäen
Liite 2: Koko malli sekä eräs sen osa
Liite 3: Neljännesmallin rajapintojen solmu- ja elementtinumerot

10 KIRJALLISUUSVIITTEET

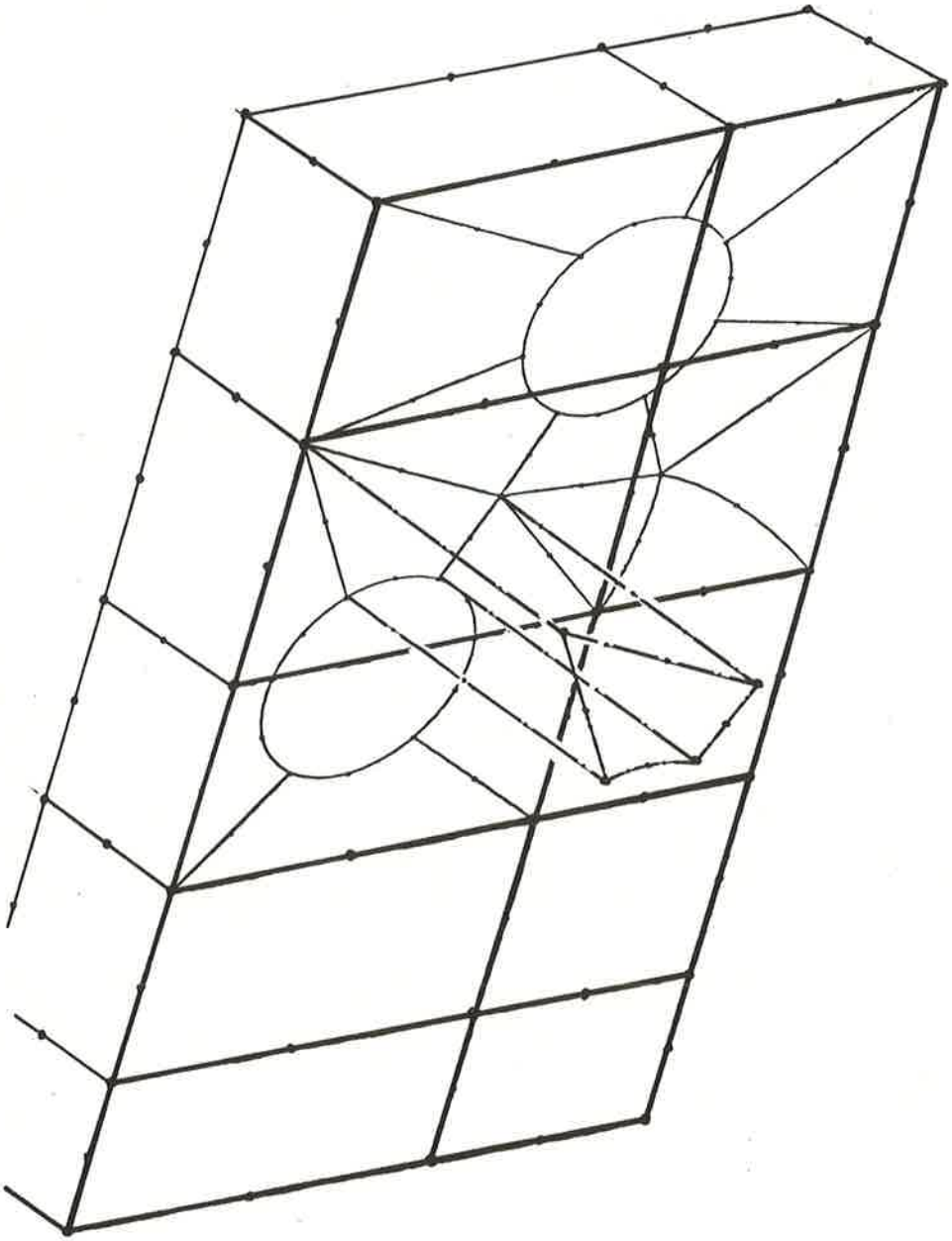
/1/ Femgen - Finite element mesh generator
User information manual, 120 s.
Cybernet Publication No. 84002560

/2/ MSC/Nastran theoretical manual, 650 s.
MSC/Nastran user's manual, 1100 s.
MSC/Nastran application manual, 1000 s.
MSC/Nastran primer, static and normal mode analysis, 365 s.
Mac Neal-Schwendler Corporation

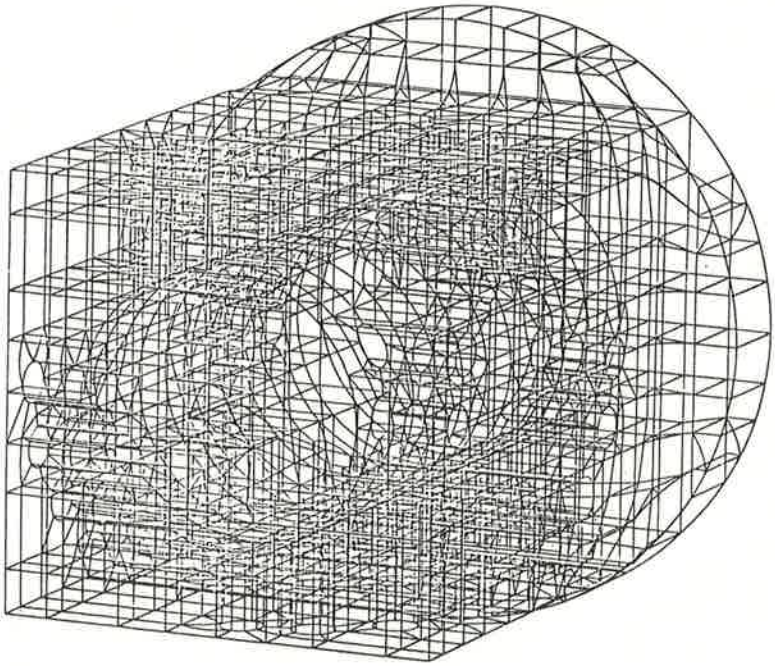
/3/ Disspla, Display Integrated Software system and plotting language
User's manual
Integrated Software Systems Corporation

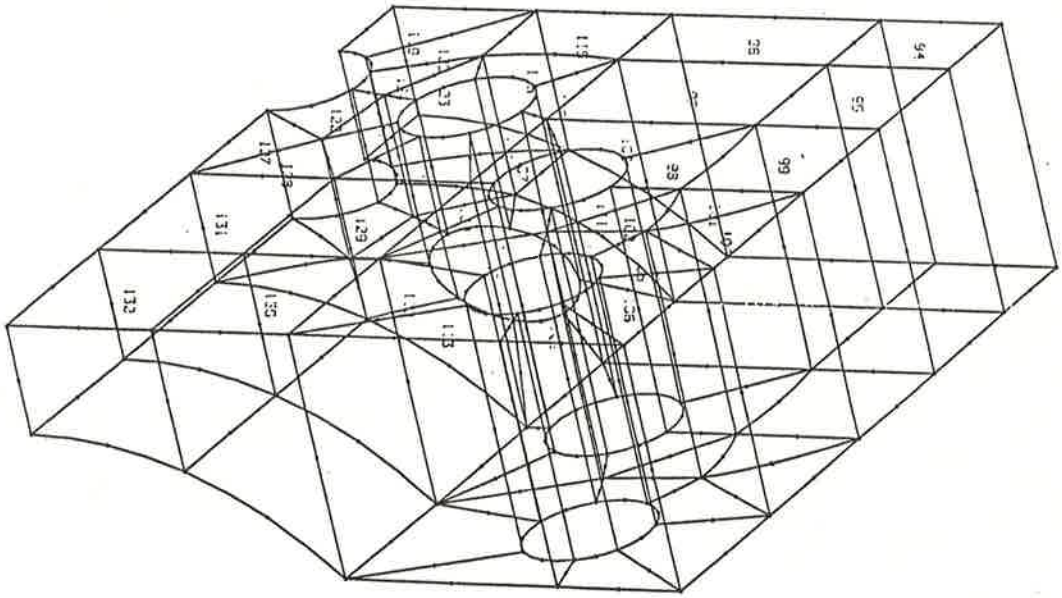
/4/ Köliö J., Some practical applications of multipoint constraints. Control Data Structures Conference, May 19-22, 1981, 13 s.

LIITE 1

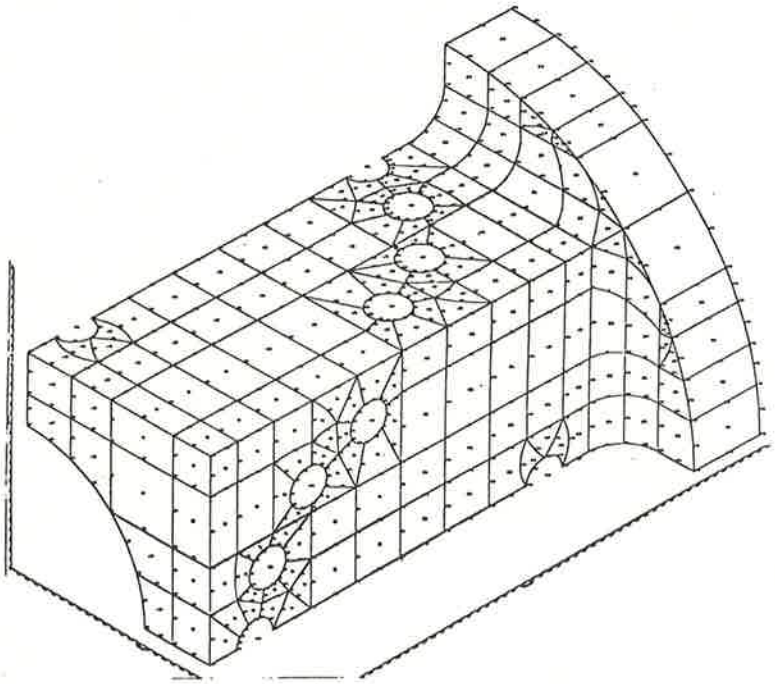


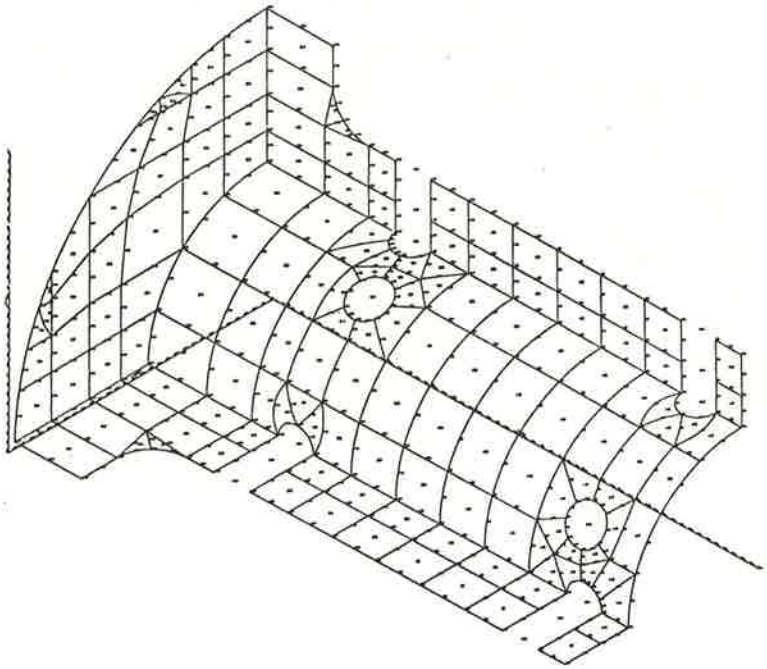
LIITE 2





LIITE 3





JÄÄN JA RAKENTEEN DYNAAMINEN VUOROVAIKUTUS

prof. Mauri Määttänen
Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Kesällä 1973 rakennettiin Perämerelle kaksi teräsrakenteista majakkaa ja 17 reunamerkkiä. Syksyllä heti ensimmäisten jäiden ilmaantuessa ja ajelehtiessaan murruttua näitä hoikkia teräspaaluja vasten havaittiin rakenteissa voimakkaita värähtelyjä, jotka aiheuttivat pian väsymismurtumia ja joissain tapauksissa jopa täydellisen yläosan katkeamisen. Havainnot osoittivat, että värähtelyt olivat resonanssissa rakenteen matalimpien ominaismuotojen kanssa. Koska mitoitus oli tehty vain staattisia jäävoimia vastaan oli selvää, etteivät kyseiset rakenteet pystyneet toimimaan tyydyttävästi dynaamisessa kuormituksessa.

Merenkulkuhallituksen toimeksiannosta ryhdyttiin Oulun yliopiston konetekniikan osastolla selvittämään syitä teräsmajakoiden ja reunamerkkien värähtelyherkkyyteen. Kävi ilmi, että kirjallisuudessa tunnettiin jääkuormien satunnaiset vaihtelut, mutta resonanssivärähtelyistä ei ollut mainintoja. Satunnaisvärähtelyihin voidaan lukea jäänpaksuusvaihteluista ja jään ominaisuuksienvaihteluista johtuvat vaihtelut jäävoimassa. Näiden aiheuttama rakenteen dynaaminen vaste on kuitenkin yleensä vähämerkityksinen. Suuria dynaamisia yksittäisiä kuormanvaihteluita syntyy jään reunan iskeytyessä rakennetta vastaan. Maksimivaste on alle kaksinkertainen staattisesta ja syntyneet värähtelyt vaimenevat nopeasti pois. Kuitenkin jo vajaa 10 cm paksu jää oli aiheuttanut rakenteelle niin suuren dynaamisen vasteen, että rakenteellisia vaurioita syntyi vaikka staattisesti rakenne oli mitoitettu 110 cm jääpaksuudelle.

Periaatteessa voitaisiin olettaa, että tasapaksun ja tasalujan jääkentän murtuessa paalua vasten syntyvä jäävoimakin on vakio. Sa-

tunnaisvaihtelut poislukien mittaustulokset jäykillä ja massiivisilla rakenteilla tukevatkin tätä olettamusta. Täysin jäykkä rakenne ei luonnollisestikaan koe muodonmuutoksia eikä näinmuodoin sen dynaaminen vaste voi vaikuttaa jään murtumiseen. Tällöin on lähinnä jään kannalta kyseessä vain reaktiovoima ilman vuorovaikutusta.

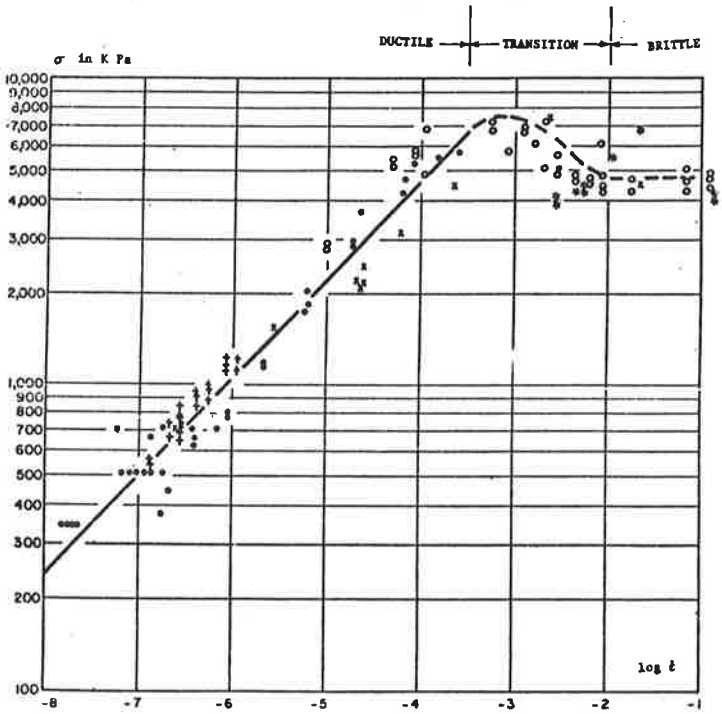
Hoikilla paalurakenteilla jäävoiman aiheuttamat taipumat ovat niin suuria, että jään murtuessa syntyvä rakenteen värähtely alkaa vaikuttaa jään murtumiseen. Syntyy suljettu systeemi, jossa jäävoima vaikuttaa rakenteen vasteeseen ja rakenteen vaste puolestaan jäävoimaan. Nyt on kyseessä todellinen dynaaminen jään ja rakenteen vuorovaikutus. Tietyissä olosuhteissa voi syntyvän jäävoiman jaksoluku lukkiutua rakenteen matalimpiin ominaisjaksolukuihin ja syntyä resonanssi.

Tässä artikkelissa tarkastellaan jään ja rakenteen dynaamisen vuorovaikutuksen teoreettisia perusteita sekä esitellään koetuloksia sekä jääaltaassa suoritetuista mallikokeista että täysimittakaavamittauksista luonnossa.

2 TEOREETTINEN MALLI

Jää on materiaali, joka luonnossa esiintyy aina lähellä sulamispistettään olevia lämpötiloja. Tämän vuoksi on viruminen tärkeä muodonmuutosmekanismi. Jään murtolujuus riippuu kiderakenteesta, suolapitoisuudesta, lämpötilasta, kuormitusnopeudesta, yms. Yksittäisen jääkiteen kimmo-ominaisuudet ovat ortotrooppiset, mutta koska jää on monikiteistä, ja koska kidesuunnat ovat satunnaisia, on seurauksena kokonaisuudessaan epähomogeeninen materiaali. Jääkuormille alttiiden rakenteiden mitat ovat kuitenkin niin paljon jään kidekokoa suurempia, että jääkenttää voidaan pitää makromittakaavassa isotrooppisena tai ortotrooppisena.

Jään ja rakenteen dynaamisen vuorovaikutuksen kannalta on lujuuden riippuvuus kuormitusnopeudesta oleellisin parametri. Kuvassa 1 on esitetty jään puristuslujuuden riippuvuus venymän kasvunopeudesta. Havaitaan, että tiettyyn rajaan saakka murtolujuus kasvaa potenssilain mukaisesti jään murtumisen ollessa sitkeätä. Suurin jään



Kuva 1. Jään puristamismurtolujuus venymän kasvunopeuden funktiona.

lujuus saavutetaan murtumisen alkaessa muuttua hauraaksi. Kun venymän kasvunopeus on riittävän suuri on jään murtuminen haurasta ja lujuus selvästi alhaisempi kuin muutosvyöhykkeellä. Hauraalla alueella jään murtuminen ja lujuus on satunnaisesti vaihtelevaa. Keskimääräisesti jään puristusmurtolujuuskäyrällä on laskeva osa sitkeän ja hauraan välisellä muutosalueella.

