

LEIKKAUSMUODONMUUTOKSEN VAIKUTUS PILARIN NURJAHDUSKUORMAAN

Martti Mikkola ja Timo Leppänen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 30
Nro 2, 1997, s.17-30

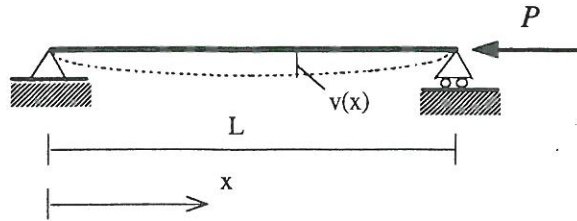
Tiivistelmä: Artikkelissa tarkastellaan leikkausmuodonmuutoksen vaikutusta suoran keskisesti puristetun pilarin nurjahduskuormaan Engesserin ja Haringxin teorioiden mukaan. Niiden antamat nurjahduskuormat eroavat erityisesti pienillä leikkausjäykkyyden arvoilla. Ero aiheutuu erilaisesta otaksumasta normaalivoiman suunnan suhteen nurjahtavassa sauvassa. Biot'n alkujännityksen alaisen aineen teorian perusteella johdetaan uusi nurjahdusyhtälö, jonka ennustama nurjahduskuorma osuu Engesserin ja Haringxin kuormien väliin.

JOHDANTO

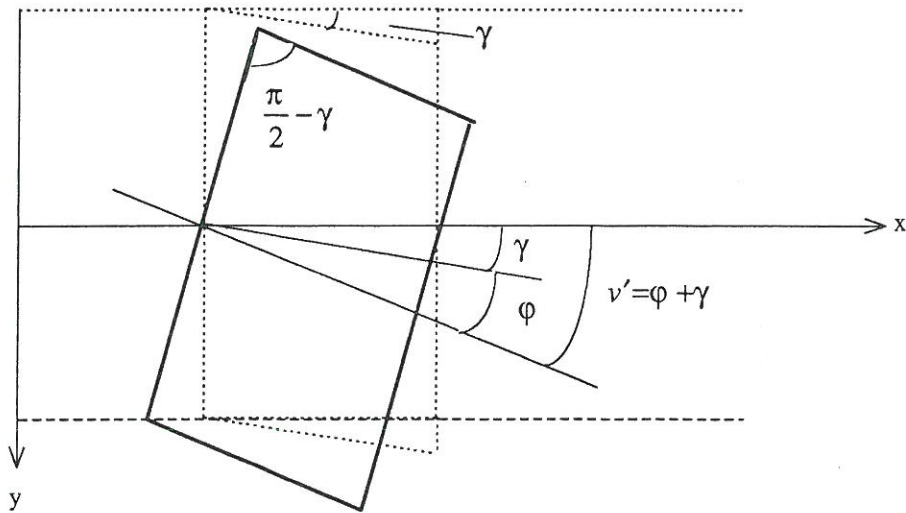
Leikkausmuodonmuutoksella on huomattava vaikutus pilarin nurjahduskuormaan yhdistetyissä pilareissa, sandwich-pilareissa, jousissa yms., joiden leikkausjäykkyys on suhteellisen pieni. Rakenteiden suunnittelijat käyttävät enimmäkseen Engesserin (1889, 1891) esittämää teoriaa, joka noudattaa Timoshenkon palkkiteoriaa. Konetekniikassa taas sovelletaan yleensä Haringxin (1942, 1948) johtamaa teoriaa, joka on paremmin sopuisuudessa lyhyille ja paksuille kierukkamaisille jousille tehtyjen koetulosten kanssa, ks. [7]. Suurilla leikkausjäykkyyden arvoilla Engesserin ja Haringxin nurjahduskuormat lähestyvät toisiaan ja Eulerin nurjahduskuormaa. Bazant [1] on vertaillut useita erilaisia stabiiliusformulointeja ja päätellyt niiden erojen johtuvan erilaisista otaksumista muodonmuutosten ja jännitys-venymäyhteyksien suhteen. Gjelsvik [3] on esittänyt artikkelissaan, että Engesserin ja Haringxin tulosten ero johtuu erilaisesta normaalivoiman suuntaa koskevasta otaksumasta nurjahtavassa pilarissa. Koska tällainen menettely tuntuu mielivaltaiselta, tässä artikkelissa yritetään etsiä muuta selitystä Engesserin ja Haringxin tuloksien välille. Lähtökohdaksi on valittu Biot'n teoria alkujännityksen alaiselle aineelle [2]. Se kuitenkin johtaa tulokseen, joka osuu Engesserin ja Haringxin tulosten välille.

ENGESSERIN JA HARINGXIN NURJAHDUSTEORIAT

Tarkastellaan molemmista päistä nivelöityä aksiaalisen kuorman P puristamaa pilaria, jonka pituus on L , taivutusjäykkyys EI ja leikkausjäykkyys K , (kuva 1). Pilarin kinematiikan kuvaamiseen käytetään Timoshenkon palkkiteoriaa. Sen mukaan akselin taipuma on $v(x)$ ja poikkipinnan kiertymä z -akselin ympäri $\varphi(x)$. Keskimääräinen leikkausmuodonmuutos eli liukuma γ on silloin (ks. kuva 2)



Kuva 1. Puristettu päistään nivelöity sauva.



