

TIIVISTELMÄ: Tässä artikkelissa esitetään rakenteiden luotettavuusteoria sekä yksittäisen rakenneosan että rakennejärjestelmien analysoimiseksi. Pääpaino on osittain tilastollisissa luotettavuusmenetelmissä näiden suhteellisen yksinkertaisuuden vuoksi. Rakennejärjestelmien luotettavuusteoria nyky muodossaan on kehittynyt ainoastaan sarjarakenteiden osalta.

JOHDANTO

Rakenteiden luotettavuusteoria on kehittynyt viimeisten kahdenkymmenen vuoden aikana hyvin voimakkaasti. Deterministiseltä suunnittelulta puuttuva johdonmukaisuus on luonut tarpeen filosofialtaan yhtenäisemmän ja "oikeanman" teorian synnyttämiseksi. Rakenteiden suunnittelu voidaan esittää myös epävarmuuden ja riskin alaisena päätöksentekona /9/. Johdonmukainen rakenteiden suunnittelu on suunnitteluproseduuri, joka tuottaa optimaalisen suunnitelman ts. minimoi elinjaksokustannusten nykyarvon. Elinjaksokustannuksiin kuuluvat suunnittelu-, investointi-, käyttö- ja kunnossapito-, korjaus- ja mahdolliset purkamiskustannukset sekä mahdollisen käytön keskeytyskustannukset.

Rakenteiden murtumisen aiheuttaa melkein aina karkea inhimillinen virhe /10/, lukuunottamatta poikkeuksellisen suurien kuormien aiheuttamia murtumisia. Rakenteiden luotettavuusteoria ei ota huomioon karkeita inhimillisiä virheitä. Siksi teoria nyky muodossa voidaan nähdä osana kattavampaa rakenteiden laadunvarmistusta, joka ottaa huomioon myös inhimillisten virheiden vaikutukset /9/. Laadunvarmistuksen ja rakenteiden luotettavuuden välinen yhteys on kuitenkin vielä selvittämättä.

LUOTETTAVUUSMENETELMÄT

Rakenteiden luotettavuusteoriassa perusolettamuksena on, että rakenteen käyttäytyminen voidaan kaikissa murtotavoissa i kuvata kahdella joukolla: murtotila F_i ja murtumaton tila S_i .

Luotettavuusmenetelmällä pyritään määrittämään rakennejärjestelmän luotettavuus P_R . Käytännössä ei kaikkia murtotapoja pystytä kuitenkaan tutkimaan, joten luotettavuusmenetelmillä määritetäänkin idealisoidun rakennejärjestelmän luotettavuus P'_R tiettyjä murtotapoja vastaan.

Rakennesalla tarkoitetaan tässä yhteydessä rakennetta tai komponenttia, jolla on yksi murtotapa. Rakennejärjestelmällä tarkoitetaan rakennetta tai komponenttia, jolla on useampia murtotapoja.

Luotettavuus ei ole rakennejärjestelmän ominaisuus, vaan ainoastaan meidän tietämyksemme mitta ko. rakennejärjestelmästä. Sen vuoksi on tarkoituksetonta puhua rakennejärjestelmän "oikeasta" luotettavuudesta /9/.

Luotettavuuden komplementtisuuretta $P_F = 1 - P_R$ kutsutaan vaurioitumistodennäköisyydeksi. Tämä voidaan arvioida tilastollisesti riittävän suuresta ja homogeenisesta rakennejoukosta /9/.

Yleensä määritetään kuitenkin teoreettinen vaurioitumistodennäköisyys P'_F . Teoreettinen vaurioitumistodennäköisyys lasketaan ilman karkean inhimillisen virheen aiheuttamia murtotapoja. Inhimilliset virheet jaetaan karkeisiin virheisiin ja satunnaisiin inhimillisiin virheisiin. Satunnaiset inhimilliset virheet sisältyvät esim. osavarmuuskertoimiin.

Rakenteiden luotettavuusmenetelmät jaetaan neljään eri tasoon rakenneanalyysissä tarvittavan ja tulostettavan tiedon laajuuden mukaan.

Luotettavuusmenetelmiä, joissa käytetään vain yhtä karakteristista arvoa jokaiselle parametrille kutsutaan deterministisiksi menetelmiksi eli tason I menetelmiksi. Esimerkkinä näistä ovat sallittujen jännitysten menetelmä ja osavarmuuskerroinmenetelmä.

Luotettavuusmenetelmät, joissa käytetään kahta arvoa jokaiselle parametrille, yleensä keskiarvoa ja varianssia, täydennettynä parametrien korrelaatiota kuvaavalla suureella, yleensä kovarianssi, kutsutaan osittain tilastollisiksi menetelmiksi eli tason II menetelmiksi. Varmuusindeksimenetelmät kuuluvat tähän luokkaan.

Luotettavuusmenetelmät, joissa käytetään vaurioitumistodennäköisyyttä mittana, ja joissa siten tarvitaan tietoa kaikkien parametrien yhteisjakaumista kutsutaan tilastollisiksi menetelmiksi eli tason III menetelmiksi.

Luotettavuusmenetelmät, joissa käytetään päätöksentekoaanalyysiä ottaen huomioon koko rakennuksen elinjakso (suunnittelu, rakentaminen, käyttö ja kunnossapito, korjaukset), mahdollisen vaurion seuraukset ja pääoman korko jne., kutsutaan tason IV menetelmiksi. Suuret sillat, korkeat mastot ja ydinvoimalat ovat sopivia kohteita tällaisille menetelmille. Nämä menetelmät ovat kuitenkin vielä kehitteillä /9/.

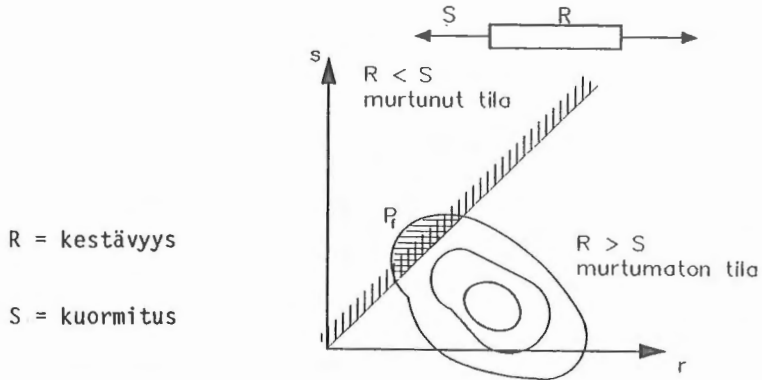
OSITTAIN TILASTOLLISET MENETELMÄT

Cornellin varmuusindeksi

Perusajatuksena osittain tilastollisessa luotettavuusteoriassa on, että kaikkien rakenteiden luotettavuusanalysissä tarvittavien parametrien epävarmuus ilmaistun odotusarvojen (keskiarvojen) ja kovarianssien (neliömomenttien) avulla /3, 7/. Näitä parametrejä kutsutaan perusmuuttujiksi ja merkitään X_j . Perusmuuttujia ovat kuormitusparametrit, lujuusparametrit, geometriset ja tilastolliset epävarmuustekijät ja malliin liittyvät epävarmuustekijät.

Tarkastellaan esimerkiksi yksinkertaista vetosauvaa.

Esimerkki 1. Vetosauva.



Murtuminen = $\{R < S\}$

$$P_f = P(R < S) = \iint_{r < s} f_{RS}(r, s) dr ds \quad (1)$$

Vaurioitumistodennäköisyys voidaan kirjoittaa kahdella eri tavalla:

$$a) P_f = \int_0^{\infty} \int_0^s f_{R|S}(r, s) f_S(s) dr ds = \int_0^{\infty} F_{R|S}(s|s) f_S(s) ds \quad (2)$$

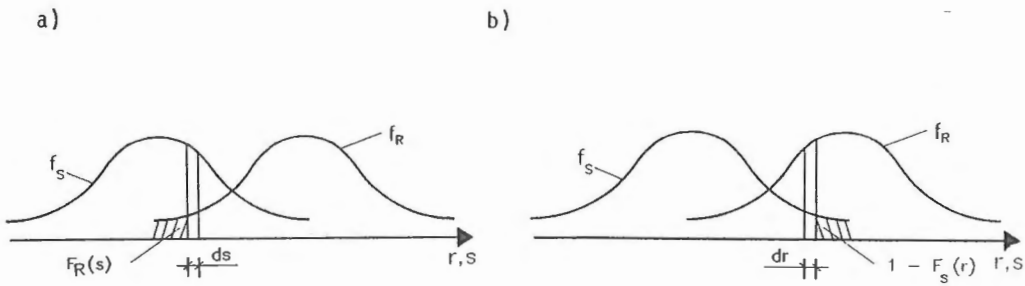
Jos R ja S ovat tilastollisesti riippumattomia

$$P_f = \int_0^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (3)$$

$$b) P_f = \int_0^{\infty} \int_r^{\infty} f_{S|R}(s, r) f_R(r) ds dr = \int_0^{\infty} [1 - F_{S|R}(r|r)] f_R(r) dr \quad (4)$$

