

YKSINKERTAISTEN RAKENNEMALLIEN TASAPAINO- YHTÄLÖT - osa IV AVARUUSSAUVAT

Juha Paavola ja Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 30
Nro 2, 1997, s. 45-63

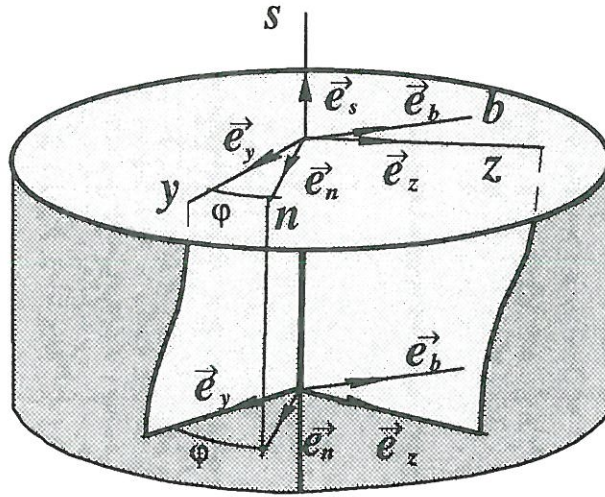
TIIVISTELMÄ Tämän artikkelisarjan tarkoituksena on valaista virtuaalisen työn periaatteen käyttökelpoisuutta yksinkertaisten perusrakennemallien, kuten sauvojen, laattojen ja kuorien tasapainoyhtälöitä johdettaessa. Sarja koostuu neljästä artikkelista, joissa kussakin käsitellään yhtä edellä mainituista rakennetyypeistä. Huomiota kiinnitetään virtuaalisen työn periaatteen systemaattisuuden lisäksi erikoisesti siihen, miten liiketilan erilaiset perusotaksumat vaikuttavat tehtävien formulointiin. Tässä osassa käsitellään sauvaa kolmidimensioisessa avaruudessa eli yleistä sauvateoriaa.

JOHDANTO

Artikkelisarjan ensimmäisessä osassa käsiteltiin tasosauvaa ja johdettiin sauvan muodonmuutosten lausekkeet sekä tasapainoyhtälöt. Tasosauvan akselilla on vain yksi kaarevuuskomponentti. Avaruussauvan akselilla on mielivaltaisessa koordinaattijärjestelmässä yleensä kaksi nollasta eroavaa kaarevuuskomponenttia sekä kierevyys: Tarkastelu voidaan suorittaa myös sauvan akselin oskuloivassa tasossa eli pääkaarevuustasossa, jonka määrittävät sauvan akselin tangentti sekä päänormaali. Tällöin akselin toinen kaarevuuskomponentti häviää, mutta samalla menetetään johdettavissa yhtälöissä tiettyjä symmetriaominaisuuksia. Samoin monet muut seikat, kuten esimerkiksi poikkileikkauksen muoto, saattavat edellyttää poikkeamista päänormaalitasosta. Oleellisena erona avaruussauvan ja tasosauvan käsittelyssä on se seikka, että kolmidimensioisen sauvan tapauksessa vääntöä ei voida sulkea pois tarkastelusta. Tämän johdosta otaksuma poikkileikkauspintojen pysymisestä tasona ei ole enää yleensä realistinen muutamaa tunnettua poikkeusta lukuunottamatta. Tarvittava kinematiikka tulee tällöin valita tämä huomioonottaen. Jatkossa tarkastelu noudattaa suunnilleen edellisissä sarjan osissa tutuksi tullutta järjestystä.

SAUVAN GEOMETRIA

Sauvan rakennemalli on, kuten aikaisemmin jo tuli esille, yksidimensioinen. Sauva koostuu siis yhdestä, suorasta tai kaarevasta viivasta eli sauvan akselista.



Kuva 1. Koordinaattijärjestelmät.

Tämän viivan kunkin pisteen asema kiinteän globaalien koordinaattijärjestelmän origon suhteen määräytyy paikkavektorin \vec{r}_o avulla. Paikkavektori on jonkin mielivaltaisen parametrin funktio. Täksi parametriksi voidaan suoraan valita kaaren pituus s ja näin jatkossa myös menetellään. Paikkavektori on globaalien koordinaattijärjestelmän x, y, z avulla esitettyä

$$\vec{r}_o = \vec{r}_o(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}.$$

Sauvan akselin suuntainen tangenttivektori määritellään paikkavektorin derivaatana. Kun derivaatta lasketaan suoraan kaarenpituuden suhteen, tuloksena saadaan yksikkötangenttivektori \vec{e}_s eli

$$\vec{e}_s = \frac{d\vec{r}_o}{ds}.$$

Huolimatta siitä, että edellä mainitun globaalien koordinaattijärjestelmän koordinaatit tulevat samannimisiksi, otetaan poikkileikkauksen tasossa lisäksi käyttöön tutut suoraviivaiset y - ja z -koordinaattimerkinnot. Koordinaattijärjestelmä s, y, z valitaan oikeakätiseksi. Koordinaattien y ja z virittämä taso, sauvan poikkileikkaustaso, siis seuraa käyräviivaista akselia ollen kohtisuorassa akselia vastaan jokaisessa sen pisteessä. Jotta y - ja z -koordinaattiakselien asema voidaan yksikäsitteisesti kiinnittää, sidotaan niiden suunnat kuvan 1 tavalla pää- ja sivunormaalien suuntiin. Päänormaalien suunta määräytyy yksikkötangenttivektorin derivaatan suuntana; sivunormaalien vastaavasti yksikkötangentin ja -päänormaalien vektoritulona. Jos merkitään päänormaalien suuntaa vektorilla \vec{e}_n ja sivunormaalien vastaavasti vektorilla \vec{e}_b , kuvan 1 perusteella pätee yhteys

$$\begin{aligned} \vec{e}_y &= \cos \varphi \vec{e}_n - \sin \varphi \vec{e}_b, \\ \vec{e}_z &= \sin \varphi \vec{e}_n + \cos \varphi \vec{e}_b. \end{aligned} \quad (1)$$

Näiden derivaatat ovat

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_y}{ds} &= -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_n + \cos \varphi \frac{d\vec{e}_n}{ds} - \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_b - \sin \varphi \frac{d\vec{e}_b}{ds}, \\ \frac{d\vec{e}_z}{ds} &= \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_n + \sin \varphi \frac{d\vec{e}_n}{ds} - \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_b + \cos \varphi \frac{d\vec{e}_b}{ds}. \end{aligned} \quad (2)$$

Artikkelisarjan osassa I johdettiin sauvan akselin tangentin, päänormaalien ja sivunormaalien suuntaisten yksikkövektoreiden derivaatat

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = -\kappa\vec{e}_n, \quad \frac{d\vec{e}_n}{ds} = \kappa\vec{e}_s - \tau\vec{e}_b, \quad \frac{d\vec{e}_b}{ds} = \tau\vec{e}_n,$$

joissa κ ja τ ovat akselin kaarevuus ja kierevyys. Päänormaalien suuntaa määrittäessä on valittavana kaksi vastakkaista suuntaa. Kirjallisuudessa useimmiten suunnataan päänormaali kaarevuuskeskipistettä kohtaan. Tämä johtaa siihen, että päänormaalien suunta muuttuu hyppäyksittäin kaarevuuden muuttuessa. Yksikäsitteinen sileästi muuttuvan suunnan kiinnittäminen tulee sitoa sauvan johonkin sivuun tai särmään. Sijoittamalla derivaattojen lausekkeet yhtälöihin (2) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_y}{ds} &= -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_n + \cos\varphi (\kappa\vec{e}_s - \tau\vec{e}_b) - \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_b - \sin\varphi \tau \vec{e}_n \\ &= (-\sin\varphi \vec{e}_n - \cos\varphi \vec{e}_b) \left(\frac{d\varphi}{ds} + \tau \right) + \kappa \cos\varphi \vec{e}_s, \\ \frac{d\vec{e}_z}{ds} &= \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_n + \sin\varphi (\kappa\vec{e}_s - \tau\vec{e}_b) - \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_b + \cos\varphi \tau \vec{e}_n \\ &= (\cos\varphi \vec{e}_n - \sin\varphi \vec{e}_b) \left(\frac{d\varphi}{ds} + \tau \right) + \kappa \sin\varphi \vec{e}_s. \end{aligned}$$