Rakenteen kannalta jään lujuuskäyrän laskeva osa pyrkii kiihdyttämään vallitsevaa liiketilaa. Kun jääkuorma kasvaa taipuu rakenne samalla. Jään alkaessa murtua ja jäävoiman lauetessa pyrkii taipunut rakenne oikaisemaan itsensä. Samalla jään ja rakenteen keskinäinen suhteellinen nopeus kasvaa, mikä lisää samassa suhteessa venymän kasvunopeutta. Seurauksena on yhä hauraampi jään käyttäytyminen ja alhaisempi keskimääräinen jään lujuus. Tämä taas mahdollistaa entistä nopeamman paalun takaisin taipumisen ja suuremman venymän kasvunopeuden jne. Prosessi on itse itseään kiihdyttävä. Tilanne jatkuu niin kauan, kunnes venymänopeuden lisäys ei enää pienennä jään murtolujuutta. Hitausvoimien vaikutuksesta rakenne

jatkaa taipuman oikenemista, ehkä suoran tasapainoaseman ohi, jonka jälkeen uusi taipuma alkaa kasvaa jään reunan painaessa rakennetta. Taipuman kasvu jatkuu niin kauan, kunnes jää alkaa uudelleen murtua seuraavan jakson alkaessa.

Jään ja rakenteen dynaamisen vuorovaikutuksen matemaattinen malli voidaan muodostaa diskretisoimalla rakenne sopivasti, esimerkiksi elementtimenetelmällä ja laittamalla kuvan 1 mukaisen käyrän perusteella laskettu jäävoima vaikuttamaan [1]. Näin saadaan kaavan 1 mukaiset dynaamiset tasapainoyhtälöt:

$$[k][\delta] + [d]\{\dot{\delta}\} + [m]\{\ddot{\delta}\} = \{F(\{\dot{\delta}\})\} \qquad (1)$$

Tässä [k] on jäykkyysmatriisi, [d] vaimennusmatriisi ja [m] massamatriisi, $\{\delta\}$, $\{\dot{\delta}\}$ ja $\{\ddot{\delta}\}$ diskretisoidun systeemin vapausasteet ja aikaderivaatat, so. siirtymä-, nopeus- ja kiihtyvyysvektorit. Kuormitusvektorissa $\{F\}$ on nollasta eroavia termejä vain niissä pisteissä ja vapausastesuunnissa, joissa jäävoima vaikuttaa. Jäävoima lasketaan kaavalla

$$F = c \cdot \sigma_c \cdot h \cdot d = F(\dot{\delta}), \qquad (2)$$

jossa c on vakio, h on jään paksuus, d on paalun halkaisija ja jäänlujuus σ_c määrätään kuvasta 1 venymänopeudesta riippuen. Koska kuormitusvektorissa aika ei esiinny vapaana parametrina, systeemi on autonominen ja ainoa mahdollisuus värähtelyjen synnylle on se, että systeemi on dynaamisesti epästabiili. Yksinkertainen keino dynaamisen stabiliteetin määrittämiseksi on linearisoida dynaamiset tasapainoyhtälöt kulloinkin tarkasteltavana olevaa jään nopeutta vastaavassa pisteessä jään lujuus-venymänkasvunopeuskäyrällä, tavallisimmin jyrkimmin laskevassa kohdassa. Näin saadun linearisoidun dynaamisten tasapainoyhtälöiden juuret λ_j ovat kompleksisia,

$$\lambda_j = a_j \pm ib_j \qquad (3)$$

joista reaaliosa a_j ilmaisee kyseistä juurta j vastaavan ominaismuodon stabiliteetin -nettovaimennus - ja imaginaariosa b_j kulmanopeuden, jolla värähtelyt esiintyvät pienillä amplitudeilla. Mikäli reaaliosa on positiivinen, kyseinen toimintapiste on tarkasteltavana

olevalla ominaismuodolla j epästabiili ja itseherätteisten värähtelyjen amplitudit lähtevät kasvamaan. Jos taas kyseisen ominaismuodon juuren reaaliosa a_j on negatiivinen vaimenevat kaikki ko. muodolla esiintyvät häiriöt pois ja kyseinen ominaismuot on dynaamisesti stabiili. Myös aperiodinen tilanne voi esiintyä, jolloin imaginääriosa b_j on nolla.

Mikäli jokin jäärakennesysteemin ominaismuodoista on dynaamisesti epästabiili, alkavat itseherätteiset värähtelyt kasvaa. Tällöin, kun poistutaan linearisointipisteen välittömästä läheisyydestä, ei linearisointi enää päde vaan värähtelyamplitudien kasvaessa on ryhdyttävä seuraamaan jatkuvasti epälineaarista jään ja rakenteen suhteellisesta nopeudesta riippuvaa jään lujuuskäyrää. Dynaaminen vaste on tällöin laskettava numeerista integrointia käyttäen. On selvää, että amplitudien kasvaessa toimintapiste siirtyy lopulta pois jään lujuuskäyrän laskevalta osalta, jolloin systeemin sisäinen vaimennus estää amplitudien lisäkasvun. Värähtelytila on vakiintunut raja-amplitudeihinsa, (limit cycles).

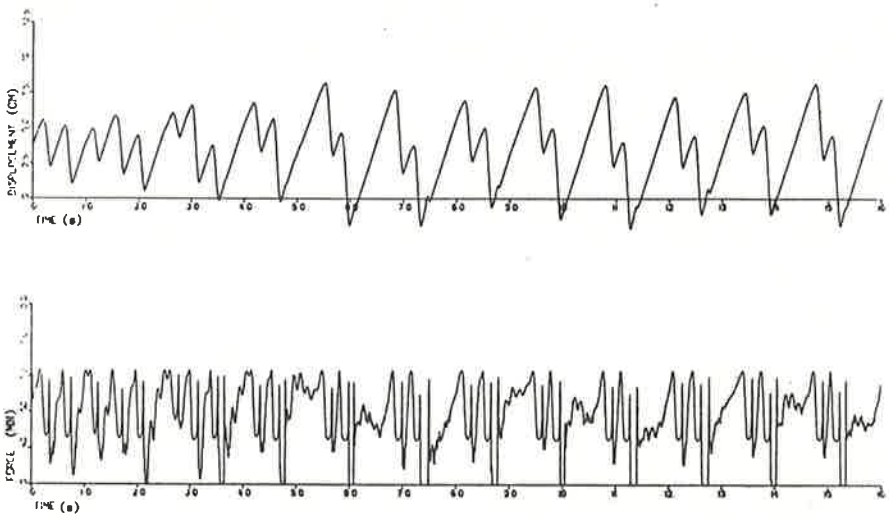
Myös energiatarkastelun perusteella on helppo päätellä, että raja-amplituditila saavutetaan. Jään lujuuskäyrän laskevan osan voidaan tulkita aiheuttavan negatiivista vaimennusta, mikä syöttää energiaa rakenteeseen värähtelyjakson osan aikana. Muuna aikana rakenteen sisäinen positiivinen vaimennus pyrkii pienentämään amplitudeja. Vaikka aluksi pienillä amplitudeilla negatiivinen vaimennus on ylivoimainen sen vaikutus kuitenkin lakkaa poistuttaessa lujuuskäyrän laskevalta osalta amplitudien kasvaessa, jolloin vähitelleen saavutetaan tilanne, jossa kunkin värähtelyjakson aikana positiivinen vaimennus ennättää kuluttaa kaiken sen energian, minkä negatiivinen vaimennus syöttää rakenteeseen. Voidaan sanoa, että jään aiheuttamien rakenteen itseherätteisten värähtelyjen kannalta voi epästabiilisuutta esiintyä pienillä amplitudeilla, mutta kokonaissysteemi on aina dynaamisesti stabiili suurilla amplitudeilla. Raja-amplitudit saadaan määrättyä jatkamalla yhtälöiden 1 numeerista integrointia pienen alkuherätteen jälkeen niin kauan, että värähtelytilanne vakiintuu samanlaiseksi kullakin täydellä jaksolla.

Teoreettisen mallin avulla voitiin selvittää tärkeimpien parametrien, kuten jään paksuuden, jään nopeuden, paalun halkaisijan, jäykkyyden ja

ominaisjaksolujujen vaikutus dynaamisessa jään ja rakenteen vuorovaikutuksessa. Tulokset eivät olleet absoluuttisia, sillä lähtökohtana käytettävä jään murtolujuuskäyrä ei ollut - eikä ole vieläkään - riittävästi tunnettu. Tärkeimmät havainnot olivat, että lähtemällä pelkästään jään murtolujuuskäyrästä liikkeelle numeerista integrointia käyttäen pystyttiin ennustamaan samanlaisia sahanteräaallon muotoisia jäävoimafunktiota, mitä käytännössä on mitattu. Syntyvän jäävoiman jaksoluku pyrkii lukkiutumaan matalimpien ominaismuotojen jaksolukuihin, mikäli ko. muodot ovat dynaamisesti epästabiileja. Stabiilit ominaismuodot eivät vaikuta syntyvän jäävoiman jaksolukuun, vaan jaksoluku kasvaa jäänopeuden kasvaessa ja pienenee jään paksuuden kasvaessa. Säännöllisesti toistuva jäävoimavaihtelu on mahdollista vain tietyllä parametrien alueella. Esimerkiksi riittävän alhaisella - täysin sitkeä jään murto - tai riittävän korkealla - täysin hauras jään murto - ei dynaamista vuorovaikutusta esiinny.

Sovellettaessa teoreettista mallia Perämeren teräsmajakoihin todettiin mallin antavan samanlaisia tuloksia kuin mitä käytännössä oli havaittu. Ohuella jään paksuudella värähtelyt pyrkivät olemaan pelkästään toisella ominaismuodolla. Luonnossa oli havaittu ja mitattu jatkuvia toisen ominaismuodon värähtelyjä 3,8 Hz taajuudella n. 10 cm paksuisen jään liikkuessa. Teoreettinen malli ennusti, että jo noin 6 cm paksu jää tekee toisen ominaismuodon dynaamisesti epästabiiliksi. Epästabiilisuus kasvaa ja noin 50 cm paksulla jäällä jään aiheuttama epästabiilisuus on niin voimakasta, että poikkeama tasapainoasemasta tapahtuu aperiodisesti. Tällöin värähtely tapahtuu helpoimmin ensimmäisellä ominaismuodolla, mikä on myös dynaamisesti epästabiili jään paksuuden ollessa yli 20 cm. Käytännössä mitattiin pääasiassa ensimmäisen ominaismuodon värähtelyjä 0,8 Hz taajuudella jään paksuuden ollessa 55 cm.

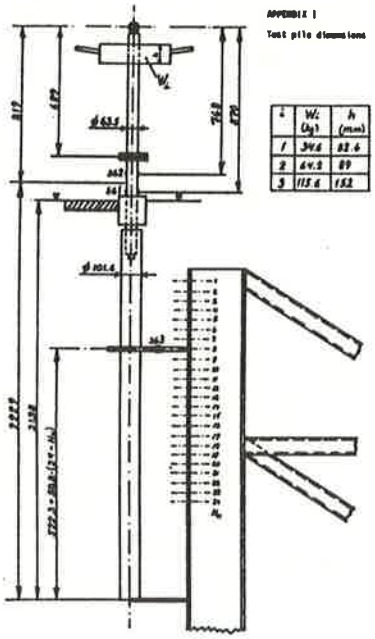
Erikoisuutena teräsmajakalla Kemi-I on kaksiosainen jäävoiman vaihtelujakso. Jään murtumisen alkaessa nopeammat toinen ja sitä korkeammat ominaismuodot aikaansaivat ensin vain osan jäävoimasta laukeamaan raskaan yläosan lähtiessä liikkeelle ensimmäisen ominaismuodon taajuudella hitaammin. Seurauksena oli kaksoissahanterän mukainen siirtymävaste vesirajassa, kuva 2, ja varsin monimutkainen interaktiivinen jäävoima teoreettisen mallin ennustamana. Luonnossa kaksoismurtuminen oli havaittu äänihavaintoina, kaksoisäänenä jään murtumisvaiheen aikana.



Kuva 2. Kemi-I, siirymä ja jäävoima ajan funktiona numeerisella integroinnilla.

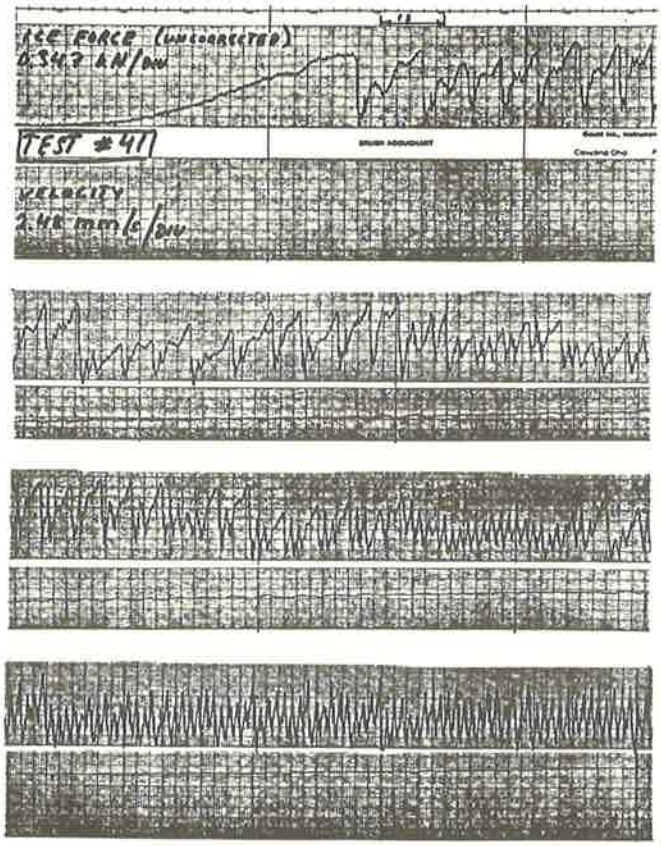
3 KOKEELLISET MITTAUKSET

Jään ja rakenteen dynaamista vuorovaikutusta mitatiin USA:ssa CRREL:n (Cold Regions Research and Engineering Laboratory) jääaltaassa, [2, 3]. Testattavan rakenteen pienoismalli, kuva 3, kiinnitettiin altaan pohjaan ja jäätä vedettiin vetovaunun avulla, jolloin voitiin simuloida jään luonnollista liikettä ja murtumista rakennetta vasten. Testirakenteen jäykkyyttä, massajakaumaa, ominaisarvoja ja muotoja sekä jään kosketukselle alttiin osan geometriaa voitiin helposti varioida. Jään lujuutta ja kimmo-ominaisuuksia skaalattiin myös mittakaavasuhteessa ja luonnollisesti jään paksuutta ja liikenopeutta varioitiin. Pyrkimyksenä oli selvittää jäävoiman, värähtelyamplitudien ja jaksolukujen riippuvuus sekä rakenteen että jään ominaisuuksista.



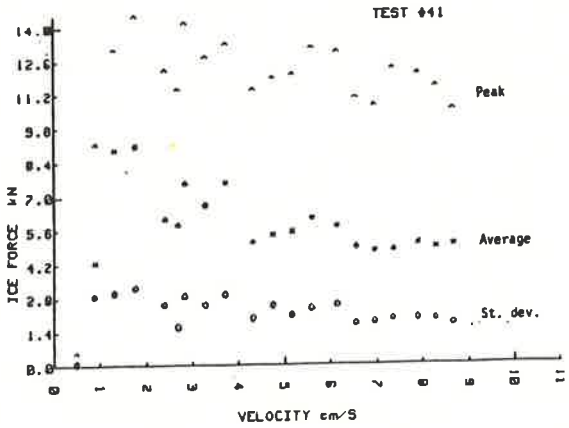
Kuva 3. Testirakenne mallikoealtaassa.

Tyypillinen jäävoimafunktio mallikokeesta on esitetty kuvassa 4, jossa jäävoima on esitetty ajan funktiona nopeuden lisääntyessä lineaarisesti. Aluksi esiintyy selvä sahanterän muotoinen voimafunktio, jonka jaksoluku nousee jään liikenopeuden kasvaessa. Tietyn rajan jälkeen jaksoluku vakiintuu resonanssin alkaessa kehittyä ensimmäisen ominaismuodon kanssa 8,5 Hz taajuudella. Kaikissa vaiheissa näkyy samanmuotoisia jäävoimajaksoja, mikä osoittaa raja-amplitudien kehittyneen. Teoreettiseen malliin verrattuna satunnaisuutta on luonnollisesti nyt mukana.



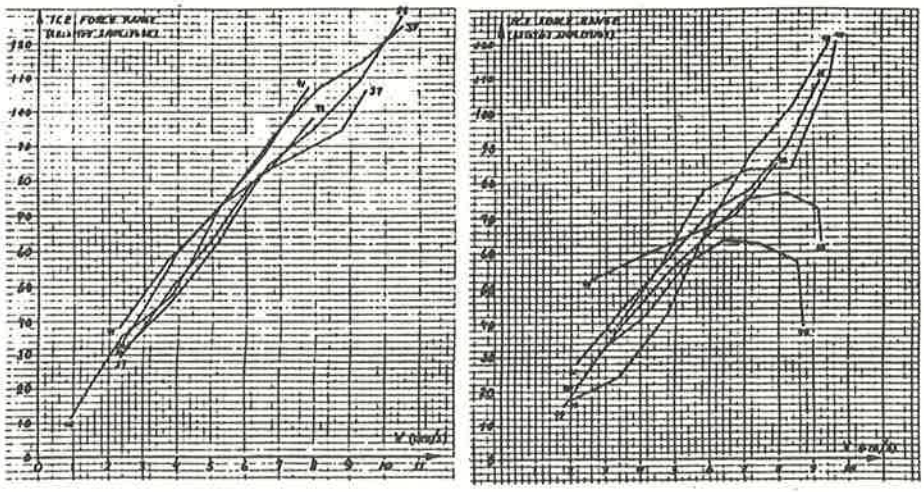
Kuva 4. Jäävoima (ilman dynaamista korjausta) ajan funktiona nopeuden kasvaessa.