Jos R ja S ovat tilastollisesti riippumattomia

$$P_f = \int_0^{\infty} [1 - F_S(r)] f_R(r) dr \quad (5)$$



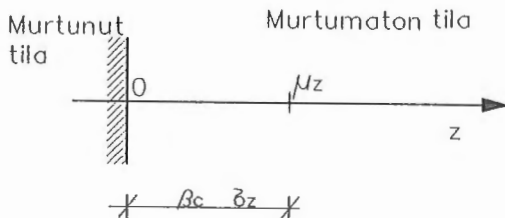
Näiden integraalilausekkeiden määrittäminen on käytännössä usein hyvin hankalaa. Otetaan käyttöön suure Z

$$Z = g(x_i) = R - S \quad (6)$$

jota nimitetään varmuusmarginaaliksi. Cornell /3/ määritteli varmuusindeksin β_C

$$\beta_C = \frac{E[R] - E[S]}{\sqrt{\text{Var}[R] + \text{Var}[S]}} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (7)$$

missä μ_R ja μ_S ovat satunnaissuureiden R ja S keskiarvot ja σ_R ja σ_S ovat niiden keskihajonnat. Määritelmää voidaan havainnollistaa kuvalla 1.



Kuva 1. Varmuusindeksin β_C geometrinen tulkinta yksiulotteisessa tapauksessa.

Jos murtopinta on taso, voidaan määrittellä lineaarinen murtoehto

$$Z = g(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_0 + \underline{a}^T \underline{x} \quad (8)$$

missä
 \underline{a}^T = vaakavektori
 \underline{X} = pystyvektori

Tästä saadaan varmuusindeksiksi β_C

$$\beta_C = \frac{a_0 + \underline{a}^T E[X]}{\sqrt{\underline{a}^T C_{-XX} \underline{a}}} \quad (9)$$

missä
 $E[X]$ on odotusarvovektori
 C_{-XX} on kovarianssimatriisi

Vaurioitumistodennäköisyyttä voidaan arvioida lausekkeella

$$P_f = P(R < S) = P(Z < 0) \approx \Phi(-\beta_C) \quad (10)$$

missä
 Φ = normaalijakauman kertymäfunktio.

Rosenbluethin ja Estevan varmuusindeksi

Esitetään murtoehto muodossa

$$Z = g(r,s) = \ln(r/s) \quad (11)$$

Käytetään ensimmäisen asteen approksimaatiota keskiarvon μ_Z ja keskihajonnan σ_Z laskemiseksi

$$\mu_Z \approx \ln \frac{\mu_R}{\mu_S} \quad (12)$$

$$\sigma_Z \approx \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S} \quad (13)$$

$$\beta_{RE} = \frac{\ln \frac{\mu_R}{\mu_S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S}} \quad (14)$$

Tätä varmuusindeksiä kutsutaan Rosenbluethin ja Estevan /11/ varmuusindeksiksi.

Jos muuttujat R ja S ovat stokastisesti riippumattomia l. korreloimattomia ($\rho = 0$) supistuu kaava (14) muotoon

$$\beta_{RE} = \frac{\ln \frac{\mu_R}{\mu_S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (15)$$

Vaurioitumistodennäköisyyttä voidaan approksimoida jälleen

$$P_f \approx \Phi(-\beta_{RE}) \quad (16)$$

Ensimmäisen asteen varmuusindeksi

Otetaan käyttöön käsite yleinen komponentti

Perusmuuttujavektori:

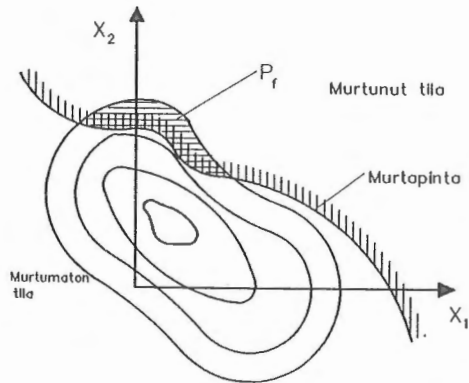
$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix}$$

missä muuttujat x_i ovat kuormia, kuorman vaikutuksia, materiaaliominaisuuksia, rakenneosien dimensioita jne.

Oletetaan, että

- 1) \underline{x} on ajasta riippumaton suure
- 2) Tietyllä arvolla $\underline{x} = \underline{x}$ komponentti on joko murtuneessa tilassa tai murtumattomassa tilassa ts. kahden tilan komponentti.

Matemaattinen malli voidaan esittää x - avaruudessa murtopinnan $g(\underline{x}) = 0$ avulla (kuva 2).



Kuva 2. Vaurioitumistodennäköisyyden geometrinen tulkinta.

Määritellään rakenneyhtälö (performance function)

$$z = g(\underline{X})$$

siten, että

$$g(\underline{X}) = 0 : \text{murtopinta}$$

$$g(\underline{X}) < 0 : \text{murtunut tila}$$

$$g(\underline{X}) > 0 : \text{murtumaton tila}$$

Vaurioitumistodennäköisyys voidaan laskea kaavasta (17)

$$P_f = \int \dots \int_{\substack{n \\ g(\underline{X}) < 0}} f_{\underline{X}}(\underline{X}) d\underline{X} \quad (17)$$

Vaurioitumistodennäköisyyden tarkassa laskemisessa on kuitenkin seuraavat ongelmat

1. $f_{\underline{X}}(\underline{X})$ on yleensä tuntematon, sillä tilastollista tietoa on harvoin saatavilla
2. Integroiminen tapauksessa $n > 2$.

Rakenteiden luotettavuuden määrittäminen epätäydellisellä tilastollisella tiedolla voidaan myös tehdä varmuusindeksin β avulla. Varmuusindeksiltä vaadittavat ominaisuudet ovat

1. Täydellisyys ts. se ottaa huomioon kaiken saatavilla olevan tiedon.
2. Muuttumattomuus ts. ongelman matemaattinen formulointi ei vaikuta varmuusindeksin arvoon.
3. Vertailtavuus ts. saman varmuusindeksin arvon omaavien rakenteiden vaurioitumistodennäköisyydet ovat myös samoja.

Merkitään rakenneyhtälöä

$$z = g(\underline{X})$$

ja tunnetaan

$$\underline{\mu}_X = \begin{Bmatrix} \mu_{X_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{X_n} \end{Bmatrix} \text{ keskiarvovektori}$$

$$\underline{C}_{XX} = [\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j] \text{ kovarianssimatriisi}$$

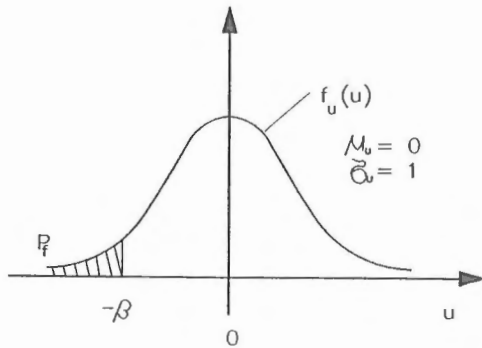
Määritellään normaalimuuttuja

$$U = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \tag{18}$$

Vaurioitumistodennäköisyys P_f saadaan kaavasta (19)

$$P_f = \int_{g(\underline{X}) < 0} f_{\underline{X}}(\underline{X}) d\underline{X} = F_u(-\beta) \tag{19}$$

Tätä voidaan havainnollistaa kuvalla 3.



Kuva 3. Yksiulotteinen normaalimuuttuja.

Lineaarisen rakenneyhtälön tapauksessa varmuusindeksi β voidaan laskea tarkasti. Epälineaarisen rakenneyhtälön ollessa kyseessä joudutaan approksimoimaan. Approksimaatiot perustuvat Taylorin sarjakehitelmään. Jos rakenneyhtälö linearisoidaan Taylorin sarjakehitelmän ensimmäisen asteen termeillä ja linearisointipisteeksi valitaan keskiarvopiste \underline{x}_0 saadaan rakenneyhtälöksi

$$g(\underline{x}) \approx g(\underline{x}_0) + \nabla^T g(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (20)$$

missä

$$\nabla g(\underline{x}_0) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{Bmatrix} \Big|_{\underline{x} = \underline{x}_0} \quad \text{gradienttivektori}$$

ja varmuusindeksiksi

$$\beta_{\text{MVFO SM}} = \frac{g(\underline{M}_x)}{(\nabla^T g(\underline{M}_x) \underline{C}_{xx} \nabla g(\underline{M}_x))^{1/2}} \left(\approx \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \right) \quad (21)$$

ja sitä nimitetään ensimmäisen asteen varmuusindeksiksi keskiarvopisteessä (mean-value first order second-moment reliability index).