Kuva 2. Timoshenkon palkkiteorian mukainen kinematiikan määrittely.

$$\gamma = v' - \varphi \quad (1)$$

Taivutusmomentin ja poikkipinnan kiertymän yhteys on tunnetusti

$$M = EI\kappa = -EI\varphi' \quad (2)$$

ja leikkausvoiman ja liukuman välinen yhteys

$$Q = K\gamma = K(v' - \varphi), \quad (3)$$

missä $K = \frac{GA}{\zeta}$ on palkin leikkausjäykkyys ja ζ poikkileikkauksen siirtymäkerroin.

Pilarin tasapainotarkastelun perusteella taivutusmomentille saadaan lauseke

$$M(x) = Pv(x) \quad (4)$$

Engesserin teorian mukainen yhtälö

Engesserin teorian mukaan leikkausvoima on taivutusmomentin derivaatta

$$Q_E = Pv' \quad (5)$$

Alaindeksi E viittaa Engesseriin ja vastaavasti H Haringxiin.

Sijoittamalla yhtälöön (4) taivutusmomentin lauseke (2) ja yhtälöön (5) leikkausvoiman lauseke (3) saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} -EI\varphi' &= Pv \\ K_E(v' - \varphi) &= Pv' \end{aligned} \quad (6)$$

Eliminoimalla näistä kiertymä φ voidaan kirjoittaa Engesserin teorian mukainen differentiaaliyhtälö

$$EIv'' + \frac{P}{1 - \frac{P}{K_E}} v = 0. \quad (7)$$

Molemmista päistä nivelöidyn pilarin tapauksessa saadaan siitä reunaehdoilla $v(0) = v(L) = 0$ ratkaisu

$$P_{cr} = \frac{P_e}{1 + \frac{P_e}{K_E}}, \quad (8)$$

missä

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (9)$$

on vastaavan pilarin Eulerin teorian mukainen nurjahduskuorma.

Haringxin teorian mukainen yhtälö

Haringxin teorian mukaan leikkausvoima määritellään seuraavasti

$$Q_H = P\varphi. \quad (10)$$

Yhdistämällä se lausekkeen (3) kanssa saadaan yhtälöparia (6) vastaavasti yhtälöt

$$\begin{aligned} -EI\varphi' &= Pv \\ K_E(v' - \varphi) &= P\varphi \end{aligned} \quad (11)$$

joista kiertymän φ eliminoimalla seuraa Haringxin differentiaaliyhtälö

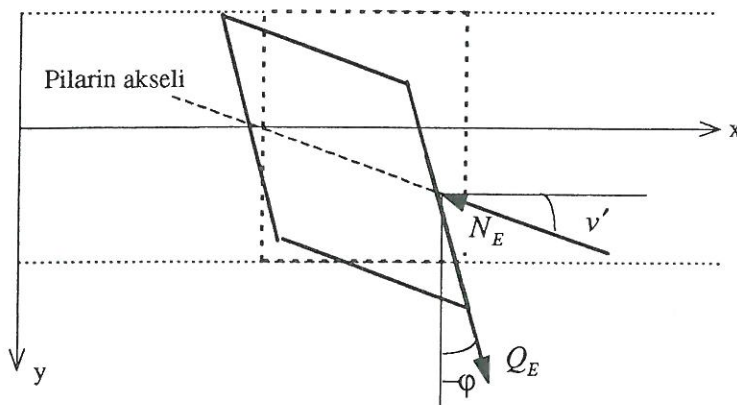
$$EIv'' + P\left(1 + \frac{P}{K_H}\right)v = 0. \quad (12)$$

Sen ratkaisu reunaehdoilla $v(0)=0$ ja $v(L)=0$ antaa kriittisen kuorman

$$P_{cr} = \frac{K_H}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4P_e}{K_H}} - 1 \right]. \quad (13)$$

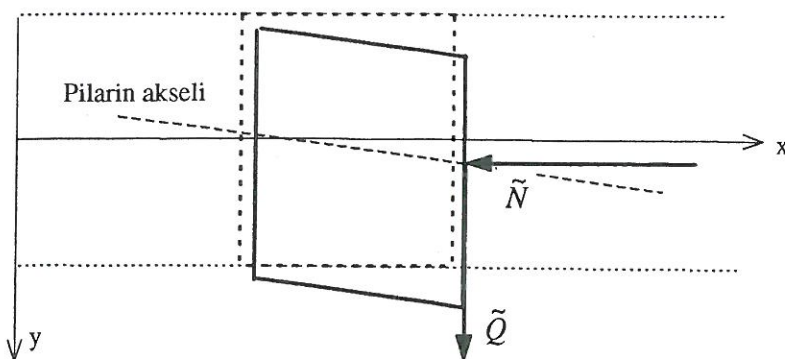
NORMAALIVOIMAN SUUNTA ENGESSEKIN JA HARINGKIN NURJAHDUKTEORIOISSA

Lähteiden [3] ja [4] mukaan oleellinen ero edellä kuvatuissa nurjahdusteorioissa koskee normaalivoiman suuntaa nurjahtavassa sauvassa. Engesserin teorian mukaan normaali- ja leikkausvoimien suunnat nurjahtaneessa pilarissa ovat kuvan 3 mukaiset.