Suurimmat jäävoimat esiintyvät yleensä alhaisella nopeusalueella, mikä vastaa muutosaluetta sitkeästä hauraaseen jäänmurtoon. Kuvassa 5 on esitetty aina 3,15 sekunnin jaksojen aikana esiintynyt suurin jäävoima, jäävoiman keskiarvo ja keskihajonta jään liikenopeuden funktiona. Jäävoimassa on eliminoitu testirakenteen dynaaminen vaikutus pois. Tulos osoittaa sekä keskiarvon että keskihajonnan saavuttavan maksiminsa juuri em. muutosalueella ja vakiintuvan sitten kun jäännopeus vastaa murtumista hauraasti. Jäävoiman huippuarvot ovat yleensä laskevia kuormitusnopeuden funktiona, mutta satunnaisesti suurin jäävoima saattaa esiintyä myös muualla kuin muutosalueella.



Kuva 5. Jäävoiman huippunopeus, keskiarvo ja keskihajonta nopeuden funktiona 3,15 s ajanjaksoilla.

Kuvissa 6 a ja 6 b on esitetty rakenteen dynaaminen vaste ensimmäisellä ominaismuodolla 8,5 Hz jään liikenopeuden funktiona. Kuvan 6 a mukaan riippuvuus on miltei lineaarinen viidessä eri testissä ja samoin neljässä eri testissä kuvassa 6 b. Kahdessa testissä viimemainitussa kuvassa saa vaste ääriarvon, jonka jälkeen se pienenee nopeasti. Ilmiö johtuu siitä, että kaikissa muissa kokeissa kuin näissä kahdessa jään liikenopeus ei ole kasvanut riittävästi, jotta resonanssikohta olisi ohitettu. Koska epästabiilit ominaismuodot pyrkivät lukkiuttamaan jäävoiman jaksoluvun omaansa ei jään nopeuden kasvaessa jaksoluku kasva, kuten stabiileilla muodoilla, vaan amplitudi kasvaa, mutta kun jään liikenopeus on liian suuri ei synkronointi ole enää mahdollista. Näin resonanssipisteen ohituksen jälkeen vaste pienenee jyrkästi. Testit 49 ja 50, joissa resonanssikohta ohitettiin olivat hyvin ohuella ja heikolla jäällä suoritettuja. Näin syntyvä jäävoima on pieni ja koska se on kääntäen verrannollinen syntyvän jäävoiman jaksolukuun selittyy, miksi resonanssikohta vain näissä testeissä onnistuttiin ylittämään. Muissa kokeissa olisi tarvittu suurempaa jään liikenopeutta kuin mitä laitteistolla oli mahdollista saavuttaa.



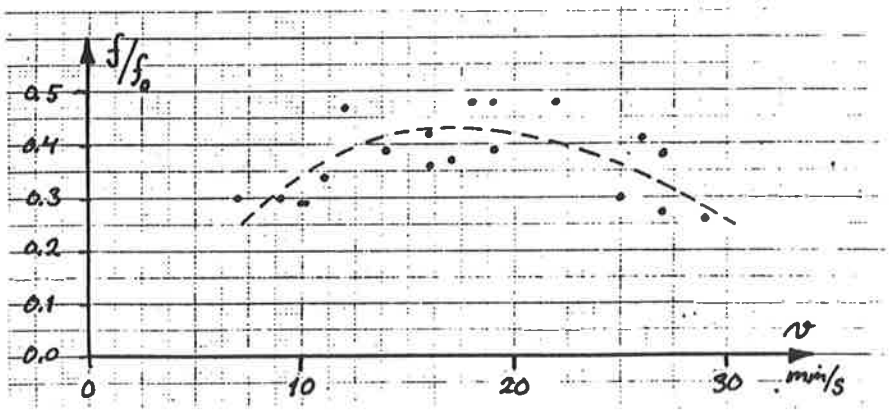
(a) (b)

Kuva 6. Vasteamplitudi jäänopeuden funktiona.

Sahanteräaallon muotoiselle jäävoimafunktiolle voidaan johtaa helposti jaksoluvun lauseke olettamalla jään reunan koskettavan kiinteästi rakennetta ja rakenteen taipuvan jään liikenopeudella niin kauan, kunnes jää murtuu, jonka jälkeen alkaa uusi jakso. Näin saadaan jaksoluku

$$f_0 = \frac{kv}{F} , \qquad (4)$$

jossa k on rakenteen joúsivakio jäävoiman suunnassa ja vaikutuspisteessä, v on jään nopeus ja F on jäävoima (oikeammin jäävoiman amplitudi huipusta minimiin). Teoreettinen malli tuki tätä likimääräistä jäävoiman jaksoluvun kaavaa ja kokeellisista mittauksista saatiin kuvan 7 mukainen riippuvuus. Kokeellisesti mitattu jaksoluku on aina pienempi kuin kaavalla 4 laskettu. Teoreettisesti ero johtuu jäävoiman laukeamisen aikaisen paluuliikkeen ajan sekä jään viskoelastisen käyttäytymisen vaikutuksen huomiotta jättämisestä kaavassa 4. Käytännössä tulee lisäksi kosketuksen epätasaisuuden vaikutus eli aika, joka tarvitaan kunkin jakson alussa ennen kuin kosketuspaine alkaa tehollisesti vaikuttaa korkeimpien epätasaisuuksien tasoittuessa.



Kuva 7. Mitatun ja kaavalla 4 lasketun jäävoiman jaksolukujen suhde mallikokeissa.

Käyrämuoto kuvassa 7 on samanmuotoinen mitä teoreettinen malli ennusti paitsi teoreettisesti suhteen tulisi olla korkeimmillaan noin 0,8. Koska kaavassa 4 ovat sekä v että F suoraan koetulosarvoja, jää jousivakioon k eron aiheuttava tekijä. Koetilanteessa ei riitä huomioida pelkästään testirakenteen joustoa, vaan koko koejärjestely on huomioitava. Jäävoiman kasvaessa joustoa syntyy sekä jään liikuttelussa tarvittavaan vetokoneistoon, vetovaunuun ja myös jääkenttään itseensä edellä mainitun kosketuksen epätasaisuusvaikutuksen ohella. Nämä tekijät voidaan yhdistää ja näin saada tehollinen jousivakio, mikä koetulosten perusteella on näissä testeissä keskimäärin 0,27 kertainen pelkän testirakenteen jäykkyyteen verrattuna. Tällä korjauksella yhtälö 3 ennustaa hyvin jäävoiman jaksoluvun niin kauan kun lukkiutumista dynaamisesti epästabiilin ominaismuodon jaksolukuun ei esiinny.

Kun jäävoima on resonanssissa rakenteen jonkin ominaismuodon kanssa ei jaksoluku muutu nopeuden muuttuessa. Tällöin dynaaminen vaste muuttuu. Osamäärä F/k on siirtymäamplitudi ja tämä selittää kuvan 6 käyrämuodot.

Rakenteen jäykkyyden vaikutus näkyy selvästi dynaamisessa jään ja rakenteen vuorovaikutuksessa. Mitä veltompi rakenne sen suurempi

siirtymä vakiosuuruisella voimalla ja sitä enemmän elastista kimmoenergiaa pystyy varastoitumaan rakenteeseen ennen jään murtumista. Jään murtuessa rakenteen kimmoenergia vapautuu ja auttaa rakennetta murtamaan jäätä pidemmälle kuin mitä jäykällä rakenteella. Näin joustavammalla rakenteella syntyy enemmän energian siirtoa, mikä edistää dynaamista vuorovaikutusta. Koetilanteessa tämä todettiin muuttamalla paalun jäykkyys jäävoiman suhteen (jousivakio) 12,5 kN/cm:stä 81,0 kN/cm, jolloin ominaistaajuus nousi 7,5 Hz:sta 10,0Hz:iin ja dynaaminen vaste lisääntyi 1,5...1,9 kertaiseksi samanlaisissa jääolosuhteissa.

Rakenteen massan vaikutus näkyy samoin kuin jäykkyydenkin: dynaaminen jään ja rakenteen vuorovaikutus on sitä korostuneempaa mitä enemmän energiaa rakenteeseen pystyy varastoitumaan ja vapautumaan jään murtuessa. Nyt vain energia taltioituu liike-energiana. Rakenteen jäykkyyden säilyessä ennallaan yläosan massaa pienennettiin niin paljon, että matalin ominaistaajuus nousi 10 Hz:stä 24 Hz:iin. Tämän johdosta rakenteen dynaaminen siirtymävaste pieneni alle viidennekseen alkuperäisestä. Edelleen dynaaminen vaste muuttui enemmän satunnaisesti vaihtelevaksi ominaisjaksoluvun kasvaessa. Sekä rakenteen yläosan massan vaikutus että jäykkyyden vaikutus näyttävät yhdessä osoittavan, että samoissa jääolosuhteissa rakenteen dynaaminen vaste on kääntäen verrannollinen ominaisjaksoluvun neliöön.

Jää aiheuttaa rakennetta vasten murtuessaan sekä positiivista että negatiivista vaimennusta. Plastinen työ ja jään murskaaminen hienojakoiseksi massaksi aikaansaa positiivista vaimennusvaikutusta. Koetilanteissa samoin kuin luonnossakin on joissain tapauksissa havaittu värähtelyn loppuvan äkillisesti, mikä merkitsee, että kokonaisvaimennuskertoimet ovat yli 100 % kriittisestä. Keskimäärin positiivinen jään aiheuttama vaimennus on vähäisempää.

Jään lujuuden pienetessä kuormitusnopeuden kasvaessa tapahtuva energian siirto voidaan tulkita negatiiviseksi vaimennukseksi. Tämä suora mittaus on erittäin hankalaa. Teoreettiset mallit osoittivat, että negatiivinen vaimennus voi aiheuttaa aperiodisen divergenssin tasapainoasemasta eli negatiivinen vaimennuskerroin on hetkellisesti yli 100 %. Mallikokeissa laskettiin mitatusta keskimääräisestä jään lujuus-kuormitusnopeuskäyrästä vaimennuskertoimet, jotka vaihtelivat eri kokeissa välillä 30...200 %. Hetkellisesti jään murtumishetkel-

kellä em. arvot voivat olla vielä moninkertaisia. Kärjistetysti negatiivinen vaimennuskerroin on äärettömän suuri, jos oletetaan jään murtuvan hauraasti kerralla ja jäävoiman putoavan heti nollaksi.

Rakenteen vasteen kannalta on kuitenkin merkityksellisempi keskimääräinen niin sanottu ekvivalentti vaimennus. Negatiivinen vaimennushan esiintyy vain lyhyellä osalla kunkin värähtelyjakson aikana. Mallikokeissa saatiin ekvivalentiksi negatiiviseksi vaimennukseksi -5 ja -7 % kahdessa eri kokeessa. Haluttaessa rakenteen dynaaminen vaste kokonaisuudessaan vaimenevaksi jään aiheuttamille värähtelyille tulee sisäisen positiivisen vaimennuksen olla näitä ekvivalentteja negatiivisia vaimennuksia suurempi itseisarvoltaan. Käytännössä ei vielä ole kuitenkaan selvitetty ja koetuloksin vahvistettu mittakaavatekijän vaikutusta siirryttäessä mallimittakaavasta täysikokoisiin rakenteisiin.

4 KÄYTÄNNÖN SOVELLUTUKSET

Jään ja rakenteen dynaamisen vuorovaikutuksen tuntemusta voidaan käyttää hyväksi suunniteltaessa sekä taloudellisia että varmoja jääkuormille alttiita rakenteita. Alkuperäiset teräsrakenteiset Perämeren majakat ja reunamerkit olivat halparakenteisia, mutta ne eivät kestäneet dynaamista jään ja rakenteen vuorovaikutusta. Tietämyksen lisääntyessä ei hoikan teräsrakenteen taloudellisuudesta ole tarvinnut luopua. Suomen vesialueille on nyt jo rakennettu kolme uutta teräsmajakkaa ja yli 100 reunamerkkiä tai linjataulua.

Teoreettisesti jään aiheuttamia itseherätteisiä värähtelyjä ei synny dynaamisesti stabiileilla ominaismuodoilla. Käytännössä voidaan pohjaan tuettu rakenne suunnitella siten, että ne ominaismuodot, jotka aiheuttavat merkittäviä siirtymiä yläosan hyötyrakenteille, ovat dynaamisesti stabiileja. Tällöin pitää vain huolehtia siitä, että alaosan liikkuessa yläosaan ei pääse syntymään liian suuria siirtymiä tai kiihtyvyyksiä.

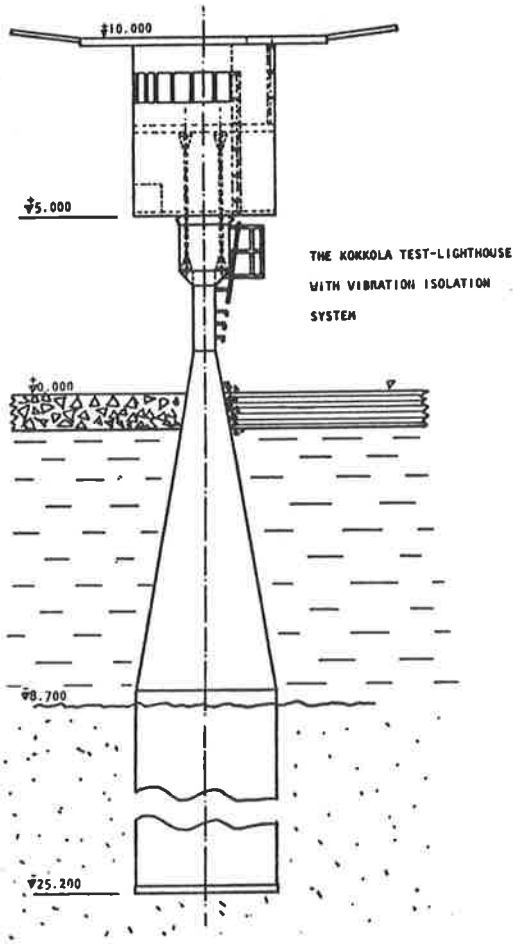
Ensimmäinen sovellutusesimerkki tällaisesta rakenteesta on Kokkolan jousitettu kokeilumajakka, kuva 8. Perustuksena on meren pohjaan juntattu terässylinteri, joka kapenee kartiomaisesti vesirajaa koh-

den jäälle alttiin pinta-alan minimoimiseksi. Yläosan kaksi huonekerrosta ja helikopteritasanne ovat tuettuna jousitusosan varaan. Jousitusosan taipuisat terästangot sallivat alä- ja yläosien keskinäisen vaakaliikkeen, mutta säilyttävät yläosan pystysuorassa. Jousitusosassa on lisäksi iskunvaimentimet, jotka aikaansaavat yli 15 % vaimennuksen yläosan liikemuodoille. Rakenteen kaksi ensimmäistä ominaismuotoa ovat dynaamisesti stabiileja ja vain näillä muodoilla esiintyy merkittävää yläosan liikettä. Kolmas ja neljäs muoto ovat dynaamisesti epästabiileja, mutta niillä esiintyy vain alaosan liikettä, kuva 8. Sitä korkeammat ominaismuodot eivät taas muuten enää merkittävästi vaikuta rakenteen dynaamiseen vasteeseen. Kokkolan kokeilumajakka on ollut toiminnassa nyt jo viisi talvea vuodesta 1977 lähtien ja kertaakaan siellä ei ole esiintynyt resonoivia jään aiheuttamia värähtelyjä yläosan ominaismuodoilla.

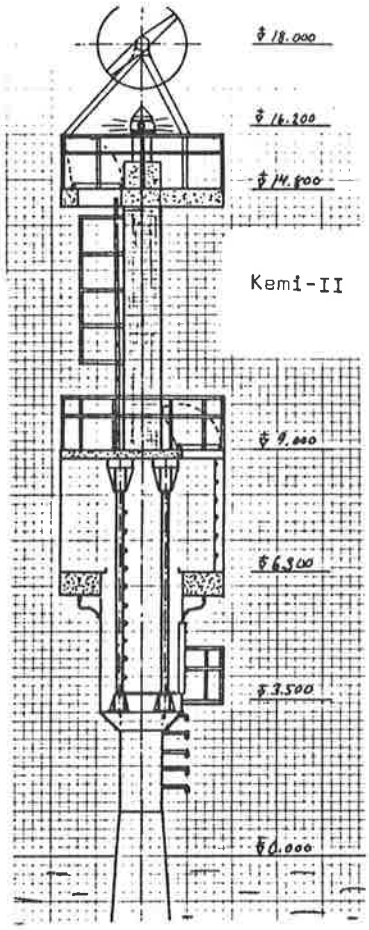
Vanhan alimitoitetun Kemi-II perustuksen varaan rakennettu jousitettu yläosa koki talvina -79 ja -80 jään aiheuttamia värähtelyjä myös yläosan ominaistaajuuksilla. Jousitus esti kuitenkin vaurioiden syntymisen liian suurten kiihtyvyyksien ansiosta yläosassa jopa silloinkin, kun peruspaalu ylikuormittui ja kallistui pysyvästi 5 ^{o} keväällä -80. Yläosan uudessa asennuspaikassa Välikivikossa, nyt huomattavasti Kemi-II:ta jäykemmän yläosan varassa, esiintyi myöskin värähtelyjä useilla eri taajuuksilla mukaanlukien yläosan ominaistaajuudet. Yläosan kiihtyvystaso on kuitenkin jousituksen ansiosta jäänyt alhaiseksi. Tässä jousitusosassa ei ole lainkaan iskunvaimentimia, jolloin sisäinen positiivinen vaimennus yläosan ominaismuodoilla syntyy pääasiassa joustintangoista ja on laskettu olevan noin 5 %. Tämä ei selvästikään riitä estämään jään aiheuttamia itseherätteisiä värähtelyjä.

