

AVARUUSKEHIEN GEOMETRISESTI EPÄLINEAARINEN ANALYSOINTI

Hannu Virtanen
Martti Mikkola

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No 3 1985, s. 82...97

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa on esitetty menetelmä avaruuskehien geometrisesti epälineaarisen käyttäytymisen analysoimiseksi tietokoneella. Kehän solmupisteiden ja sauvojen siirtymät ja kiertymät voivat olla mielivaltaisen suuria, mutta sauvojen muodonmuutosten oletetaan pysyvän pieninä. Yksittäisten sauvojen aksiaaliset-, taivutus- ja vääntömuodonmuutokset otetaan huomioon. Sauvoja käsitellään taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teorian mukaisesti. Aksiaalisen voiman ja taivutuksen välinen vuorovaikutus otetaan huomioon, mutta vääntö käsitellään riippumattomasti muista vaikutuksista. Ratkaisumenetelmät ovat inkrementaalisia. Jokaisella kuorma-askeleella käytetään modifioitua Newton-Raphson iterointia tai siihen lisättyä vakiokaarenpituusmenetelmää, joka mahdollistaa rajapisteiden ylityksen. Toteutetulla ohjelmalla on laskettu kaksi esimerkkiä. Ohjelmalla saatuja tuloksia on verrattu kokeellisiin ja numeerisiin vertailutuloksiin.

JOHDANTO

Rakenteiden geometrisesti ja materiaalisesti epälineaaristen ongelmien ratkaiseminen on ollut rakenteiden analysoinnin pääsuuntaus viime vuosikymmenien aikana. Erityisesti kehärakenteiden epälineaarisen käyttäytymisen analysointi on tällöin saanut osakseen huomiota. Kirjallisuudessa esitetyt menetelmät perustuvat joko elementtimenetelmään tai taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teoriaan pohjautuvaan siirtymämenetelmään.

Avaruuskehien epälineaariseen analysointiin ovat elementtimenetelmää soveltaneet Bathe & Bolourchi /1/, Belytschko, Schwer & Klein /2/ ja Remseth /3/. Bathe & Bolourchi ovat käyttäneet kolmiulotteista palkkielementtiä suurten siirtymien ja kiertymien tapauksessa. Belytschko on esittänyt suurten siirtymien ja pienten muodonmuutosten menetelmän, jossa on otettu huomioon se, että suuria kiertymiä ei voida avaruudessa pitää vektorina. Remseth on soveltanut elementtimenetelmäformulointia pienten muodonmuutosten ja kohtuullisten suurten kiertymien käsittelemiseen. Jälkimmäisen lähestymistavan ovat valinneet Connor, Logcher & Chan /4/, Tezcan & Makapatra /5/ ja Oran /6/. Connor on esittänyt menetelmän, joka soveltuu avaruuskehien analysointiin pienten siirtymien tapauksessa. Tezcan on käyttänyt kehittämänsä menetelmää myös suurten siirtymien yhteydessä, mutta on silti pitä-

nyt suuria kiertymiä kolmiulotteisessa avaruudessa vektorina. Oran on kehittänyt menetelmän, jossa sauvojen muodonmuutokset ovat pieniä, vaikka solmupisteiden siirtymät ja kiertymät voivat olla mielivaltaisen suuria. Kuten Belytschkokin Oran on käsitellyt suuria kiertymiä suuntamatriisien avulla.