Mainittakoon, että ensimmäisen asteen varmuusindeksi täyttää vain täydellisyysominaisuuden, mutta ei muuttumattomuus- eikä vertailtavuusominaisuutta.

Hasoferin ja Lindin varmuusindeksi

Yksiulotteisessa tapauksessa (kuva 1) voitiin varmuusindeksi β tulkita etäisyysindeksi murtopintaan. Samanlainen tulkinta voidaan esittää myös moniulotteisessa tapauksessa /8/.

Tarkastellaan ensiksi lineaarista rakenneyhtälöä

$$z = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_0 + \underline{A}^T \underline{x} \quad (22)$$

missä

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Bmatrix}$$

Sovelletaan lineaarista kuvausta perusmuuttujille korreloimattoman standardi normaaliavaruuden kuvaamiseksi.

$$\underline{Y} = \underline{\Gamma} \underline{D}^{-1} (\underline{X} - \underline{M}_x) \quad (23)$$

missä

$$C_{-xx} = \underline{D} \underline{R} \underline{D}^{-1}, \quad \underline{R}_{-xx} = [\rho_{ij}]$$

$$\underline{R}_{-xx} = \underline{D}^{-1} \underline{C}_{-xx} \underline{D}^{-1}, \quad \underline{D}_{-x} = [\sigma_i]$$

$\underline{\Gamma}$ = kiertomatriisi

Kuvaus suoritetaan siten, että

$$\underline{M}_{-y} = 0, \quad \underline{C}_{-yy} = I$$

ts. saadaan juuri standardi normaaliavaruus.

Merkitään lisäksi

$$\begin{aligned} R_{XX} &= \underline{L} \underline{L}^T \\ \underline{\Gamma} &= \underline{L}^{-1} \end{aligned} \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & & 0 \\ L_{12} & L_{22} & \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ & & L_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriisit \underline{L} ja $\underline{\Gamma}$ ovat alakolmiomatriiseja.

Tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} z &= a_0 + \underline{A}^T \underline{x} \\ &= a_0 + \underline{A}^T (\underline{D} \underline{L} \underline{Y} + \underline{M}) \\ &= b_0 + \underline{B}^T \underline{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{D} \underline{L} \underline{Y} + \underline{M} \\ \underline{B} &= \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$= b_0 + \sum_{i=1}^n b_i Y_i \quad (24)$$

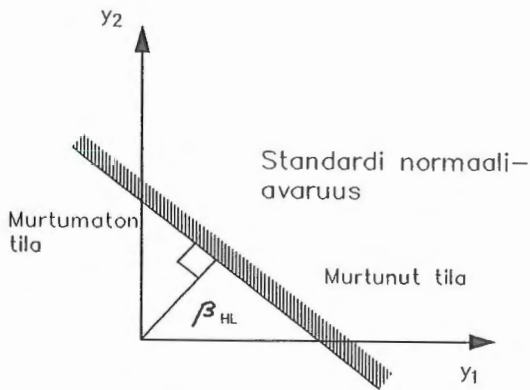
$$\mu_z = b_0 \quad (25)$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (26)$$

ja Hasoferin ja Lindin varmuusindeksiksi β_{HL} lineaarisen rakenneyhtälön tapauksessa saadaan

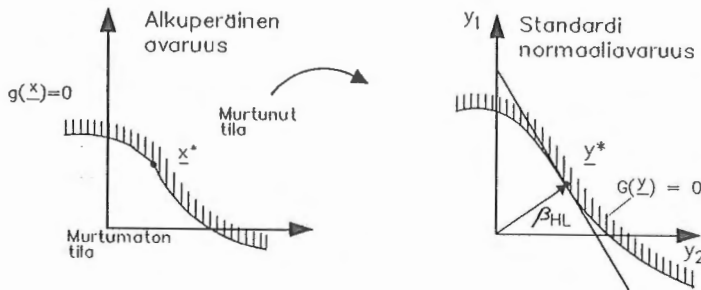
$$\beta_{HL} = \frac{b_0}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}} \quad (27)$$

Kuvassa 4 on esitetty varmuusindeksin β_{HL} geometrinen tulkinta.



Kuva 4. Hasofer-Lind varmuusindeksin β_{HL} geometrinen tulkinta lineaarisen rakenneyhtälön tapauksessa.

Tarkastellaan seuraavaksi epälineaarista rakenneyhtälöä. Hasofer ja Lind määrittelivät varmuusindeksin lyhimmäksi etäisyydeksi origosta rajapintaan standardi normaaliavaruudessa, kuva 5 /8/.



Kuva 5. Hasofer-Lind varmuusindeksin β_{HL} geometrinen tulkinta epälineaarisen rakenneyhtälön tapauksessa.

$$g(\underline{x}) = g(\underline{D}_x \underline{L}_y + \underline{M}_x) = G(\underline{y}) \quad (28)$$

Tässä menetelmässä korvataan epälineaarinen rajapinta lineaarisella tasolla suunnittelupisteessä \underline{y}^* standardi normaaliavaruudessa. Tämän jälkeen voidaan vastaava suunnittelupiste \underline{x}^* alkuperäisessä avaruudessa ratkaista käänteiskuvauksen avulla.

Varmuusindeksiksi β_{HL} alkuperäisessä avaruudessa saadaan

$$\beta_{HL} = \frac{\nabla^T g(\underline{x}^*) (\underline{M}_{-x} - \underline{x}^*)}{(\nabla^T g(\underline{x}^*) C_{xx} \nabla g(\underline{x}^*))^{1/2}} \quad (29)$$

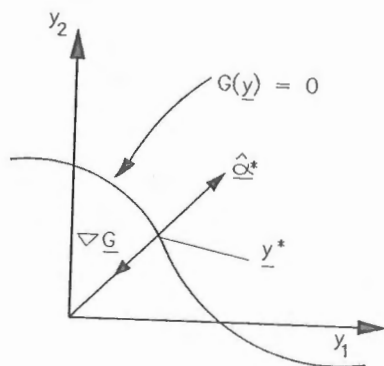
Varmuusindeksiksi β_{HL} standardi normaaliavaruudessa saadaan

$$\beta_{HL} = - \frac{\nabla^T G(\underline{y}^*) \underline{y}^*}{(\nabla^T G(\underline{y}^*) \nabla G(\underline{y}^*))^{1/2}} = - \frac{\nabla^T G(\underline{y}^*)}{|\nabla G(\underline{y}^*)|} \underline{y}^* \quad (30)$$

Merkitään yksikkövektoria

$$\vec{\alpha}(\underline{y}) = - \frac{\nabla G(\underline{y})}{|\nabla G(\underline{y})|} \quad (31)$$

joka on yhdensuuntainen vektori gradienttivektorin kanssa, mutta osoittaa murtuneeseen tilaan päin, kuva 6.

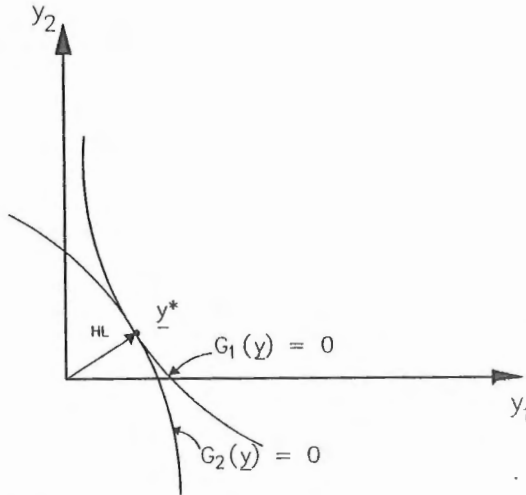


Kuva 6. Yksikkövektorin $\vec{\alpha}$ ja gradienttivektorin ∇G geometrinen tulkinta.

Tällöin saadaan β_{HL} :n lausekkeeksi

$$\beta_{HL} = \sqrt{\underline{y}^{*T} \underline{y}^*} = \vec{\alpha}^* \underline{y}^* \quad (32)$$

Laskennallisena vaikeutena Hasoferin ja Lindin varmuusindeksissä β_{HL} on suunnittelupisteiden \underline{y}^* ja \underline{x}^* löytäminen. Tämä vaatii iteratiivisia algoritmeja. Varmuusindeksi β_{HL} täyttää täydellisyysominaisuuden ja muuttumattomuusominaisuuden, mutta ei aina vertailtavuusominaisuutta, joka voidaan todeta kuvasta 7 /4/.