Kuva 3. Normaalivoiman suunta nurjahtaneessa pilarissa Engesserin teorian mukaan .

Normaalivoima N_E ja leikkausvoima Q_E eivät siis pysy suorassa kulmassa toisiinsa nähden, kun pilari nurjahtaa, vaan normaalivoima säilyy pilarin akselin suuntaisena ja leikkausvoima poikkileikkaustason suuntaisena. (Itse asiassa leikkausvoiman tulisi olla kohtisuorassa sauvan akselia vastaan!). Määritellään lisäksi sisäiset voimasuureet \tilde{N} ja \tilde{Q} , jotka ovat kiinteiden koordinaattiakseleiden x ja y suuntaiset ja toisiinsa nähden kohtisuorassa kuvan 4 mukaisesti.



Kuva 4. Sisäiset voimasuureet \tilde{N} ja \tilde{Q} .

Jos sauvan siirtymät ovat pieniä, voidaan kirjoittaa seuraavat yhteydet edellä esitettyjen voimasuureiden välille

$$\tilde{N} = N_E + Q_E \varphi \quad (14)$$

ja

$$\tilde{Q} = Q_E - N_E v'. \quad (15)$$

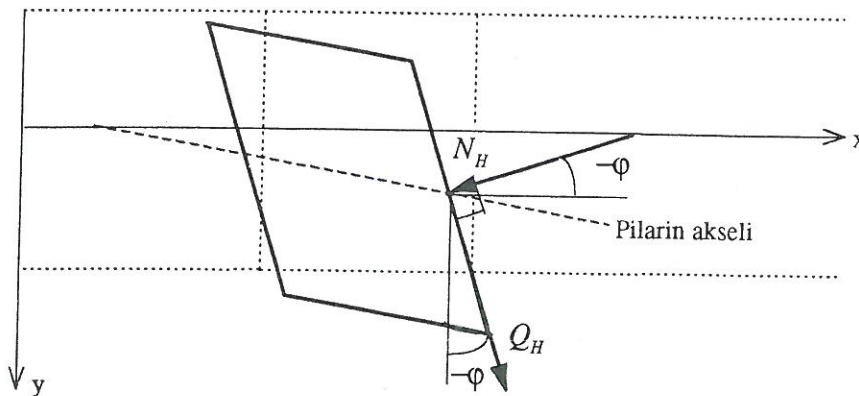
Koska leikkausvoima Q_E on pieni, se voidaan pudottaa pois lausekkeessa (14), jolloin saadaan tulos

$$\tilde{N} = N_E = P. \quad (16)$$

Kun tämä sijoitetaan lausekkeeseen (15) ja otetaan huomioon, että nivelöidyssä pilarissa $\tilde{Q} = 0$, saadaan Engesserin mukaisesti (vrt. kaava (5))

$$Q_E = P v'. \quad (17)$$

Haringxin tapauksessa tehdään kuvan 5 mukainen otaksuma, jonka mukaan normaali-voima N_H säilyy nurjahtaneen pilarin poikkileikkauksen normaalin suuntaisena ja että leikkausvoima Q_H pysyy poikkileikkauspinnan suuntaisena. N_H ja Q_H ovat siis kohtisuorassa toisiinsa nähden. Lisäksi on huomattava, että N_H ei ole pilarin akselin suuntainen.



Kuva 5. Normaali-voiman suunta nurjahtaneessa pilarissa Haringxin teorian mukaan.

Vastaavanlainen tarkastelu kuin edellä antaa seuraavat lausekkeet

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= N_H + Q_H \varphi = P \\ \tilde{Q} &= Q_H - N_H \varphi = Q_H - P \varphi \end{aligned} \quad (18)$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä (18) saadaan Haringxin mukainen yhteys (vrt. kaava (10))

$$Q_H = P\varphi . \quad (19)$$

YHTEYS ENGESSERIN JA HARINGXIN LAUSEKKEIDEN VÄLILLÄ

Lisätään Haringxin leikkausvoiman lausekkeen (19) oikealle puolelle Engesserin leikkausvoiman määrittelevä yhtälö (17) $Q_E - Pv' = 0$, jolloin lausekkeen arvo säilyy

$$Q_H = Q_E - Pv' + P\varphi \quad (20)$$

Ottamalla huomioon leikkausmuodonmuutoksen määritelmä (1) voidaan (20) panna muotoon

$$Q_H = Q_E + P(\varphi - v') = Q_E - P\gamma . \quad (21)$$

Lausumalla leikkausvoimat kummallakin puolella leikkausmuodonmuutoksen γ avulla päästään Gjelsvikin [3] esittämään yhtälöön

$$K_H = K_E - P \quad (22)$$

Sen mukaan Engesserin ja Haringxin nurjahdusteoriat antavat saman tuloksen, mikäli otetaan huomioon leikkausjäykkyyksien riippuvuus puristavasta voimasta. Selittämättä jää kuitenkin, miksi normaalivoimalle valitaan Haringxin teorian mukainen suunta.