Uusin jousitettu teräsmajakka valmistui syksyllä -81 Kemi-II:n sijaintipaikalle vanhan perustuksen katkettua lopullisesti joulukuussa -80. Kemi-II jousitettu teräsmajakka on toimintaperiaatteltaan ja rakennetoteutukseltaan Kokkolan kokeilumajakan kaltainen muuten paitsi, että yläosa on erilainen, kuva 9. Nyt on myöskin iskunvaimentimet asennettu jousitusosaan ja ne on mitoitettu antamaan 15 % vaimennus yläosan ominaismuodoille. Kuluneen talven aikana jäät ovat liikkuneet paljon, mutta kertaakaan ei yläosan ominaismuodoilla ole esiintynyt resonanssivärähtelyjä. Muun muassa majakan huipulla

18 m korkeudella oleva tuuligeneraattori on pyörinyt moitteettomasti läpi koko talven, myös silloin kun 50...80 cm paksut jäät ja ahtojäävallit ovat liikkuneet. Mainittakoon, että alkuperäinen vuonna 1973 rakennettu Kemi-II teräsmajakka osoittautui käyttökelvottomaksi jo 10 cm paksun jään aiheuttamissa värähtelyissä.



Kuva 8. Kokkolan kokeilumajakka.



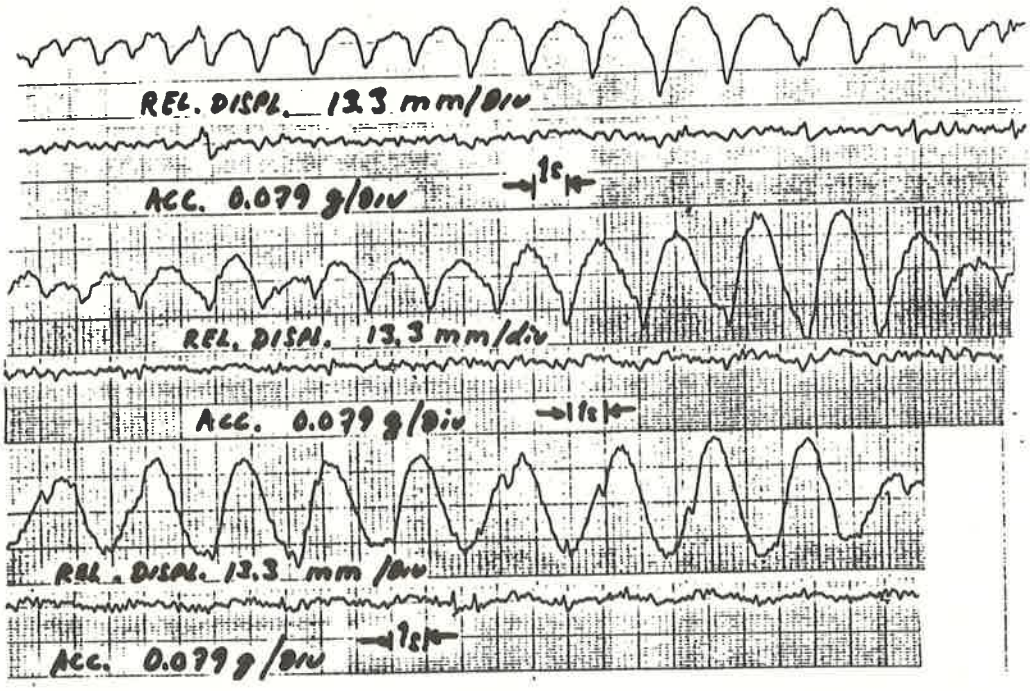
Kuva 9. Kemi-II jousitettu teräsmajakka.

5 MITTAUSOHJELMA

Oulun yliopistossa on suoritettu jään ja rakenteen dynaamiseen vuorovaikutukseen liittyviä mittauksia vuodesta 1973 lähtien Merenkulkuhallituksen rahoituksen turvin. Ensimmäinen kohde oli vaurioita kärsinyt Kemi-I teräsmajakka, josta mitattiin kiihtyvyysvastetta. Tehostetumpaa mittausta varten suunniteltiin ja rakennettiin telemetriamittausjärjestelmä, jonka avulla on mahdollista seurata reaaliajassa jopa viiden eri mittasignaalin tapahtumia samanaikaisesti. Mittauskohteessa paristokäyttöinen mittausjärjestelmä huolehtii antureiden virransyötöstä, signaalien vahvistuksesta, suodatuksesta ja multipleksoinnista, jonka jälkeen signaalit lähetetään VHF-radioyhteydellä mantereelle vastaanottoasemalle. Täällä signaalit nauhoitetaan automaattisesti heti, kun herätetaso on ylitetty. Nauhoitettu signaali demultipleksoidaan, jolloin alkuperäiset signaalit saadaan analogiamuodossa ulos. Puhelinmodemin välityksellä voidaan vastaava analoginen ulostulo saada myös Oulun yliopistoon reaaliajassa.

Mittauskohteena telemetriajärjestelmää käyttäen oli ensimmäisenä v. 1976 Kemi-I betonimajakka, josta mitattiin jääpainetta ja rakenteen dynaamista vastetta. Tulokset osoittivat myös massiivisen ja jäykän rakenteen olevan alttiin jään aiheuttamille resonanssivärähtelyille. Kokkolan kokeilumajakkaa mitattiin vuosina 1977...1981, mutta kertaakaan ei resonoivia värähtelyjä havaittu. Vanhan Kemi-II:n yläosaa on mitattu vuodesta 1978 lähtien ensin Kemi-II:n sijaintipaikassa ja myöhemmin Välikivikossa. Mittaustuloksista on esitetty näyte kuvassa 10, jossa on esitetty ylä- ja alaosien välinen suhteellinen liike jousitusosassa sekä yläosan kiihtyvys. Havaitaan, että amplitudien kasvaessa jaksoluku pienenee. Siirtymämuoto toistuu samanlaisena mikä osoittaa, että ollaan hakeutumassa raja-amplitudeihin. Yläosan kiihtyvyyskäyrä ilmaisee, että liike ei aiheuta kiihtyvyysvastetta yläosaan. Välikivikon alaosassa ei ole venymäliuskoja mittaamassa perustuksen rasituksia, joten jäävoimaan ei päästä suoraan käsiksi, vaan se on laskettava siirtymävasteesta.

Uudessa Kemi-II majakassa on momenttia mittaavat venymäanturit peruspaalussa sekä kiihtyvyysanturit peruspaalun yläpäässä sekä majakan ylätasanteella sekä siirtymäanturi ylä- ja alaosien välissä. Tähän mennessä ei ole esiintynyt havaittavaa jäiden aiheuttamaa värähtelyä.



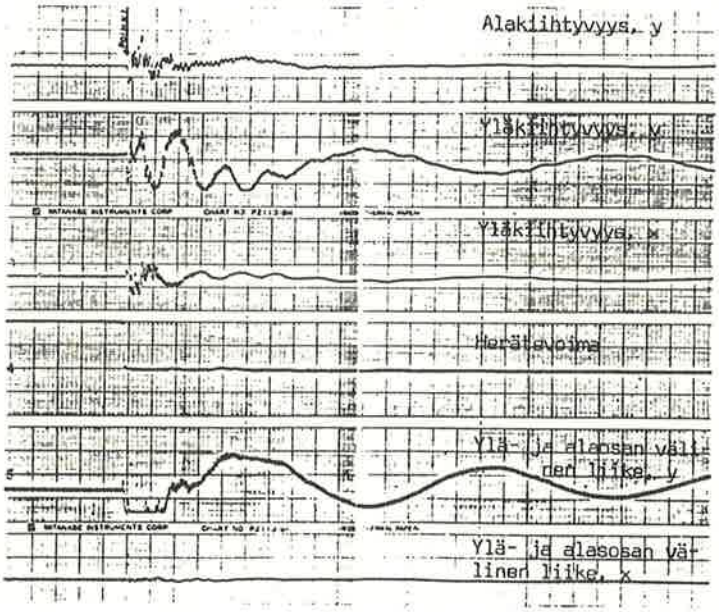
Kuva 10. Ylä- ja alaosan välinen suhteellinen liike ja yläosan kiihtyvyys, Välikivikon majakka.

Jään ja rakenteen dynaaminen vuorovaikutus on ilmiö, jossa syntyvä jäävoima riippuu rakenteen vasteesta. Suora jäävoiman mittaus ei ole mahdollista ja epäsuorassa mittauksessa rakenteen vaste vääristää tuloksia. Näin ollen kenttä- tai laboratoriomittauksissa saatu jäävoimafunktio pätee vain kyseiselle kohteelle. Jos esimerkiksi rakenteen dynaaminen käyttäytyminen on erilainen, vaikka jään paineelle altis rakenneosa olisi identtinen, eivät tulokset ole sovellettavissa suoraan toisiinsa ja mittauksessa saatavat jäävoimat tulisivat olemaan erilaisia.

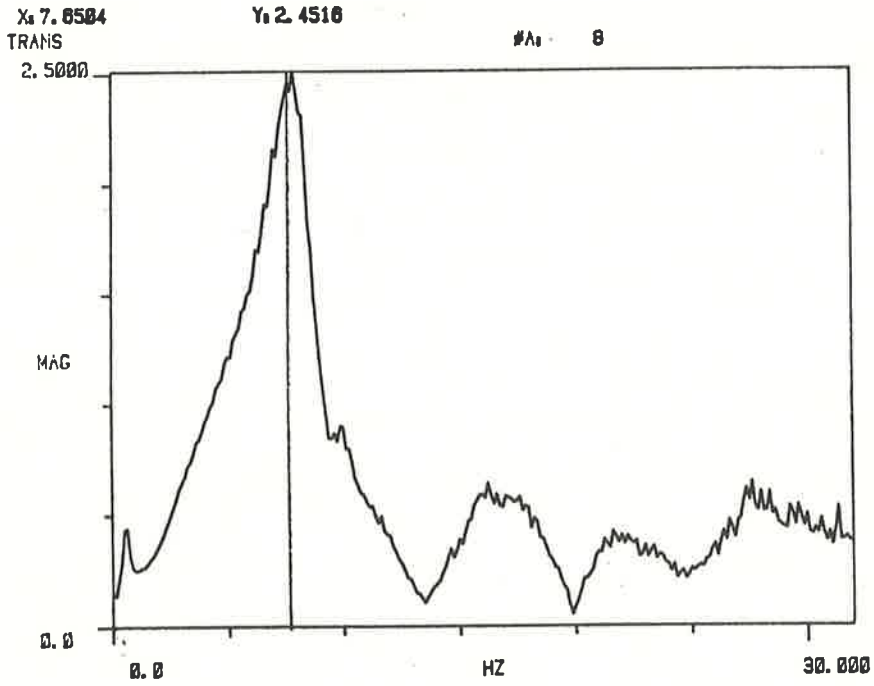
Todellisem interaktiivisen jäävoiman määrittäminen edellyttää rakenteen dynaamista kalibrointia. Tunnettu herätevoima johdetaan rakenteeseen jäävoiman vaikutuspisteestä ja suunnasta ja dynaaminen vaste mitataan samoilla anturéilla kuin muutenkin. Vaste- ja herätesignaalien suhteesta voidaan laskea rakenteen siirtofunktio, jonka avulla

jäävoiman mittaustuloksista voidaan kääntäen laskea todellinen jäävoima [2]. Jäävoiman kannalta parhaat mitta-anturit olisivat vedenalaisen osan rasitustilaa mittaavat anturit, joiden avulla saadaan määrättyä myös jäävoiman staattinen komponentti. Asennusten ja käytön kannalta huomattavasti helpommin voidaan toteuttaa vedenpäällisten osien nopeuksien tai kiihtyvyyksien mittaaminen. Näistä antureista ei kuitenkaan saada luotettavasti jäävoiman staattista komponenttia, sillä kulmanopeuden pienetessä nollaan myös siirtofunktio menee nollaan ja jäävoimaa ratkaistaessa siirtofunktio on nimittäjässä.

Majakoille Kemi-II ja Välikivikko suoritettiin keväällä 1982 dynaaminen kalibrointi siirtofunktioiden määrittämiseksi. 1 MN negatiivinen askelfunktioheräte aikaansaatiin vetämällä vetosauva poikki jäänmurtajalla. Heräte- ja vastefunktiot on esitetty kuvassa 11 ja siirtofunktio kuvassa 12. Jakamalla sitten jäävoimamittauksen Fourier-muunnos siirtofunktiolla ja suorittamalla käänteinen Fourier-muunnos saadaan todellinen jäävoima selville. Näin voidaan tutkia mm. miten jäävoima muuttuu jään alkaessa murtua ja kuinka suuri on hetkellinen jään aiheuttama negatiivinen vaimennusefekti. Tärkeä tavoite on saada selville mittakaavatekijän vaikutus, jotta mallikoetuloksia voitaisiin soveltaa luonnon mittakaavaan.



Kuva 11. Välikivikon majakan vaste dynaamisessa kalibroinnissa.



Kuva 12. Siirtofunktio jäävoiman ylä- ja alaosan välinen suhteellinen liike.

6 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Määttänen, M.: On conditions for the rise of self-excited ice-induced autonomous oscillations in slender marine structures. Styrelsen för Vintersjöfartsforskning, Research report No 25, Helsinki 1978.

[2] Määttänen, M.: Laboratory tests for Dynamic Ice-Structure interaction. Proc. POAC-79, pp. 1139-1154, Technical University of Norway, Trondheim 1979.

[3] Määttänen, M.: Ice-Structure dynamic interaction in continuous crushing. CRREL Report 193, Hanover, NH, 1982 (painettavana).

Brottmekanik - Framsteg inom forskning och tillämpning

Prof Janne Carlsson
Inst. för hållfasthetslära
KTH

1 INLEDNING

Brottmekaniken är en ung gren av materialmekaniken. Den har utvecklats under de tre senaste årtiondena utgående från Griffiths isolerade insats kring år 1920.

Den så kallade linjära brottmekaniken (LEFM) kan anses i stort sett färdigutvecklad. Den har i dag en mycket stark ställning. Det beror naturligtvis på att den varit framgångsrik vid behandling av sprickbildningsproblem i samband med utmattning och sprickbildning. Viktigt för dess framgång har emellertid också varit att den är lätt att använda. Den baseras på en enparametrig beskrivning av sprickor. Den relevanta parametern - spänningsintensitetsfaktorn K_I - kan beräknas med hjälp av linjär-elastisk teori. Den linjära brottmekaniken har därför på analyssidan kunnat profitera från de numeriska metoder som utvecklats för strukturanalys t ex finita elementmetoder.

Den linjära brottmekaniken har emllertid starka begränsningar vad gäller tillämpningar på konstruktionsmaterial. Den är stringent, teoretiskt giltig för spröda material av typen verktygsstål eller för konstruktionsstål i mycket grova dimensioner. I tekniska sammanhang har emellertid LEFM använts framgångsrikt långt utanför sitt teoretiska giltighetsområde.

Under de senaste tio åren har emellertid ett mycket omfattande arbete lagts ner på att utveckla mera fundamentala kriterier för behandling av sprickor i duktila konstruktionsmaterial. Detta arbete har dels varit av ren grundforskningskaraktär dels inneburit utveckling av tekniska materialprovningsmetoder. Nedan skall en översikt ges av denna utveckling av en olinjär brottmekanik.

2 LÖSNINGAR TILL SPRICKPROBLEM I OLINJÄRA MATERIAL

För ett material med exponentiellt spännings - töjningssamband, $\varepsilon/\varepsilon_o = \alpha(\sigma/\sigma_o)^n$, gäller enligt Rice, Rosengren [1] och enligt Hutchinson [2] att spänningar och töjningar vid spetsen av en spricka kan skrivas:

$$\sigma_{ij} = \sigma_o\left(\frac{J}{\alpha\sigma_o\varepsilon_o I_n r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta,n)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha\varepsilon_o\left(\frac{J}{\alpha\sigma_o\varepsilon_o I_n r}\right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta,n) \qquad (1)$$

Här är

$$J = \int_C (W\,dy - T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\,ds) \qquad (2)$$

den välkända J-integralen. Vidare är

I_n en numerisk faktor som beror av n

(r,θ) är polära koordinater

$\tilde{\sigma}_{ij}$ och $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ är dimensionslösa funktioner av θ och n

För sprickproblem är ofta den olinjära deformationen begränsad till ett område kring sprickspetsen. J-integralen som enligt ekv. (1) är ett mått på styrkan hos sprickfältet kan beräknas genom integration enlig ekv. (2) längs en väg långt från sprickspetsen, eventuellt i det elastiska området. Den kan också bestämmas ur sambandet mellan J och den elastiska potentialen U.

$$J = -\frac{\partial U}{\partial a} \qquad (3)$$

Man kan alltså beräkna J ur storheter som normalt tas fram vid en hållfasthetsteknisk analys.

3 KRITERIUM FÖR START AV SPRICKTILLVÄXT

J är alltså precis som K i linjära fallet en lättillgänglig parameter. Eftersom den också styr "fältet" kring sprickspetsen är det rimligt att som hypotes anta att den styr tillväxten av en spricka. Att så är fallet har visats experimentellt i ett flertal undersökningar och för en stor mängd material, se bl.a.[3].

En spricka börjar alltså växa då J når ett kritiskt värde J_{Ic} som är en materialparameter ekvivalent med brottsegheten K_{Ic} i det linjära fallet och kriteriet för initiering av sprickcktillväxt i den olinjära brottmekaniken lyder

$$J_I = J_{Ic} \tag{4}$$

Initiering av sprickcktillväxt är emellertid inte lika kritisk för en konstruktion som i det linjära fallet. I duktila material har man ett långt skede av stabil, långsam tillväxt av en spricka innan den snabba instabila tillväxten sker.