Kuva 7. Varmuusindeksin β_{HL} vertailtavuusominaisuuden puuttuminen.

ESIMERKKI 1.

Tarkastellaan lyhyttä poikkileikkaukseltaan suorakaiteenmuotoista pilaria, jota kuormittaa normaalivoima P ja taivutusmomentti M . Pilari on valmistettu kimmoisesta ideaaliplastisesta materiaalista, jonka myötölujuus on σ_y sekä veto- että puristuspuolella. Pilari murtuu täysin plastisoituneena, jos

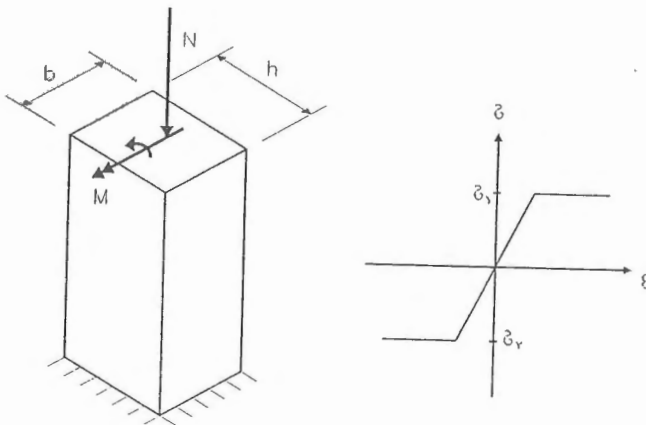
$$\frac{M}{M_u} + \left(\frac{N}{N_u}\right)^2 > 1,$$

missä $N_u = bh\sigma_y$ ja $M_u = \frac{bh^2}{4}\sigma_y$ ovat kestävydet normaalivoimalle ja taivutusvoimalle erikseen. Oletetaan N , M ja σ_y satunnaismuuttujiksi joiden keskiarvot ja keskihajonnat ovat:

	<u>keskiarvo</u>	<u>keskihajonta</u>
N	2 kN	0,4 kN
M	0,25 kNm	0,05 kNm
σ_y	35 MPa	0,35 MPa

ja korrelaatio $\rho_{NM} = 0,5$ $\rho_{N\sigma} = \rho_{M\sigma} = 0$.

Oletetaan myös $b = 0,25$ m ja $h = 0,5$ m.



Määritä ensimmäisen asteen varmuusindeksi keskiarvopisteessä β_{MVFO5M} kahdelle identtiselle rakenneyhtälölle:

$$Z = 1 - \frac{M}{M_u} - \left(\frac{N}{N_u}\right)^2 \quad (a)$$

$$Z = M_u N_u^2 - M N_u^2 - M_u N^2 \quad (b)$$

Miten muuttuu tulos kohdassa (a) jos $\rho_{NM} = -0,5$?

$$a) \quad Z = 1 - \frac{M}{M_u} - \left(\frac{N}{N_u}\right)^2 = 1 - \frac{M}{\frac{bh^2}{4} \sigma_y} - \frac{N^2}{(bh)^2 \sigma_y^2}$$

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ \sigma_y \end{Bmatrix}, \quad \underline{M}_{-X} = \begin{Bmatrix} 2 & \text{kN} \\ 0,25 & \text{kNm} \\ 35 & \text{MPa} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{C}_{xx} = \begin{bmatrix} 0,4^2 & 0,5 \times 0,4 \times 0,05 & 0 \\ 0,5 \times 0,4 \times 0,05 & 0,05^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,01 & 0 \\ 0,01 & 0,025 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1225 \end{bmatrix}$$

$$N_u = bh\sigma_y = 0,25 \times 0,5 \times 35 = 4,4 \text{ kN}$$

$$M_u = \frac{bh^2}{4} \alpha_y = \frac{0,25 \times 0,5}{4} \times 35 = 0,55 \text{ kNm}$$

$$\frac{\partial g}{\partial N} = -2 \left(\frac{N}{N_u} \right) \frac{1}{N_u} = -\frac{2N}{N_u^2} = -\frac{2 \times 2}{(4,4)^2} = -0,21$$

$$\frac{\partial g}{\partial M} = -\frac{1}{M_u} = -\frac{1}{0,55} = -1,82$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_y} = \frac{M}{\frac{bh^2}{4} \alpha_y^2} + \frac{2P^2}{(bh)^2 \delta_y^3} = \frac{0,25}{\frac{0,25 \times 0,5^2}{4} \times 35^2} + \frac{2 \times 2^2}{(0,25 \times 0,5)^2 \times 35^3}$$

$$= 0,0131 + 0,0119 = 0,025$$

$$\nabla g(\underline{M}_x) = \begin{Bmatrix} -0,21 \\ -1,82 \\ 0,025 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla^T g(\underline{M}_x) \underline{C}_{xx} \nabla g(\underline{M}_x) =$$

$$= \{-0,21, -1,82, 0,025\} \begin{bmatrix} 0,16 & 0,01 & 0 \\ 0,01 & 0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1225 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,21 \\ -1,82 \\ 0,025 \end{Bmatrix}$$

$$= \{-0,0518, -0,0067, 0,0031\} \begin{Bmatrix} -0,21 \\ -1,82 \\ 0,025 \end{Bmatrix} = 0,0231$$

$$\beta_{MVFOsm} = \frac{1 - \frac{M}{M_u} - \left(\frac{N}{N_u}\right)^2}{(\nabla^T g(\underline{M}_x) \underline{C}_{xx} \nabla g(\underline{M}_x))^{1/2}} = \frac{1 - \frac{0,25}{0,55} - \left(\frac{2}{4,4}\right)^2}{\sqrt{0,0231}} = \underline{\underline{2,232}}$$

$$b) Z = M_u N_u^2 - M N_u^2 - M_u N^2$$

$$= \frac{bh^2}{4} \sigma_y (bh)^2 \sigma_y^2 - M(bh)^2 \sigma_y^2 - \frac{bh^2}{4} \sigma_y N^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial N} = -2MN_u = -2 \times 0,25 \times 4,4 = -2,2$$

$$\frac{\partial g}{\partial M} = -N_u^2 = -4,4^2 = -19,36$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_y} = \frac{3}{4} bh^2 (bh)^2 \sigma_y^2 - 2M(bh)^2 \sigma_y - \frac{bh^2}{4} N^2$$

$$= \frac{3}{4} 0,25 \times 0,5^2 (0,25 \times 0,5)^2 35^2 - 2 \times 0,25 (0,25 \times 0,5)^2 35$$

$$- \frac{0,25 \times 0,5^2}{4} 2^2 = 0,561$$

$$\nabla g(\underline{M}_x) = \begin{Bmatrix} -2,2 \\ -19,36 \\ 0,561 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla^T g(\underline{M}_x) \underline{C}_{xx} \nabla g(\underline{M}_x) = 2,602$$

$$\beta_{MVFSM} = \frac{M_u N_u^2 - M N_u^2 - M_u N^2}{(\nabla^T g(\underline{M}_x) \underline{C}_{xx} \nabla g(\underline{M}_x))^{1/2}} = \frac{0,55 \times 4,4^2 - 0,25 \times 4,4^2 - 0,55 \times 2^2}{\sqrt{2,602}}$$

$$= \underline{2,237}$$

$$\sigma_{NM} = -0,5$$

$$\nabla^T g(\underline{M}_x) \underline{C}_{xx} \nabla g(\underline{M}_x)$$

$$= \{-0,21, -1,82, 0,025\} \begin{bmatrix} 0,16 & -0,01 & 0 \\ -0,01 & 0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1225 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,21 \\ -1,82 \\ 0,025 \end{Bmatrix} = 0,0078$$

$$\beta_{MVFSM} = \underline{3,844}$$

ESIMERKKI 2.

Määritä Hasofer-Lindin luotettavuusindeksi esimerkin 1 tapaukselle. Käytä $\rho_{NM} = 0,5$. Määritä myös suunnittelupisteen koordinaatit standardi normaaliavaruudessa ja alkuperäisessä avaruudessa sekä herkkyysvektorit $\vec{\alpha}$ ja $\vec{\gamma}$. Mikä on kolmen perusmuuttujan tärkeysjärjestys tässä tapauksessa ?