ALKUJÄNNITYKSEN ALAISEN AINEEN YHTÄLÖITÄ

Tarkastellaan nurjahdusta ottamalla huomioon alkutilan puristusjännityksen vaikutus sauvan materiaalin käyttäytymiseen. Tarkastelu perustuu Maurice Biot'n teokseen 'Mechanics of incremental deformations' [2], jossa käsitellään mm. materiaalin konstitutiivisia yhtälöitä, tasapainoa ja muodonmuutoksia materiaalin ollessa tietyn alkujännitystilän alainen. Selostetaan aluksi Biot'n käyttämiä muodonmuutos- ja jännitystilojen määrittelyjä ja sen jälkeen niiden soveltamista stabiiliustarkasteluun.

Biot määrittää siirtymätilan peräkkäin tapahtuvien puhtaan muodonmuutoksen ja rotaation avulla, ts. hän käyttää muodonmuutosgradientin F polaarista hajoitelmaa

$$F = R.U \quad (23)$$

jossa R on kiertymätensori ja U oikeanpuoleinen venymistensori. Biot'n muodonmuutosmitta on symmetrinen tensori

$$E = U - I \quad (24)$$

Sen suhde Greenin-Lagrangen venymätensoriin Γ selviää yhteydestä

$$\Gamma = \frac{1}{2}(U^2 - I) = E + \frac{1}{2}E^2 \quad (25)$$

Venymäkomponentit voidaan lausua myös suureiden

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (26)$$

avulla. Edellä mainittujen suureiden ollessa pieniä ja ottamalla vain ensimmäistä ja toista kertalukua olevat termit mukaan saadaan Biot'n venymälle lauseke

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2}(e_{ik}\omega_{kj} + e_{jk}\omega_{ki}) + \frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{jk} \quad (27)$$

Toistuvan indeksin suhteen summataan 1:stä 3:een (ns. Einsteinin summaussääntö).

Jännitystilän tarkastelussa käytetään seuraavia merkintöjä:

- S_{ij} alkujännitykset
- s_{ij} venymistä aiheutuvat jännityskomponentit aineen mukana kiertyneiden akseleiden suunnille (kiertymätensori R)
- t'_{ij} venymistä ja alkujännityksistä aiheutuvat jännityskomponentit kiertyneiden akseleiden suunnille laskettuina alkutilan pinta-alaa kohti
- t_{ij} edellisen symmetrisoitu muoto

Kaksi viimeistä voidaan kirjoittaa muotoihin

$$\begin{aligned} T' &= JU^{-1} \cdot R^T \cdot \Sigma \cdot R \\ T &= \frac{1}{2}J(U^{-1} \cdot R^T \cdot \Sigma \cdot R + R^T \cdot \Sigma \cdot R \cdot U^{-1}) \end{aligned} \quad (28)$$

joista näkyy jännitystensorien T' ja T yhteys Cauchyn jännitykseen Σ . Jännitykset T ja venymät E ovat konjugaatteja siinä mielessä, että niiden tulo kuvaa jännitysten tekemää työtä venymien tapahtuessa tai jos aineella on venymäenergia, niin sen derivaatta venymän suhteen on vastaava T -komponentti. Kyseiset suureet, työ tai venymäenergia, lasketaan alkutilan tilavuutta kohti. Edellä mainittujen jännityssuureiden yhteydet ovat seuraavat. Havainnollisuuden vuoksi rajoitutaan kaksidimensioiseen jännitystilaan ja käytetään suorakulmaista xy -koordinaatistoa. Olkoon alkujännitystila S_{11} , $S_{12} = S_{21}$, S_{22} . Pienen muodonmuutoksen jälkeen, johon kuuluvat sekä rotaatio että venymä, jännitykset aineen mukana kiertyneiden akselien suunnissa ovat

$$s_{11} + S_{11}, s_{12} + S_{12}, s_{22} + S_{22} \quad (29)$$

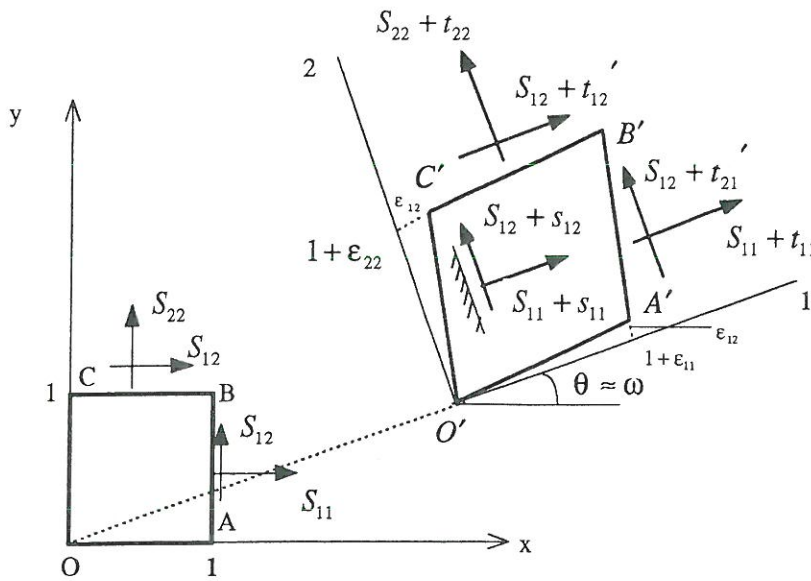
Jännitysten muutokset alkuperäisten akselien x ja y suunnissa ovat

