Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 47, Nro. 2, 2014, s. 80 – 90

Poijukiinnitys

Matti A Ranta[1] ja Panu Ranta

Tiivistelmä. Poijukiinnitys on suosittu veneen kiinnitysmuoto, sillä silloin vene on aina turvallisesti keula päin tuulta ja aaltoja. Siitä annetaan paljon käytännön suositusluontoisia ohjeita. Teoreettisesti asiaa ei liene juurikaan tutkittu. Tätä puutetta yritetään korjata tässä tutkielmassa. Tarkoituksena on selvittää miten ja millä voimalla tuulen veneeseen aiheuttama veto siirtyy ketjukäyrän muotoisen poijukettingin välityksellä poijupainoon. Poijuketjun vaakasuoraksi oletetusta pohjasta koholla olevan pituuden ja veden syvyyden välinen suhde on tärkeä geometrinen muuttuja. Tehtävän luonne määrittää riippuvuuden kuormitusmuuttujan, joka on muotoparametrin ja veden syvyyden suhde, ja geometrisen parametrin välisen riippuvuuden.

Avainsanat: tuuli, poiju, poijupaino, poijukettinki, ketjukäyrä

Vastaanotettu 14.3.2014. Hyväksytty 9.9.2014. Julkaistu verkossa 31.10.2014

Johdanto

Veneen kannalta poijukiinnitys on ihanteellinen, sillä silloin vene on aina turvallisesti keula päin tuulta. Poijukiinnitystä varten tarvitaan poijupaino, poijukettinki sekä itse poiju ja poijuköydet vaimentimineen. Poijupainon on oltava riittävän painava [5], jottei se myrskyllä pääse siirtymään. Pohjan laatu tulee ottaa myös huomioon. Liejupohja on paras, sillä siihen paino uppoaa. Kalliopohja on huonoin, koska paino siirtyy sitä pitkin helpoiten. Itse poijun on oltava veneen kokoon nähden sopiva. Sen tulee luonnollisesti kantaa poijun paino ja pohjasta koholla olevan kettingin paino. Kovassa vedossa poijun on painuttava veden alle, jotta se toimisi myrskyssä veneen tempoilua vaimentavana elementtinä. Tässä tutkielmassa johdetaan tehtävän ratkaisemiseen tarvittavat kaavat, kuten:

- tuulesta johtuva veto H,
- ketjukäyrän parametrin a ja pohjasta koholla olevan ketjun pituuden k välinen yhteys,
- poiju ja sen kantokyky; ehto poijun sukellukselle,
- poijukettingin vedon rajoitusehto ja
- poijupaino.

Ketjukäyrän teorian perusta löytyy lähteestä [1, s. 167-178]. Laskut on suoritettu Mathematica ohjelmalla [9].

Poijuketjun käyttäytyminen

Vaakasuorasta tasapainoyhtälöstä seuraa, että vaakavoima säilyy vakiona eli

$$H = \text{vakio}. \tag{1}$$

[1]Vastuullinen kirjoittaja. matti.ranta@aalto.fi

Pystysuoralle voimalle V saadaan yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = q\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = q\sqrt{1+y'^2}. \tag{2}$$

Kuormitus q on kaarialkion ds paino vedessä eli $q = m'g\zeta$, jossa g on maan vetovoiman kiihtyvyys, m' ketjun massa pituutta kohden ja $\zeta = (1-\rho_\mathrm{v}/\rho_\mathrm{k})$ on veden nosteen aiheuttama korjauskerroin.

Koska veto S on ketjun suuntainen, pystyvoiman V ja vaakavoiman H välillä on yhteys

$$V = H\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv Hy'. \tag{3}$$

Derivoidaan tämä x:n suhteen ja yhdistetään yhtälön (2) kanssa, saadaan yhtälö

$$Hy'' = q\sqrt{1+y'^2}. \tag{4}$$

Merkitään ketjukäyrän muotoparametria symbolilla

$$a = H/q. \tag{5}$$

Sijoitetaan yhtälöön (4) yrite $y' = \sinh\beta x$, ja identiteetin $\cosh^2\beta x - \sinh^2\beta x = 1$ avulla havaitaan, että $\beta = 1/a$, antaa yhtälön (4) integrointi tulokseksi

$$y = a\left[\cosh(x/a) - 1\right], \tag{6}$$

jossa integroimisvakio on valittava niin, että $y = 0$ ketjun irtoamispisteessä pohjasta.