4 KRITERIER FÖR STABIL SPRICKTILLVÄXT OCH INSTABILITET

För många material har det visat sig gälla att J ökar approximativt linjärt med sprickcktillväxten Δa under denna stabila tillväxt, Fig. 1. En hypotes är att tillväxten styrs av dJ/da. Paris [4] inför T-modulen (tearing modulus) som en styrande parameter för stabil sprickcktillväxt. T är den normerade, dimensionslösa derivatan dJ/da.

$$T = \frac{E}{\sigma_o^2} \frac{dJ}{da} \tag{5}$$

Instabilitet hos sprickcktillväxt sker då T för materialet T_{mat} är mindre än beräknat T för konstruktion - belastningsfall T_{appl} (T-applied) d v s då

$$T_{mat} \leq T_{appl} \tag{6}$$

För att behandla instabilitet hos ett system måste hela systemet

beaktas inte bara den del som brister genom plastisk deformation eller/och spricktillväxt. Last-förskjutnings-sambandet för en komponent med spricktillväxt och plastisk deformation t ex en böjprovstav kan ha den form som visas i Fig 2. Om denna komponent kopplas i serie med elastiska, yttre (external) komponenter med kompliansen $\Delta/P = C_{ext}$ gäller att instabilitet inträffar då

$$-\frac{dP}{d\Delta} = \frac{1}{C_{ext}} \tag{7}$$

Vid sprickproblem i strukturer där den olinjära komponenten med spricka kan definieras och provas separat kan villkoret ekv. (6) användas för att fastställa när spricktillväxt blir instabil. Då bestäms kurvan $P = P(\Delta)$ för komponenten med spricka experimentellt medan C_{ext} för övriga elastiska delar av strukturen lämpligen beräknas. Ett sådant tillvägagångssätt kan t ex tillämpas vid analys av stora rörsystem. De experimentella data som krävs är $P = P(\Delta)$-kurvan för en kort rörprovstav med spricka.

Villkoret ekv. (6) innehåller i sig villkoret ekv. (7). Detta har visats i [5]. Det T-baserade villkoret har fördelen att grundas på rena materialdata, T_{mat}, medan ekv. (7) baseras på ett strukturprov på en del av den struktur där det tillämpas. I vissa fall måste denna del vara mycket stor. Då är det ohanterligt att arbeta med ekv. (7). Vad gäller villkoret ekv. (6) så ifrågasätts fortfarande dess allmängiltighet. Det är inte helt klart om det är strukturoberoende. I varje fall begränsas dess giltighet till fall med relativt små stabila spricktillväxter.

En alternativ metod att behandla instabilitetsproblemet har utarbetats av Shih och Hutchinson. Metoden utmynnar i det så kallade "Crack driving force"-diagrammet. Detta baseras på både linjär elastisk och exponentiellt deformationshårdnande materialmodell och intressanta storheter som J-integral och lastpunktsförskjutning Δ_{tot} interpoleras mellan resultaten för dessa två modeller.

$$J = \frac{K_I^2}{E} + \alpha\sigma_o\varepsilon_o\, bh_1\left(\frac{a}{b}, n\right)\left(\frac{P}{P_L}\right)^{n+1} \tag{8}$$

$$\Delta_{tot} = C_{ext}\, P + \frac{F_3}{E}\, P + \alpha\varepsilon_o\, a \cdot h_3\, (\frac{a}{b}, n)\, (\frac{P}{P_L})^n \qquad (9)$$

Här är P_L = gränslasten

a = sprickläng d

b = restligament

F_3 = bidraget till C_{ext} genom närvaron av sprickan

h_1 och h_3 är funktioner som beräknats med FEM och ges i t ex [7] för olika provstavsgeometrier.

Vid utförande av en stabilitetsanalys för en struktur bestäms $J_R = J_R(a)$-kurvan för materialet, Fig 3, genom ett prov med styrd förskjutning.

Instabilitet inträffar definitionsmässigt då

$$\frac{dJ}{da}\Big|_{\Delta_t} \geq \frac{dJ_R}{da} \qquad (10)$$

Man beräknar $J(a)$ med Δ_t = konst. ur ekv. (8) och (9) och erhåller en serie kurvskaror enligt Fig 3. Man kan utläsa för vilket J och Δ_t som kriteriet ekv. (10) är uppfyllt och instabilitet inträffar.

I princip är metoden ekvivalent med T-modulförfarandet. Skillnaden är att J-integralen beräknas med en föreskriven schabloniserad metod. En handbok har utarbetats för behandling av sprickproblem med denna metod, EPFM Handbook, Shih et al [7].

Ytterligare en metod att behandla olinjära problem är det så kallade "failure assessment" eller R-6-diagrammet. I sin ursprungliga form bygger detta på en interpolation mellan LEFM och gränslastfallet. Interpolationen sker med hjälp av Dugdale-modellen. I dag kan man basera "failure assessment"-diagrammet på en olinjär analys av den typ som diskuterats ovan. Förfarandet blir då likvärdigt med "Crack driving force"-förfarandet. Emellertid är förfarandet komplicerat att tillämpa för andra fall än laststyrning (dead load).

5 ANALYSMETODER INOM OLINJÄR BROTTMEKANIK

En av fördelarna med den J-integralbaserade brottmekaniken är att den är väl anpassad till strukturmekanikens analysmetoder. Särskilt sambandet ekv. (3) mellan J och elastiska potentialen U är fruktbart och leder till enkla resultat. Därav följer bl a direkt

$$J = \int_0^P \frac{\partial \Delta}{\partial a} \Big|_P dP \quad \text{och} \tag{11}$$

$$J = -\int_0^\Delta \frac{\partial P}{\partial a} \Big|_\Delta d\Delta \tag{12}$$

som har de grafiska tolkningar som ges i Fig. 4. För trepunktsböjprovstaven (och i första approximation CT-provstaven) leder dessa uttryck i sin tur till

$$J = \frac{2}{b} \int_0^P P \, d\Delta_c \tag{13}$$

där Δ_c är lastpunktens förskjutning till följd av sprickans närvaro, dvs total deformation minus den för stav utan spricka. Ekv.(13) är mycket enkel att använda för J-utvärdering vid provning eftersom integralen är lika med töjningsenergin.

För en böjprovstav i serie med en yttre fjäder (t ex provningsmaskinen) gäller för T-modulen enligt ekv. (13)

$$T = \frac{E}{\sigma_o^2} \frac{\partial J}{\partial a} = \frac{4EP^2}{\sigma_o^2 b^2} \left(\frac{1}{C} + \frac{\partial P}{\partial \Delta_c} \Big|_a \right)^{-1} - \frac{J}{b} \tag{14}$$

Här är C kompliansen hos fjäder plus provstav utan spricka och b är restligamentet.

Liknande uttryck kan med hjälp av FE-metoder ställas upp för andra provgeometrier. Att beräkna J och T för allmänna strukturer med sprickor av allmän t ex elliptisk form är emellertid både komplicerat och kostsamt. Det ligger för många fall på gränsen till vad som är realistiskt att genomföra även med de förnämligaste FE-program som finns att tillgå.

6 EXPERIMENTELLA METODER I OLINJÄR BROTTMEKANIK

Den materialprovning som erfordras för att bestämma J_{Ic} och T_{mat} kräver i allt väsentligt samma utrustning som K_{Ic}-provning och konventionell materialprovning. En skillnad är de ökade krav man inom olinjär brottmekanik har på mätning av spricklängdsändringar under den stabila sprickvillväxten. Dessa behöver man kunna mäta med en noggrannhet av 0.1 mm. Flera metoder kan användas för att åstadkomma detta. De viktigaste är

a) elektriska metoder baserade på såväl likström som högfrekvent växelström
b) kompliansmetoder som bygger på att provets komplians ändras med spricklängden. Denna ändring kan bestämmas genom små intermittenta avlastningar under den i övrigt monotona pålastningen, Fig 5. Känsligheten hos kompliansen är inte särskilt stor och mätningarna utförs därför i regel som differensmätningar och med användande av känslig elektronik [8].

7 TILLÄMPNINGAR AV OLINJÄR BROTTMEKANIK

Den olinjära brottmekaniken har utvecklats främst med stöd från reaktorindustrin och stimulerats av de problem man har där. Sådana är risken för brott i rörledningssystemen och tryckkärl i samband med sprickor.

Åtskilliga dokument har producerats av EPRI gällande dessa problemställningar men mycket litet har publicerats i tidskrifter.

En exakt instabilitetsanalys av t ex tvärsprickor i rörledningssystem är komplicerad att utföra. Det finns inte utrymme för att presentera resultaten här bortsett från vissa grunddrag i dessa. Som framgår av ekv. (7) och (14) spelar kompliansen i systemet stor roll för utveckling av ett instabilt brott. Ju större kompliansen är dvs ju närmare laststyrning man ligger eller ju vekare konstruktionen är desto större är tendensen för instabilitet.

Detta framgår av uttrycket för T-modulen för ett rör fast inspänt i sina ändar och med en genomgående spricka runt en del av omkretsen.

Då gäller approximativt [10] i det fall att sektionen med spricka är utsatt för ett moment lika med gränslastmomentet

$$T_{appl} = F_1(\theta)\ (\frac{L}{R}) + F_2(\theta)\ \frac{JE}{\sigma_o^2 R} \qquad (15)$$

Här är

L = rörets längd
R = rörets radie
σ_o = flytspänningen ($\sigma_s < \sigma_o < \sigma_B$)
2θ = den vinkel i omkretsled som sprickan upptar
F_1 och F_2 funktioner som beror av θ.

För $0<\theta<120^o$ är $0.2<F_1<1.2$ och $-0.4<F_2<0.6$. Detta visar att T_{appl} i huvudsak beror på rörets flexibilitet. För rostfritt stål är T_{mat} i regel över 200. Det innebär att för ett rör med R = 0.25 m krävs en längd av över 50 m för att villkoret ekv. (6) skall vara uppfyllt och instabilitet inträffa. Detta gäller då även sprickor som omsluter en tredjedel av omkretsen.

Ytterligare ett exempel på flexibilitetens betydelse för instabilitet ges av uttrycket på T_{appl} för en plåtprovstav med kantspricka (DEC) eller centrumspricka (CC). Den får för fallet att gränslasten nåtts i resttvärsnittet formen

$$T_{appl} = 2\alpha \cdot tEC = 2\alpha L/w \qquad (16)$$

där C = L/WtE kompliansen
L = längden
w = bredden
t = tjockleken
α = 1 för CC och 4/3 för DEC.

Som synes ökar T_{appl} och därmed tendensen för instabilitet med längden L. Detta känner alla som arbetat med provning till kvalitativt. Den olinjära brottmekaniken ger en kvantitativ formel för att uppskatta hur geometriparametrar inverkar.

Man observerar att sprickslängden inte ingår i ekv. (16). Dock har härledningen skett med antagandet att gränslasten nåtts över det tvärsnitt som innehåller sprickor.

8 DISKUSSION

Trots att den olinjära brottmekaniken i dag nått så långt att den kan utnyttjas direkt i tillämpningar återstår många frågor att lösa. J-integralen och därmed T-modulen står inte på fast teoretisk grund vid fall av stor stabil sprickstillväxt. Nya koncept fordras här och dessa kan förhoppningsvis komma fram ur fundamentala lösningar av σ-ε-fältet för dessa fall.

Vad gäller praktiska tillämpningar är man i dag långt från att kunna behandla tredimensionella problem t ex instabilitet hos halveliptiska ytsprickor. Visst geometriberoende hos T-modulen har som nämnts ovan observerats. Det skapar en viss tveksamhet gällande T-modulens allmängiltighet.

Andra intressanta tillämpningar av J-integralen som man arbetar med i dag är sprickstillväxt vid låg-cykelutmattning. Vissa resultat antyder att de metoder som behandlats ovan för stabil sprick-tillväxt vid monoton last kan tillämpas även vid cyklisk last.

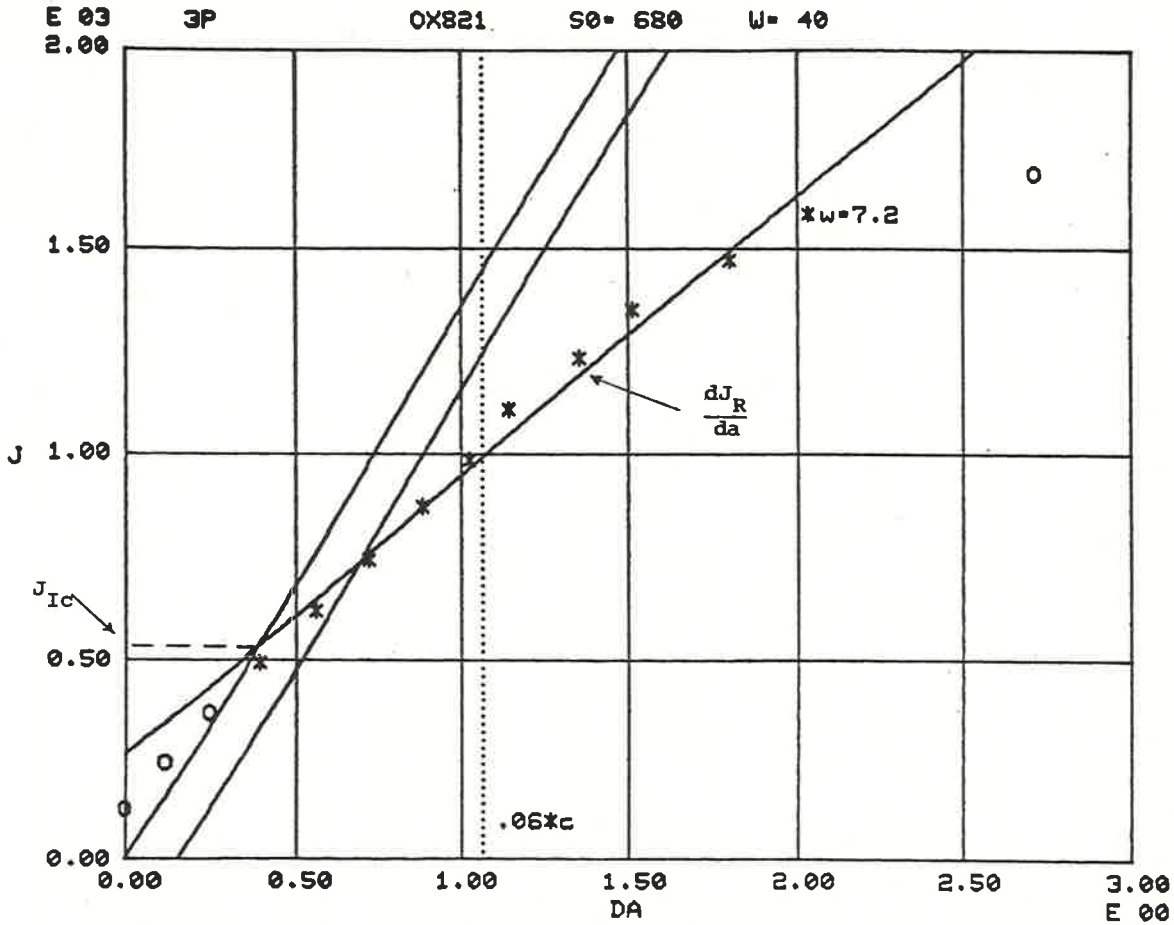


Fig. 1. Experimentella punkter för $J = J(\Delta a)$ och anpassad linje för bestämning av $dJ/da = \sigma_o^2 T_{mat}/E$.

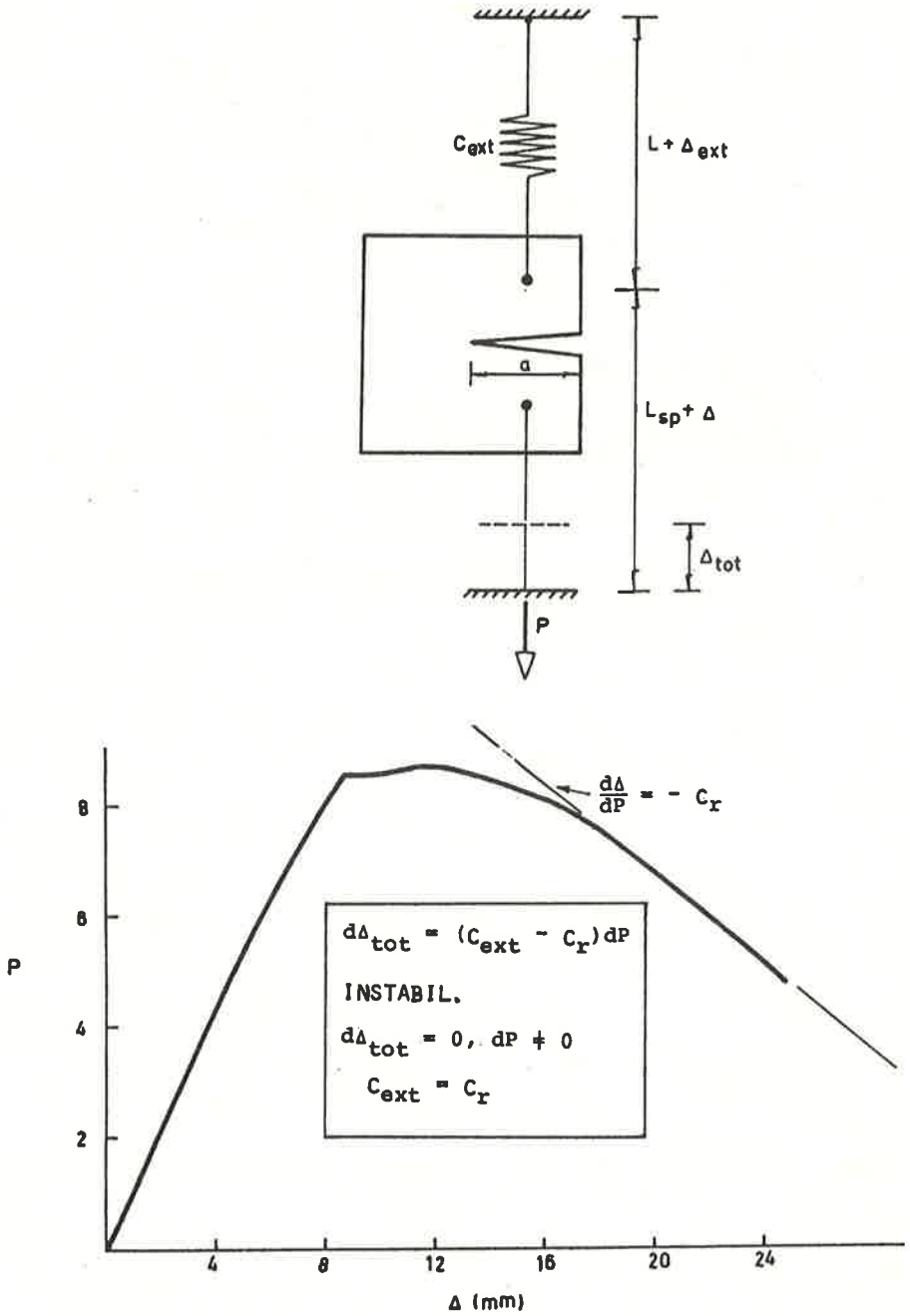


Fig. 2. CT-provstav i serie med fjäder: Instabilitetsvillkor $d\Delta/dP = C_{ext}$.