Käyttämällä edelleen hyväksi geometrisia riippuvuuksia (1) nämä saavat muodon

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_y}{ds} &= -\left(\tau + \frac{d\varphi}{ds} \right) \vec{e}_z + \kappa \cos\varphi \vec{e}_s, \\ \frac{d\vec{e}_z}{ds} &= \left(\tau + \frac{d\varphi}{ds} \right) \vec{e}_y + \kappa \sin\varphi \vec{e}_s. \end{aligned}$$

Kantavektoreiden kohtisuoruuden perusteella saadaan yksikkötangenttivektorin derivaatan komponenteiksi

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_s}{ds} \cdot \vec{e}_y &= -\vec{e}_s \cdot \frac{d\vec{e}_y}{ds} = -\kappa \cos\varphi, \\ \frac{d\vec{e}_s}{ds} \cdot \vec{e}_z &= -\vec{e}_s \cdot \frac{d\vec{e}_z}{ds} = -\kappa \sin\varphi, \end{aligned}$$

joten

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = -\kappa \cos\varphi \vec{e}_y - \kappa \sin\varphi \vec{e}_z.$$

Määritellään nyt kaarevuus- ja kierevyysuureet lausekkeilla

$$\frac{1}{R_z} = \kappa \cos\varphi, \quad \frac{1}{R_y} = -\kappa \sin\varphi, \quad \frac{1}{T} = \tau + \frac{d\varphi}{ds},$$

joihin sisältyy siis osuudet sekä akselin kaarevasta geometriasta että poikkileikkauspinnalle valitun koordinaattijärjestelmän kiertymisestä $\varphi = \varphi(s)$, ja joilla

on selkeästi erilaiset tulkinnat kuin aikaisemmin osassa I määritellyillä vastaavilla suureilla. Etumerkkien valinta noudattaa perinteistä sauvarakenneanalyysissä yleisesti omaksuttua tapaa. Kantajärjestelmän yksikkövektoreiden derivaatat voidaan näinollen esittää muodossa

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_s}{ds} &= -\frac{1}{R_z}\vec{e}_y + \frac{1}{R_y}\vec{e}_z, \\ \frac{d\vec{e}_y}{ds} &= \frac{1}{R_z}\vec{e}_s - \frac{1}{T}\vec{e}_z, \\ \frac{d\vec{e}_z}{ds} &= -\frac{1}{R_y}\vec{e}_s + \frac{1}{T}\vec{e}_y.\end{aligned}\quad (3)$$

Kolmidimensioisessa sauvarakenteessa tarvitaan paikkavektoria myös akselin ulkopuolella olevien pisteiden aseman määrittämiseksi. Tämä paikkavektori saadaan summaamalla kussakin poikkileikkaustasossa olevan sauvan akselin pisteen paikkavektoriin normaalien suuntaiset komponentit,

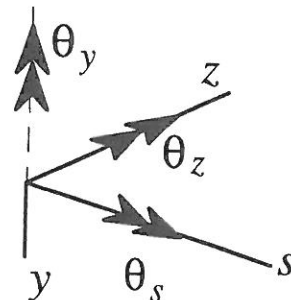
$$\vec{r}(s, y, z) = \vec{r}_o(s) + y\vec{e}_y(s) + z\vec{e}_z(s),$$

jonka derivaatta- eli tangenttivektoreiksi saadaan soveltamalla suoraan edellä esitettyä

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} &= \frac{d\vec{r}_o}{ds} + y\frac{d\vec{e}_y}{ds} + z\frac{d\vec{e}_z}{ds} = \left(1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y}\right)\vec{e}_s + \frac{z}{T}\vec{e}_y - \frac{y}{T}\vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= \vec{e}_y, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \vec{e}_z.\end{aligned}\quad (4)$$

AVARUUSSAUVAN KINEMATIikka ELI LIIKETILA

Kun otaksutaan sauvan poikkileikkaustason pysyvän deformaatiassa tasoina, kolmidimensioisessa avaruudessa sauvan siirtymätila koostuu koordinaattiakselien x, y, z suuntaisista siirtymäkomponenteista $u = u(s)$, $v = v(s)$ ja $w = w(s)$ sekä rotaatio-komponenteista $\theta_s = \theta_s(s)$, $\theta_y = \theta_y(s)$ ja $\theta_z = \theta_z(s)$. Koska sauvan vääntö kuitenkin useimmissa tapauksissa aiheuttaa poikkileikkaustason käyristymisen, otetaan tämä huomioon lisäämällä aksiaalisessa suunnassa osuus, joka sisältää poikkileikkaustason käyristymisen huomioonottavan termin $\psi = \psi(s, y, z)$. Jäykän kappaleen rotaatiosta aiheutuva siirtymä määräytyy yhtälöllä



Kuva 2. Rotaatiot.

$$\vec{u} = \vec{\theta} \times (\vec{r} - \vec{r}_o) = \begin{vmatrix} \vec{e}_s & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \theta_s & -\theta_y & \theta_z \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = -(z\theta_y + y\theta_z)\vec{e}_s - z\theta_s\vec{e}_y + y\theta_s\vec{e}_z,$$

jossa \vec{r}_o on siirtopisteen paikkavektori, tässä tapauksessa poikkileikkaustason origon. Rotaatioiden positiiviset suunnat on valittu perinteistä sauva-analyysia mukailleen (kuva 2). Kinematiikan määrittävä siirtymävektori on tällöin muotoa

$$\vec{u}(s, y, z) = (u - y\theta_z - z\theta_y + \psi)\vec{e}_s(s) + (v - z\theta_s)\vec{e}_y(s) + (w + y\theta_s)\vec{e}_z(s). \quad (5)$$

Muodonmuutoksia määritettäessä hyödynnetään jälleen paikallista karteesista koordinaattijärjestelmää X, Y, Z . Tarvittavat derivaattojen väliset muunnoskaavat saadaan käyttökelpoiseen muotoon (vrt. osa II)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{e}_x & \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{e}_y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{e}_z \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \cdot \vec{e}_x & \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \cdot \vec{e}_z \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \vec{e}_x & \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \vec{e}_y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Oleelliset muodonmuutoskomponentit avaruussauvan tapauksessa ovat

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_x, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_z, \\ \gamma_{yx} &= \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_y, \end{aligned} \quad (7)$$

joissa $u_x = \vec{u} \cdot \vec{e}_x$, $u_y = \vec{u} \cdot \vec{e}_y$ ja $u_z = \vec{u} \cdot \vec{e}_z$. Sijoitetaan paikallinen koordinaatisto siten, että sen X -koordinaattiakseli sivuaa sauvan akselia kussakin pisteessä ja Y - ja Z -akselit yhtyvät y - ja z -akseleihin. Tällöin toteutuvat pisteittäin yksikkövektoreiden välillä yhteydet $\vec{e}_x = \vec{e}_s$, $\vec{e}_y = \vec{e}_y$ ja $\vec{e}_z = \vec{e}_z$, jolloin derivaattojen välinen käänteinen yhteys saadaan muotoon

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y}) & \frac{z}{T} & -\frac{y}{T} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Tästä voidaan helposti laskea kerroinmatriisina oleva Jacobin matriisin käänteismatriisi

$$\mathbf{J}^{-1} = (1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z}{T} & \frac{y}{T} \\ 0 & 1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y} \end{bmatrix},$$

ja derivaattojen väliset riippuvuudet

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} &= \left(1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{z}{T} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{T} \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\tag{9}$$

AVARUUSSAUVAN MUODONMUUTOKSET

Muodonmuutokset (7) pisteessä, jossa paikallinen koordinaattijärjestelmä on kiinnitetty, voidaan lausua kaavojen (9) perusteella muodossa

$$\begin{aligned}\epsilon_s = \epsilon_x &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_x = \left(1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} - \frac{z}{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \frac{y}{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right) \cdot \vec{e}_s, \\ \gamma_{ys} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_x \\ &= \left(1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} - \frac{z}{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \frac{y}{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right) \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \vec{e}_s, \\ \gamma_{zs} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_x \\ &= \left(1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} - \frac{z}{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \frac{y}{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right) \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_s.\end{aligned}\tag{10}$$