Epälineaarisen differentiaaliyhtälön (4) ratkaisu (6) kiinnittää koordinaatiston aivan erikoisella tavalla ketjukäyrän ripustukseen. Se ei aina sovi luontevasti maastoon. Ketju irtoaa pohjasta pisteessä, jonka koordinaatit x_1 ja $y_1 = 0$ riippuvat kuormituksesta. Se voi olla poijupaino tai joku piste sen ja poijun väliltä.

Merkitään ketjukäyrän kaltevuutta symbolilla α. Koska $\tan\alpha = y' = \sinh(x/a)$, seuraa siitä, että $\sin\alpha = \tanh(x/a)$ ja $\cos\alpha = \operatorname{sech}(x/a)$ Koska $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \cosh(x/a)\,\mathrm{d}x$, seuraa siitä huipusta lasketun kaaren pituudeksi

$$s = a\sinh(x/a)\,. \tag{7}$$

Ketjussa vaikuttava voima S on komponenttiensa $H =$ vakio ja $V = H\sin(x/a)$ resultantti

$$S = \sqrt{H^2+V^2} = H\sqrt{1+y'^2} = H\cosh(x/a) \tag{8}$$

Edellä johdetut yhtälöt eivät yksinään riitä poijuketjun muodon määrittämiseen, vaan ripustuksen reunaehdot on otettava huomioon.

Reunaehdot

Olkoon poijupaino pohjassa pisteessä (x_1, y_1). Itse poiju taas on pinnalla, jolloin sen koordinaatit ovat $y_2 = y_1 + h$ ja $x_2 = x_1 + d$.

Koordinaattien pystyerolle saadaan

$$h = y_2 - y_1 = a\left[\cosh\left(\frac{x_1+d}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right)\right] = 2a\sinh\left(\frac{2x_1+d}{2a}\right)\sinh\left(\frac{d}{2a}\right) \tag{9}$$

Pohjasta irti olevan ketjun pituus k on

$$k = s_2 - s_1 = a \left[\sinh\left(\frac{x_1 + d}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right) \right] = 2a \cosh\left(\frac{2x_1 + d}{2a}\right) \sinh\left(\frac{d}{2a}\right). \quad (10)$$

Tässä on käytetty käsikirjoista löytyviä kaavoja hyperbolisille funktioille, lähde [2].

Näistä seuraa yhtälöt:

$$\begin{aligned} k + h &= 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right) \left[\cosh\left(\frac{2x_1 + d}{2a}\right) + \sinh\left(\frac{2x_1 + d}{2a}\right)\right] \\ &= 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right) \exp(+\frac{2x_1 + d}{2a}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} k - h &= 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right) \left[\cosh\left(\frac{2x_1 + d}{2a}\right) - \sinh\left(\frac{2x_1 + d}{2a}\right)\right] \\ &= 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right) \exp(-\frac{2x_1 + d}{2a}). \end{aligned} \quad (12)$$

Kun nämä kerrotaan puolittain keskenään, saadaan

$$k^2 - h^2 = 4a^2 \sinh^2\left(\frac{d}{2a}\right), \quad (13)$$

ja jakamalla puolittain keskenään saadaan

$$\frac{k + h}{k - h} = \exp\left[(2x_1 + d)/a\right). \quad (14)$$

Jos nyt a tunnetaan, näistä voidaan ratkaista lausekkeet

$$\sinh\left(\frac{d}{2a}\right) = \frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{2a}, \quad (15)$$

$$x_1/a = \ln \sqrt{\frac{k + h}{k - h}} - \frac{d}{2a}, \quad (16)$$

$$x_2/a = x_1/a + d/a = \ln \sqrt{\frac{k + h}{k - h}} + \frac{d}{2a}. \quad (17)$$

Koska hyperbolisten funktioiden eksponenttifunktiot ja luonnollinen logaritmi-funktio ovat käänteisfunktioita, sievenevät monet laskutulokset oleellisesti.

Tuulesta aiheutuva voima

Veneeseen, jonka vedenpinnan yläpuolinen otsapinta-ala on $A =$ korkeus $\times$ leveys ja ilmanvastuskerroin $C_D = 0,8 \cdots 1,1$, vaikuttaa tuulella vaakavoima [3]

$$H = C_D A \tfrac{1}{2} \rho_{\mathrm{i}} v^2 \equiv qa. \quad (18)$$

Tässä ρ_{i} on ilman tiheys ja v on tuulen nopeus.

