# JÄNNITYSTILAN MÄÄRITTÄMINEN LEVYSSÄ OLEVAN REIÄN YMPÄRILLÄ

**Kaj Riska**

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 30
Nro 2, 1997, s. 31-39

## JOHDANTO

Levyssä oleva reikä muuttaa sen jännitystilaa paikallisesti aiheuttaen jännityshuipun. Reiällisen levyn jännitystila voidaan nykyisin varsin tarkasti laskea numeerisilla menetelmillä. Tässä artikkelissa tarkastellaan kuitenkin analyyttistä menetelmää ratkaista reiällisen levyn jännitystila yleiselle reiän muodolle isotrooppisen materiaalin tapauksessa. Tarkastelu rajoitetaan tasotapaukseen. Menetelmä perustuu kompleksifunktioiden teorian soveltamiseen kimmoteoriassa, jota on laajasti esitetty lähteissä Sokolnikoff (1956) ja Muskhelishvili (1953). Tätä teoriaa on Savin (1961) soveltanut jännitystilan ratkaisemiseen reikien ympärillä.

Tämän artikkelin tarkoituksena on esittää teoria jännitysten laskemiseksi. Tarkoituksena on laatia jatkoartikkeli, jossa sovelletaan teoriaa jännitystilan ratkaisemiseen nelikulmaisten reikien ympärillä anisotrooppisessa materiaalissa. Tämän tapauksen ratkaisua ei ole esitetty ym. lähteissä.

## PERUSYHTÄLÖT

Tarkastellaan siis jännityksiä xy-tasossa ja oletetaan että tilavuusvoimia ei ole. Tällöin tasapainoyhtälöt tasotapauksessa ($\varepsilon_z=0$ tai $\sigma_z=0$, $\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$, $\varepsilon_x \neq f(z)$ ja $\varepsilon_y \neq f(z)$) jännityskomponenteille ovat

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0. \qquad (1)$$

Ratkaisua varten tarvitaan vielä kompatibiliteettiyhtälö, joka lausuttuna venymien avulla on

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

sekä venymien ja jännitysten yhteys

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{E}(1+\nu)\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{3}$$

Jos reunakuorma tunnetaan tarkasteltavan alueen S reunalla L, niin reunaehdot tehtävälle ovat

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(\boldsymbol{n},x) + \tau_{xy}\cos(\boldsymbol{n},y) &= X \\ \tau_{xy}\cos(\boldsymbol{n},x) + \sigma_y \cos(\boldsymbol{n},y) &= Y. \end{aligned} \tag{4}$$

jossa X ja Y ovat reunakuorman komponentit x- ja y-suunnille, $\mathbf{n}$ on reunan ulkonormaali reunapisteessä (x,y). Tasapainoyhtälöt (1) voidaan toteuttaa identtisesti, jos valitaan nk. jännitysfunktio U(x,y), joka toteuttaa seuraavat yhtälöt

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y}. \tag{5}$$

Jos sijoitetaan yhtälöt (5) yhtälöihin (2) ja (3) todetaan, että jännitysfunktio toteuttaa biharmonisen yhtälön

$$\nabla^4 U(x,y) = 0, \tag{6}$$

missä $\nabla$ on Laplacen operaattori.

Reunaehdot jännitysfunktiolle saadaan, kun todetaan ensin, että

$$\cos(\boldsymbol{n},x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\boldsymbol{n},y) = -\frac{dx}{ds},$$

jossa s on pisteen (x,y) koordinaatti reunakäyrää L pitkin mielivaltaisesta pisteestä alkaen. Nyt yhtälöstä (4) seuraa

$$X = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$Y = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}(\frac{\partial U}{\partial x}),$$

ja reunaehdot ovat reunalla L funktiolle U(x,y) ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -\int_0^s Y ds \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \int_0^s X ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Alueelle S, jonka reuna L on, tehtiin edellä säännöllisyysoletuksia, joiden tarkastelussa viitataan alkuperäisiin lähteisiin.