Johdetaan ensimmäisessä vaiheessa tasapainoyhtälöt otaksumalla poikkileikkaustason pysyvän tasona, eli otaksumalla käyristymäfunktion häviävän: $\psi(s, y, z) \equiv 0$. Tämä pätee lähinnä sauvoille, joiden poikkileikkaus on pyöreä, eli ympyrä tai ympyräputki. Siirtymävektorin (5) derivaatoiksi saadaan tällöin

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} &= \left(\frac{du}{ds} - y \frac{d\theta_z}{ds} - z \frac{d\theta_y}{ds}\right) \vec{e}_s + (u - y\theta_z - z\theta_y) \frac{d\vec{e}_s}{ds} \\ &\quad + \left(\frac{dv}{ds} - z \frac{d\theta_s}{ds}\right) \vec{e}_y + (v - z\theta_s) \frac{d\vec{e}_y}{ds} \\ &\quad + \left(\frac{dw}{ds} + y \frac{d\theta_s}{ds}\right) \vec{e}_z + (w + y\theta_s) \frac{d\vec{e}_z}{ds}, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} &= -\theta_z \vec{e}_s + \theta_s \vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} &= -\theta_y \vec{e}_s - \theta_s \vec{e}_y,\end{aligned}\tag{11}$$

joista ensimmäinen saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} &= \left(\frac{du}{ds} - y \frac{d\theta_z}{ds} - z \frac{d\theta_y}{ds} + \frac{1}{R_z}(v - z\theta_s) - \frac{1}{R_y}(w + y\theta_s)\right) \vec{e}_s \\ &\quad + \left(\frac{dv}{ds} - z \frac{d\theta_s}{ds} - \frac{1}{R_z}(u - y\theta_z - z\theta_y) + \frac{1}{T}(w + y\theta_s)\right) \vec{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{dw}{ds} + y \frac{d\theta_s}{ds} + \frac{1}{R_y}(u - y\theta_z - z\theta_y) - \frac{1}{T}(v - z\theta_s)\right) \vec{e}_z,\end{aligned}\tag{12}$$

kun otetaan huomioon yksikkövektoreiden derivaatat (3). Muodonmuutokset paikallisissa koordinaateissa lausuttuna saadaan sijoittamalla derivaattojen lausekkeet (11) ja (12) määritelmiin (10)

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= (\det \mathbf{J})^{-1} \left[\frac{du}{ds} - y \frac{d\theta_z}{ds} - z \frac{d\theta_y}{ds} + \frac{1}{R_z}(v - z\theta_s) - \frac{1}{R_y}(w + y\theta_s) + \frac{z}{T}\theta_z - \frac{y}{T}\theta_y \right] \\ \gamma_{ys} &= (\det \mathbf{J})^{-1} \left[\frac{dv}{ds} - z \frac{d\theta_s}{ds} - \frac{1}{R_z}(u - y\theta_z - z\theta_y) + \frac{1}{T}(w + y\theta_s) - \frac{y}{T}\theta_s \right] - \theta_z, \\ \gamma_{zs} &= (\det \mathbf{J})^{-1} \left[\frac{dw}{ds} + y \frac{d\theta_s}{ds} + \frac{1}{R_y}(u - y\theta_z - z\theta_y) - \frac{1}{T}(v - z\theta_s) - \frac{z}{T}\theta_s \right] - \theta_y.\end{aligned}$$

Nämä sieventyvät muotoon

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= (\det \mathbf{J})^{-1} \left[\left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{R_z} - \frac{w}{R_y} \right) - y \left(\frac{d\theta_z}{ds} + \frac{\theta_s}{R_y} + \frac{\theta_y}{T} \right) - z \left(\frac{d\theta_y}{ds} + \frac{\theta_s}{R_z} - \frac{\theta_z}{T} \right) \right], \\ \gamma_{ys} &= (\det \mathbf{J})^{-1} \left[\left(\frac{dv}{ds} - \frac{u}{R_z} + \frac{w}{T} - \theta_z \right) - z \left(\frac{d\theta_s}{ds} - \frac{\theta_y}{R_z} - \frac{\theta_z}{R_y} \right) \right], \\ \gamma_{zs} &= (\det \mathbf{J})^{-1} \left[\left(\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_y} - \frac{v}{T} - \theta_y \right) + y \left(\frac{d\theta_s}{ds} - \frac{\theta_z}{R_y} - \frac{\theta_y}{R_z} \right) \right],\end{aligned} \quad (13)$$

joissa on käytetty lyhennysmerkintää

$$\det \mathbf{J} = 1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y}$$

Jacobin matriisin determinantille. Leikkausmuodonmuutosten häviäminen edellyttää tasosauvan yhteydessä määriteltyä Bernoullin otaksumaa mukaellen kolmen ehdon

$$\begin{aligned}\theta_z &= \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R_z} + \frac{w}{T}, \\ \theta_y &= \frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_y} - \frac{v}{T}, \\ \frac{d\theta_s}{ds} &= \frac{\theta_z}{R_y} + \frac{\theta_y}{R_z} = \frac{1}{R_y} \left(\frac{dv}{ds} + \frac{w}{T} \right) + \frac{1}{R_z} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{v}{T} \right),\end{aligned} \quad (14)$$

toteutumista. Näistä kaksi ensimmäistä riittää ehdon toteutumiseen sauvan akselilla.

SAUVAN TASAPAINOYHTÄLÖT

Osittaisintegroitikaavat

Ainoana oleellisena perusmatematiikan työkaluna virtuaalisen työn periaatteen soveltamisessa rakenneanalyysiin tarvitaan osittaisintegrointia. Määriteltäessä funktiot $g = g(s)$ ja $h = h(s)$ yksidimensioinen osittaisintegroitikaava on

$$\begin{aligned}\int_s g \frac{dh}{ds} ds &= [gh]_0^\ell - \int_s \frac{dg}{ds} h ds \\ &= g(\ell)h(\ell) - g(0)h(0) - \int_s \frac{dg}{ds} h ds.\end{aligned} \quad (15)$$

Artikkelisarjan osassa II johdettiin varsin yksityiskohtaisesti yleiset osittaisintegroitinkaavat kahdessa dimensiossa. Olkoon $p = p(y, z)$ ja $q = q(y, z)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \int_A p \frac{\partial q}{\partial y} dA &= \oint_{\Gamma} pqn_y dc - \int_A \frac{\partial p}{\partial y} q dA, \\ \int_A p \frac{\partial q}{\partial z} dA &= \oint_{\Gamma} pqn_z dc - \int_A \frac{\partial p}{\partial z} q dA. \end{aligned} \quad (16)$$

Kappaleen reunaviivan Γ normaalin \vec{n} suuntakosinit $n_y = \vec{n} \cdot \vec{e}_y$ ja $n_z = \vec{n} \cdot \vec{e}_z$ ovat normaalin projektiot koordinaattiakselien suunnille.

Virtuaalisen työn periaate

Tasapainoyhtälöt johdetaan käyttämällä virtuaalisen työn periaatetta. Virtuaalisen työn periaatteen soveltuvuus sekä analyttisten että numeeristen laskentamenetelmien perustyökaluksi on omiaan yhdentämään opetuksessakin perinteisesti varsin erillään olevia laskentatekniikkoja.