$$s_{11} - 2S_{12}\omega, s_{12} + (S_{22} - S_{11})\omega, s_{22} + 2S_{12}\omega \quad (30)$$

T' -jännitykset ovat muotoa

$$\begin{aligned} t_{11} &= s_{11} + S_{11}\epsilon_{22} - S_{12}\epsilon_{12} \\ t'_{21} &= s_{12} + S_{12}\epsilon_{22} - S_{22}\epsilon_{12} \\ t'_{12} &= s_{12} + S_{12}\epsilon_{11} - S_{11}\epsilon_{12} \\ t_{22} &= s_{22} + S_{22}\epsilon_{11} - S_{12}\epsilon_{12} \end{aligned} \quad (31)$$

Kuva 6 selvittää venymien ja jännitysten merkitystä.



Kuva 6. Biot'n määrittelemät venymät ja jännitykset.

Virtuaalisen työn lauseke on kaksidimensioisessa tapauksessa ja käyttäen ensimmäisen kertaluvun approksimaatiota

$$\delta V = t_{11}\delta e_{xx} + t_{22}\delta e_{yy} + (t'_{12} + t'_{21})\delta e_{xy} + S_{11}\delta\epsilon_{11} + S_{22}\delta\epsilon_{22} + 2S_{12}\delta\epsilon_{12} \quad (32)$$

Ortotrooppiselle aineelle, jonka symmetriasuunnat yhtyvät koordinaattiakselien suuntiin, inkrementaalisten jännitysten ja venymien väliset yhteydet ovat

$$\begin{aligned}
s_{11} &= B_{11}e_{xx} + B_{12}e_{yy} \\
s_{22} &= B_{21}e_{xx} + B_{22}e_{yy} \\
s_{12} &= 2Q_3e_{xy}
\end{aligned}
\tag{33}$$

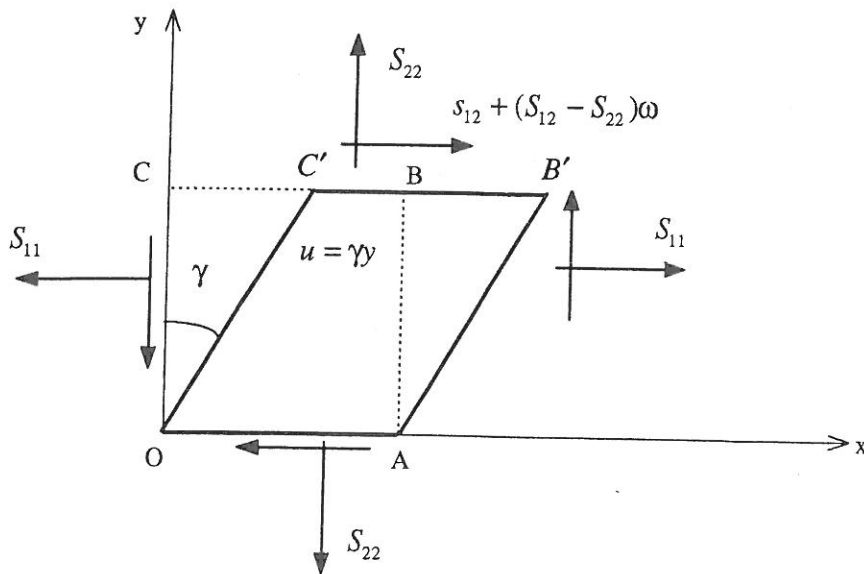
T-jännitysten ja venymien väliset yhteydet ovat vastaavasti

$$\begin{aligned}
t_{11} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} \\
t_{22} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} \\
t_{12} &= 2L_{12}e_{xy}
\end{aligned}
\tag{34}$$

B- ja C-kertoimien väliset yhteydet seuraavat s- ja t-jännitysten yhteyksistä (31).

Biot osoittaa, että liukukerroin L_{12} riippuu aineen alkujännityksistä. Tarkastelemalla pienen ainealkion leikkausmuodonmuutosta xy-tasossa (kuva 7) alkujännitystilan ollessa S_{11}, S_{22} , saadaan

$$\begin{aligned}
e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma \\
\omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \gamma
\end{aligned}
\tag{35}$$



Kuva 7. Leikkausmuodonmuutos alkujännityksen alaisessa aineessa.