Kaavojen (5) ja (18) avulla voidaan määrittää mikä tuulen nopeus vastaa parametrin arvoa a

$$v = \sqrt{\frac{2H}{C_D A \rho_{\mathrm{i}}}} \equiv \sqrt{\frac{2qa}{C_D A \rho_{\mathrm{i}}}}. \quad (19)$$

Poijukettinki

Kaavoista (15)-(17) seuraa

$$\sinh\left(x_{1,2}/a\right) = \sinh\left(\ln\sqrt{\frac{k+h}{k-h}}\right)\cosh\frac{d}{2a} \mp \cosh\left(\ln\sqrt{\frac{k+h}{k-h}}\right)\sinh\frac{d}{2a}. \tag{20}$$

Otetaan käyttöön dimensiottomat muuttujat: geometrinen pituusmuuttuja z sekä kuormitusmuuttuja Z

$$z = k/h \qquad \text{ja} \qquad Z = a/h = H/(qh), \tag{21}$$

ja muokataan kaavaa (20) edelleen

$$\begin{aligned}\sinh\left(x_{1,2}/a\right) = \frac{h}{\sqrt{k^2-h^2}}\sqrt{1+\frac{k^2-h^2}{4a^2}} \mp \frac{k}{2a} &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\sqrt{1+\frac{z^2-1}{4Z^2}} \mp \frac{z}{2Z} \\ &= \frac{\sqrt{z^2-1+4Z^2} \mp z\sqrt{z^2-1}}{2Z\sqrt{z^2-1}}.\end{aligned} \tag{22}$$

Ketjukäyrän kaltevuudelle α_1 poijupainossa saadaan lauseke

$$\tan\alpha_1 = y_1' = \sinh\left(x_1/a\right) \equiv \frac{\sqrt{z^2-1+4Z^2} - z\sqrt{z^2-1}}{2Z\sqrt{z^2-1}}, \tag{23}$$

ja itse poijussa lauseke

$$\tan\alpha_2 = y_2' = \sinh\left(x_2/a\right) \equiv \frac{\sqrt{z^2-1+4Z^2} + z\sqrt{z^2-1}}{2Z\sqrt{z^2-1}}. \tag{24}$$

Sovellutusten (katso kaava (8)) kannalta tärkeä on myös seuraava kaava

$$\begin{aligned}\cosh\left(x_{1,2}/a\right) = \frac{k}{\sqrt{k^2-h^2}}\sqrt{1+\frac{k^2-h^2}{4a^2}} \mp \frac{h}{2a} &= \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\sqrt{1+\frac{z^2-1}{4Z^2}} \mp \frac{1}{2Z} \\ &= \frac{z\sqrt{z^2-1+4Z^2} \mp \sqrt{z^2-1}}{2Z\sqrt{z^2-1}}.\end{aligned} \tag{25}$$

Poijupainon ja poijun välinen vaakaetäisyys d saadaan kaavasta

$$\frac{d}{h} = 2Z\mathrm{arsinh}\left(\frac{\sqrt{z^2-1}}{2Z}\right) \equiv 2Z\ln\left[\frac{\sqrt{z^2-1}}{2Z}\left(1+\sqrt{1+\frac{4Z^2}{z^2-1}}\right)\right] \xrightarrow[z\ll Z]{} \sqrt{z^2-1} \tag{26}$$

Ketju kohoaa pohjasta ennen poijupainoa $z > 1$

Koska pohjassa kaavan (6) perusteella tulee olla $y_1 = a\left[\cosh\left(x_1/a\right) - 1\right] = 0$, seuraa tällöin kaavasta (25) että pohjassa on

$$\cosh\left(x_1/a\right) \equiv \frac{z\sqrt{z^2-1+4Z^2} - \sqrt{z^2-1}}{2Z\sqrt{z^2-1}} = 1. \tag{27}$$

Tästä saadaan neliöön korottamalla yhtälö

$$4Z^2 - 4\left(z^2-1\right)Z + \left(z^2-1\right)^2 \equiv \left[2Z - \left(z^2-1\right)\right]^2 = 0, \tag{28}$$

jolla on kaksoisjuuri

$$Z(z) = \frac{1}{2}\left(z^2 - 1\right). \tag{29}$$

Ketjun irtoamiskohdassa pohjasta pätee fysikaalisilla muuttujilla lausuttuna

$$\frac{a}{h} = \frac{H}{qh} \equiv Z = \frac{1}{2}\left(z^2 - 1\right) \equiv \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k}{h}\right)^2 - 1\right]. \tag{30}$$