Virtuaalisen työn periaatteessa kuviteltua, virtuaalista siirtymätilaa vastaavan rakenteen sisäisten voimien virtuaalisen työn δW^s (s=sisäinen) ja ulkoisen kuormituksen tekemän virtuaalisen työn δW^u (u=ulkoinen) summa häviää.

$$\delta W^s + \delta W^u = 0. \quad (17)$$

Sisäisten voimien virtuaalinen työ

$$\delta W^s = - \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{yx} \delta \gamma_{yx} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV. \quad (18)$$

Hajoittamalla tilavuusintegraali erillisiksi integraaleiksi sauvan poikkileikkausalan A ja pituuden yli, $dA = dydz$, saadaan tilavuusalkioksi

$$dV = (\det \mathbf{J}) ds dy dz = (\det \mathbf{J}) dA ds.$$

Tämän jälkeen sijoitetaan varioidut muodonmuutosten lausekkeet (13), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \delta W^s = - \int_s \int_A \left\{ \sigma_s \left[\frac{d\delta u}{ds} + \frac{\delta v}{R_z} - \frac{\delta w}{R_y} - y \left(\frac{d\delta \theta_z}{ds} + \frac{\delta \theta_s}{R_y} + \frac{\delta \theta_y}{T} \right) - z \left(\frac{d\delta \theta_y}{ds} + \frac{\delta \theta_s}{R_z} - \frac{\delta \theta_z}{T} \right) \right] \right. \\ \left. + \tau_{ys} \left[\frac{d\delta v}{ds} - \frac{\delta u}{R_z} + \frac{\delta w}{T} - \delta \theta_z - z \left(\frac{d\delta \theta_s}{ds} - \frac{\delta \theta_y}{R_z} - \frac{\delta \theta_z}{R_y} \right) \right] \right. \\ \left. + \tau_{zs} \left[\frac{d\delta w}{ds} + \frac{\delta u}{R_y} - \frac{\delta v}{T} - \delta \theta_y + y \left(\frac{d\delta \theta_s}{ds} - \frac{\delta \theta_z}{R_y} - \frac{\delta \theta_y}{R_z} \right) \right] \right\} dA ds. \end{aligned}$$

Edellisessä otettiin jo huomioon kussakin poikkileikkaustasossa pätevät yhteydet $\sigma_x = \sigma_s$, $\tau_{yx} = \tau_{ys}$ ja $\tau_{zx} = \tau_{zs}$.

Kun määritellään normaalivoima-, leikkausvoima- ja momenttiresultantit tavanomaisella tavalla sisäisten jännitysjakaumien integraaleina yli sauvan poikki-leikkausalan

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_s dA, & M_s &= \int_A [y\tau_{zs} - z\tau_{ys}] dA, \\ Q_y &= \int_A \tau_{ys} dA, & M_y &= \int_A \sigma_s z dA, \\ Q_z &= \int_A \tau_{zs} dA, & M_z &= \int_A \sigma_s y dA, \end{aligned} \quad (19)$$

saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \delta W^s &= - \int_s \left[N \left(\frac{d\delta u}{ds} + \frac{\delta v}{R_z} - \frac{\delta w}{R_y} \right) - M_y \left(\frac{d\delta\theta_y}{ds} + \frac{\delta\theta_s}{R_z} - \frac{\delta\theta_z}{T} \right) \right. \\ &\quad - M_z \left(\frac{d\delta\theta_z}{ds} + \frac{\delta\theta_s}{R_y} + \frac{\delta\theta_y}{T} \right) + Q_y \left(\frac{d\delta v}{ds} - \frac{\delta u}{R_z} + \frac{\delta w}{T} - \delta\theta_z \right) \\ &\quad \left. + Q_z \left(\frac{d\delta w}{ds} + \frac{\delta u}{R_y} - \frac{\delta v}{T} - \delta\theta_y \right) + M_s \left(\frac{d\delta\theta_s}{ds} - \frac{\delta\theta_y}{R_z} - \frac{\delta\theta_z}{R_y} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

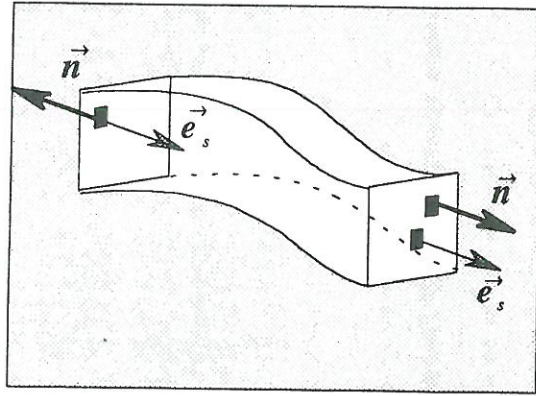
Suorittamalla yhden kerran osittaisintegrointi kaavaa (15) soveltamalla niissä termeissä, joissa on virtuaalisten siirtymäsuureiden δu , δv , δw , $\delta\theta_s$, $\delta\theta_y$ tai $\delta\theta_z$ derivaattoja, saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \delta W^s &= - \int_s \left\{ \left[-\frac{dN}{ds} - \frac{Q_y}{R_z} + \frac{Q_z}{R_y} \right] \delta u - \left[\frac{dQ_y}{ds} - \frac{N}{R_z} + \frac{Q_z}{T} \right] \delta v \right. \\ &\quad - \left[\frac{dQ_z}{ds} + \frac{N}{R_y} - \frac{Q_y}{T} \right] \delta w - \left[\frac{dM_s}{ds} + \frac{M_y}{R_z} + \frac{M_z}{R_y} \right] \delta\theta_s \\ &\quad + \left[\frac{dM_y}{ds} - \frac{M_z}{T} - \frac{M_s}{R_z} - Q_z \right] \delta\theta_y + \left[\frac{dM_z}{ds} + \frac{M_y}{T} - \frac{M_s}{R_y} - Q_y \right] \delta\theta_z \left. \right\} ds \\ &\quad - \left[N\delta u + Q_y\delta v + Q_z\delta w + M_s\delta\theta_s - M_y\delta\theta_y - M_z\delta\theta_z \right]_0^\ell. \end{aligned} \quad (20)$$

Vastaavasti ulkoisen kuormituksen tekemä virtuaalinen työ, joka koostuu sekä tilavuusvoimien että pintavoimien tekemästä työstä, on

$$\begin{aligned} \delta W^u &= \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_{A_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dA \\ &= \int_V [f_x \delta u_x + f_y \delta u_y + f_z \delta u_z] dV + \int_{A_t} [t_x \delta u_x + t_y \delta u_y + t_z \delta u_z] dA. \end{aligned} \quad (21)$$

Nimitys pintavoimat käsittää kuormitukset, jotka kohdistuvat sauvan kahteen päätypoikkileikkaustasoon A_t , mutta mahdollisesti myös vaippapintaan. Kun otetaan huomioon siirtymän lauseke (5), hajoitetaan tilavuus- ja pintaintegraalit osiin sekä otetaan huomioon, että kussakin poikkileikkaustasossa pätevät relaatiot



Kuva 3. Yksikkönormaali- ja tangenttivektorit sauvan päissä.

$f_x = f_s$, $f_y = f_y$ ja $f_z = f_z$ ja päätypoikkileikkauksissa vastaavasti $t_x = t_s$, $t_y = t_y$ ja $t_z = t_z$, saadaan

$$\begin{aligned} \delta W^u &= \int_s \int_A [f_s(\delta u - y\delta\theta_z - z\delta\theta_y) + f_y(\delta v - z\delta\theta_s) + f_z(\delta w + y\delta\theta_s)](\det \mathbf{J})dAd s \\ &+ \int_{A_t} [t_s(\delta u - y\delta\theta_z - z\delta\theta_y) + t_y(\delta v - z\delta\theta_s) + t_z(\delta w + y\delta\theta_s)]dA. \end{aligned}$$

Käsittelyn lyhentämiseksi on tässä jätetty palkin vaippapintaan mahdollisesti kohdistuvien ulkoisten kuormitusten osuus huomioonottamatta. Määritellään kuormitusresultantit ensin tilavuusvoimille

$$\begin{aligned} n &= \int_A f_s(\det \mathbf{J})dA, & m_s &= \int_A (yf_z - zf_y)(\det \mathbf{J})dA, \\ q_y &= \int_A f_y(\det \mathbf{J})dA, & m_y &= \int_A zf_s(\det \mathbf{J})dA, \\ q_z &= \int_A f_z(\det \mathbf{J})dA, & m_z &= \int_A yf_s(\det \mathbf{J})dA. \end{aligned} \quad (22)$$

Muodostetaan edelleen sauvan kummassakin päässä akselin yksikkötangenttivektorin ja päätypoikkileikkaustason ulkonormaanin \vec{n} pistetulo, $n_s = \vec{n} \cdot \vec{e}_s$, jolloin $n_s(\ell) = 1$ ja $n_s(0) = -1$, kuva 3. Tämän avulla voidaan sauvan kummassakin päässä määrittellä ulkoisten pintavoimien kuormaresultantit seuraavasti:

$$\begin{aligned} N_o &= \int_{A_t} t_s n_s dA, & M_{s_o} &= \int_{A_t} (yt_z - zt_y)n_s dA, \\ Q_{y_o} &= \int_{A_t} t_y n_s dA, & M_{y_o} &= \int_{A_t} zt_s n_s dA, \\ Q_{z_o} &= \int_{A_t} t_z n_s dA, & M_{z_o} &= \int_{A_t} yt_s n_s dA. \end{aligned} \quad (23)$$

Tällöin ulkoisten voimien virtuaalisen työn lauseke saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \delta W^u &= \int_s [n\delta u + q_y\delta v + q_z\delta w + m_s\delta\theta_s - m_y\delta\theta_y - m_z\delta\theta_z] ds \\ &+ [N_o\delta u + Q_{y_o}\delta v + Q_{z_o}\delta w + M_{s_o}\delta\theta_s - M_{y_o}\delta\theta_y - M_{z_o}\delta\theta_z]_0^\ell. \end{aligned} \quad (24)$$

On huomattava, että lausekkeen (24) sijoitustermissä alarajan termit tulevat mukaan miinusmerkkisinä. Tämä korjaantuu suureen n_s avulla.