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ \sigma_y \end{Bmatrix}, \quad \underline{M}_x = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0,25 \\ 35 \end{Bmatrix}, \quad \underline{C}_{xx} = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,01 & 0 \\ 0,01 & 0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1225 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,4 & & \\ & 0,05 & \\ & & 0,35 \end{bmatrix}, \quad \rho_{NM} = 0,5, \quad \rho_{p\sigma} = \rho_{M\sigma} = 0$$

Korrelaatiomatriisi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LL^T$$

$$\underline{Y} = \underline{\Gamma} \underline{D}^{-1} (\underline{X} - \underline{M}_x)$$

$$L_{ij} = \begin{cases} (\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2)^{1/2}, & i = j \\ (\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk}) / L_{jj}, & i > j \end{cases}$$

$$L_{11} = (1,0 - \sum_{k=1}^{1-1} L_{1k}^2)^{1/2} = 1,0$$

$$L_{21} = (0,5 - \sum_{k=1}^{2-1} L_{1k} L_{2k}) / 1,0 = 0,5$$

$$L_{22} = (1 - 0 - \sum_{k=1}^{2-1} L_{2k}^2)^{1/2} = (1,0 - (0,5)^2)^{1/2} = 0,866$$

$$L_{31} = (0 - \sum_{k=1}^{3-1} L_{1k} L_{3k}) / L_{11} = 0$$

$$L_{32} = (0 - \frac{2-1}{\sum_{k=1}^2} L_{1k} L_{3k}) / L_{22} = (0 - 1,0 \times 0) / 0,866 = 0$$

$$L_{33} = (1,0 - \frac{3-2}{\sum_{k=1}^2} L_{3k})^{1/2} = 1,0$$

$$L = \begin{bmatrix} 1,0 & & \\ 0,5 & 0,866 & \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,5 & 0 \\ & 0,866 & 0 \\ & & 1,0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{L_{11}} = 1,0$$

$$\Gamma_{22} = \frac{1}{0,866} = 1,155$$

$$\Gamma_{21} = - \frac{1}{0,866} \frac{2-1}{\sum_{k=1}^2} L_{2k} \Gamma_{k1} = - \frac{1}{0,866} (0,5 \times 1,0) = -0,577$$

$$\Gamma_{33} = \frac{1}{L_{33}} = 1,0$$

$$\Gamma_{32} = - \frac{1}{L_{33}} \frac{3-1}{\sum_{k=2}^3} L_{3k} \Gamma_{k2} = - \frac{1}{1,0} (0) = 0$$

$$\Gamma_{31} = - \frac{1}{1,0} \frac{3-1}{\sum_{k=1}^3} L_{3k} \Gamma_{k1} = -1,0(0 \times 1 + 0 \times (-0,577)) = 0$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1,0 & & \\ -0,577 & 1,155 & \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Tarkastus: } \Gamma \Gamma^T &= \begin{bmatrix} 1,0 & & \\ -0,577 & 1,155 & \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 & -0,577 & 0 \\ & 1,155 & 0 \\ & & 1,0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Iteraatio 1:

$$G(y_{-i}) = g(x_{-i})$$

$$\nabla G(\underline{y}_i) = \nabla g(\underline{x}_i) \underline{DL}$$

$$\underline{\alpha}_i = - \frac{\nabla g(\underline{y}_i)}{|\nabla G(\underline{y}_i)|}$$

$$\beta_i = \sqrt{\underline{y}_i^T \underline{y}_i}$$

$$\underline{DL} = \begin{bmatrix} 0,4 & & \\ & 0,05 & \\ & & 0,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 & & \\ 0,5 & 0,865 & \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0,025 & 0,043 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_0 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0,25 \\ 35 \end{Bmatrix} \quad \underline{y}_0 = \underline{0}$$

$$G(\underline{y}_0) = 1 - \frac{0,25}{0,55} - \frac{(2)^2}{4,4} = 0,34$$

$$\nabla G(\underline{y}_0) = \nabla g(\underline{x}) \underline{DL} = \{-0,21, -1,82, 0,025\} \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0,025 & 0,043 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$$

$$= \{-0,13, -0,078, 0,0088\}$$

$$\nabla G(\underline{y}_0) = 0,152$$

$$\underline{\alpha}_0 = - \frac{\nabla G(\underline{y}_0)}{|\nabla G(\underline{y}_0)|} = \{0,85, 0,52, -0,058\}$$

$$\underline{y}_1 = \underline{0} + \frac{G(\underline{y}_i)}{|\nabla G(\underline{y}_i)|} \underline{\alpha}_i^T = \frac{0,34}{0,152} \begin{Bmatrix} 0,85 \\ 0,52 \\ -0,058 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,90 \\ 1,16 \\ -0,13 \end{Bmatrix}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\underline{y}_1^T \underline{y}_1} = 2,230$$

$$\underline{x}_1 = \underline{DL} \underline{y}_1 + \underline{M} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0,025 & 0,043 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,90 \\ 1,16 \\ -0,13 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 0,25 \\ 35 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,76 \\ 0,35 \\ 34,95 \end{Bmatrix}$$

Iteraatio 2. Toistetaan iterointi \underline{x}_1 :llä ja \underline{y}_1 :llä.

Yhteenveto:

Iterointi	\underline{x}	\underline{y}	$\underline{\alpha}^T$	β
0	2	0	0,85	0
	0,25	0	0,52	
	35	0	-0,058	
1	2,76	1,90	0,869	2,230
	0,35	1,16	0,444	
	34,95	-0,13	-0,038	
2	2,70	1,75	0,896	2,065
	0,34	1,09	0,444	
	34,96	-0,12	-0,037	
3	2,71	1,78	0,896	2,096
	0,34	1,10	0,444	
	34,96	-0,12	-0,037	
4	2,72	1,79	0,896	2,110
	0,34	1,11	0,444	
	34,96	-0,12	-0,037	
5	2,72	1,79	0,896	2,110
	0,34	1,11	0,444	
	34,96	-0,12	-0,037	

Tulokset:

$$\underline{x}^* = \begin{Bmatrix} 2,72 \\ 0,34 \\ 34,96 \end{Bmatrix} \quad \underline{y}^* = \begin{Bmatrix} 1,79 \\ 1,11 \\ -0,12 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\alpha}^* = \{0,896, 0,444, -0,037\}$$

$$\beta = 2,110$$

$$\vec{\alpha}^* \Gamma = \{0,896, 0,444, -0,037\} \begin{bmatrix} 1,0 & & \\ -0,577 & 1,155 & \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} = \{0,640, 0,513, -0,037\}$$

$$\vec{y} = \frac{\vec{\alpha}^* \Gamma}{|\vec{\alpha}^* \Gamma|} = \{0,780, 0,625, -0,045\}$$

Tärkeysjärjestys perusmuuttujilla on

- 1) N
- 2) M
- 3) σ_y

Yleistetty varmuusindeksi

Yksi tärkeä varmuusindeksikäsitteen ominaisuuksista on juuri vertailtavuusominaisuus, mutta toisaalta myös yksinkertaisuus. Ditlevsen /4/ ehdotti varmuusindeksiä, joka myös täyttää vertailtavuusominaisuuden, mutta on jo huomattavasti suoritöisempi laskea kuin Hasoferin ja Lindin varmuusindeksi β_{HL} .

Määritellään aluksi painotusfunktio $\phi_n(\underline{y})$ normaaliavaruudessa siten, että

$$\int \phi_n(\underline{y}) d\underline{y} = 1 \quad (33)$$

Luotettavuus r voidaan laskea integroimalla painotusfunktio murtumattoman tilan yli

$$r = \int_{G(\underline{y}) > 0} \phi_n(\underline{y}) d\underline{y} \quad (34)$$

Painotusfunktio, joka mm. täyttää vaatimukset on n-ulotteinen standardi normaalijakauman tiheysfunktio /4/

$$\phi_n(\underline{y}) = \phi_n(\underline{y}) \, d\underline{y} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) = N(\underline{0}, \underline{1}) \quad (35)$$

Yleistetyksi luotettavuusindeksiksi saadaan

$$\beta_g = \int_{G(\underline{y}) > 0} \phi_n(\underline{y}) \, d\underline{y} \quad (36)$$

Kun rakenneyhtälö $G(\underline{y})$ on lineaarinen niin yleistetty varmuusindeksi β_g ja Hasoferin ja Lindin varmuusindeksi β_{HL} ovat yhtäsuuret ts.

$$\beta_g = \beta_{HL} \quad (37)$$

Käytännön laskelmissa β_g :n ja β_{HL} :n numeroarvot ovat usein melkein yhtenevät /9/.

Mainitakoon vielä, että vaikka painotusfunktio on valittu normaalijakauman tiheysfunktio, se ei ole oletta että perusmuuttujien jakaumat olisivat normaalijakautuneita /9/.