Ratkaisemalla suhde k/h saadaan

$$\frac{k}{h} \equiv z = \sqrt{1 + 2Z} \equiv \sqrt{1 + 2a/h}. \tag{31}$$

Kaavoista (24), (28) ja (29) seuraa kulmalle poijussa lauseke

$$\tan\alpha_2 = y_2' = \sinh\left(x_2/a\right) \equiv \frac{\sqrt{z^2 - 1 + 4Z^2} + z\sqrt{z^2 - 1}}{2Z\sqrt{z^2 - 1}} \equiv \frac{z}{Z} \equiv \frac{2z}{z^2 - 1}. \tag{32}$$

Poiju

Poijusta ilmoitetaan usein sen tilavuus litroina tai kantavuus eli noste kiloina [4, s. 495]. Mittajärjestelmiä aikanaan luotaessa [6] määriteltiin, että yhden vesilitran massa on yksi kilogramma. Jos poijun tilavuus u on annettu litroina, on sen syrjäyttämän vesimäärän massa $U = u\mathrm{dm}^3 \cdot 1\,\mathrm{kg/dm}^3 = u\,\mathrm{kg}$ (litra=$1\,\mathrm{dm}^3 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$). Itse poijun massa on m_{poiju} jolloin poijun noste newtoneina on

$$N = \left(U - m_{\mathrm{poiju}}\right) g \tag{33}$$

Poiju sukeltaa

Poiju sukeltaa kun poijun noste on yhtä suuri tai pienempi kuin kettingin pystyveto alaspäin eli $N \leqslant V$. Kaavoista (3), (5) ja (6) seuraa $V/q = a\sinh\left(x_2/a\right)$, Sijoitetaan tähän kaava (24). Järjestelemällä termejä saadaan rajalla $N = V$

$$\frac{N}{qh} = \frac{a}{h}\sinh\left(x_2/a\right) = Z\frac{\sqrt{z^2 - 1 + 4Z^2} + z\sqrt{z^2 - 1}}{2Z\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\sqrt{z^2 - 1 + 4Z^2} + z\sqrt{z^2 - 1}}{2\sqrt{z^2 - 1}}. \tag{34}$$

Jos ketju ei irtoa pohjasta koko pituudeltaan, eliminoidaan Z kaavan (29) avulla eli sijoitetaan $Z = (z^2 - 1)/2$. Tulokseksi saadaan

$$\frac{N}{qh} = z = k/h. \tag{35}$$

On luonnollista, että tässä tapauksessa pohjasta koholla olevan ketjun osan k paino kumoaa poijun nosteen.

Jos poijun noste on suurempi kuin ketjun paino, irtoaa poijukettinki pohjasta poijupainosta lähtien eli $z \leqslant N/(qh)$. Tällöin muuttujalla $z = k/h$ on kiinteä arvo ja kaava (34) voidaan ratkaista muuttujan $Z = a/h$ suhteen

$$Z = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2}\sqrt{\left(\frac{2N}{qh} - z\right)^2 - 1}. \tag{36}$$

Tämän jälkeen kaavaa (19) vastaten saadaan kriittinen tuulen nopeus

$$v = \sqrt{\frac{2qhZ}{C_D A \rho_\mathrm{i}}}. \tag{37}$$

Jos tuulen nopeus tunnetaan, voidaan tästä ratkaista veneen efektiivinen vastus

$$C_D A = \frac{qhZ}{\frac{1}{2}\rho_\mathrm{i} v^2} \tag{38}$$

Poijun sukeltaminen on aina selvä ja varma merkki tietystä tuulen nopeudesta.

Poijukettingin kestävyyden rajoitusehto

Oletetaan, että poijukettinki kestää vedon S_max. Koska suurin veto tulee kettingin poijun puoleiseen päähän, on rajoitusehtona $S_\mathrm{max} \geqslant S_2 = H \cosh(x_2/a)$. Kaavojen (8), (25) ja (20) avulla saadaan ehto muotoon

$$\frac{S_\mathrm{max}}{qh} \geqslant Z \cosh(x_2/a) = \frac{z\sqrt{z^2 - 1 + 4Z^2} + \sqrt{z^2 - 1}}{2\sqrt{z^2 - 1}}. \tag{39}$$

Tästä voidaan ratkaista kuormitusmuuttuja kestävyyden rajalla $S_\mathrm{max} = S_2$

$$Z = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2}\sqrt{\left(\frac{2S_\mathrm{max}/(qh) - 1}{z}\right)^2 - 1}. \tag{40}$$

Kriittinen tuulen nopeus saadaan tämän jälkeen kaavasta (37).