Sijoittamalla edellä määritetyt sisäisten ja ulkoisten voimien virtuaalisen työn lausekkeet (20) ja (24) virtuaalisen työn periaatteen kaavaan (17) saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
& \int_s \left\{ \left[\frac{dN}{ds} + \frac{Q_y}{R_z} - \frac{Q_z}{R_y} + n \right] \delta u + \left[\frac{dQ_y}{ds} - \frac{N}{R_z} + \frac{Q_z}{T} + q_y \right] \delta v \right. \\
& + \left[\frac{dQ_z}{ds} + \frac{N}{R_y} - \frac{Q_y}{T} + q_z \right] \delta w + \left[\frac{dM_s}{ds} + \frac{M_y}{R_z} + \frac{M_z}{R_y} + m_s \right] \delta \theta_s \\
& - \left[\frac{dM_y}{ds} - \frac{M_z}{T} - \frac{M_s}{R_z} - Q_z + m_y \right] \delta \theta_y - \left[\frac{dM_z}{ds} + \frac{M_y}{T} - \frac{M_s}{R_y} - Q_y + m_z \right] \delta \theta_z \left. \right\} ds \\
& - \left[(N - N_o) \delta u + (Q_y - Q_{y_o}) \delta v + (Q_z - Q_{z_o}) \delta w \right. \\
& \left. + (M_s - M_{s_o}) \delta \theta_s - (M_y - M_{y_o}) \delta \theta_y - (M_z - M_{z_o}) \delta \theta_z \right]_0^l = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Jotta yhtälö toteutuisi mielivaltaisesti valittujen virtuaalisten siirtymäkomponenttien δu , δv , δw , $\delta \theta_s$, $\delta \theta_y$, $\delta \theta_z$ suhteen, kunkin siirtymäkomponentin kertoimen täytyy erikseen hävitä sekä sauvan akselilla että päissä. Näin muodostuvat sauvan tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{ds} + \frac{Q_y}{R_z} - \frac{Q_z}{R_y} + n &= 0, \\
\frac{dQ_y}{ds} - \frac{N}{R_z} + \frac{Q_z}{T} + q_y &= 0, \\
\frac{dQ_z}{ds} + \frac{N}{R_y} - \frac{Q_y}{T} + q_z &= 0, \\
\frac{dM_s}{ds} + \frac{M_y}{R_z} + \frac{M_z}{R_y} + m_s &= 0, \\
\frac{dM_y}{ds} - \frac{M_z}{T} - \frac{M_s}{R_z} - Q_z + m_y &= 0, \\
\frac{dM_z}{ds} + \frac{M_y}{T} - \frac{M_s}{R_y} - Q_y + m_z &= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

joiden tulee toteutua jokaisessa sauvan akselin sisäpisteessä sekä reunaehdot

$$\left. \begin{aligned}
-N + N_o &= 0, \\
-Q_y + Q_{y_o} &= 0, \\
-Q_z + Q_{z_o} &= 0, \\
-M_s + M_{s_o} &= 0, \\
M_y - M_{y_o} &= 0, \\
M_z - M_{z_o} &= 0,
\end{aligned} \right\} \text{ kun } s = s_t, \quad \vee \quad \left. \begin{aligned}
\delta u = u - \bar{u} &= 0, \\
\delta v = v - \bar{v} &= 0, \\
\delta w = w - \bar{w} &= 0, \\
\delta \theta_s = \theta_s - \bar{\theta}_s &= 0, \\
\delta \theta_y = \theta_y - \bar{\theta}_y &= 0, \\
\delta \theta_z = \theta_z - \bar{\theta}_z &= 0,
\end{aligned} \right\} \text{ kun } s = s_u.$$

(27)

kummassakin akselin päätepisteessä. Mekaanisten eli voimatilalle asetettujen reunaehtojen tulee toteutua kuormitetulla osalla reuna-aluetta s_t , missä edellytetään tasapainoa ulkoisten kuormien kanssa, ja geometrinen vastaavasti tuetulla reunalla s_u . Reuna-alueet s_t ja s_u voivat lisäksi mennä päällekkäin eri vapausasteiden

eli siirtymäkomponenttien osalta - esimerkiksi tuetussa sauvan päässä voi kuormituksen olla aksiaalinen voima tai taivutusmomentti. Alueita s_t ja s_u ei näinollen voi puhtaasti erottaa toisistaan. Virtuaalisten siirtymien tulee olla kinemaattisesti luvallisia eli toteuttaa geometriset reunaehdot mukaanluettuna niin sanotut pakkosiirtymät eli nollostä eroavat tunnetut siirtymät \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , $\bar{\theta}_s$, $\bar{\theta}_y$ ja $\bar{\theta}_z$.

Tuloksena saadut tasapainoehdot eli differentiaaliyhtälöt (26) ovat luonnollisesti sauvan materiaalista riippumattomia. Jos halutaan edelleen johtaa tasapainoyhtälöt siirtymäkomponenttien avulla lausuttuina, tulee tarkasteluun kytkeä tarkasteltavan sauvan materiaalin konstitutiivinen malli, toisin sanoen jännitys-muodonmuutos-riippuvuus.

POIKKILEIKKAUSTASON KÄYRISTYMINEN

Otetaan nyt huomioon poikkileikkaustason käyristyminen väännössä, $\psi(s, y, z) \neq 0$, ja kehitetään funktio ψ Taylorin sarjaksi

$$\psi(s, y, z) = \psi_0(s) + \frac{\partial \psi_0}{\partial y}(s)y + \frac{\partial \psi_0}{\partial z}(s)z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y \partial z}(s)yz + \dots$$

Tästä havaitaan, että kukin yksittäinen termi voidaan lausua sauvateoriaa mukaellen muodossa $\psi(s, y, z) = \phi(s)\omega(y, z)$, jossa funktiot $\omega(y, z)$ otaksutaan tunnetuiksi. Näin menetellen siirtymävektorin derivaattojen lausekkeisiin (11) ja (12) tulee lisätermit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} &= \omega \frac{d\phi}{ds} \vec{e}_s + \omega \phi \frac{d\vec{e}_s}{ds} \\ &= \omega \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{e}_s - \frac{\omega \phi}{R_z} \vec{e}_y + \frac{\omega \phi}{R_y} \vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} &= \frac{\partial \omega}{\partial y} \phi \vec{e}_s, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} &= \frac{\partial \omega}{\partial z} \phi \vec{e}_s, \end{aligned} \tag{28}$$

Näistä seuraa edelleen muodonmuutosten lausekkeisiin (13) lisäykset

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= (\det \mathbf{J})^{-1} \left(\omega \frac{d\phi}{ds} - \frac{z}{T} \frac{\partial \omega}{\partial y} \phi + \frac{y}{T} \frac{\partial \omega}{\partial z} \phi \right) \\ \gamma_{ys} &= -(\det \mathbf{J})^{-1} \frac{\omega \phi}{R_z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \phi \\ \gamma_{zs} &= (\det \mathbf{J})^{-1} \frac{\omega \phi}{R_y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \phi \end{aligned} \tag{29}$$