Kaavan (30) mukaan liukuman aiheuttava leikkausjännitys on

$$s_{12} + (S_{11} - S_{22})\omega = s_{12} + \frac{1}{2}(S_{22} - S_{11})\gamma \quad (36)$$

Venymästä aiheutuva osuus on $s_{12} = 2Q_3 e_{xy} = Q_3 \gamma$, jossa Q_3 on alkujännityksettömän aineen leikkausmoduuli. Sijoittamalla tämä edellä olevaan seuraa tulos

$$L_{12} = Q_3 + \frac{1}{2}(S_{22} - S_{11}) \quad (37)$$

LEIKKAUSMUODONMUUTOKSEN HUOMIOONOTTAVA NURJAHDUSTEORIA

Tarkastellaan edelleen kuvan 1 mukaista pilaria. Merkitään keskistä puristavaa voimaa $P = pA = -S_{11}$. Nurjahdus tapahtuu xy -tasossa. Siirtymäotaksumat ovat Timoshenkon palkkiteorian mukaiset

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\varphi(x)y \\ v(x, y) &= v(x) \end{aligned} \quad (38)$$

Aksiaalinen translaatio on jätetty pois, koska se olisi joka tapauksessa nolla. Venymät ja kiertymä ovat

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -y\varphi' \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(v' - \varphi) \\ \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(v' + \varphi) \end{aligned} \quad (39)$$

Venymäenergian inkrementti on kaavojen (32) ja (27) mukaan

$$\Delta V = \frac{1}{2} t_{11} e_{xx} + t_{12} e_{xy} + S_{11} (e_{xy} \omega + \frac{1}{2} \omega^2) \quad (40)$$

jossa $t_{12} = s_{12} - \frac{1}{2} S_{11} e_{xy} = s_{12} + \frac{1}{2} p e_{xy}$ ja $t'_{12} = s_{12} - S_{11} \varepsilon_{12} = s_{12} + p e_{xy}$. Tästä seuraa edelleen

$$t_{12} = t'_{12} - \frac{1}{2} p e_{xy} \quad (41)$$

Venymäenergian inkrementti saa nyt muodon

$$\Delta V = \frac{1}{2} t_{11} e_{xx} + t'_{12} e_{xy} - \frac{1}{2} p (e_{xy} + \omega)^2 = \frac{1}{2} C_{11} e_{xx}^2 + 2L_{12} e_{xy}^2 - \frac{1}{2} p (v')^2 \quad (42)$$

jossa on käytetty jännitys-venymäyhteyksiä

$$t_{11} = C_{11}e_{xx}, \quad t'_{12} = 2L_{12}e_{xy}, \quad \text{jossa } L_{12} = Q_3 + \frac{1}{2}P \quad (43)$$

Koko sauvan venymäenergian inkrementti saadaan integroimalla sauvan tilavuuden yli

$$\Delta U = \int_0^L \int_A \Delta V dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI(\varphi')^2 + (K + \frac{1}{2}P)(v' - \varphi)^2 - P(v')^2 \right] dx \quad (44)$$

Jos aksiaalinen kuorma P pysyy vakiona nurjahduksen tapahtuessa, yllä oleva lauseke esittää kokonaispotentiaalienergian muutosta nurjahduksessa. Nurjahduskriteeri on

$$\delta \Delta U = 0 \quad (45)$$

josta seuraavat differentiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned} -EI\varphi' + (K + \frac{1}{2}P)\varphi - (K + \frac{1}{2}P)v' &= 0 \\ -(K + \frac{1}{2}P)\varphi' + (K - \frac{1}{2}P)v'' &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

ja reunaehdot nivelöidylle sauvalle

$$v(0) = v(L) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0 \quad (47)$$

Eliminoimalla φ päädytään differentiaaliyhtälöön

$$EIv'''' + P \frac{1 + P/2K}{1 - P/2K} v'' = 0 \quad (48)$$

reunaehdoin $v(0) = v(L) = v''(0) = v''(L) = 0$. Nimitetään yhtälöä (48) jatkossa Biot'n nurjahdusyhtälöksi. Yhtälön ratkaisu on tunnetusti muotoa

$$v(x) = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x + C_3 x + C_4, \quad \text{jossa } \kappa^2 = \frac{P}{EI} \frac{1 + P/2K}{1 - P/2K}$$

Reunaehtojen perusteella saadaan lopulta kriittiseksi kuormaksi

$$P_{cr} = K \left(1 + \frac{P_e}{2K} \right) \left[\sqrt{1 + 4 \frac{P_e/2K}{(1 + P_e/2K)^2}} - 1 \right] \quad (49)$$

jossa P_e on Eulerin nurjahduskuorma (9). Merkintää $\alpha = \sqrt{P_e/K}$ käyttäen kriittisen kuorman arvo voidaan vielä esittää vaihtoehtoisissa muodoissa

$$\begin{aligned} P_{cr} &= K \left(1 + \alpha^2/2 \right) \left[\sqrt{1 + 2\alpha^2 / (1 + \alpha^2/2)^2} - 1 \right] \\ &= (P_e/2) \left(1 + 2/\alpha^2 \right) \left[\sqrt{1 + (8/\alpha^2) / (1 + 2/\alpha^2)^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (50)$$