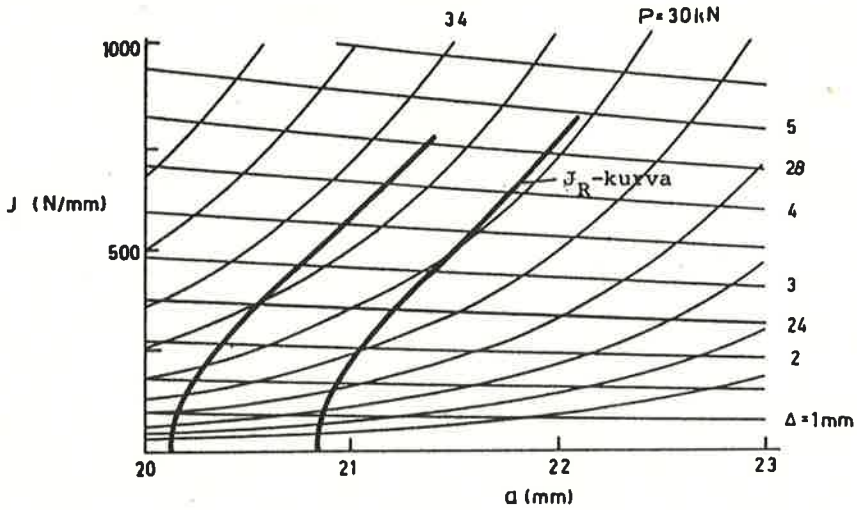


Fig. 3. "Crack driving force"-diagram för böjprovstav. Kurvor för P = konst. och Δ = konst. samt "material"-kurvor J_R.

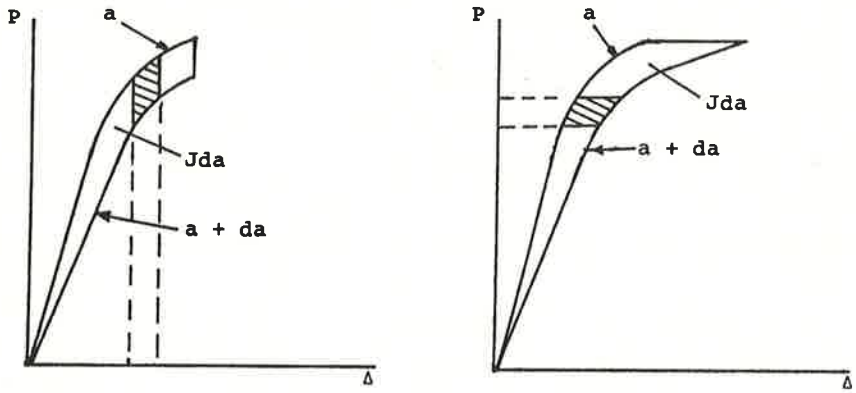


Fig. 4. Tolkning av J enligt ekv. (11) och (12).

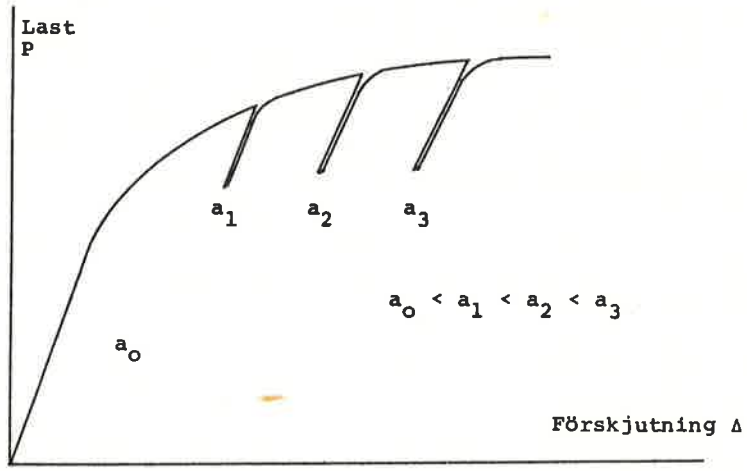


Fig. 5. Avlastning under provet för bestämning av kompliens C(a) och därmed aktuell sprick-längd a = a(C).

LITTERATURHÄNVISNINGAR

[1] Rice, J R och Rosengren, G F. Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. J. Mech. Phys. Solids. 1968, Vol 16, pp 1-12.

[2] Hutchinson, J W. Singular Behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. J. Mech. Phys. Solids. 1968, Vol. 16, pp 13-31.

[3] Carlsson, A J, Markström K. Fracture 1977. Ed Taplin ICF4, Waterloo Canada 1977, Vol. 1.

[4] Paris, P C, Tada, H, Zahoor, A and Ernst, H. The theory of Instability of the Tearing Mode of Elastic-Plastic Crack Growth in Elastic-Plastic Fracture. ASTM STP 668 J D Landes, J A Begley and G A Clarke Eds ASTM 1979, pp 5-36.

[5] Carlsson, A J och Kaiser, S. Studies of Different Criteria for Crack Growth Instability in Ductile Materials. 2nd International Symposium on Elastic Plastic Fracture Mechanics. Oct 1981, Philadelphia, USA. To be published as ASTM STP.

[6] Shih, C F och Hutchinson, J W. Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems. J. Eng. Mat. and Techn., Vol. 98, 1976, pp 289-295.

[7] Kumar, V, German, M D och Shih, C F. An Engineering Approach for Elastic Plastic Failure Analysis. EPRI NP-1931, RP 1237-1, July 1981.

[8] Kaiser, S. Experimental Studies of Different Instability Criteria Based on the J-R Curve, Publ. 214. Inst. för Hållfasthetslära, KTH, Stockholm 1981, TRITA-HFL-0034, ISSN 0349-1234.

[9] Tada, H, Paris, P och Gamble, R. Stability Analysis of Circumferential Cracks in Reactor Piping Systems. NUREG/CR-0838. US Nuclear Regulatory Commission, Washington DC 20555, 1979.

TRENDS IN THE SAFETY OF STRUCTURES

Ivar Holand
Cement and Concrete Research Institute
The Foundation of Scientific and Industrial Research at
the Norwegian Institute of Technology

1 INTRODUCTION

The analysis of structures is one of the traditional fields of technology and had reached a high scientific level already at the beginning of this century. The aim of the analysis is to produce safe structures, but the more precise evaluation of safety is less amenable to a scientific approach. Thus, safety considerations were mainly left to experience and engineering judgement. This may under many circumstances be fully acceptable. However, experience and engineering judgement are not well suited for extrapolation to unknown domains.

New and unknown conditions are numerous, e.g.

- new materials
- daring designs with large spans
- structures in new environment, e.g. offshore
- severe man-made hazards
- nonlinear methods allowing a more reliable analysis
- stochastic dynamic analyses, presenting the results in statistical terms
- fatigue analyses, unveiling uncertainties related to loads and to material behaviour as well.

Thus, rational approaches for safety evaluation meeting new situations are needed.

2 INTERNATIONAL AND REGIONAL WORK ON SAFETY OF STRUCTURES

A characteristic of the safety specifications is that they frequently are included in standards, rules and codes of practice, which are harmonized across the national borders as far as possible. Thus, much international work has been carried out regarding safety. The larger part of this work has been related to civil engineering structures and to building regulations. A list of important international and regional bodies is given below, including reference to important publications.

- International Association for Standardization (ISO) [1][2]
- The Euro-International Concrete Committee (CEB) [3][4]
- Joint Committee on Structural Safety (JCSS) [5]
- The Nordic Committee on Building Regulations (NKB) [6]

The European Economic Committee is preparing a set of seven Eurocodes, of which Eurocode 1 concerns the unified rules common to various types of building and material and is a general safety code. This work is similar to the national work on structural codes, but as these codes will be accepted by the EEC countries, including all the major European countries, they will probably have a dominating influence also on us in the outskirts.

Among other international efforts in related fields could be mentioned

- International Atomic Energy Agency [7]
- Inter-Governmental Maritime Consultative Organization (IMCO)
- Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP) [8]

3 SAFETY METHODS

The international work quoted above has been concentrated on rational safety methods, well suited for use in practical design.

The safety check according to the traditional permissible stress method may be formulated as

$$R-S > 0 \qquad (1)$$

where R and S are the permissible and the calculated stress, respectively.

This method has now been replaced in almost all codes for structural design by the method of partial coefficients. The safety check according to this method may also be formulated by equation (1), but now R is a defined design resistance R_d and S a defined design load effect S_d. Resistances and load effects may be stresses, stress resultants, displacements etc. The design resistance is found by using a characteristic material strength divided by a safety coefficient, denoted a material coefficient. The characteristic strength is defined as a fractile in the statistical distribution, and the 0.95 fractile is usually preferred. This means that 5% of the statistical population has a strength lower than the characteristic strength. Correspondingly, the characteristic load effect is calculated from a characteristic load multiplied by a load coefficient. Characteristic loads are usually chosen with return periods of 50 or 100 years, but this rule is mainly practicable for loads from the natural environment (snow, wind, waves etc.).

The method is often denoted semiprobabilistic, since it offers a rational way of handling known statistical information. This is also one reason for its superiority over the permissible stress method. Another is the fact that it allows a sound handling of cases where permanent loads, for instance the own weight, reduce the load effects in question.

The principles described above are straight forward, but the practical adaption leaves a number of questions that are debated, e.g.

- magnitude of material and load coefficients and their variation with control and consequences
- combination of different loads
- consideration of accidental loads
- definition of limit states

Even in the Nordic countries, where the Nordic countries, where the Nordic Committee on Building Regulations has worked to harmonize the regulations for a number of years, there are considerable differences. This is illustrated in Table 1 for the dominating load coefficients.

Table 1. Load coefficients in the Nordic countries.
Ultimate limit state.

	Permanent	Variable
Finland, Norway	1.2	1.6
Sweden, Denmark	1.0	1.3

It seems self-evident that such large differences in load coefficients must have been compensated for in the material coefficients. Thorenfeldt [9] has compared the final safety for reinforced concrete structures according to the rules in the Nordic countries. The surprising result is that the final differences are similar to those in Table 1, and in some cases even larger.

The method of limit states is often denoted as a "level 1" method. The "level 2" is a proper probabilistic method. This method considers R-S in equation (1), not as a deterministic quantity, but as a statistical population. The simplest form of statistical description makes use of the mean value and the standard deviation only. This approach allows the definition of a safety index

$$\beta \doteq E(R-S)/D(R-S) \qquad (2)$$

where E denotes the mean value and D the standard deviation. Pioneers in the work on safety indices are Basler [10], Cornell [11], Esteva and Rosenblueth [12], and Turkstra [13]. A discussion of the method may be found in a review paper by Ditlevsen [14], and a specification of its use in the NKB recommendations [6].

The safety index expresses how far the mean value of R-S is from zero (a measure of how far the structure is from failure) in terms of number of standard deviations. If R-S depends on only one variable, the interpretation of β as a distance is straight forward. If R-S depends on n variables, β must be interpreted as a distance in the n-dimensional space. NKB [6] defines values of β for the ultimate limit state for different safety classes and types of failure in a table, that is reproduced in Table 2.

Table 2. Safety indices β for the ultimate limit state.

Failure consequences (Safety Classes)	Failure types		
	I	II	III
Less serious	3.1	3.7	4.2
Serious	3.7	4.2	4.7
Very serious	4.2	4.7	5.2

Failure types: I Ductile with extra carrying capacity
II Ductile without extra carrying capacity
III Brittle failure, instability failure

For a normal distribution of R-S, the corresponding probabilities of failure are given in Table 3.

Table 3. Safety index β and probability of failure p_f for a normal distribution.

β	3.09	3.71	4.26	4.75	5.20	5.61
p_f	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}

In a proposed revision of the Norwegian Building Regulations, which are part of the law, the numerical safety in the three safety classes is required not to exceed 10^{-3}, 10^{-5} and 10^{-7} respectively, corresponding to column I in Table 2. Such rules are theoretically perfect, but a strict enforcement may present problems.

In fact, an interpretation of safety indices in terms of probabilities of failure should be used with caution. The actual probability depends very much on the tails of the distribution curves and can deviate substantially from the theoretical ones. However, as a relative measure, suitable to compare different structures made from different materials, the safety index may may be of great value. The actual value of p_f must be chosen, not on the basis of an assessment of an acceptable probability of failure, but by comparison with relevant existing structures.

An important field of application of the safety index method is for code committees as a rational basis for specifying partial coefficients.

4 DESIGN PHILOSOPHY

The probabilistic arguments used in combination with the safety index method imply that there always remains a certain, however small, probability of failure for every structure. Experience from actual structural failures, however, reveal that failures occur much more frequently than this calculated risk can explain. Ingles [15] reports the following observed failure statistics for bridges

USA $P_f = 3 \times 10^{-4}$ per year
Australia $P_f = 3 \times 10^{-3}$ per year

These structures should according to Tables 2 and 3 have a probability of failure in the order 10^{-5} to 10^{-6}. The differences cannot be explained by uncertainties in the distribution laws, but must be found in oversights, omissions and gross errors. Generally, the aim of the structural design is, apart from satisfying the functional requirements, to minimize the risk of structural failure, and above all a failure with catastrophic consequences. Thus two approaces are evident [16]

- to reduce the p r o b a b i l i t y of a hazardous event
- to reduce the c o n s e q e n c e s of a hazardous event

The initiating hazardous events can be:

- abnormal (low) strength
- abnormal loads (accidental loads)

Abnormal strength should be controlled at the design and fabrication stage, reducing the probability of hazard. Hopefully, this will be the result of recent efforts to introduce a more systematic quality assurance in structural design. [5]

Abnormal loads must always be assessed in relation to the environments in which the structure is located. This is particularly evident in case of structures in traffic systems and industrial plants.

The probability of abnormal loads could be reduced by a proper design of equipment and by control during operation, in particular of equipment with potential of high energy release. However, risks related to abnormal loads are mainly reduced by a proper layout.

In Norway, these problems are discussed above all in relation to the offshore activities. Draft guidelines from the Norwegian Petroleum Directorate on safety assessment of fixed platforms [17] emphasize accidental loads and specify that design basis accidents should be defined in quantitative terms, and comprise for instance:

- fire and explosions
- collisions (supply boats, helicopters, external shipping)
- dropped objects and flying fragments
- rare earthquakes
- environmental loads not included in the design loads

The guidelines allow accidental loads with a probability of less than 10^{-4} per year to be ignored. The corresponding number for design environmental loads is 10^{-2}.

For comparison, the following numbers for other accidental loads are quoted:

- dikes in the Netherlands, flooding 10^{-4}
- dwellings destroyed by fire (Norway) 3×10^{-4}
- avalanches in dwelling areas (Norway) 30×10^{-4}

The last number means that building of dwelling houses is not allowed in areas where the probability of an avalanche or land slide is evaluated to be larger than 3×10^{-3} per year. This number illustrates the risk people are willing to take when the risk is a familiar one, and,in this case, building sites with smaller risks are scarce in the area in question.

A leading design principle is that if an undesired event occurs, the ensuing chain of hazardous events shall be stopped by new barriers (fail-safe design). The design of the Stafjord "B" platform in the North Sea to reduce the consequences of accidental loads has been discussed by Dier [18]. Figure 2 shows how the layout of the deck has been chosen to locate a safe haven on the left side, as far away as possible from the main hazard area on the right, and with buffer zones imbetween. In this case fire and explosion hazards have been considered. For other parts of the structure collision and other hazards may be of interest.

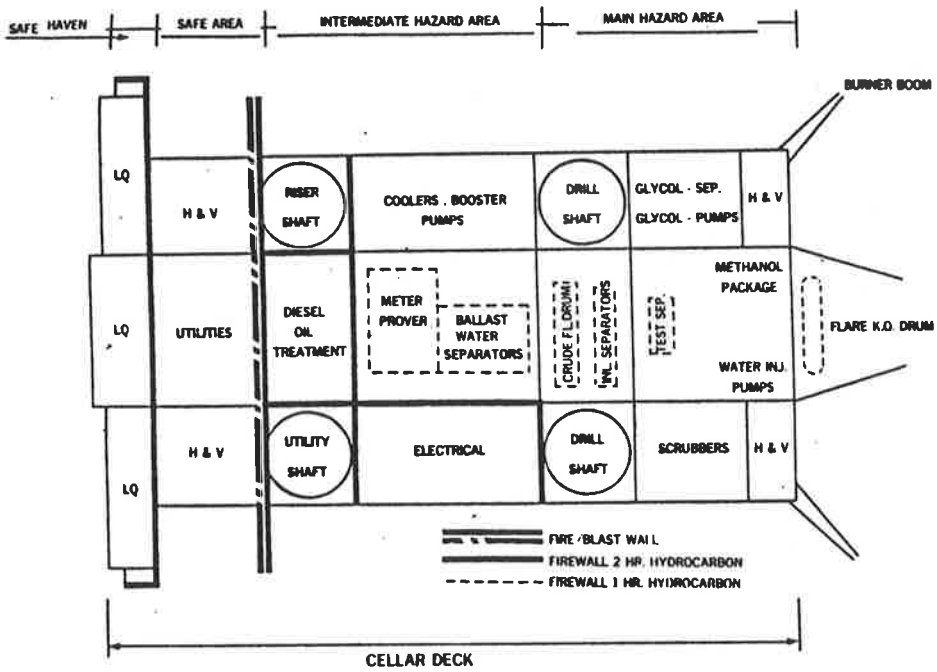


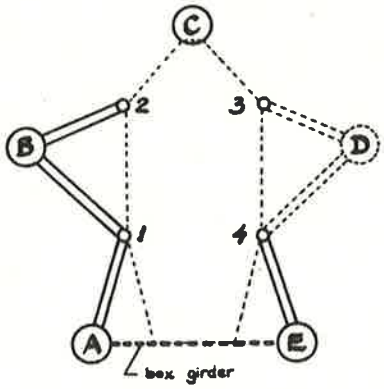
Fig. 1. Risk zoning on the Statfjord "B" platform (from [18])

The principle of barriers may also be illustrated by the "Alexander L. Kielland" accident. The platform was of the Pentagone type with five columns arranged in a regular pentagon (see Fig. 2). The lower bracing D'-6 failed because of a fatigue crack originating from a weld fixing a small tube supporting a hydrophone. The remaining bracings were not located in such a way as to enable them to replace the carrying capacity which was lost, and the D column broke loose from the structure.