Sijoittamalla nämä sisäisen virtuaalisen työn lausekkeeseen (18) saadaan tuloksena

$$\begin{aligned} \delta W^s &= - \int_s \int_A \left\{ \sigma_s \left[\omega \frac{d\phi}{ds} - \left(\frac{z}{T} \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta \phi - \frac{y}{T} \frac{\partial \omega}{\partial z} \delta \phi \right) \right] - \frac{\tau_{ys}}{R_z} \omega \delta \phi + \frac{\tau_{zs}}{R_y} \omega \delta \phi \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{y}{R_z} - \frac{z}{R_y} \right) \left(\tau_{ys} \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta \phi + \tau_{zs} \frac{\partial \omega}{\partial z} \delta \phi \right) \right\} dA ds. \end{aligned} \tag{30}$$

Suoritetaan yhden kerran osittaisintegrointi siinä termissä, jossa esiintyy virtuaalisen siirtymäfunktion $\delta\phi$ derivaatta, soveltaen osittaisintegrointikaavaa (15). Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \delta W^s = & - \int_s \int_A \left[-\frac{\partial \sigma_s}{\partial s} \omega + \tau_{ys} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tau_{zs} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\sigma_s}{T} \left(z \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right. \\ & - \frac{1}{R_z} \left(\tau_{ys} \left(\omega - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \tau_{zs} y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \\ & \left. + \frac{1}{R_y} \left(\tau_{zs} \left(\omega - z \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \tau_{ys} z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] dA \delta\phi ds - \left[\int_A \sigma_s \omega dA \delta\phi \right]_0^\ell. \end{aligned} \quad (31)$$

Määrittelemällä voimaresultantit

$$\begin{aligned} B_s &= \int_A \sigma_s \omega dA, \\ Q_{yz} &= \int_A \left(\tau_{ys} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tau_{zs} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA, \\ M_{ss} &= \int_A \left(\sigma_s \left(z \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right) dA, \\ M_{yy} &= \int_A \left(\tau_{ys} \left(\omega - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \tau_{zs} y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA, \\ M_{zz} &= \int_A \left(\tau_{zs} \left(\omega - z \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \tau_{ys} z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA, \end{aligned} \quad (32)$$

tämä sieventyy vielä muotoon

$$\delta W^s = - \int_s \left(-\frac{dB_s}{ds} + Q_{yz} - \frac{M_{ss}}{T} - \frac{M_{yy}}{R_z} + \frac{M_{zz}}{R_y} \right) \delta\phi ds - \left[B_s \delta\phi \right]_0^\ell. \quad (33)$$

Vastaava ulkoisen virtuaalisen työn saama lisäys on

$$\delta W^u = \int_s \int_A f_s \omega (\det \mathbf{J}) dA \delta\phi ds + \int_{A_t} t_s \omega dA \delta\phi. \quad (34)$$

Ulkoisten voimaresultanttien

$$b_s = \int_A f_s \omega (\det \mathbf{J}) dA, \quad B_{s_o} = \int_{A_t} \omega t_s n_s dA, \quad (35)$$

avulla lauseke (34) saa muodon

$$\delta W^u = \int_s b_s \delta\phi ds + \left[B_{s_o} \delta\phi \right]_0^\ell, \quad (36)$$

ja virtuaalisen työn periaattetta (17) käyttäen päädytään tasapainoyhtälöön

$$\frac{dB_s}{ds} - Q_{yz} + \frac{M_{ss}}{T} + \frac{M_{yy}}{R_z} - \frac{M_{zz}}{R_y} + b_s = 0, \quad (37)$$

sekä reunaehtoihin

$$-B_s + B_{s_0} = 0, \quad \text{kun } s = s_t, \quad \forall \quad \delta\omega = \omega - \bar{\omega} = 0, \quad \text{kun } s = s_u, \quad (38)$$

sauvan päissä.

Tarkastellaan **ensimmäisenä esimerkkinä** St. Venantin tai Prandtlin vapaan väännön teoriaa. Tällöin otaksutaan, että $v = w = \theta_y = \theta_z \equiv 0$ ja lisäksi u on vakio s -koordinaatin suhteen. Tästä seuraa, että $\epsilon_s \equiv 0$. Oletukset ovat realistisia ainoastaan suoran sauvan tapauksessa, jolloin $\det \mathbf{J} = 1$ ja $1/R_y = 1/R_z = 0$. Myös termi $1/T$ häviää, koska koordinaattiviivojen y ja z voidaan edellyttää säilyttävän suuntansa.

$$\text{Koska } \epsilon_s = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = 0 \Rightarrow \phi(s) = \phi_0 \text{ vakio.}$$

Tällöin oleelliset muodonmuutoskomponentit lausekkeista (13) ja (29) ovat

$$\begin{aligned} \gamma_{ys} &= -z \frac{d\theta_s}{ds} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \phi_0, \\ \gamma_{zs} &= y \frac{d\theta_s}{ds} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \phi_0. \end{aligned}$$

Perinteisesti poikkileikkaustason käyritysmäfunktiota pidetään tuntemattomana funktiona ja variointi suoritetaan myös sen suhteen. Näin saadaan sisäisen virtuaalisen työn lausekkeeksi

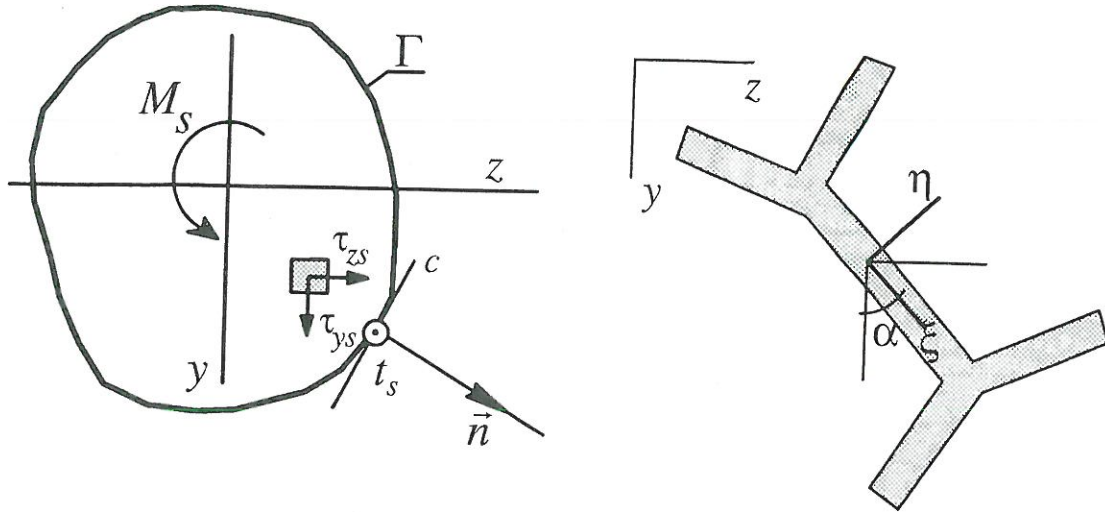
$$\begin{aligned} \delta W^s &= - \int_s \int_A \left[-\tau_{ys} z \frac{d\delta\theta_s}{ds} + \tau_{zs} y \frac{d\delta\theta_s}{ds} + \left(\tau_{ys} \frac{\partial\delta\omega}{\partial y} + \tau_{zs} \frac{\partial\delta\omega}{\partial z} \right) \phi_0 \right] dA ds \\ &= - \int_s M_s \frac{d\delta\theta_s}{ds} ds - \phi_0 \ell \int_A \left(\tau_{ys} \frac{\partial\delta\omega}{\partial y} + \tau_{zs} \frac{\partial\delta\omega}{\partial z} \right) dA. \end{aligned}$$

Vääntömomenttiresultantti M_s on määritelty yhtälöissä (19). Jälkimmäisessä termissä on suoritettu integrointi sauvan aksiaalisessa suunnassa. Suorittamalla yhden kerran osittaisintegrointi, viivaintegraalissa kaavaa (15) ja pintaintegraalissa kaavaa (16) käyttäen, saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \delta W^s &= \int_s \frac{dM_s}{ds} \delta\theta_s ds - \left[M_s \delta\theta_s \right]_0^\ell \\ &\quad + \phi_0 \ell \int_A \left(\frac{\partial\tau_{ys}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zs}}{\partial z} \right) \delta\omega dA - \phi_0 \ell \oint_{\Gamma} \underbrace{(\tau_{ys} n_y + \tau_{zs} n_z)}_{= t_s} \delta\omega dc. \end{aligned}$$

Reunaintegraalissa termi t_s edustaa reunaviivalla sauvan akselin suuntaista jännityskomponenttia, kuva 4a. Ulkoinen virtuaalinen työ on vastaavasti

$$\begin{aligned} \delta W^u &= \int_s \int_A (f_s \phi_0 \delta\omega - f_y z \delta\theta_s + f_z y \delta\theta_s) dA ds - \int_{A_t} (t_y z \delta\theta_s - t_z y \delta\theta_s) dA \\ &= \int_s m_s \delta\theta_s ds + \phi_0 \ell \int_A f_s \delta\omega dA + \left[M_{s_0} \delta\theta_s \right]_0^\ell. \end{aligned}$$



Kuva 4. a) Saint Venantin vääntösauvan, b) Vlasovin ohutseinämäisen sauvan poikkileikkaus.