## REUNAEHTOTEHTÄVÄN RATKAISU

Tehtävänä on siis ratkaista yhtälö (6) alueessa S kun reunaehdot alueen reunalla L ovat yhtälöiden (7) mukaiset. Jos merkitään $\nabla^2 U(x,y) = P_1(x,y)$, niin yhtälön (6) mukaan funktio $P_1(x,y)$ on harmoninen. Tällöin voimme konstruoida analyyttisen funktion F(z)

$$F(z) = P_1(x,y) + iP_2(x,y),$$

jossa i on imaginaariyksikkö ja $P_2(x,y)$ on $P_1(x,y)$:n harmoninen konjugaattifunktio (z=x+iy). Konjugaattifunktio voidaan konstruoida kaikkien analyyttisten funktioiden toteuttamien Cauchy-Riemann yhtälöiden avulla. Määritellään nyt funktio $\phi_1(z)$ seuraavasti

$$\phi_1(z) = \frac{1}{4}\int F(z)dz = p_1 + ip_2, \tag{8}$$

joka on analyyttinen, koska se on differentioituva ja siksi

$$\phi_1(z) = \frac{d\phi_1(z)}{dz} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + i\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{1}{4}(P_1(x,y) + iP_2(x,y)).$$

Koska $p_1$ ja $p_2$ ovat harmonisia alueessa S, niin tässä alueessa

$$\nabla^2(U - p_1 x - p_2 y) = 0.$$

Jännitysfunktiolla on siis alueessa S rakenne

$$U(x,y) = xp_1(x,y)+yp_2(x,y)+q_1(x,y),$$

jossa $q_1(x,y)$ on harmoninen alueessa S. Olkoon $q_2(x,y)$ funktion $q_1(x,y)$:n konjugaattifunktio ja merkitään

$$\chi_1(z) = q_1(x,y)+iq_2(x,y).$$

Tällöin on saatu määritettyä jännitysfunktio U(x,y) $\phi_1(z)$:n ja $\chi_1(z)$:n avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} U(x,y) &= Re[\bar{z}\phi_1(z)+\chi_1(z)] = \\ &= \frac{1}{2}[\bar{z}\phi_1(z)+z\bar{\phi}_1(z)+\chi_1(z)+\bar{\chi}_1(z)], \end{aligned} \tag{9}$$

missä Re tarkoittaa reaaliosaa ja yläviiva kompleksikonjugaattia. Funktioiden $\phi_1$ ja $\chi_1$ reunaehdot saadaan yhtälöstä (7) ja ne ovat seuraavat, kun alueen S reunalla jännitykset ovat tunnetut

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y} &= \phi_1(z)+z\overline{\phi_1'(z)}+\bar{\psi}_1(z) = i\int_0^s(X+iY)ds = \\ &= f_1(S)+if_2(s)+vakio, \quad z\in L. \end{aligned} \tag{10}$$

jossa on merkitty $\psi_1 = \chi_1$'ja $\phi'(z)=d\phi(z)/dz$.

Jännityskomponentit saadaan yhtälöistä (5) seuraavasti. Lasketaan ensin

$$\begin{aligned} \sigma_x+i\tau_{xy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = -i\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}) \\ \sigma_y-i\tau_{xy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}), \end{aligned}$$

joista seuraa

$$\begin{aligned} \sigma_x+i\tau_{xy} &= \phi_1'(z)+\overline{\phi_1'(z)}-z\overline{\phi_1''(z)}-\overline{\psi_1'(z)} \\ \sigma_y-i\tau_{xy} &= \phi_1'(z)+\overline{\phi_1'(z)}+z\overline{\phi_1''(z)}+\overline{\psi_1'(z)} \end{aligned}$$

ja sitten laskemalla nämä yhteen ja vähentämällä toisistaan saadaan lopulta kaavat, joista jännitystilan komponentit voidaan määrittää

$$\begin{aligned} \sigma_x+\sigma_y &= 2\phi_1'(z)+2\overline{\phi_1'(z)} = 4Re[\phi_1'(z)] \\ \sigma_x-\sigma_y+2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\psi_1''(z)+\psi_1'(z)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Tarkastellaan nyt aluetta S, josta on poistettu suljetun käyrän L ympäröimä alue. Ympäröiköön aluetta S käyrä $L_R$, joka siis sulkee sisäänsä myös reunakäyrän L. Kun käyrä $L_R \to \infty$ niin alueeksi S tulee koko taso, josta on leikattu pois reikä. Tällöin, jos voimaresultantti käyrällä L häviää, voidaan osoittaa (§72, Sokolnikoff, 1956 ja §36, Muskhelishvili 1953), että funktiot $\phi_1$ ja $\chi_1$ ovat muotoa