TILASTOLLISET MENETELMÄT

Tilastollisissa menetelmissä täytyy tuntea perusmuuttajien X_i jakaumat ja murtumattoman tilan ja murtuneen tilan välinen rajapinta.

Matemaattisesti ilmaistuna:

tunnetaan $g(\underline{X})$, $M_{\underline{X}}$, $C_{\underline{X}\underline{X}}$, $F_{\underline{X}}(\underline{X})$, (tai $f_{\underline{X}}(\underline{X})$)

ja halutaan ratkaista vaurioitumistodennäköisyys

$$P_f = \int_{g(\underline{X}) < 0} f_{\underline{X}}(\underline{X}) \, d\underline{X} \quad (38)$$

Tämän integraalin yleinen ratkaiseminen ei onnistu analyttisesti. Numeerinen integrointi ja simulointi ovat erittäin kalliita ja tietokoneaikaa vieviä, joten tarvitaan muita likimääräismenetelmiä.

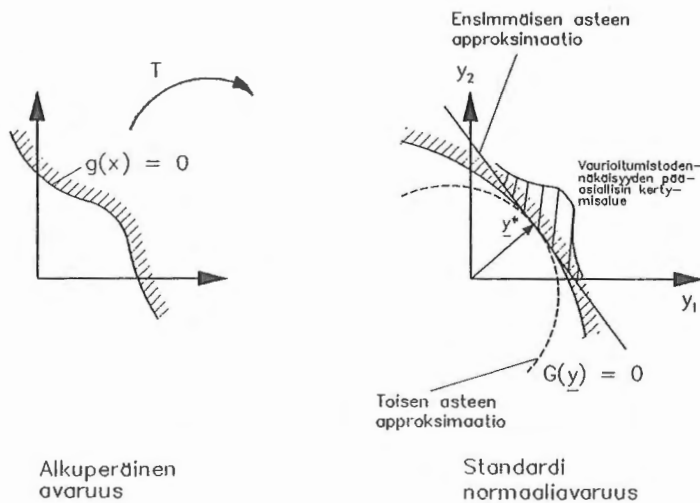
Tilastollisten luotettavuusmenetelmien perusideana on löytää sopiva kuvaus T alkuperäisestä avaruudesta standardi normaaliavaruuteen ja tehdä mahdolliset approksimaatiot tässä avaruudessa, kuva 8.

Täsmällisesti ilmaistuna:

Määritetään kuvaus $T(\cdot)$ siten, että

$$\underline{Y} = T(\underline{x}) \quad , \quad \underline{Y} = N(0, \underline{1})$$

$$g(\underline{x}) = g(T^{-1}(\underline{Y})) = G(\underline{Y}) \tag{39}$$



Kuva 8. Likimääräisen vaurioitumistodennäköisyyden laskenta.

Ensimmäisen asteen luotettavuusmenetelmissä (First-order Reliability Method, FORM) korvataan rajapinta tasolla suunnittelupisteessä \underline{y}^* , joka on myös todennäköisin murtopiste standardi normaaliavaruudessa. Huomattakoon, että $x^* = T^{-1}(y^*)$ ei ole välttämättä todennäköisin murtopiste alkuperäisessä avaruudessa, mutta se on lähellä sitä.

Vaurioitumistodennäköisyydeksi ensimmäisen asteen approksimaationa saadaan

$$P_f \approx P_{f1} = \Phi(-\beta) \quad (40)$$

$$\beta = \sqrt{y^{*T} y^*}$$

Tätä voidaan käyttää lähinnä suurusluokka-arviona.

Menetelmiä, joissa rajapinta korvataan parabelilla suunnittelupisteessä \underline{y}^* kutsutaan toisen asteen luotettavuusmenetelmiksi (Second-order Reliability Method, SORM).

Vaurioitumistodennäköisyydeksi toisen asteen approksimaationa saadaan

$$P_f \approx P_{f2} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^n (1 + \beta \kappa_i)^{-1/2} \quad (41)$$

$$\beta = \sqrt{y^{*T} y^*}$$

missä

$$\kappa_i = \text{parabelin käyryys}$$

Parabelin sovituksessa voidaan käyttää käyryyssovitusta tai pistesovitusta.

Tilastollisiin luotettavuusmenetelmiin sisältyy kolmentyyppistä epävarmuutta. Ensimmäiseen ryhmään kuuluu fysikaalisen ilmiöön kuuluva sisäinen satunnaisuus (inherent randomness), joka on otettava perusmuuttujien jakaumissa huomioon, mutta jota ei voida mitenkään muuttaa. Toiseen ryhmään kuuluu ennustamisvirheet (prediction error), mikä tarkoittaa estimointivirhettä (kuten esim. tilastollista poimintavirhettä). Kolmanteen ryhmään kuuluvat mallintamisvirheet (modelling error), jotka johtuvat mallin riittämättömydestä kuvaamaan todellista (fysikaalista) ilmiötä. Kaksi viimeistä ryhmää voivat sisältää kaksi virhekomponenttia:

systemaattisen virheen ja satunnaisen virheen. Epävarmuutta, joka liittyy ennustamis- ja mallintamisvirheisiin, voidaan pienentää tarkemmilla malleilla tai hyödyntämällä lisää luotettavuustietoa /1/.

Epävarmuuksien määrittäminen on tärkeä vaihe rakenteiden luotettavuuden määrittämiseksi. Näitä voidaan analysoida keskiarvon estimaatilla, \bar{x} , variaatiokertoimella $\delta_i = s_x/\bar{x}$; keskiarvon \bar{x} systemaattisen virheen korjauskertoimella v ja satunnaisvirheen mitalla Δ /1/.

RAKENNEJÄRJESTELMIEN LUOTETTAVUUS

Luokittelu

Rakenejärjestelmällä tarkoitetaan tässä yhteydessä rakennetta tai komponenttia, jolla on useampia murtotapoja. Järjestelmien luotettavuusteoriassa oletetaan järjestelmän tilan tietynä hetkenä riippuvan yksikäsitteisesti ainoastaan elementtien tilasta. Elementtien oletetaan olevan kahden tilan (toimii/ei toimi) komponentteja. Samoin järjestelmällä itse oletetaan olevan vain kaksi tilaa.

Otetaan käyttöön binäärinen tilanmuuttuja a_i

$$a_i = \begin{cases} 1 & , \text{ jos komponentti } i \text{ on murtumattomassa tilassa} \\ 0 & , \text{ jos komponentti } i \text{ on murtuneessa tilassa} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n$$

missä n on rakennejärjestelmän komponenttien lukumäärä.

Vastaavasti järjestelmän tilanmuuttuja a_s on

$$a_s = \begin{cases} 1 & , \text{ jos järjestelmä on murtumatto massa tilassa} \\ 0 & , \text{ jos järjestelmä on murtuneessa tilassa} \end{cases}$$

Oletuksen mukaan a_s voidaan lausua yksikäsitteisesti komponenttien tilanmuuttujien avulla

$$a_s = \phi(\underline{a}) \quad , \quad \underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad (42)$$

Funktiota ϕ kutsutaan rakennefunktioksi. Jos rakennefunktio on ei-laskeva, ei-vakio kaikkien argumenttien a_i suhteen, järjestelmän sanotaan olevan koherentti.

Rakennefunktio on yksinkertainen vain erikoistapauksessa: sarjarakenne, rinnakkaisrakenne tai k/n -rakenne.

Sarjarakenne on murtumattomassa tilassa, jos sen jokainen komponentti on murtumattomassa tilassa.

$$\phi(\underline{a}) = \prod_{i=1}^n a_i = \min(a_1, \dots, a_n) \quad (43)$$

Rinnakkaisrakenne on murtumattomassa tilassa, jos yksikin komponentti on murtumattomassa tilassa.

$$\phi(\underline{a}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i) = \max(a_1, \dots, a_n) \quad (44)$$

k/n -rakenne on murtumattomassa tilassa, jos vähintään k komponenttia n :stä komponentista on murtumattomassa tilassa ($k < n$).

$$\phi(\underline{a}) = \begin{cases} 1 & , \text{ jos } \sum_{i=1}^n a_i > k \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases} \quad (45)$$

Yleisen rakennejärjestelmän tapauksessa rakennefunktio voidaan lausua toimintapolkujen tai katkosjoukkojen avulla.

Toimintapolku on niiden komponenttien joukko, joiden murtumattomuus takaa järjestelmän murtumattomuuden. Minimitoimintapolku on joukko, jossa yhdenkin komponentin murtuminen johtaa järjestelmän murtumiseen.