joista näkyy, että suurilla α :n arvoilla

$$P_{cr} \cong 2K(1 - 4/\alpha^2) \quad (51)$$

ja pienillä α :n arvoilla

$$P_{cr} \cong P_e(1 - \alpha^2) \quad (52)$$

Siis suurilla leikkausjäykkyyden K arvoilla nurjahduskuorma on hyvin lähellä Engesserin ja Haringxin tuloksia ja yhtyy niihin ja Eulerin kuormaan α :n lähestyessä nollaa. Pienillä leikkausjäykkyyden arvoilla nurjahduskuorma on Engesserin ja Haringxin tulosten välissä ja lähestyy arvoa $2K\alpha$:n lähestyessä ääretöntä (ks. kuvat 8 ja 9).

TULOSTEN VERTAILUA

Engesserin (7) ja Haringxin (12) esittämistä differentiaaliyhtälöistä, samoin kuin Biot'n yhtälöstä (48) havaitaan, että ne lähestyvät Eulerin teorian mukaista differentiaaliyhtälöä $Elv'' + Pv = 0$, kun leikkausjäykkyys kasvaa. Tällöinhän termi $P/K = \alpha^2$ kaikissa yhtälöissä lähestyy nollaa. Seuraavassa suoritettussa vertailussa on käytetty samaa leikkausjäykkyyden K arvoa kaikissa nurjahduskuorman lausekkeissa. Dimensiotonta parametria $\alpha = \sqrt{P_e / K}$ käyttäen nurjahduskuormat eri tapauksissa ovat

$$\text{Engesser: } \frac{P_{cr}}{P_e} = \frac{1}{1 + \alpha^2} \quad (53)$$

$$\text{Haringx: } \frac{P_{cr}}{P_e} = \frac{\sqrt{1 + 4\alpha^2} - 1}{2\alpha^2} \quad (54)$$

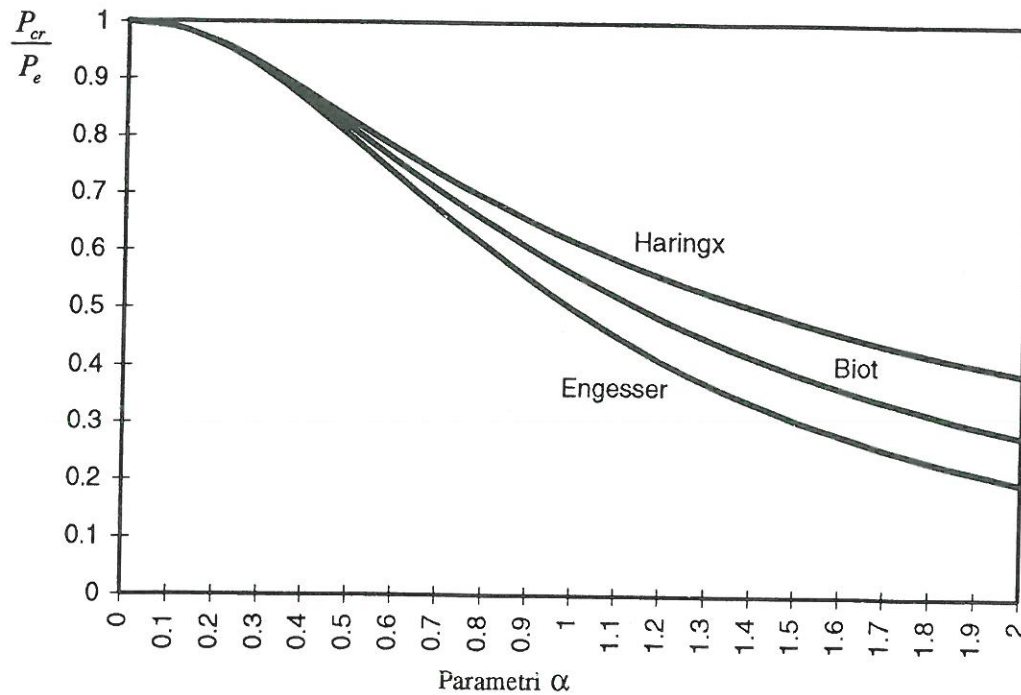
$$\text{Biot: } \frac{P_{cr}}{P_e} = (1/\alpha^2)(1 + \alpha^2/2) \left[\sqrt{1 + 2\alpha^2 / (1 + \alpha^2/2)^2} - 1 \right] \quad (55)$$

Kuvassa 8 on esitetty Engesserin, Haringxin ja Biot'n lausekkeiden kuvaajat α :n funktiona. Siitä havaitaan, että edellä johdettu uusi tulos, jota nimitetään tässä Biot'n nurjahduskuormaksi, on aina Engesserin ja Haringxin käyrien välissä. Esimerkiksi arvolla $\alpha = 1$ eli $P_e / K = 1$ saadaan Engesserin kaavasta tulos $P_{cr} = 0,5P_e$, Haringxin lausekkeesta arvo $P_{cr} = (\sqrt{5} - 1)P_e / 2 \cong 0,62P_e$ ja Biot'n lausekkeesta $P_{cr} = (\sqrt{17} - 3)P_e / 3 \cong 0,56P_e$. Näiden suhteet ovat $P_{Haringx} / P_{Engesser} \approx 1,24$ ja $P_{Biot} / P_{Engesser} \approx 1,12$