Tässä artikkelissa sovelletaan Mikkolan /7, 8, 9/ esittämää menetelmää, joka perustuu taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teoriaan. Tällöin käsitellään suorista, poikkileikkaukseltaan kaksoissymmetrisistä, särmiönmuotoisista sauvoista koostuvaa kehärakennetta, jossa sauvat liittyvät kiinteästi toisiinsa solmupisteissä. Ulkoista kuormitusta esiintyy vain solmupisteissä. Aksiaalisen voiman ja taivutuksen välinen vuorovaikutus otetaan huomioon, mutta vääntö käsitellään erikseen muista vaikutuksista. Solmupisteiden ja sauvojen siirtymät ja kiertymät voivat olla suuria, mutta sauvojen muodonmuutosten oletetaan pysyvän pieninä. Sauvojen paikallisten muodonmuutosten erottamiseksi jäykän kappaleen siirtymistä käytetään päivitetyn Lagrangen mukaista esitystapaa, jossa sauvan mukana liikkuvan koordinaatiston asema päivitetään jokaisen inkrementaalisen kuormanlisäyksen jälkeen ja muodonmuutokset lasketaan mukana liikkuvan koordinaatiston suhteen. Suuria kiertymiä käsitellään jokaiseen solmuun ja sauvaan kiinteästi liittyvien yksikkökantavektoreiden ja rakennekoordinaatiston yksikkökantavektoreiden välisistä suuntakosineista koostuvien suuntamatriisien avulla. Kullakin kuorma-askeleella käytetään lisäksi modifioitua Newton-Raphson iterointia, jossa rakenteen tangentiaalinen jäykkymatriisi päivitetään kunkin askeleen alussa. Rakenteen rajapisteiden ylittämiseen käytetään vakiokaarenpituusmenetelmää /10, 9/, jossa kuorma-askleen suuruus määrätään siten, että kuorma-siirtymäkäyrällä edetään ennalta valitun vakion pituinen matka.

TEORIA

Tarkastellaan avaruuskehää, jonka alkuaan suorat sauvat liittyvät jäykästi toisiinsa solmupisteissä. Kehää kuormittavat ulkoiset kuormat solmupisteissä. Solmupisteiden ja sauvojen siirtymät ja kiertymät voivat olla suuria, mutta sauvojen muodonmuutokset oletetaan pieniksi. Yksittäisten sauvojen aksiaaliset, taivutus- ja vääntömuodonmuutokset otetaan huomioon. Aksiaalisen voiman ja taivutuksen vuorovaikutus otetaan huomioon, mutta vääntö käsitellään erikseen.

Määritellään kolme koordinaatistoa, rakennekoordinaatisto $X_1X_2X_3$, jokaiseen sauvaan liittyvä sauvakoordinaatisto $x_1x_2x_3$ ja jokaiseen solmuun liittyvä solmukoordinaatisto $y_1y_2y_3$. Sauvakoordinaatiston x_1 -akseli kulkee sauvan päiden poikkileikkausten keskipisteiden kautta. Akselit x_2 ja x_3 ovat alkuaan sauvan pääjäyhyysakselien suuntaisia. Akselien x_2 ja x_3 kiertymä x_1 -akselin ympäri on sauvan

päiden kiertymien keskiarvo. Solmupisteen mukana kiertyvän koordinaatiston $y_1 y_2 y_3$ akselit ovat alkutilanteessa samansuuntaisia vastaavien rakennekoordinaatiston akselien kanssa.

Solmun suuntamatriisi ja siirtymät

Solmun I asema rakennekoordinaatistossa voidaan määrittää kolmen siirtymäkomponentin U_I , V_I ja W_I (tai vektorin $\{V\}_I^T = \{U_I \ V_I \ W_I\}^T$) avulla. Solmun suunnan määrittelee ortogonaalinen ja -normaalinen suuntamatriisi

$$[\alpha^I] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^I & \alpha_{12}^I & \alpha_{13}^I \\ \alpha_{21}^I & \alpha_{22}^I & \alpha_{23}^I \\ \alpha_{31}^I & \alpha_{32}^I & \alpha_{33}^I \end{bmatrix} \quad (1)$$

missä $\alpha_{ij}^I = \cos(\gamma_i, X_j)$; $i, j = 1, 2, 3$.

Suuntamatriisin rivit määrittelevät siis solmukoordinaatiston yksikkökantavektorit $\bar{b}_1^I \ \bar{b}_2^I \ \bar{b}_3^I$ (akselien suunnat) rakennekoordinaatiston yksikkökantavektorien $\bar{i}_1 \ \bar{i}_2 \ \bar{i}_3$ avulla

$$\{b^I\} = [\alpha^I]\{i\}. \quad (2)$$

Solmun I kiertymänlisäykset, jotka oletetaan pieniksi, voidaan esittää vektorina

$$\{\Delta V\}_{Ir} = \{\Delta\varphi_{1I} \ \Delta\varphi_{2I} \ \Delta\varphi_{3I}\}^T. \quad (3)$$