Katkosjoukko on niiden komponenttien joukko, joiden murtuminen johtaa järjestelmän murtumiseen. Minimikatkosjoukko on minimaalinen katkosjoukko: jos yksikin murtuneessa tilassa oleva komponentti vaihdetaan murtumattomassa tilassa olevaan komponenttiin, ei järjestelmä ole enää murtuneessa tilassa. Merkitään minimitoimintapolkufunktiota

$$S_{\ell}(\underline{a}) = \pi \prod_{a_i \in S_{\ell}} a_i$$

missä s_{ℓ} on ℓ :s minimitoimintapolku.

Järjestelmä voidaan esittää minimitoimintapoluista koostuvassa rinnakkaisrakenteena, joten rakennefunktiksi saadaan

$$\phi(\underline{a}) = 1 - \pi(1 - S_{\ell}(\underline{a})) = 1 - \pi(1 - \prod_{a_i \in S_{\ell}} a_i) \quad (46)$$

Vastaavasti merkitään minimikatkosfunktiota

$$c_k(\underline{a}) = 1 - \prod_{a_i \in C_k} (1 - a_i) \quad (47)$$

missä c_k on k :s minimikatkosjoukko.

Rakennejärjestelmä voidaan esittää myös rinnakkaisrakenteisista minimikatkosjoukoista koostuvana sarjarakenteena, joten rakennefunktiksi saadaan

$$\phi(\underline{a}) = \prod_k c_k(\underline{a}) = \prod_k (1 - \prod_{a_i \in C_k} (1 - a_i)) \quad (48)$$

Rakennejärjestelmän luotettavuus saadaan laskettua kaavasta (49)

$$P_R = E[\phi(\underline{A})] = P(\phi(\underline{A}) = 1) \quad (49)$$

missä $A_i = \begin{cases} 1 & , \text{ jos komponentti on murtumattomassa tilassa} \\ 0 & , \text{ jos komponentti on murtuneessa tilassa} \end{cases}$

$$\phi(\underline{A}) = \begin{cases} 1 & , \text{ jos järjestelmä on murtumattomassa tilassa} \\ 0 & , \text{ jos järjestelmä on murtuneessa tilassa} \end{cases}$$

Vaurioitumistodennäköisyys saadaan vastaavasti kaavasta (50)

$$P_F = P(\phi(\underline{A}) = 0) = 1 - P(\phi(\underline{A}) =) = 1 - E[\phi(\underline{A})] = 1 - P_R \quad (50)$$

Betoni-, teräs- yms. rakenteissa komponenttien tilat eivät juuri koskaan ole toisistaan riippumattomia, joten edellä kuvattu menetelmä ei ole kovinkaan käytökelpoinen rakenteiden luotettavuutta arvioitaessa. Monet staattisesti määrätyt rakenteet kuuluvat sarjarakenteisiin ja samoin staattisesti epämääräiset rakenteet, jos oletetaan komponenttien täydellinen plastisoituminen ja mekanismin muodostuminen määritellään murtumiseksi /9/. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan sarjarakenteita, jotka ovat tärkein ryhmä. Muiden kuin sarjarakenteiden ensimmäisen ja toisen asteen luotettavuusmenetelmät ovat vielä kehitteillä /9/.

Sarjarakenteet

Rakennejärjestelmän jokaisen murtotavan varmuusmarginaali z_i voidaan määritellä perusuuttujien x_i avulla. Tarkastellaan rakenneyhtälöitä jokaiselle murtotavalle

$$g_i(\underline{x}) \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

$$\text{Murtotapa } i = \{g_i(\underline{x}) < 0\}$$

Murtotavan i vaurioitumistodennäköisyys p_i

$$p_i = P(g_i(\underline{x}) < 0)$$

Määritellään Boolean tilamuuttujat A_i ja B_i

$$A_i = \begin{cases} 1 & , \text{ jos } g_i(\underline{x}) > 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases}$$

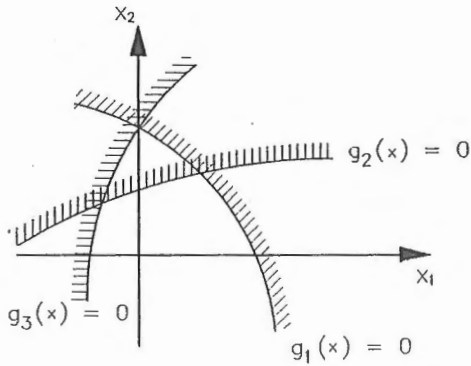
$$B_i = 1 - A_i \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

Sarjarakenteelle saadaan rakennefunktioiksi

$$A_S = A_1 A_2 \dots A_k \quad (51)$$

Vaurioitumitodennäköisyydeksi saadaan

$$P_F = P\left(\bigcup_{i=1}^k g_i(\underline{X}) < 0\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^k g_i(\underline{X}) > 0\right) \quad (52)$$



Kuva 9. Rakennejärjestelmien murtotavat.

Sarjarakenteen vaurioitusmistodennäköisyydelle voidaan muodostaa rajat yksittäisten murtotapojen vaurioitusmistodennäköisyyksistä /2/

$$\begin{aligned} \max B_i < B_S < \sum_{i=1}^k B_i \\ \max p_i < p_F < \sum_{i=1}^k p_i \end{aligned} \quad (53)$$

Tarkeimmat rajat saadaan ottamalla murtotapojen keskinäinen korrelaatio huomioon /5/

$$P_1 + \sum_{i=2}^k \max \{p_i - \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}, 0\} < p_F \quad (54)$$

$$p_F < \sum_{i=1}^k p_i - \sum_{i=2}^k \max_{j < i} p_{ij}$$

missä

$$p_{ij} = E[B_i B_j] = P(g_i(\underline{X}) < 0 \text{ ja } g_j(\underline{X}) < 0)$$

Nämä rajat riippuvat murtotapojen numeroinnista ja eri numerointi voi antaa suurimman alarajan ja pienimmän ylärajan. Käytännössä riittää murtotapojen numerointi laskevasti vaurioitumistodennäköisyyden p_i mukaan /9/.

Ensimmäisen asteen approksimaatio tarkemmista rajoista saadaan asettamalla jokaisen rajapinnan suunnittelupisteeseen tangenttitaso ja laskemalla näin saadun monitahokkaan avulla vaurioitumistodennäköisyys.

Tarkastellaan varmuusmarginaalia

$$z_i = g_i(\underline{X}) \approx \beta_i + \bar{\alpha}_i^T \underline{Y}, \quad E[z_i] = \beta_i, \quad \sigma_{z_i} = 1$$

Asetetaan (kuva 10)

$$p_i \approx p_{i1} = \Phi(-\beta_i)$$

$$p_{ij} \approx p_{ij1} = P(Z_i < \beta_i \cap Z_j < \beta_j) = \Phi_2(-\beta_i, -\beta_j; \rho_{ij}) \quad (55)$$

$$\rho_{ij} = E \left[\left(\frac{Z_i - \beta_i}{1} \right) \left(\frac{Z_j - \beta_j}{1} \right) \right] = E[\bar{\alpha}_i^T \underline{Y} \underline{Y}^T \bar{\alpha}_j^T] = \bar{\alpha}_i^T \bar{\alpha}_j^T \quad (56)$$

Kaksiulotteinen standardi normaalijakauma Φ_2 voidaan laskea seuraavasti

$$\Phi_2 = \Phi(-\beta_i) \Phi(-\beta_j) + \int_0^\rho \phi_2(-\beta_i, -\beta_j; \rho) d\rho \quad (57)$$

Kahden murtotavan yhteisesiintymisen todennäköisyyttä p_{ij} voidaan arvioida seuraavasti /6/, kuva 10.

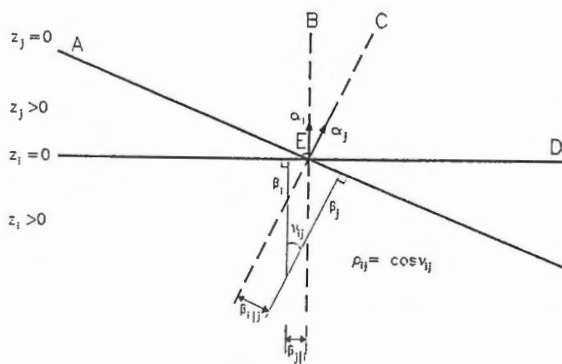
$$p_{ij} > 0 : \quad \max \{p_1, p_2\} < p_{ij} < p_1 + p_2 \quad (58)$$

$$p_{ij} < 0 : \quad 0 < p_{ij} < \min \{p_1, p_2\} \quad (59)$$

missä

$$p_2 = \Phi(-\beta_1) \Phi\left(-\frac{\beta_j - \beta_1 \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \quad (60)$$

$$p_1 = \Phi(-\beta_j) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \beta_j \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \quad (61)$$



Kuva 10. Rakennejärjestelmän murtotapojen yhteisesiintymisen geometrinen tulokinta /6/.