Jos halutaan tarkistaa poijuketjun rasitus poijupainon päässä, päädytään kaavaan

$$Z = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2}\sqrt{\left(\frac{2S_\mathrm{max}/(qh) + 1}{z}\right)^2 - 1}. \tag{41}$$

Poijupaino

Niin kauan kuin poijukettingin veto tapahtuu pitkin pohjaa eli vaakasuoraan jolloin kaavat (30) ja (31) ovat voimassa, ei yleensä poijupainon pidon kanssa ole vaikeuksia. Poijupainon on oltava riittävän painava [5], jottei se myrskyllä pääse siirtymään. Pohjan laatu tulee ottaa huomioon. Liejupohja on paras, sillä siihen paino uppoaa. Kalliopohja on huonoin, koska paino siirtyy liukumalla sitä pitkin helpoiten

Lähteessä [5] annetaan käytännön ohjeita koskien veneen kokoa ja poijupainoa. Arkhimedeen lain mukaan kappale veteen upotettuna menettää painostaan syrjäyttämänsä vesimäärän painon.

Poijupainon massa olkoon M ja keventymiskerroin vedessä ζ sekä lepokitka pohjassa μ_0 (kivi-tiili $\mu_0 = 0,53 \cdots 0,73$). Vaakavedolla H poijupainon paikalla pysymisen ehto on

$$\mu_0 \left[\zeta M g - H \sinh(x_1/a)\right] \geqslant H. \tag{42}$$

Kaavan (23) ja merkintöjen (21) avulla ehto saadaan muotoon

$$\frac{\zeta M g}{qh} + \frac{z}{2} - \frac{Z}{\mu_0} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4Z^2}{z^2 - 1}}. \tag{43}$$

Taulukko 1. Veneen koko ja poijupaino sekä vedessä keventyminen, kun kappaleessa ei ole ilmataskuja.

Veneen massa [t]	Poijupainon massa [kg]	aine	ζ
0,5	200	rauta	0,87
2,0	300	betoni	0,44 $\cdots$ 0,60
4,0	600	graniitti	0,64

Jos ketju ei irtoa vaakasuorasta pohjasta koko pituudeltaan, on kaava (29) voimassa ja epäyhtälö (43) on helposti ratkaistavissa

$$Z \leqslant \mu_0 \frac{\zeta M g}{q h} = \mu_0 M_{\mathrm{rel}}. \tag{44}$$

Jos poijukettinki irtoaa pohjasta poijupainosta lähtien, on muuttujalla $z = k/h$ kiinteä arvo ja epäyhtälö (43) voidaan ratkaista muuttujan $Z = a/h$ suhteen.

Korottamalla epäyhtälö (43) neliöön, saadaan lauseke

$$\left(\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{z^2-1}\right) Z^2 - \frac{2}{\mu_0}\left(\frac{\zeta M g}{q h} + \frac{z}{2}\right) Z + \left(\frac{\zeta M g}{q h} + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqslant 0. \tag{45}$$

Tämän sopiva ratkaisu on

$$Z \leqslant \frac{\frac{2}{\mu_0}\left(\frac{\zeta M g}{q h} + \frac{z}{2}\right) - \sqrt{\frac{4}{\mu_0^2}\left(\frac{\zeta M g}{q h} + \frac{z}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{z^2-1}\right)\left[\left(\frac{\zeta M g}{q h} + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}}{2\left(\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{z^2-1}\right)}. \tag{46}$$

Neliöjuurilauseke sievenee vielä, rajalla saadaan

$$Z = \frac{\frac{2}{\mu_0}\left(\frac{\zeta M g}{q h} + \frac{z}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{\mu_0^2} + \frac{4}{z^2-1}\left[\left(\frac{\zeta M g}{q h} + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}}{2\left(\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{z^2-1}\right)}. \tag{47}$$