Ulkoiset kuormaresultantit on määritelty yhtälöissä (22) ja (23). Lisäksi on huomattava, että sauvan päissä $t_s = 0$, koska normaalijännitys häviää kaikkialla. Sijoittamalla sisäisten ja ulkoisten virtuaalisten töiden lausekkeet virtuaalisen työn periaatteen yhtäöön (17) saadaan tasapainoehdoiksi

$$\begin{aligned} \frac{dM_s}{ds} + m_s &= 0, \text{ sauvan akselilla.} \\ \frac{\partial \tau_{ys}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial z} + f_s &= 0, \text{ poikkileikkaustasoissa.} \end{aligned}$$

Problemaan liittyvät reunaehdot ovat

$$\begin{aligned} -M_s + M_{s_0} &= 0, & \forall \delta\theta_s = \theta_s - \bar{\theta}_s &= 0, & \text{ sauvan päissä ja} \\ t_s &= 0, & \forall \delta\omega = \omega - \bar{\omega} &= 0, & \text{ vaippapinnalla.} \end{aligned}$$

Toisena esimerkkinä on Vlasovin ohutseinämäisten suorien sauvojen vääntöteoria. Sauvan otaksutaan koostuvan suorista levyistä, jotka liittyvät yhteen akselin suuntaisilla solmulinjoilla. Tällöin poikkileikkaus on kuvan 4b mukainen suorista osista koostuva. Puhtaan väännön kyseessä ollessa voidaan valita $\theta_y = \theta_z \equiv 0$. Koska ohutseinämäisillä sauvoilla poikkileikkauksen leikkauskeskiö harvoin yhtyy valittuun origoon, määritellään rotaatio leikkaus- eli vääntökeskiön suhteen

$$\vec{u} = \vec{\theta} \times (\vec{r} - \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} \vec{e}_s & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \theta_s & 0 & 0 \\ 0 & y - y_v & z - z_v \end{vmatrix} = -(z - z_v)\theta_s \vec{e}_y + (y - y_v)\theta_s \vec{e}_z,$$

Siirtymävektori on

$$\vec{u} = \omega \phi \vec{e}_s - (z - z_v)\theta_s \vec{e}_y + (y - y_v)\theta_s \vec{e}_z,$$

ja muodonmuutokset voidaan koota lausekkeista (13) ja (29)

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= \omega \frac{d\phi}{ds}, \\ \gamma_{ys} &= -(z - z_v) \frac{d\theta_s}{ds} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \phi, \\ \gamma_{zs} &= (y - y_v) \frac{d\theta_s}{ds} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \phi.\end{aligned}$$

Tarkastelu on suoritettava kussakin poikkileikkauksen osassa erikseen. Tätä varten on määritettävä muodonmuutosten $\gamma_{\xi s}$ ja $\gamma_{\eta s}$ lausekkeet, kuva 4b. Ottamalla huomioon, että

$$\begin{aligned}y &= y_o + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ z &= z_o + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,\end{aligned}$$

joissa y_o, z_o ovat ξ, η -koordinaattijärjestelmän origon koordinaatit, saadaan suoraan määritelmiä (7) soveltamalla

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi s} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \cdot \vec{e}_s + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot \vec{e}_\xi = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cdot \vec{e}_s + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot (\cos \alpha \vec{e}_y + \sin \alpha \vec{e}_z) \\ &= \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \vec{e}_s + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot \vec{e}_y \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_s + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot \vec{e}_z \right) \sin \alpha = \gamma_{ys} \cos \alpha + \gamma_{zs} \sin \alpha.\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\gamma_{\eta s} = -\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \vec{e}_s + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot \vec{e}_y \right) \sin \alpha + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_s + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot \vec{e}_z \right) \cos \alpha = -\gamma_{ys} \sin \alpha + \gamma_{zs} \cos \alpha.$$

Sijoittamalla näihin leikkausmuodonmuutosten γ_{ys} ja γ_{zs} lausekkeet edeltä saadaan

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi s} &= \frac{\partial\omega}{\partial \xi} \phi - [(z_o - z_v) \cos \alpha - (y_o - y_v) \sin \alpha] \frac{d\theta_s}{ds} - \eta \frac{d\theta_s}{ds}, \\ \gamma_{\eta s} &= \frac{\partial\omega}{\partial \eta} \phi + [(z_o - z_v) \sin \alpha + (y_o - y_v) \cos \alpha] \frac{d\theta_s}{ds} + \xi \frac{d\theta_s}{ds}.\end{aligned}$$

Vlasov otaksui, että poikkileikkauksen seinämän normaalit pysyvät kohtisuorassa seinämän keskipintaa vastaan, jolloin leikkausmuodonmuutos $\gamma_{\eta s} \equiv 0$. Tämä ehto toteutuu, kun

$$\phi(s) = -\frac{d\theta_s}{ds}(s),$$

ja kun funktio ω toteuttaa lisäksi differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial\omega}{\partial \eta} = (z_o - z_v) \sin \alpha + (y_o - y_v) \cos \alpha + \xi.$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$\omega = [(z_o - z_v) \sin \alpha + (y_o - y_v) \cos \alpha] \eta + \eta \xi + g(\xi),$$

jossa $g(\xi)$ on jokin ξ :stä riippuva funktio. Vlasov otaksui edelleen, että leikkausmuodonmuutos $\gamma_{\xi s}$ häviää seinämän keskipinnalla. Sijoittamalla saatu ω -funktio vastaavaan leikkausmuodonmuutoksen lausekkeeseen saadaan

$$\gamma_{\xi s} = \left(-\eta - \frac{dg(\xi)}{d\xi} - [(z_o - z_v) \cos \alpha - (y_o - y_v) \sin \alpha] - \eta\right) \frac{d\theta_s}{ds}.$$

Tämä puolestaan häviää seinämän keskipinnalla, jos

$$g(\xi) = -[(z_o - z_v) \cos \alpha - (y_o - y_v) \sin \alpha] \xi + u_o.$$

u_o on integroimisvakio, joka edustaa ξ, η -järjestelmän origon siirtymää sauvan akselin suunnassa. Se voidaan määrittää erilaisilla normeerauksilla tai esimerkiksi sektorიაalisen koordinaatin jatkuvuusehdosta; oletetaan tässä yhteydessä, että $u_o = 0$. Tällöin ω :n lauseke saadaan muotoon

$$\omega(y, z) = (z_o - z_v)(\eta \sin \alpha - \xi \cos \alpha) + (y_o - y_v)(\eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha) + \eta \xi.$$

Tämä voidaan edelleen esittää muodossa

$$\omega(y, z) = -(z - z_v)(y - y_o) + (y - y_v)(z - z_o) + \eta[(y - y_o) \cos \alpha + (z - z_o) \sin \alpha].$$

Määritellään lisäksi sauvan poikkileikkauksessa seinämän keskilinjalla koordinaatit $\bar{y}(\xi), \bar{z}(\xi)$, jotka itseasiassa ovat vastaavat koordinaatit, joista on vähennetty pois η :sta riippuva osa, toisin sanoen

$$\begin{aligned}\bar{y}(\xi) &= y + \eta \sin \alpha, \\ \bar{z}(\xi) &= z - \eta \cos \alpha.\end{aligned}$$

Näin ω :n lauseke saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\omega(y, z) &= -(\bar{z} - z_v)(\bar{y} - y_o) + (\bar{y} - y_v)(\bar{z} - z_o) + \eta[(\bar{y} - y_v) \cos \alpha + (\bar{z} - z_v) \sin \alpha] \\ &= \bar{\omega}(\xi) + \eta[(\bar{y} - y_v) \cos \alpha + (\bar{z} - z_v) \sin \alpha].\end{aligned}$$