Solmun I siirtymänlisäysvektori on

$$\{\Delta V\}_I = \{\Delta U_I \ \Delta V_I \ \Delta W_I \ \Delta\varphi_{1I} \ \Delta\varphi_{2I} \ \Delta\varphi_{3I}\}^T. \quad (4)$$

Solmun suuntamatriisi voidaan pienten kiertymänlisäysten jälkeen esittää muodossa

$$[\alpha^I]_i = [\alpha^I]_{i-1} ([1] + [\Delta\varphi^I]), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Siten suuntamatriisin muutos on muotoa

$$[\Delta\alpha^I] = [\alpha^I] [\Delta\varphi^I], \quad (6)$$

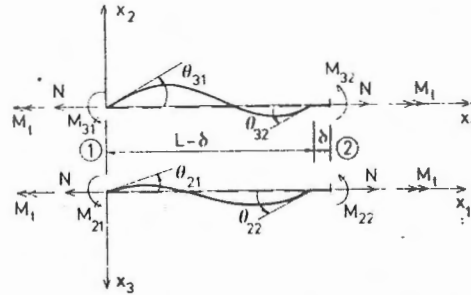
missä $[\Delta\varphi^I]$ on kiertymämatriisi

$$[\Delta\varphi^I] = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\varphi_3^I & -\Delta\varphi_2^I \\ -\Delta\varphi_3^I & 0 & \Delta\varphi_1^I \\ \Delta\varphi_2^I & -\Delta\varphi_1^I & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Sauvan suuntamatriisi ja siirtymät

Tarkastellaan kahden solmupisteen välillä olevaa sauvaa (kuva 1). Sauvakoordinaatiston x_1 -akseli liikkuu sauvan mukana kulkién sauvan päiden poikkileikkausten keskipisteiden kautta. Sauvakoordinaatiston x_2 - ja x_3 -akselit kiertyvät sauvan mukana siten, että akselien kiertymä x_1 -akselin ympäri on solmujen kiertymien keskiarvo. Sauvakoordinaatiston yksikkökantavektorit $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ voidaan esittää rakennekoordinaatistossa sauvan suuntamatriisiin (myös koordinaatiston muunnosmatriisi) $[r]$ avulla seuraavasti:

$$\{e\} = [r]\{i\}, \quad (8)$$



Kuva 1. Sauvan siirtymät (kiertymät) ja sauvavoimat.

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}; \quad r_{ij} = \cos(x_i, x_j); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Sauvan päiden siirtymät sauvakoordinaatiston suhteen ovat

$$\{u\} = \{\theta_{21} \quad \theta_{31} \quad \theta_{22} \quad \theta_{32} \quad \theta_t \quad \delta\}^T, \quad (10)$$

missä θ_{21} , θ_{22} , θ_{31} ja θ_{32} ovat sauvan päiden kiertymät x_2 - ja x_3 -akselien ympäri, θ_t on vääntymä ja δ on sauvan päiden välisen etäisyyden muutos. Sauvan muodonmuutosten lausekkeet voidaan johtaa sauvojen jäykkän liittymisen perusteella seuraavasti. Alkutilanteessa on kantavektorien $\{b^I\}$ ja $\{e\}$ välillä yhteys

$$\{b^I\}_0 = [\alpha^I]_0 \{i\} = [\alpha^I]_0 [r]_0^T \{e\}_0. \quad (11)$$

Tällöin suuntamatriisille pätee $[\alpha^1]_0 = [1]$, koska koordinaatiston y_1, y_2, y_3 akselit ovat alkuaan samansuuntaisia vastaavien rakennekoordinaatiston akselien kanssa. Jäykän liitoksen perusteella pysyy yhteys vakiona muodonmuutoksen tapahtuessa ts.