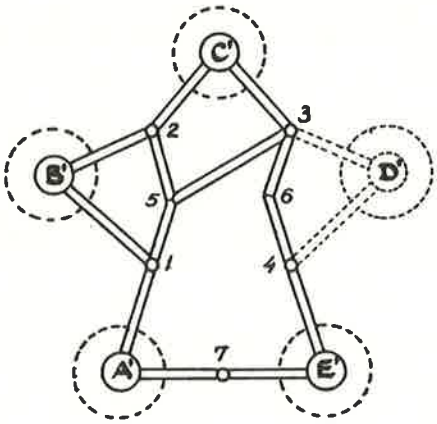
After the accident Det norske Veritas has required the remaining Pentagone platform classified by Veritas to be strengthened by additional bracings between B' and C' and between C' and D'. Thus, if one bracing fails, the other presents a new barrier. The decision may be correct in this particular case, but as a general design principle it is debatable.

Experience does not indicate that statically determinate structures are generally unsafe. However, a special alertness is necessary in design and control of particularly critical elements. It may be said that this alertness was lacking in the "Alexander L. Kielland" case.

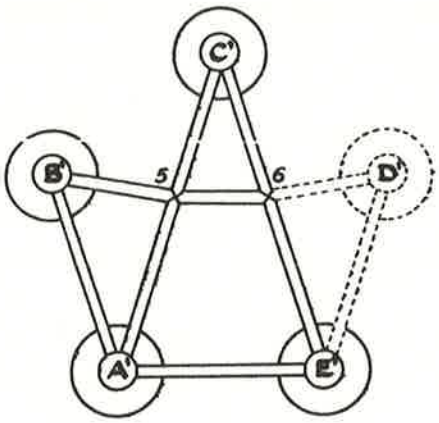
This accident also presents an example of a possible barrier, braking the chain of events at a late stage, but preventing a total catastrophe. Fig. 3 shows the platform in an equilibrium position with a heel of 32.5°. This position is stable if the deck is watertight, but in the actual case this barrier was also broken in a few minutes because of influx of water through openings in the deck.



Upper horizontal bracings



Oblique bracings



Lower horizontal bracings

FIGURE 2 'ALEXANDER L. KIELLAND'
System of bracings

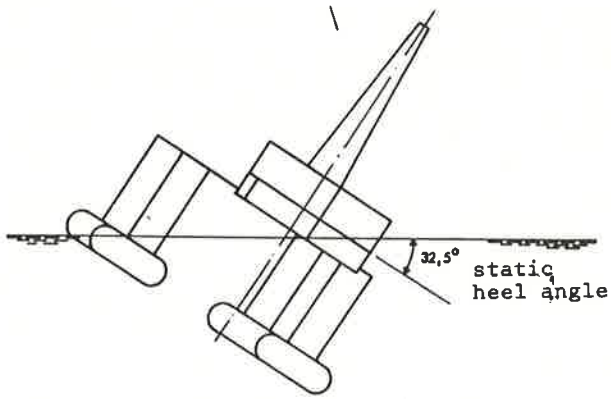


Fig. 3. "Alexander L. Kielland" in a possible stable static heel position.

5 RISK ANALYSIS

For a complex structure in a complex environment, modern society will often require a more explicit evaluation of the risks involved, than the reliability implied by a design according to codes and rules. Experience from similar structures can to some extent be used for a risk assessment, but in many cases the experience is lacking or inadequate. It is for example evident that a single accident with widespread consequences such as in the case of the "Alexander L. Kielland", does not give any expression of the risk level of mobile platforms. Even direct statistics available from accidents worldwide [19] are subject to large uncertainties.

To obtain a better understanding of the risk level, analytical approaches must be used together with available experience. A rational risk analysis is based on the following observations:

- almost every major accident has originated from a small fault and gradually developed through a long sequence (or several parallell sequences) of steadily more serious events culminating in the final event

- each single event in the chain occurs at a rate which allows the use of statistics, such as reliability data for components

- it is often reasonably well known how a system will respond to a certain event

The "Alexander L. Kielland" accident is a typical example. The physical accident chain was initiated by a small crack leading to failure of a single bracing. This failure was followed by the failure of five other bracings connecting a column to the rest of the platform. The loss of the column, implying loss of buoyancy, resulted in heeling, which immediately made the ordinary and emergency generators stop. In addition loose equipment started to move. The moving objects, and increasing hydro-static and -dynamic loads may have caused additional structural damage. The heeling also increased mooring-line tension, so that eventually the cables broke. More important, the heeling of the platform submerged openings, which resulted in progressive flooding. This influx of water made the rig steadily sink and heel with the potential of causing further structural damage, stopping the machinery functioning and thus impending the operability of life-saving equipment. Finally, the rig capsized. The influence of factors of human management on the cause of the accident and the consequences in terms of loss of lives is fully described in [20].

By combining knowledge of system build up with knowledge of failure rates for the system elements, it is possible to achieve an indication of the risks in the system.

Thus, there is a need for failure/accident and background data in the case of a systems analysis approach. Background data are particularly required to describe the system and its environment and normalize the risks. To normalize the risks it is necessary to know the length of time people and equipment are exposed to the hazards and the quantities exposed. Up to now, knowledge about human reliability has been particularly scarce and has contributed the greates uncertainties to the risk analysis. Evidently, the results of such analyses may be uncertain, and the conclusions may be difficult to draw. Nevertheless, a systematic analysis based on the best data available is the only rational approach to this intricate problem.

The results from a risk analysis may be used in different ways with varying benefit:

- *as the basis for accepting a complete system.* This is probably the most controversial use of the results from risk analyses. The uncertainties involved in the calculations are significant. For a mass-produced technical system, such as electrical equipment, the frequency of a certain failure may be predicted fairly well. For complex systems, involving people, the uncertainties are far greater. However, even if the basic data are dubious, the risk analysis should be formulated in numerical terms. On the other hand, a public discussion of such numbers may often be a serious problem.

- *as the basis of improving a system.* It is normally considered that the determination of the relative importance of each separate risk element is more accurate than that of the complete system. Through an identification of the most important risk elements new barriers may be introduced into the system more efficiently.

- *as the basis of alertness in monitoring or surveying.* The risk analysis may reveal major potential accidents which may be caused by failure of a single or double barrier. In such cases intensified control of the barrier during operation may be implemented as a measure to reduce the risk.

- *as the basis of an adequate accident preparedness system.* Contingency equipment can be tailored to the expected risk situations, and accident combatting can be more efficient.

In the offshore industry there has been a steadily increasing use of risk analysis. A risk analysis of a Condeep platform made by Statoil A/S is perhaps the most comprehensive one done to date in Norwegian oil activities. However, Statoil indicates a factor of uncertainties of 20 to each side in the estimated number of fatalities per platform year.

Riskanalysis is today required by the Norwegian Petroleum Directorate for the evaluation of new concepts. Similarly, risk analysis is frequently required by the Inspectorate of Flammables and Explosives. The final risk level is frequently defined by the principal layout. Thus, the risk assessment should be carried out at a very early stage in the design.

6 SAFETY AND ECONOMY

There has been an almost explosive increase in costs for the production plants in the North Sea. To investigate the reasons for this increase, the Norwegian government appointed a special committee (Styrings-gruppen for kostnadsanalysen - norsk kontinentalsokkel) by Royal Decree of 16th March 1979. Among other tasks this group should clarify the influence of Norwegian regulations and safety requirements on the increase of costs, particularly as it had been claimed that the increase was caused by extreme safety requirements.

The following sections regarding costs caused by safety requirements are quoted from the conclusions of the committee [21]:

- new safety specifications from government agencies have caused noticeable cost increases for some projects, but not to such an extent that they can be said to be decisive for the costs

- laws and regulations regarding work environment, workers' protection, protection of ocean environments etc. have also caused considerable costs without being decisive for the cost situation. Hook-up work is an exception. New requirements in laws and regulations, a stricter enforcement of older laws and requirements regarding work permits, working hours, location and standards for living quarters etc. have made this work more expensive by an estimated 15 per cent.

It should, however, also be borne in mind that increased safety is accompanied by increased reliability and regularity. In particular, a reduction of production down time counts heavily on the positive side in the cost/benefit analyses.

7 REFERENCES

[1] ISO 2394 General principles for the verification of the safety of structures. 1970.

[2] ISO TC 98 Working group for revision of IS 2394. Draft revised in meeting in Trondheim, Oct. 1981.

[3] Euro-International Committee for Concrete. Model Code for Concrete Structures, Volume I and II, International System of Unified Standard Codes of Practice for Structures. CEB Bulletin d'Information No. 124/125, Paris, April 1978.

[4] Comité Euro-international du Béton. Conceptional Preparation of Future Codes, Progress Report. CEB Bulletin d'Information No. 147, Paris, February 1982.

[5] Joint Committee on Structural Safety. General Principles on Quality Assurance and on Reliability for Structural Design. Report International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, April 1981.

[6] The Nordic Committee for Building Regulations. Recommendations for Loading and Safety Regulations for Structural Design. NKB Report No. 36, Copenhagen, November 1978.

[7] Governmental Organization for the Regulation of Nuclear Power Plants. A Code of Practice, Safety Series No. 50-C-G. International Atomic Energy Agency, Vienna, 1978.

[8] Fédération Internationale de la Précontrainte. Recommendations for the Design and Construction of Concrete Sea Structures. Third edition 1977.

[9] Thorenfeldt, E., Comparison of Safety Levels in Nordic Concrete Codes. The ninth International Congress of the FIP, Stockholm, June 6-10, 1982 (to appear).

[10] Basler, Untersuchungen über den Sicherheitsbegriff von Bauwerken, Doctoral thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Schweizer Arch No. 4, Vol. 27, 1961.

[11] Cornell, C.A., A Probability-Based Structural Code, ACI Journal, Des. 1969.

[12] Rosenblueth, E. and Esteva, L., Reliability Basis for Some Mexican Codes, Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings, Publication SP31, American Concrete Institute, Detroit, 1977, pp 1-42.

[13] Turkstra, C.J., Applications of Bayesian Decision Theory, Study No. 3: Structural Reliability and Codified Design, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1970.

[14] Ditlevsen, O., On the Second Moment Structural Reliability Theory. Safety of Structures under Dynamic Loading. Tapir, Trondheim, 1978.

[15] Ingles, O.G., Safety in Civil Engineering - Its Perception and Promotion. INICIV Report No. R-188, The University of New South Wales, Kensigton, July 1979.

[16] Moan, T., Wider Aspects of Petroleum Technology, and in Particular, the Application of Hazard Analysis, Risk Analysis and Event/Consequence Analysis to Offshore Systems and Operations. Joint UK/Norwegian Seminar on Education and Research in Offshore Petroleum Technology, Trondheim 1978.

[17] Oljedirektoratet, Forslag til sikkerhetsmessig vurdering av plattformkonsepter. November 1979 (in Norwegian).

[18] Dier, J.S., Safety Considerations in the Development of the Statfjord "B" platform. Offshore North Sea Technology Conference Exhibition, Stavanger, 1978.

[19] Moan, T. and Holand, I., Risk Assessment of Fixed Offshore Structures. Experience and Principles. ICOSSAR, Trondheim, June 1981.

[20] Alexander L. Kielland-ulykken, rapport fra et utvalg oppnevnt ved Kongelig resolusjon av 28 mars 1980, Oslo, March 1981 (in Norwegian, with summary in English).

[21] Kostnadsanalysen. Norsk kontinentalsokkel. Rapport fra styringsgruppen oppnevnt ved Kongelig resolusjon av 16 mars 1979, Oslo, April 1980 (in Norwegian).

AIKAELEMENTTIMENETELMÄSTÄ

Apul.prof. Pertti Holopainen
Tampereen teknillinen korkeakoulu
Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Elementtimenetelmän, jossa aika on elementin ulottuvuutena, ovat ensimmäisenä tuoneet esiin Nickell ja Sackman (1968) [1], Oden (1969) [2], Fried (1969) [3] sekä Argyris ja Scharpf (1969) [4]. Tämän jälkeen aikaelementtimenetelmää on käsitelty eri kirjoituksissa ja joissakin elementtimenetelmän oppikirjoissa, esimerkiksi [5], [6], [7], [8].

Aikaelementtimenetelmä voidaan muotoilla kahdella tavalla. a) Jaetaan haettavan funktion u(x,y,z,t) määrittelyalue elementteihin, joissa yhtenä ulottuvuutena on aika t [8]. b) Suoritetaan elementtijako ensin vain paikan suhteen, jolloin vain solmuarvoja pidetään ajan funktioina. Näin (tai jollain muulla tavalla) saadut yhtälöt ratkaistaan ajan suhteen jakamalla aika elementteihin [7]. Tehtävä on 1-ulotteinen alkuarvotehtävä. Tässä tarkastellaan vain viimeksi mainittua.

2 PAINOTETTUJEN RESIDUAALIEN MENETELMÄ

Oletaan, että on saatu yhtälö

$$A(u) - f = 0 \tag{1}$$

alueessa $R \in R^n$. R^n on n-ulotteinen euklidinen avaruus. Yhtälössä (1) f on tunnettu funktio ja u on tuntematon funktio, jonka tulee toteuttaa annetut reunaehdot alueen reunalla ∂R. Kun A on lineaarinen positiivisesti definiitti operaattori, on olemassa vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty funktionaali $I(u) \in R^1$ siten,

että yhtälön (1) ratkaisu antaa funktionaalille minimiarvon, ja päin vastoin se funktio, joka antaa funktionaalille minimin, on yhtälön (1) ratkaisu, kun $u \in H_A \subset H$ ja H on Hilbertin avaruus [9]. Tällainen funktionaali on olemassa myös silloin, kun A on epälineaarinen potentiaalioperaattori ja $u \in V$ ja V on Banach-avaruus [10]. Viimeksi mainitussa tapauksessa minimikohta voi olla suhteellinen. Variaatiotehtävän tuloksena saadaan

$$\delta I(u) = \int_R [A(u) - f]\eta \, dR + \text{reunatermit} = 0 , \tag{2}$$

jossa η on funktion u riittävän mielivaltainen variaatio. Approksimoidaan funktiota u lausekkeella

$$\tilde{u} = w_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i w_i , \tag{3}$$

jossa w_0 ja w_i ovat tunnettuja funktioita (vrt. kuva 1), joista w_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Suureet a_i ovat vakioita. Annetaan funktiolle $\tilde{u}$ variaatio

$$\tilde{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \delta a_i w_i \tag{4}$$

ja sijoitetaan varioitu funktio

$$v = \tilde{u} + \varepsilon \tilde{\eta} , \tag{5}$$

jossa ε on pieni vakio, yhtälöön (2). Saadaan likimäärin

$$\int_R [A(\tilde{u}) - f]\left(\sum_{i=1}^{n} \delta a_i w_i\right) dR + \text{reunatermit} = 0 . \tag{6}$$

Koska $\tilde{\eta}$ ei ole nyt mielivaltainen, ei voida solveltaa variaatiolaskennan peruslausetta yhtälöön (6). Asettamalla mahdolliset reunatermit nolliksi ja koska vakioiden a_i variaatiot δa_i ovat mielivaltaiset, saadaan n kpl yhtälöitä

$$\int_R [A(\tilde{u}) - f] w_i \, dR = 0 , \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

josta vakiot a_i voidaan määrittää. Yhtälössä (7) funktioita w_i kut-

sutaan painofunktioiksi, ja $[A(\tilde{u}) - f]$ on residuaali. Monissa mekaniikan sovellutuksissa yhtälö (7) voidaan tulkita siten, että $[A(\tilde{u}) - f]$ on tasapainossa oleva voimatila ja w_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ virtuaalinen siirtymätila. Funktionaalin variaatio $\delta I(u)$ voi olla esimerkiksi kokonaispotentiaalienergian variaatio $\delta\pi(u)$ tai Hamiltonin funktionaalin variaatio. Yhtälö (7) lausuu Galerkinin menetelmän, jossa painofunktiot w_i ovat samoja kuin $\tilde{u}$:n approksimaatiossa. Jos painofunktioiksi valitaan muitakin kuin $\tilde{u}$:n approksimaatiossa, sanotaan menetelmää painotettujen residuaalien menetelmäksi. Galerkinin menetelmällä saadaan paras approksimaatio $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Galerkinin menetelmä on yleisempi eikä vaadi operaattorille A funktionaalin olemassaoloa, mikä yhtälön (7) johdossa on edellytetty.

3 AIKAELEMENTTIMENETELMÄ

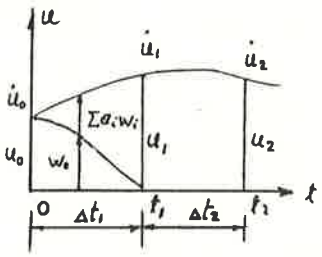
3.1 Yhden vapausasteen tapaus

Tarkastellaan lineaarista liikeyhtälöä

$$Lu - f = m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - f = 0 \qquad (8)$$

alkuehdoilla $u(0) = u_0$ ja $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$. Yhtälössä (8) m on massa, c on viskoosivaimennusvakio, k on jäykkyysvakio ja f ajasta t riippuva voima.

Jaetaan aika $t \in [0, \infty)$ solmupisteillä $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots$ elementteihin $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ (kuva 1). Tuntemattomina ovat solmussa 1 (ajanhetkellä Δt_1) siirtymä u_1 ja sen 1. aikaderivaatta $\dot{u}_1$. Interpoloidaan tuntematonta funktiota u(t) välillä (0,t) polynomilla



$$u(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 \qquad (9)$$

Kuva 1.