Yhteenvetona voidaan esittää sarjarakenteen vaurioitumistodennäköisyyden ensimmäisen asteen rajat

$$p_1 + \sum_{i=2}^k \max \left\{ p_i - \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}, 0 \right\} < p_F \quad (62)$$

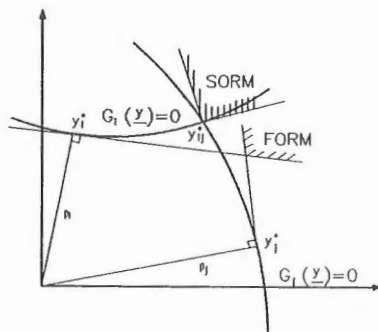
$$p_F < \sum_{i=1}^k p_i - \sum_{i=2}^k \max_{j < i} p_{ij}$$

missä

$$p_{ij,u} = \begin{cases} p_1 + p_2 & , \rho_{ij} > 0 \\ \min(p_1 + p_2) & , \rho_{ij} < 0 \end{cases} \quad (63)$$

$$p_{ij,l} = \begin{cases} \max(p_1, p_2) & , \rho_{ij} < 0 \\ 0 & , \rho_{ij} > 0 \end{cases} \quad (64)$$

Sarjarakenteen toisen asteen luotettavuusanalyysissä sekä yksittäisien murtotapojen vaurioitumistodennäköisyydet p_i että kahden murtotavan yhteisvaikutuksen esiintymistodennäköisyydet p_{ij} lasketaan toisen asteen menetelmillä, kuva 11 /9/.



Kuva 11. Ensimmäisen ja toisen asteen approksimaation ero yhteisen murtumistilan määrittämisessä.

Rinnakkaisrakenteet

Rinnakkaisrakenteiden luotettavuusmenetelmät eivät ole vielä kehittyneet niin pitkälle kuin sarjarakenteiden.

Rinnakkaisrakenteen on murtuneessa tilassa, jos kaikki varmuusmarginaalit ovat negatiivisia. Vaurioitumistodennäköisyydeksi saadaan siten

$$P_F = P(\bigcap_i g_i(\underline{X}) < 0)$$

Samantapaisten yksinkertaisten rajojen kuin sarjarakenteissa tarkkuus ei ole riittävä ja tarkempia rajoja ei ole vielä johdettu.

Ensimmäisen asteen approksimaatio saadaan kuvan 11 mukaisesti. Vaurioitumistodennäköisyys on siten

$$P_F \approx P(\bigcap_i \beta_i + \alpha_i \underline{Y} < 0) = P(\bigcap_i u_i < -\beta_i) = \Phi(-\underline{\beta}, \underline{R}) \quad (65)$$

missä $\underline{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Bmatrix}$ varmuusindeksivektori

\underline{R} = korrelaatiomatriisi yksittäisten murtotapojen välillä, joita on approksimoitu ensimmäisen asteen menetelmillä.

Lopuksi esitetään täysin yleisen rakennejärjestelmän vaurioitumistodennäköisyyden kaava.

$$P_F = P(\bigcup_k \bigcap_{i \in C_k} g_i(\underline{X}) < 0) \quad (66)$$

Tässä rakennejärjestelmä on esitetty rinnakkaisista minimikatkosjoukoista muodostuneena sarjarakenteena. Vaurioitumistodennäköisyyden approksimointi toisen asteen luotettavuusmenetelmillä palautuu moniulotteisen optimointiongelman ratkaisemiseen. Näiden ratkaisemiseksi ei ole olemassa vielä tehokkaita laskenta-algoritmeja.

MERKINNÄT

- \underline{A} pystyvektori
- A binäärinen tilamuuttuja
- B binäärinen tilamuuttuja
- \underline{C}_{xx} kovarianssimatriisi (alkuperäisessä avaruudessa)

C	kovarianssimatriisi (standardi normaaliavaruudessa)
D_{-yy}	keskihajontamatriisi
D_{-xx}	keskihajontamatriisi
E	odotusarvo-operaattori
F_i	murtotila
F	todennäköisyysjakauman kertymäfunktio
G	rakenneyhtälö (standardi normaaliavaruudessa)
L	alakolmiomatriisi
M_{-x}	keskiarvovektori (alkuperäisessä avaruudessa)
M_{-y}	keskiarvovektori (standardi normaaliavaruudessa)
N	normaalijakauma
P	todennäköisyys
P_F	vaurioitumistodennäköisyys
P_R	rakenteen luotettavuus
R	kestävyys
R_{-xx}	korrelaatiomatriisi
S	kuormitus
S_i	murtomaton tila
T	kuvaus alkuperäisestä avaruudesta standardi normaaliavaruuteen
U	normaalimuuttuja
Z	varmuusmarginaali
a^T	vaakavektori
a	binäärinen tilanmuuttuja
b_0	lineaarisen rakenneyhtälön komponentti standardi normaaliavaruudessa
b_i	lineaarisen rakenneyhtälön komponentti standardi normaaliavaruudessa
c_k	minimikatkosjoukko
f	funktio
f	todennäköisyysjakauman tiheysfunktio
g	rakenneyhtälö (alkuperäisessä avaruudessa)
n	indeksi
p_i	vaurioitumistodennäköisyys murtotavalla i
p_{ij}	kahden murtotavan yhteisvaikutuksen vaurioitumistodennäköisyys
s_x	hajonnan estimaatti
s_1	minimitoimintapolkujoukko
x_i	perusmuuttuja
x	pystyvektori

\bar{x}	keskiarvon estimaatti
y^*	suunnittelupiste standardi normaaliavaruudessa
\underline{y}	satunnaismuuttuja standardi normaaliavaruudessa
Γ	kiertomatriisi
Δ	satunnaisvirheen mitta
Σ	summaoperaattori
Φ	normaalijakauman kertymäfunktio
$\vec{\alpha}$	murtopinnan yksikkö normaalivektori
β	varmuusindeksi
ϵ	kuuluu joukkoon
δ	variaatiokerroin
κ	parabelin käyryys
μ	keskiarvo
ν	keskiarvon systemaattisen virheen korjauskerroin
π	kertomafunktio
ρ	korrelaatiokerroin
σ	keskihajonta
ϕ	normaalijakauman tiheysfunktio
\emptyset	rakennejärjestelmän rakennefunktio
χ_i	satunnaismuuttuja
χ^*	suunnittelupiste alkuperäisessä avaruudessa
ψ	painotusfunktio
∇	gradienttioperaattori
∂	derivaattaoperaattori
-1	käänteiskuvaus
U	unioni
\cap	leikkaus
\vec{e}	yksikkövektori

KIRJALLISUUSLUETTELO

1. Ang, A. H. - S.; Tang, W. H. Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Vol. II: Decision, Risk and Reliability, New York, N.Y., 1984, John Wiley & Sons. 562 s.
2. Cornell, C. A. Bounds on the Reliability of Structural Systems. Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 93, 1967. ss. 171 - 200.
3. Cornell, C. A. A Probability-Based Structural Code. Journal of the American Concrete Institute, Vol. 66, No 12, 1969, ss. 974 - 985.
4. Ditlevsen, O. Generalized Second-Moment Reliability Index. Journal of Structural Mechanics, Vol. 7, 1979. ss. 435 - 451.
5. Ditlevsen, O. Narrow Reliability Bounds for Structural Systems. Journal of Structural Mechanics, Vol. 7, 1979. ss. 453 - 472.
6. Ditlevsen, O. Principle of Normal Tail Approximation. Journal of Structural Mechanics, ASCE, Vol. 107, 1981, ss. 1191 - 1208.
7. Ditlevsen, O. Uncertainty Modeling with Applications to Multidimensional Civil Engineering Systems. New York, N.Y., 1981, McGraw-Hill.
8. Hasofer, A. M. Lind, N. C. Exact and Invariant Second-Moment Code Format. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, 1974. ss. 111 - 121.
9. Madsen, H. O. Krenk, S. Lind, N. C. Methods of Structural Safety. New Jersey. 1986. Prentice-Hall. 403 s.
10. Matousek, M. Outcome of a Survey on 800 Construction Failures. Proc. IABSE Colloquium on Inspection and Quality Control Institute of Structural Engineering, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1977.

11. Rusenblueth, E. Esteva, L. Reliability Basis for Some Mexican Codes. ACI
Publication SP-31, 1972. ss. 1- 41.

Osmo Koskisto, dipl.ins, Valtion teknillinen tutkimuskeskus,
betoni- ja silikaattitekniiikan laboratorio