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= (B+iC)z+\phi_1^o(z) \\ \psi_1(z) &= (B_1+iC_1)z+\psi_1^o(z), \end{aligned} \tag{12}$$

jossa alueessa S analyyttiset funktiot voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \phi_1^o(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n' z^n \\ \psi_1^o(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n' z^n \end{aligned} \tag{13}$$

suurilla z:n arvoilla. Vakiot $a_0$', $b_0$' ja C eivät vaikuta jännitystilaan yhtälön (11) mukaan ja siis ne voidaan valita nolliksi. Yhtälön (12) vakiot voidaan määrittää jännitystilan perusteella alueen reunalla $L_R$. Olkoon jännitykset, kun $R \to \infty$ $\sigma_x=p$, $\sigma_y=q$ ja $\tau_{xy}=t$. Tällöin

$$B = \frac{1}{4}(p+q),\ B_1 = \frac{1}{2}(q-p)\ ja\ C_1 = t. \tag{14}$$

Asetetun tehtävän lopullinen ratkaisu saadaan muuttamalla reunaehto (10) parempaan muotoon. Tavoitteena on kuvata reunakäyrä L z-tasosta konformisesti yksikköympyrän kehälle $\sigma$ $\zeta$-tasoon ja käyttää Cauchy:n integraalilausetta (vrt. §4.2 Ahlfors 1966) hyväksi. Merkitään tarvittavaa konformikuvausta, joka siis kuvaa alueen S yksikköympyrän sisään

$$z = \omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\zeta^n, \tag{15}$$

ja merkitään lisäksi

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \phi_1[\omega(\zeta)] = \phi(\zeta) \\ \psi_1(z) &= \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta). \end{aligned}$$

Reunaehto (10) muuntuu kuvauksessa $\omega$ muotoon

$$\phi(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\phi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)} = f_1+if_2, \ |\zeta|=1. \tag{16}$$

Jännitystilan yhtälöt (11) muuntuvat muotoon

$$\begin{aligned} \sigma_\rho+\sigma_\theta &= 2[\Phi(\zeta)+\bar{\Phi}(\zeta)] \\ \sigma_\theta-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\theta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}[\bar{\omega}(\zeta)\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)], \end{aligned} \tag{17}$$

missä on merkitty

$$\Phi(\zeta) = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \ ja \ \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

Lisäksi ratkaisun perusmuoto (12) muuntuu muotoon

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= c\frac{B+iC}{\zeta}+\phi_o(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= c\frac{B_1+iC_1}{\zeta}+\psi_o(\zeta), \end{aligned} \tag{18}$$

missä funktioiden $\phi_o$ ja $\psi_o$ sarjakehitelmät ovat vastaavat kuin funktioiden $\phi_1^o$ ja $\psi_1^o$, yhtälö (13).

Sijoitetaan ratkaisu (18) reunaehtoon (16) jolloin saadaan $\phi_o$:lle ja $\psi_o$:lle muunnettu reunaehto, joka on samanlainen kuin (16); vain kuormitustermi yhtälön oikealla puolella on muuttunut muotoon ($\sigma$ on yksikköympyrän kehä)

$$f_1^o+if_2^o = f_1+if_2-\frac{Bc}{\sigma}+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}B\bar{c}\sigma^2-(B_1-iC_1)\bar{c}\sigma. \tag{19}$$

Ratkaistaan nyt funktiot $\phi_o$ ja $\psi_o$ ja merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $f^o=f_1^o+if_2^o$. Otetaan yhtälöstä (16) kompleksikonjugaatti ja kerrotaan se lausekkeella

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}, \ |\zeta|<1 \tag{20}$$

ja integroidaan pitkin yksikköympyrän kehää $\sigma$. Koska Cauchyn integraalilauseen mukaan on jokaiselle yksikköympyrässä analyyttiselle funktiolle F(z) on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{F(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma = F(\zeta), \ \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma = \overline{F(0)}$$

niin saamme ratkaisun funktiolle $\psi_o$ ($\phi_o(0)=0$)

$$\psi_o(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\overline{f^o}d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\phi_o'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{21}$$