Määritetään kertoimet a_1, a_2, a_3, a_4 elementin Δf_1 solmuehdoista (kuva 1), jolloin saadaan välillä $(0, \Delta t_1)$ siirtymälle u(t) muotoa (3) oleva interpolaatio

$$\tilde{u} = [H_{00}\, H_{10}\, H_{01}\, H_{11}] \begin{Bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \\ u_1 \\ \dot{u}_1 \end{Bmatrix} = w_0 + H_{01}\, u_1 + H_{11}\dot{u}_1 \,, \tag{10}$$

jossa

$$w_0 = H_{00}\, u_0 + H_{10}\, \dot{u}_0 \tag{11}$$

on tunnettu funktio. Kertoimia c_i vastaavat solmuarvot u_1, $\dot{u}_1$ ja funktioita w_i. Kun käytetään dimensiotonta muuttujaa $s = t/\Delta t$ ($\Delta t = \Delta t_1 = \Delta t_2$ jne.), saadaan yhtälössä (10) esiintyvät kolmannen asteen Hermitianin polynomit

$$\begin{aligned} H_{00} &= 1 - 3s^2 + 2s^3 & H_{01} &= 3s^2 - 2s^3 \\ H_{10} &= (s - 2s^2 + s^3)\Delta t & H_{11} &= (-s^2 + s^3)\Delta t \,, \end{aligned} \tag{12}$$

mitkä löytyvät kaikista elementtimenetelmän oppikirjoista. Yhtälöissä (12) esitettyjen polynomien H_{00}, H_{10} kuvaajat ovat samanmuotoiset kuin molemmista päistään jäykästi kiinnitetyn tasajäykän sauvan pään 0 yksikkösiirtymästä ja -kiertymästä ja H_{01}, H_{11} pään 1 vastaavista siirtymistä. H_{mi}:n ensimmäinen indeksi ilmaisee monennenko kertaluvun derivaatta on solmuarvona, jonka kertoimena H_{mi} on (yht. 10) ja i tarkoittaa solmupistettä, 0 tai 1.

Sijoittamalla interpolaatio (10) yhtälöön (8) saadaan yhtälön (7) mukaan (tässä matriisimuodossa) suorittamalla vielä integroimismuuttujan vaihto t:stä s:ksi

$$\int_0^1 \begin{Bmatrix} H_{01} \\ H_{11} \end{Bmatrix} [m\ddot{H}\phi + c\dot{H}\phi + kH\phi - f]\, \Delta t\, ds = 0 \,, \tag{13}$$

jossa

$$H = [H_{00}\, H_{10}\, H_{01}\, H_{11}] \,, \qquad \phi = \{u_0\, \dot{u}_0\, u_1\, \dot{u}_1\}^T \,. \tag{14), (15}$$

Tuntemattomien solmuarvojen u_1, $\dot{u}_1$ ratkaisemiseksi saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{22} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} , \tag{16}$$

jossa matriisien [A], [B] ja {C} alkiot ovat

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{1,2}{\Delta t} m + 0,5\, c + \frac{156\, \Delta t}{420} k \\ A_{12} &= 1,1\, m + 0,1\, \Delta t\, c - \frac{22\, \Delta t^2}{420} k \\ A_{21} &= 0,1\, m - 0,1\, \Delta t\, c - \frac{22\, \Delta t^2}{420} k \\ A_{22} &= -\frac{2}{15} \Delta t\, m + 0 + \frac{4\, \Delta t^3}{420} k \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1,2}{\Delta t} m - 0,5\, c + \frac{54\, \Delta t}{420} k \\ B_{12} &= 0,1\, m - 0,1\, \Delta t\, c + \frac{13\, \Delta t^2}{420} k \\ B_{21} &= -0,1\, m + 0,1\, \Delta t\, c - \frac{13\, \Delta t^2}{420} k \\ B_{22} &= \frac{\Delta t}{30} m + \frac{\Delta t^2}{60} c - \frac{3\, \Delta t^3}{420} k \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^1 (3s^2 - 2s^3)\, f[(e-1)\Delta t + \Delta t s]\, \Delta t\, ds \\ C_2 &= \int_0^1 (-s^2 + s^3)\, f[(e-1)\Delta t + \Delta t s]\, \Delta t^2\, ds \, . \end{aligned} \tag{19}$$

Yhtälöissä (17) ja (18) desimaaliluvut ovat tarkkoja. Kun solmuarvot u_1 ja $\dot{u}_1$ on määritetty yhtälöistä (16), pidetään niitä seuraavan aikaelementin alkuarvoina, jotka eivät ole enää tarkkoja, ja määritetään seuraavat solmuarvot u_2, $\dot{u}_2$ samalla tavalla kuin edellä jne. Matriisit [A] ja [B] ovat vakioita ja epäsymmetrisiä. Ainoastaan vektori {C} yhtälössä (16) on muuttuva.

Esim. 1. Määritetään liikeyhtälöitä

$$m\ddot{u} + ku = at \tag{29}$$

alkuehdoilla $u(0) = \dot{u}(o) = 0$ $u(t)$ aikaelementtimenetelmällä käyttäen muotofunktioina Hermitianin 3. asteen polynomeja (12), kun $m = 1$ [kg], $k = 9$ [N/m] ja $a = 1$ [N/s]. Tällöin systeemin ominaiskulmanopeus $\omega = 5$ [1/s] ja ominaisvärähdysaika $T = 2{,}094$ [s]. Yhtälön tarkan ratkaisun mukaan on nopeus nolla, kun $t = 0, T, 2T, 3T$ jne. [11].

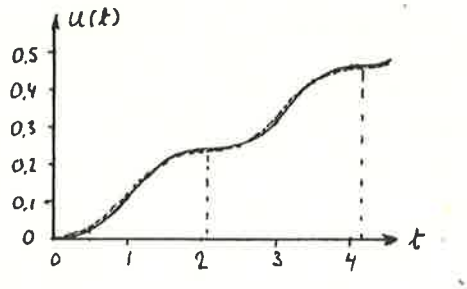
Vektorin {C} alkioiksi saadaan e:nnelle elementille

$$C_1 = \left[\frac{1}{2}(e-1) + \frac{7}{20} \right] a \Delta t^2 , \qquad C_2 = -\left[\frac{1}{12}(e-1) + \frac{1}{20} \right] a \Delta t^3 \qquad \begin{matrix} (21) \\ (22) \end{matrix}$$

Matriisien [A] ja [B] alkiot saadaan yhtälöistä (17) ja (18) sijoittamalla niihin $m = 1$, $c = 0$, $k = 9$ ja aikaelementin pituutena on käytetty tässä $\Delta t = 0{,}1$ [s]. Tarkka ja likiratkaisu on havainnollistettu kuvassa 2, ja taulukossa 1 on numeroarvoja noin kahden periodin ajalta.

Taulukko 1

t	tarkka		aikaelementtimenetelmällä	
	paikka	nopeus	paikka	nopeus
0	0	0	0	0
0.5	0.018611297	0.103251422	0.018688541	0.103541551
1,0	0.105884444	0.221110277	0.106098892	0.221087947
1,5	0,202871486	0.134532867	0.202795802	0.133560701
2,0	0,232570944	4,42552E-03	0,232079661	4,24228E-03
2,1	0,232710596	1,57071E-05	0,232218881	2.30272E-04
2,5	0,243037038	0,072596076	0,242946281	0,074183690
3,0	0,318069686	0,212347807	0,318680534	0.212894338
3.5	0,421470213	0,163948548	0,421611044	0,161811470
4,0	0,464317515	0,017349560	0,463407431	0,016284026
4,2	0,465421369	6,28238E-05	0,464441972	5,54493E-04
4,5	0,470230206	0,045008815	0,469740987	0,047610544

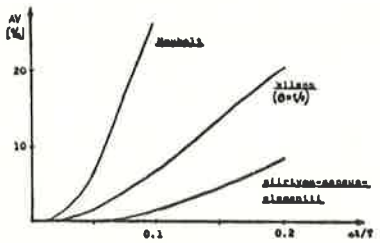


Kuva 2. Yhtälön (20) tarkka ja likiratkaisu (ero hieman liioiteltuna).

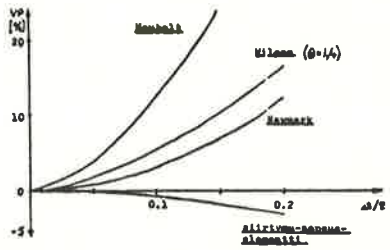
Esim. 2. Olkoon liikeyhtälö

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \ ,$$

jossa $u \in R'$ ja alkuehdot $u(0) = 1$ ja $\dot{u}(0) = 0$. Määritetään amplitudin vaimenemisen ja värähdysajan piteneminen eri menetelmillä. Tulokset näkyvät kuvissa 3 ja 4. Newmarkin menetelmässä amplitudin vaimeneminen on merkityksetöntä.



Kuva 3. [13] Amplitudin vaimeneminen.



Kuva 4. [13] Värähdysajan piteneminen.

3.2 N:n vapausasteen systeemi

Tarkastellaan n:n vapausasteen lineaarista liikeyhtälöä (23)

$$L\{u\} - \{f\} = [m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} - \{f\} = \{0\} \qquad (23)$$

alkuehdoilla $\{u(0)\} = \{u\}_0$ ja $\{\dot{u}(0)\} = \{\dot{u}\}_0$. Yhtälössä (23) $\{u\}$

on siirtymävektori, [m] massamatriisi, [c] viskoosivaimennusmatriisi, [k] jäykkyysmatriisi ja {f} tunnettu ajasta riippuva voimavektori. Käytettäessä muotofunktioina Hermitianin 3. asteen polynomeja (12) tarvitaan muuttujiksi solmuissa siirtymä ja nopeus, jotka ovat nyt n-ulotteisia vektoreita. Merkitään solmusiirtymiä solmuissa 0 ja 1 vastaavasti (vert. kuva 1)

$$\{u\}_0 = \{u_{01}\, u_{02} \ldots u_{0n}\}^T \quad \{u\}_1 = \{u_{11}\, u_{12} \ldots u_{1n}\}^T \qquad (24)(25)$$

joissa yhtälöiden oikealla puolella ensimmäinen indeksi viittaa solmuun ja toinen siirtymän komponenttiin. Vastaavalla tavalla kuin yhden vapausasteen tapauksessa yhtälö (16) saadaan

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_1 \\ \{\dot{u}\}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_0 \\ \{\dot{u}\}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{C_1\} \\ \{C_2\} \end{Bmatrix} \qquad (26)$$

Matriisien [A] ja [B] osamatriisit $[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$ (i,j = 1,2) saadaan yhtälöistä (17) ja (18) sijoittamalla lukujen m, c ja k paikalle matriisit [m], [c] ja [k] yhtälöstä (23) ja {C}:n osamatriisit $\{C\}_i$ (i = 1,2) saadaan yhtälöistä (19) sijoittamalla f:n paikalle {f} yhtälöstä (23). Matriisien [A] ja [B] koko yhtälöissä (28) on siten 2n × 2n ja vektori {C} on 2n × 1 matriisi, käytettäessä 3. asteen Hermitianin polynomeja muotofunktioina.

3.3 Stabiilius

Tarkastellaan yhtälön (23) ratkaisemista. Integrointimenetelmää sanotaan stabiiliksi, jos homogeenisen yhtälön ratkaisu (tässä {u}, {$\dot{u}$}) ei kasva rajatta. Jos menetelmä on stabiili jossakin koordinaatistossa {u}, on se stabiili myös muissa lineaarisella muunnoksella L (det L ≠ 0) saaduissa koordinaatistoissa, siis myös pääkoordinaatistossa. Tällöin voidaan tarkastella yhtälön (23) ({f} = {0}) ratkaisun stabiiliutta pääkoordinaatistossa {η}, jossa liikeyhtälöt ovat kytkemättömät (tarkasti vain suhteellisella vaimennuksella, vrt. [11] kappale 4.8)

$$\ddot{\eta}_i + 2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{\eta}_i + \omega_i^2\,\eta_i = 0\,, \qquad (i = 1,2,\ldots n) \qquad (27)$$

jolloin riittää tarkastella vain viimeisen yhtälön (i = n) ratkaisun stabiiliutta ($\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$). Yhtälön (16) perusteella ($c_1 = c_2 = 0$) on ratkaisu muotoa

$$\{\eta\}_{t+k\Delta t} = [\tilde{A}]^k \{\eta\}_k \,, \tag{28}$$

jossa

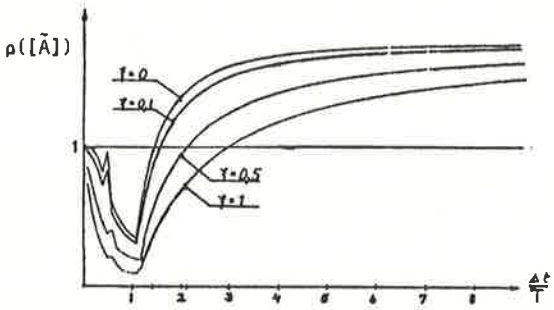
$$[\tilde{A}] = [A]^{-1}[B] \tag{29}$$

approksimaatiomatriisi. Stabiiliusehdoksi saadaan [12] nyt ($[\tilde{A}]$ ei symmetrinen)

$$\rho([\tilde{A}]) = \max_j |\lambda_j| \leq 1 \,, \qquad (\lambda_j \text{ on ominaisarvo.}) \tag{30}$$

josta kriittinen aikaelementin pituus Δt_{kr} voidaan määrittää.

Hermitianin polynomeja käyttävä aikaelementtimenetelmä on siis ehdollisesti stabiili ja aikaelementin pituus $\Delta t < \Delta t_{kr}$ määräytyy pienimmän ominaisvärähdysajan T_n perusteella.



Kuva 5. [13] Approksimaatiomatriisin spektriaalisäde.

Tässä esitetty kaksisolmuista aikaelementtiä käyttävä menetelmä soveltuu hyvin muutaman vapausasteen lineaaristen liikeyhtälöiden ratkaisemiseen, on tarkkuudeltaan hyvä Houboltin, Wilsonin (θ) ja Newmarkin menetelmiin verrattuna ja on helppo käyttää. Kun liikeyhtälön vapausaste n on suuri, on po. menetelmässä varjopuolena käännettävän [A] matriisin kaksinkertainen koko 3. asteen Hermitianin polynomeja käytettäessä sekä symmetrisyyden ja rauhamaisuuden menetys.

Raportissa [14] on johdettu Hermitianin 5. ja 7. asteen polynomit ja laskettu niitä vastaavat alkiot [A], [B] ja {C} matriiseille (vrt. (16)), jolloin matriisien koko on 3×3, 3×1 ja 4×4, 4×1 vastaavasti.

4 KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Nickell, R.E., and J.J. Sackman, Approximate solutions in linear coupled thermoelasticity. J. Appl. Mech., ser. E, 35(1968)2, s. 255 - 266.

[2] Oden, J.T., A General theory of finite elements. Part 2. Applications. Int. J. Numerical Methods Eng., 1(1969)3. s. 247 - 259.

[3] Fried, I., Finite-element analysis of time-dependent phenomena. AIAA J. 7(1969)6. s. 1170 - 1172.

[4] Argyris, J.H. and Scharpf. D.W., Finite elements in space and time. Aeron. J. Roy. Aeron. Soc., 73(1969)708. s. 1041 - 1044.

[5] Zienkiewicz, O.C., A New look at the Newmark, Houbolt and other time stepping formulas. A weighted residual approach. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5(1977)4. s. 413 - 418.

[6] Howard, G.F. and Penny, J.E.T., The accuracy and stability of time domain finite element solutions. Journal of Sound and Wibration 61(1978)4. s. 585 - 595.

[7] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London 1971.

[8] Oden, J.T. Finite elements of nonlinear continua. McGraw-Hill, 1972.

[9] Mikhlin, S.G., Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press, 1964.

[10] Vainberg, M.M., Variational Methods for the Study of Nonlinear

Operators. Holden-Day, 1964.

[11] Timoshenko, S. and Young, D.H. and Wearer, W. Jr. Vibration Problems in Engineering. John Wiley, 1974.

[12] Lancaster, P. Theory of Matrices, Academic Press, 1969.

[13] Niemi, J. ja Holopainen P. Aikaelementtimenetelmän soveltaminen värähtelytehtäviin. TTKK, Teknillinen mekaniikka, Raportti. Valmisteilla 1982.

[14] Holopainen, P., Hermitianin 1., 3., 5. ja 7. asteen polynomit ja yksiulotteisen lineaarisen ja epälineaarisen alkuarvotehtävän ratkaiseminen elementtimenetelmällä. TTKK, Teknillinen mekaniikka, Raportti. Valmisteilla 1982.

SISÄLLYSLUETTELO

* M. MIKKOLA.....1
Rakenteiden epälineaarisen analyysin kehitysnäkymiä

M. KILPELÄINEN.....19
Teräsbetonipalkistojen epälineaarinen analysointi elementti-menetelmällä

M. HEINISUO.....35
Vetoakestämättömästi tuetun kimmoisen pilarin nurjahdus

S. VIRTANEN.....45
Epähomogeenisen fysikaalisesti epälineaarisen pilarin kantokyky

E. PULKKINEN.....53
Ensimmäisen asteen itsekorjaava ratkaisumenetelmä epäline-aarisessa analyysissä

E. HIETIKKO.....63
Elementtimenetelmässä tarvittava esi- ja jälkikäsittely tietokoneavusteisessa suunnittelussa

S. LAHDELMA.....71
Värähtelymittauksista koneiden kunnon diagnostiikassa

J. KANGAS.....81
Maastokäyttöinen dataloggeri

V. KARPPINEN.....89
Holografinen interferometria värähtelyanalyysissä

T. NYMAN.....95
Höyrykattilan tulipesän värähtelyistä

J. KOSKI.....105
Rakenteiden monitavoitteinen optimointi

T. SALMI.....115
Käyrän ja poikkileikkaukseltaan muuttuvan palkin liike-
yhtälöt

H. PARLAND.....137
Vapaan kosketuksen rajatila

M. LÄHTEENMÄKI.....147
Reunaelementtimenetelmä

P. VARPASUO.....157
Suurten rakennemallien värähtelyanalyysi moodisuperpositio-
menetelmällä

J. KÖLIÖ.....171
Laivapotkurin navan staattinen jännitysanalyysi

* M. MÄÄTTÄNEN.....181
Jään ja rakenteen dynaaminen vuorovaikutus

* J. CARLSSON.....201
Brottmekanik - Framsteg inom forskning och tillämpning

* I. HOLAND.....215
Trends in the safety of structures

P. HOLOPAINEN.....233
Aikaelementtimenetelmästä