Suure

$$\bar{\omega}(\xi) = -(\bar{z} - z_v)(\bar{y} - y_o) + (\bar{y} - y_v)(\bar{z} - z_o),$$

joka on määritelty vain poikkileikkauksen seinämän keskilinjalla, on suoraviivaisista osista koostuvan poikkileikkauksen sektorიაalinen koordinaatti. Lopulliset muodonmuutosten lausekkeet ovat

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= -\left(\bar{\omega}(\xi) + \eta[(\bar{y} - y_v) \cos \alpha + (\bar{z} - z_v) \sin \alpha]\right) \frac{d^2\theta_s}{ds^2}, \\ \gamma_{\xi s} &= -2\eta \frac{d\theta_s}{ds}.\end{aligned}$$

Leikkausmuodonmuutoksen $\gamma_{\xi s}$ lausekkeeseen jää siis jäljelle vain keskilinjalla häviävä termi. Sisäisen virtuaalisen työn lausekkeeksi saadaan, edellänainittujen

rajoitteiden vallitessa, soveltamalla yksidimensioista osittaisintegrointia (15) lausekke

$$\begin{aligned}\delta W^s &= - \int_s \int_A \left(-\sigma_s \omega \frac{d^2 \delta \theta_s}{ds^2} - 2\eta \tau_{\xi s} \frac{d\delta \theta_s}{ds} \right) dA ds = - \int_s \left(-B_s \frac{d^2 \delta \theta_s}{ds^2} + M_t \frac{d\delta \theta_s}{ds} \right) ds \\ &= - \int_s \left(-\frac{dB_s}{ds} - \frac{dM_t}{ds} \right) \delta \theta_s ds - \left[-B_s \frac{d\delta \theta_s}{ds} + \frac{dB_s}{ds} \delta \theta_s + M_t \delta \theta_s \right]_0^\ell.\end{aligned}$$

Voimaresultantti B_s on esitetty yhtälöissä (32). Vastaavasti M_t on

$$M_t = \int_A -2\eta \tau_{\xi s} dA.$$

Ulkoisen virtuaalisen työn lausekkeeksi saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned}\delta W^u &= \int_s \int_A \left(-f_s \omega \frac{d\delta \theta_s}{ds} - f_y(z - z_v) \delta \theta_s + f_z(y - y_v) \delta \theta_s \right) dA ds \\ &+ \int_{A_t} \left(-t_s \omega \frac{d\delta \theta_s}{ds} - t_y(z - z_v) \delta \theta_s + t_z(y - y_v) \delta \theta_s \right) dA \\ &= \int_s \left(\frac{db_s}{ds} + m_s \right) \delta \theta_s ds + \left[-B_{s_0} \frac{d\delta \theta_s}{ds} + (M_{s_0} - b_s) \delta \theta_s \right]_0^\ell.\end{aligned}$$

Voimaresultantit on määritelty kaavoissa (22), (23) ja (35). Näin saadaan sauvan tasapainoehdoksi

$$\frac{d^2 B_s}{ds^2} + \frac{dM_t}{ds} + \frac{db_s}{ds} + m_s = 0,$$

ja reunaehdoiksi

$$\left. \begin{aligned} B_s - B_{s_0} &= 0, \\ -\frac{dB_s}{ds} - M_t + M_{s_0} - b_s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \vee \quad \left. \begin{aligned} \frac{d\delta \theta_s}{ds} &= \frac{d\theta_s}{ds} - \frac{d\bar{\theta}_s}{ds} = 0, \\ \delta \theta_s &= \theta_s - \bar{\theta}_s = 0. \end{aligned} \right\}$$

YHTEENVETO

Artikkelisarjassa selvitetään lähinnä opetustarkoitusta silmällä pitäen erilaisen perusrakennetyyppien analysointia. Rakenteiden muodonmuutoksia tutkitaan käyttämällä hyväksi paikallista suoraviivaista ortogonaalista koordinaattijärjestelmää. Tasapainoyhtälöt johdetaan soveltamalla virtuaalisen työn periaatetta. Läpi koko artikkelisarjan virtuaaliset siirtymät on valittu otaksuttujen todellisten siirtymien variaatioiksi. Näin menetellään alan kirjallisuudessa useimmiten, mutta se ei suinkaan ole välttämätöntä. Virtuaaliseksi siirtymätilaksi voitaisiin aivan yhtä hyvin valita esimerkiksi jäykän kappaleen siirtymät ja johtaa niiden avulla tavanomaiset jännitysresultanteja koskevat tasapainoyhtälöt.

Valitun menettelytavan etuna on systemaattisuus, jonka avulla monimutkaisetkin tarkastelut voidaan suorittaa periaatteessa hyvin yksinkertaisesti, ainoastaan perusmatematiikan alkeisiin tukeutuvia laskentamenetelmiä käyttämällä. On

haluttu myös korostaa rakenteen kinematiikan merkitystä eri rakennetyyppien analysoinnissa. Kinematiikan kiinnittämisen jälkeen laskentaprosessi on periaatteessa aivan sama kaikilla rakennetyypeillä.

KIRJALLISUUSREFERAATIT

FLÜGGE W. (1972), Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer-Verlag, New York.

LOVE A.E.H. (1944), A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4.edition, Dover Publications, New York.

NOVOZHILOV V.V. (1953), Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. Graylock Press, Rochester, N.Y.

ODEN J.T. (1967), Mechanics of Elastic Structures. McGraw-Hill.

PAAVOLA J. and SALONEN E.-M. (1991), Use of Local Rectangular Coordinates in Various Structural Analyses, in "Proceedings of the 4th Finnish Mechanics Days", E. Niemi (Ed.), Lappeenranta, ss. 369-376.

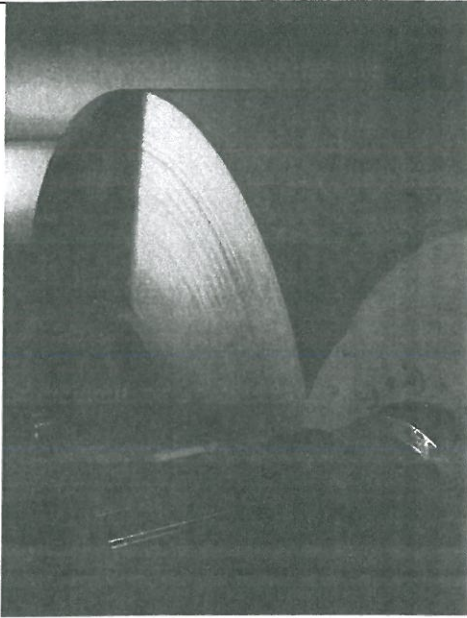
PAAVOLA J. and SALONEN E.-M. (1992), Muodonmuutokset ja kiinteät paikalliset karteesiset koordinaatit, Rakenteiden Mekaniikka, 24, No 3, ss. 38-55.

WASHIZU K. (1975), Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2.painos, Pergamon Press Ltd., London.

VLASOV V.Z. (1963), Thin-Walled Elastic Beams. Israel Program for Scientific Translations, Israel.

VÄISÄLÄ K. (1975), Vektorianalyysi. 6.painos, WSOY, Helsinki.

Juha Paavola, rakenteiden mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu, Eero-Matti Salonen, mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu.



Innovaatioita muutenkin kuin paperilla.

Valmet-konserni on maailman johtavia paperinvalmistusteknologian ja prosessiteollisuuden automaattoratkaisujen toimittajia. Konserni valmistaa myös kuljetustekniikkaa vaativaan käyttöön.

Valmet jalostaa innovaatioista asiakkaansa toimintaa edistäviä huipputuotteita. Innovaatiot auttavat asiakasta vasta, kun ne on sovellettu käytännön ratkaisuiksi. Kun niistä tulee parannuksia prosesseihin ja toimintoihin. Siksi Valmet-laatua ei mitata suunnittelupöydällä, vaan asiakkaidemme prosesseissa.

 **VALMET**

Valmet Oy, Konsernijohto, Panuntie 6, PL 27, 00621 Helsinki. Puhelin (90) 777 051, telefax (90) 77705 580.