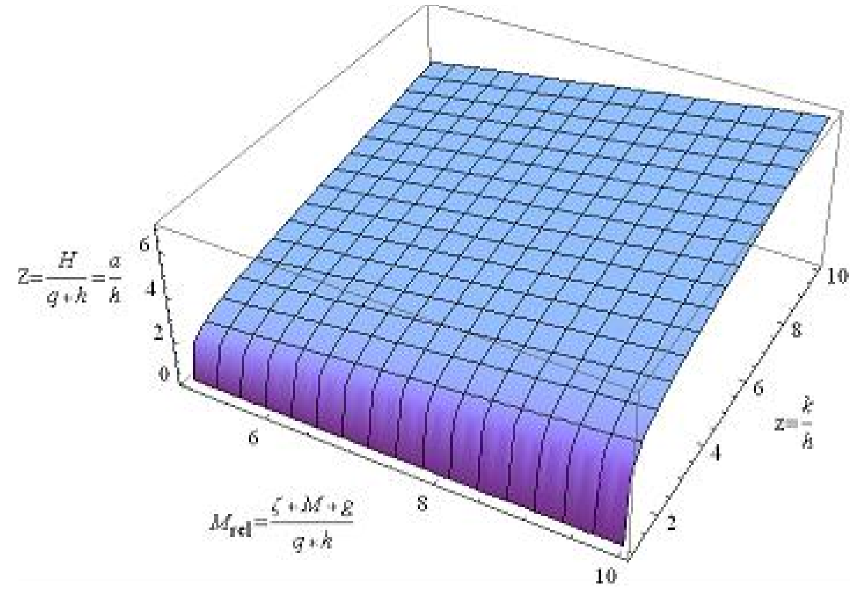
Kuvassa 1 nähdään kaavasta (47) laskettu kuormitusmuuttujapinta Z geometrisen muuttujan z sekä poijupainon suhteellisen massan M_{rel} (kaava (44)) ja lepokitkakertoimen $\mu_0 = 0,5$ funktiona. Kuvassa 2 nähdään miten kuormitusmuuttuja Z muuttuu pelkästään geometrisen muuttujan z funktiona, kun poijun suhteellinen massa M_{rel} on vakio.

Kuten kuvista 1 ja 2 näkyy, poijukettingin pituuden tulisi olla vähintään kaksi kertaa veden syvyys eli $z \geqslant 2$.

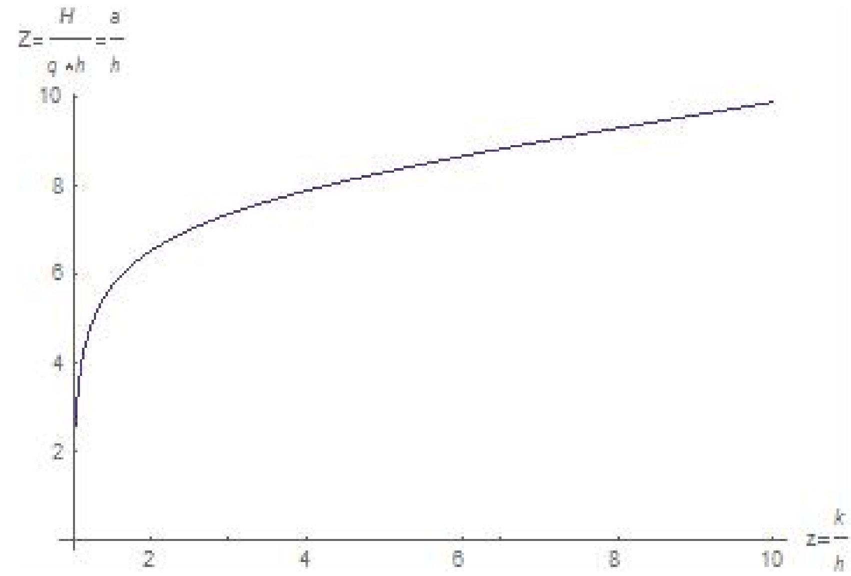
Kuvan 1 mukaan kuormitusmuuttujan Z riippuvuus poijupainon massasta M_{rel} on likimain lineaarista kun muuttujalla z on vakioarvo. Poijukettingin dimensioton pituusmuuttuja $z = k/h$ on paras poijun tehokkuuden säätelijä.

Koska analyyttinen ratkaisu (47) on mutkikas ja epäkäytännöllinen, etsitään likimääräinen ratkaisu. Jos kuormitus on suuri eli

$$z/Z \to 0,$$



Kuva 1. Kaavan (47) mukainen dimensioton kuormituspinta $Z\,(M_{\mathrm{rel}}, z, \mu_0 = 0,5)$.