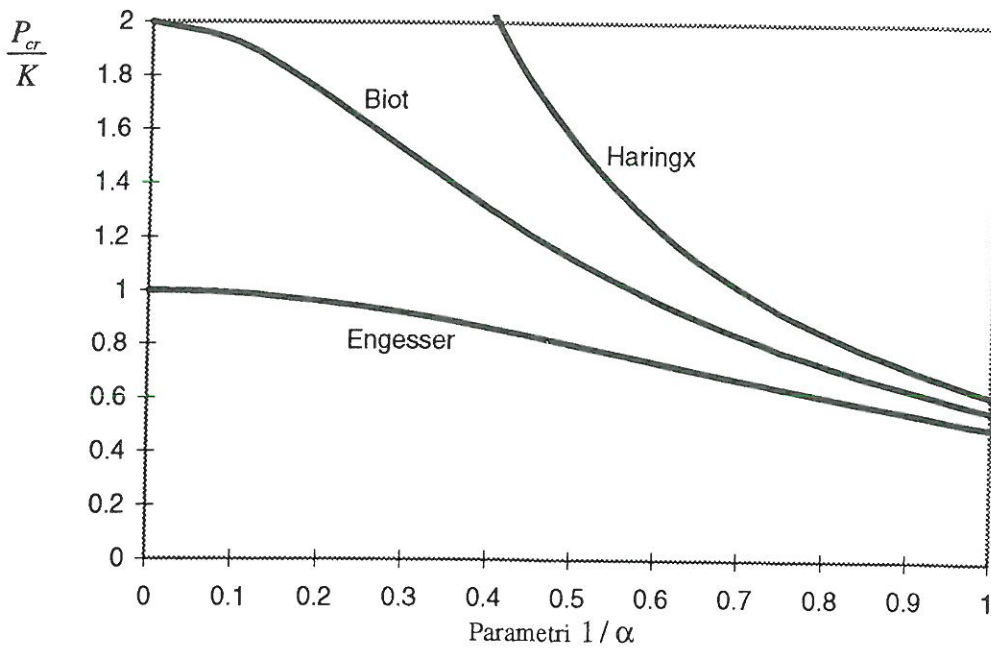
Jos leikkausjäykkyys K on hyvin pieni, nurjahduskuormat voidaan esittää muodossa

$$\text{Engesser: } \frac{P_{cr}}{K} = \frac{1}{1 + 1/\alpha^2} \quad (56)$$

Haringx:
$$\frac{P_{cr}}{K} = (\sqrt{1 + 4\alpha^2} - 1) / 2 \cong \alpha. \quad (57)$$



Kuva 8. Engesserin, Haringxin ja Biot'n nurjahduskuormat dimensiottoman parametrin α funktiona.



Kuva 9. Engesserin, Haringxin ja Biot'n nurjahduskuormat parametrin $1/\alpha$ funktiona.

Biot:
$$\frac{P_{cr}}{K} \cong 2(1 - 4/\alpha^2) \quad (58)$$

Havaitaan, että Engesserin lauseke suppenee kohti arvoa K ja Biot'n lauseke kohti arvoa $2K$, kun $\alpha \rightarrow \infty$. Haringxin lauseke puolestaan kasvaa rajatta, kun $\alpha \rightarrow \infty$. Näiden kuvaajat on esitetty kuvassa 9 parametrin $1/\alpha$ funktiona.

Kirjallisuusviitteet

- [1] Bazant, Z.B., A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies, J. Appl. Mech., ASME, Vol 38, No 4, Dec (1971), pp. 919-928.
- [2] Biot, M.A., Mechanics of incremental deformations, J. Wiley & Sons, 1965.
- [3] Gjelsvik, A., Stability of built-up columns, J. Eng. Mech. ASCE, Vol 117, No. 6, June (1991), pp. 1331-1345.
- [4] Kelly, J.M., Shear deformation and buckling of columns, Appl. Mech. Rev., Vol 44, No. 11, Part 2, Nov (1991), pp. 160-165.
- [5] Leppänen, T., Leikkausmuodonmuutoksen vaikutus pilarin nurjahduskuormaan. Rakenteiden mekaniikan erikoistyö, TKK, Otaniemi, 1996.
- [6] Mikkola, M., Rakenteiden stabiilius. Luentomoniste, Otapaino, 1996
- [7] Timoshenko, S.P. and Gere J.M., Theory of elastic stability, McGraw-Hill, 1961.

Martti Mikkola, professori
Rakenteiden mekaniikka
Teknillinen korkeakoulu

Timo Leppänen, tekn.yo.
Rakenteiden mekaniikka
Teknillinen korkeakoulu