Kerrotaan tämän kompleksikonjugaatti jälleen lausekkeella (20) ja käytetään jälkimmäistä Cauchyn integraalilauseen sovellutusta. Saadaan lopulta

$$\phi_o(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\frac{\overline{\phi_o'(\sigma)d\sigma}}{\sigma-\zeta} + \overline{\psi_o(\sigma)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f^o d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{22}$$

Jos kehitetään funktiot $\phi_o$ ja $\psi_o$ Laurentin sarjaksi (vrt. (13)) sekä lausutaan reunaehtojännitykset esim kompleksisena Fourier:n sarjana, niin vertaamalla samojen $\zeta$:n potenssien kertoimia saadaan em. Laurentin sarjojen kertoimet. Menettelystä on esitetty esimerkkejä lähteessä Sokolnikoff (1956), §84 ja §85.

## JÄNNITYSTILA REIÄN YMPÄRILLÄ

Yhtälöt (21) ja (22) eivät sovellu hyvin yleiseen tapaukseen, jossa reiättömän levyn jännitystila on mielivaltainen. Parempi menettely on lähteä reiättömän levyn jännitystilasta ja sitten laskea reiän aiheuttama muutos. Koska tarkastelu on lineaarinen, voimme superponoida reiättömän levyn sekä reiän aiheuttamat jännitystilat. Olkoon reiättömän levyn jännitysfunktio $U_0(x,y)$. Määritetään tätä jännitysfunktiota vastaavat funktiot $\phi^o$ ja $\chi^o$. Aluksi todetaan, että yhtälön (8) mukaan

$$\nabla^2 U_0(x,y) = 4Re[\phi^{o\prime}(z)].$$

Jos merkitään $\phi^{o\prime}(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ niin reaaliosa määritetään, kun tunnetaan jännitysfunktio $U_0(x,y)$, seuraavasti. Funktion $\phi^{o\prime}$ reaaliosa on edellisen yhtälön mukaan

$$P(x,y) = \frac{1}{4}\nabla^2 U_0(x,y). \tag{23}$$

Imaginääriosa $Q(x,y)$ saadaan Cauchy-Riemann ehdoista analyyttiselle funktiolle eli seuraavista yhtälöistä

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y},\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{24}$$

Näin saatu funktio $\phi^{o\prime}(z)$ on imaginääristä vakiota $iC_1$ ($C_1$ on reaalinen) vaille määrätty eli lopulta $\phi^o(z)$ on määrätty vakiota $iC_1+C_2$, $C_2$ kompleksinen, vaille. Nämä vakiot voidaan kuitenkin jännitystilaa muuttamatta valita nolliksi. Määritetään seuraavaksi funktio $\psi^o(z)=\chi^{o\prime}(z)$. Merkitään $\chi^o(z)=R(x,y)+iS(x,y)$, jolloin saamme yhtälöstä (9) reaaliosan

$$R(x,y) = U_0(x,y) - \frac{1}{2}[\bar{z}\phi^o(z) + \overline{z\phi^o(z)}] \tag{25}$$

ja imaginääriosa määritetään jälleen Cauchy-Riemann ehdoista (24). Tällöin funktio $\chi^o(z)$ on imaginääristä vakiota vaille määrätty. Tämäkin vakio voidaan valita nollaksi jännitystilaa muuttamatta.

Ratkaistaan sitten reiän jännitysfunktio. Koska reiän aiheuttamat jännitykset häviävät etäällä reiästä St. Venant:n periaatteen mukaan, ovat vakiot B, $B_1$ ja $C_1$ yhtälössä (18) nollia ja ratkaisu yksinkertaistuu, niinkuin tavoite olikin. Merkitään reiän aiheuttamia funktioita ja jännityksiä *:llä eli esim. jännitysfunktio on $U^*(x,y)$. Tällöin lineaarisuuden vuoksi ovat lopulliset funktiot seuraavat

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \phi^o(z) + \phi^*(z) \\ \psi_1(z) &= \psi^0(z) + \psi^*(z), \end{aligned} \tag{26}$$

jossa siis oikean puolen jälkimmäiset funktiot on määritettävä. Kuvataan tarkasteltava alue S (siis levy, josta on poistettu reikä, origo on reiän sisällä eli ei kuulu alueeseen S) konformisesti yksikköympyrän $\sigma$ sisään kuvauksella $\omega(\zeta)$. Tällöin yhtälöt (26) muuttuvat seuraaviksi yhtälöiksi