Kuva 2. Kuormitusmuuttuja Z pelkän geometrisen muuttujan z funktiona, kun $M_{\mathrm{rel}} = 300\,\mathrm{kg}$ ja $\mu_0 = 0,5$.

on ketju likipitäen suora jolloin kaavasta (23) tai ketjun geometriasta seuraa

$$\tan\alpha_1 \equiv \sinh(x_1/a) \cong 1\Big/\sqrt{z^2-1}. \tag{48}$$

Sijoitettuna tasapainoehtoon (42) seuraa siitä likimääräinen arvio kuormitukselle

$$Z \cong \frac{\mu_0}{1+\mu_0/\sqrt{z^2-1}}\frac{\zeta Mg}{qh}. \tag{49}$$

Kun Z tunnetaan kaava (37) antaa kriittisen tuulen nopeuden. Numeeriset laskut osoittavat, että likikaava soveltuu käytettäväksi vain kun geometrisella muuttujalla on pieni arvo esim. $z = k/h < 3,6$, jolloin virhe on alle 10 %. Koskaan se ei ole alle 3 %.

Jos poijupaino ei pääse siirtymään sivuttain eli $\mu_0 \to \infty$, voi se ainoastaan kohota ylös pohjasta. Tällöin päädytään yhtälöön (vertaa kaavan (36) johto)

$$\frac{\zeta Mg}{qh} = Z\tan\alpha_1 \equiv \frac{\sqrt{z^2-1+4Z^2}-z\sqrt{z^2-1}}{z\sqrt{z^2-1}}. \tag{50}$$

Tästä saadaan ratkaistua

$$Z = \frac{\sqrt{z^2-1}}{2}\sqrt{\left(\frac{2\zeta Mg}{qh}+z\right)^2-1}. \tag{51}$$

Kaava (37) antaa sitten tuulen nopeuden jolloin poijupaino kohoaa pohjasta.

Loppusanat

Laskelmat osoittavat, että pitkä kettinki siirtää kovankin tuulen veneeseen aiheuttaman vaakavedon poijupainoon pyrkimättä nostamaan sitä pohjasta ylös. Mitä pidempi on kettinki suhteessa veden syvyyteen sitä kovemman tuulen systeemi sietää.

Poijun sukeltamista voidaan käyttää tuulen nopeuden arviointiin. Poijun puoleisessa päässä kettinkiin kohdistuu suurin veto ja pitkän kettingin ollessa kuormitettuna äärirajalla, on pystyveto vain murto-osa vaakavedosta.

Jos poijukettinki on lyhyt eli $z = k/h$ on pienempi kuin 2, alkaa pystyveto $V = H\tan\alpha_1 \equiv H\sinh(x_1/a)$ nopeasti kohottaa poijupainoa ja sen pitokyky huononee varsinkin kalliopohjalla, jos kitkakerroin on kallion pinnalla olevan mudan johdosta pieni.

Tässä artikkelissa esitetyillä kaavoilla voidaan poijukiinnitys-systeemi esimitoittaa. Kaavat sopivat myös ankkurikiinnityksen tarkasteluun.

Kettinkiin kohdistuva pahin rasitus syntyy kohtaan, missä kettinki useimmiten kohoaa pohjasta keskimääräisellä veden korkeudella ja tuulella. Aallokko aiheuttaa oman lisänsä mutkakohdan liikkeisiin.

Tässä mutkakohdassa kettingin lenkit hiertävät toisiaan vasten ja kuluvat. Lisäksi tulee ottaa huomioon, että merivesi on suolaista ja edesauttaa korroosion kautta kulumista. Näistä käytännön syistä poijukettinki tehdään yleensä kahdesta osasta: poijupainon puolelle paksumpaa kettinkiä, jota tarvitsee harvemmin vaihtaa, ja poijun puolelle ohuempaa kettinkiä, jota on helpompi vaihtaa, ja nämä yhdistetään toisiinsa sakkelilla [4, s. 496]. Sakkeli yleensä varmistetaan ruostumattomalla teräslangalla auki kiertymisen varalta. Aukeaminen johtuu galvanoinnin ohentumisesta sakkelin kierteissä korroosion vaikutuksesta ja sen liitoksen jännitystä vähentävästä vaikutuksesta. Ellei sakkelin varmistus ole riittävä, sillä on taipumus kiertyä auki yllättävänkin nopeasti, tyypillisesti noin vuoden pari kuluessa.

Liite

Merkintöjä ja numeerisia vakioita [4] ja [6] sekä [7] ja [8]

Yleisiä vakioita

$g = 9,8191\ \mathrm{ms}^{-2}$	putoamiskiihtyvyys Helsingissä ([5] s. 9)
$\rho_i = 1,225\ \mathrm{kgm}^{-3}$	ilman tiheys
$\rho_\mathrm{v} = 1000,0\ \mathrm{kgm}^{-3}$	veden tiheys
$\rho_\mathrm{t} = 7850,0\ \mathrm{kgm}^{-3}$	teräksen tiheys
$\zeta_\mathrm{t} = 0,8726611$	teräksen kevennyskerroin vedessä

Veden syvyys sekä poijukettingin pituus ja massa/metri (ellei toisin ilmoiteta)

$h = 5,2\ \mathrm{m}$	veden syvyys
$K = 24,0\ \mathrm{m}$	kettingin kokonaispituus
$m' = 2,5\ \mathrm{kgm}^{-1}$	kettingin massa pituutta kohti [4]

Poijuun liittyviä vakioita [4] (tilavuus, massa), osa arvioita

$u = 30,0\ \mathrm{dm}^3$	poijun tilavuus
$m_p = 6,55\ \mathrm{kg}$	poijun massa tangoineen

Veneeseen liittyviä vakioita (vastuskerroin, otsapinta-ala) arvioita

$C_D = 0,8$	ilmanvastuskerroin
$A = 2,8\mathrm{m} \cdot 1,2\mathrm{m} = 3,36\mathrm{m}^2$	otsapinta-ala

Laskujen tuloksia

Poiju sukeltaa

Kaavat (33)-(37) eli $Z = (z^2 - 1)/2$ on voimassa.

$z = 2,07 \qquad Z = 1,64$

$H = 182,30\ \mathrm{N} \qquad v = 9,41\ \mathrm{ms}^{-1}$

Kaavasta (24) seuraa ketjun kaltevuus poijussa $\alpha_2 = \arctan(2z/(z^2 - 1)) \approx 51,6°$

Ketju kestävyytensä rajalla

Kaavat (39), (40) ja (37): $S_2 = 800\mathrm{kg} \cdot g = 77855{,}28\ \mathrm{N}$

$z = 4,62 \qquad Z = 68,32$

$H = 7610,18\ \mathrm{N} \qquad v = 60,81\ \mathrm{ms}^{-1}$

Poijupaino

Poijupaino jonka massa on $M = 300$ kg lähtee liikkeelle liukkaalla mutaisella kalliopohjalla $\mu_0 = 0,5$ (kivi tiiltä vasten $\mu_0 = 0,53 \cdots 0,73$). Veden kevennys $\zeta = 0,6$.

Vertailua

Kaavat (44), (49) ja (47). Lyhyt ketju $z = 1,54 = 8,0/5,2$

Kaava (44)	Kaava (49)	Kaava (47)
$Z_{\text{vaaka}} = 7,934$	$Z_{\text{liki}} = 5,557$	$Z_{\text{tarkka}} = 5,818$
$H_{\text{vaaka}} = 883,72$ N	$H_{\text{liki}} = 618,99$ N	$H_{\text{tarkka}} = 648,03$ N
$v_{\text{vaaka}} = 20,72\ \text{ms}^{-1}$	$v_{\text{liki}} = 17,34\,\text{ms}^{-1}$	$v_{\text{tarkka}} = 17,74\ \text{ms}^{-1}$

Tässä esimerkissä: Verrattuna pelkkään vaakavetoon, kaava (44), lyhyen ketjun aiheuttama poijupainon pidon huonontuminen on liki 30 % ja likikaava (49) antaa alle 5 % pienempiä arvoja kuin tarkka kaava (47).

Viitteet

[1] A. Ylinen. *Kimmo- ja lujuusoppi I*, uusittu painos, Werner Söderström Oy, Porvoo 1969.

[2] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and Products.* 5. painos, Academic Press, Inc. 1980

[3] S. F. Hoerner. *Fluid-Dynamic Drag*, Published by the Author, 1965

[4] Biltema, Luettelo Kevät ja kesä 2012, Veneily, ss. 492-495.

[5] Veneilyn Aapinen, Veneilyalan Keskusliitto Findboat ry. s.14

[6] SI-opas, Suureet ja yksiköt, SI-mittayksikköjärjestelmä, Suomen Standardisoimisliitto & Vakaustoimisto, Helsinki 1973-12-29.s.23

[7] http://www.fe83.org, Tietoja kohdeveneestä 'Anneli' FinnExpressen 83

[8] http://www.otavene.net Anneli OV:n Venerekisterissä

[9] S. Wolfram. *The Mathematica Book*, 3. Painos, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996, s. 1403

Matti A Ranta
Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
PL 11000, 00076 Aalto
`matti.ranta@tkk.fi`

Panu Ranta
Aalto-yliopisto
Insinööritieteiden korkeakoulu
Koneenrakennustekniikan laitos
PL 11000, 00076 Aalto
`panu.ranta@kolumbus.fi`