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \phi_1[\omega(\zeta)] = \\ &= \phi^0[\omega(\zeta)] + \phi^*[\omega(\zeta)] = \\ &= \phi^1(\zeta) + \phi_0(\zeta), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \psi_1[\omega(\zeta)] = \\ &= \psi^0[\omega(\zeta)] + \psi^*[\omega(\zeta)] = \\ &= \psi^1(\zeta) + \psi_0(\zeta), \end{aligned} \tag{28}$$

missä tuntemattomat funktiot $\phi_o(\zeta)$ ja $\psi_o(\zeta)$ esitetään ratkaisua varten Laurent:n sarjana (kuten edellä, $\phi_0(0)=0$)

$$\phi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^n, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \zeta^n. \tag{29}$$

Vakiot $\alpha_n$ ja $\beta_n$ voidaan määrittää modifioimalla yhtälöitä (21) ja (22). Sijoittamalla yhtälöt (26) (ottaen huomioon merkinnät (27) ja (28) sekä sarjakehitelmät (29)) reunaehtoon (10), kertomalla saatu reunaehto lausekkeella (20) sekä suorittamalla integrointi yksikköympyrän kehällä $\sigma$ saadaan lopulta yhtälöt funktioille $\phi_0$ ja $\psi_0$

$$\phi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi_0'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \bar{\beta}_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f^o d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{30}$$

$$\psi_0(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\overline{\phi_0'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\overline{f^o}d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{31}$$

missä funktio $f^o$ on johdettu reunaehto. Se on muotoa

$$f_1^o+if_2^o = f_1+if_2-[\phi^1(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\phi^{1\prime}(\sigma)}+\overline{\psi^1(\sigma)}].$$

Yhtälöistä (30) ja (31) voidaan laskea sarjojen (29) kertoimet vertaamalla $\zeta$:n potenssien kertoimia. Näin on saatu ratkaistua asetettu tehtävä.

Jos reiän reunat ovat kuormittamattomia ja levyn alkuperäinen jännitystila yksinkertainen, yhtälöistä (30) ja (31) on suhteellisen helppo ratkaista sarjakehitelmän (29) termit, koska reunaehtokin yksinkertaistuu paljon. Vaikeudeksi muodostuukin, ei lopullisen ratkaisun $\zeta$-tasossa muodostaminen, vaan vastinpisteiden etsiminen $\zeta$-tason ja z-tason välillä. Tämä vaatii konformikuvauksen $\omega(\zeta)$ käänteiskuvauksen $\zeta=\omega^{-1}(z)$ etsimistä. Tämä pitää tehdä numeerisesti.

## LOPUKSI

Edellä on esitetty teoria, mitä soveltaen voidaan laskea jännitystila isotrooppisessa levyssä sijaitsevan reiän ympärillä. Tavoitteena tässä artikkelissa on formuloida teoria siinä muodossa, että sen laajentaminen käsittämään anisotrooppisen levyn, on suoraviivaista. Vielä tämäkään teoria ei anna lopullista vastausta jännitystilan määrittämiseen; konformikuvaus, joka kuvaa reiällisen levyn yksikköympyrän sisään täytyy määrittää.

Esitetyn menetelmän etuna on, että jännitystila pyöreille tai elliptisille rei'ille saadaan suljetussa muodossa ratkaistua. Tällöin on helppo tutkia esimerkiksi käyristyssäteen vaikutusta jännitystilaan varioimalla ellipsin akseleiden suhdetta. Reiät, joissa on kulmia, kuvataan yksikköympyrälle käyttäen Schwarz-Christoffel integraalia. Tällöin sarjakehitelmässä (15) on periaatteessa äärettömän monta nollasta poikkeavaa termiä. Sarjan katkaisu aiheuttaa kulmien pyöristymisen ja tällä tavoin voidaan myös nurkkien pyöristämisen vaikutusta tutkia.

## LÄHTEET

*Ahlfors, L.V.* 1966: Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 317 s.

*Muskhelishvili, N.I.* 1953: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff Ltd, Groningen, Holland, 704 s.

*Savin, G.N.* 1961: Stress Concentration around Holes. Pergamon Press, Oxford, 430 s.

*Sokolnikoff, I.S.* 1956: Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 476 s.

*Kaj Riska* — *Arktisen laiva- ja meritekniikan professori*
*TEKNILLINEN KORKEAKOULU*
*Laivalaboratorio*