$$\{b^1\} = [r]_0^T \{\tilde{e}^1\}, \quad (12)$$

missä \tilde{e}_1^1 on sauvan kaareutuneen akselin tangentin suuntainen yksikkövektori; \tilde{e}_2^1 ja \tilde{e}_3^1 ovat sauvan pään poikkileikkauksen pääjännitysakselien suuntaiset yksikkövektorit. Deformoituneessa tilassa on kantavektorien $\{b^1\}$ ja $\{e\}$ välillä yhteys

$$\{b^1\} = [\alpha^1] [r]^T \{e\}. \quad (13)$$

Sijoittamalla yhteys (13) kaavaan (12) saadaan $\{\tilde{e}^1\}$ lausutuksi kantavektorin $\{e\}$ avulla muodossa

$$\{\tilde{e}^1\} = [r]_0 [\alpha^1] [r]^T \{e\} = [p^1] \{e\}. \quad (14)$$

Olettamalla sauvojen muodonmuutokset pieniksi sauvanpääkiertymiksi saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \theta_{21} &= -p_{13}^1, \\ \theta_{31} &= p_{12}^1, \end{aligned} \quad l = 1, 2 \quad (15)$$

Vääntymän θ_t lauseke voidaan muodostaa ristitulon $\tilde{e}_2^1 \times \tilde{e}_3^1$ projektiona sauvan akselille, jolloin saadaan

$$\theta_t = p_{22}^1 p_{23}^2 - p_{22}^2 p_{23}^1. \quad (16)$$

Solmujen siirtymänlisäykset aiheuttavat sauvan suuntamatriisiin muutoksen

$$[\Delta r] = [\Delta \psi] [r], \quad (17)$$

missä $[\Delta \psi]$ on jäykänkappaleen kiertymämatrisi

$$[\Delta \psi] = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \psi_3 & -\Delta \psi_2 \\ -\Delta \psi_3 & 0 & \Delta \psi_1 \\ \Delta \psi_2 & \Delta \psi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Jäykänkappaleen kiertymänlisäykset lasketaan siirtymänlisäysten avulla seuraavasti

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= \Delta\theta_t/2 = (\Delta\bar{V}_{10} + \Delta\bar{V}_4)/2 \\ \Delta\psi_2 &= -\arctan((\Delta\bar{V}_9 - \Delta\bar{V}_3)/(L + \Delta\bar{V}_7 - \Delta\bar{V}_1)) \\ \Delta\psi_3 &= \arctan((\Delta\bar{V}_8 - \Delta\bar{V}_2)/(L + \Delta\bar{V}_7 - \Delta\bar{V}_1))\end{aligned}\quad (19)$$

missä \bar{V} on sauvan päiden siirtymänlisäysvektori sauvakoordinaatistossa

$$\{\Delta\bar{V}\} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Sauvan siirtymien lisäykset ovat muotoa

$$\{\Delta u\} = [B]\{\Delta\bar{V}\}, \quad (21)$$

missä

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/(L+\delta) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/(L+\delta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(L+\delta) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/(L+\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(L+\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(L+\delta) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/(L+\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/(L+\delta) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sauvan voima-siirtymäriippuvuudet

Sauvan muodonmuutosten erottamiseksi jäykän kappaleen siirtymistä käytetään päivitetyä Lagrangen esitystavan mukaista sauvakoordinaatistoa vertailutilana (kuva 1). Sauvavoimien

$$\{S\} = \{M_{21} \ M_{31} \ M_{22} \ M_{32} \ M_t \ N\}^T \quad (23)$$

ja sauvan siirtymien $\{u\}$ väliset riippuvuudet määritetään taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teorian mukaan.

Kaareutumisen aiheuttama sauvan pituuden muutos otetaan huomioon siten, että

aksiaalinen muodonmuutos lasketaan kaavasta

$$\varepsilon = du/dx_1 + (dv/dx_1)^2/2 + (dw/dx_1)^2/2. \quad (24)$$

Sauvan akselin käyritymät x_1x_2 - ja x_1x_3 -tasossa ovat

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= d^2w/dx_1^2 \\ \kappa_3 &= d^2v/dx_1^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Vääntymä θ_t on määritelmän mukaisesti x_1 -akselin ympäri tapahtuvan sauvan kiertymän φ derivaatta

$$\theta_t = d\varphi/dx_1. \quad (26)$$

Materiaali on lineaarisesti kimmoista ja sauvan poikkileikkaus on symmetrinen x_1x_2 - ja x_1x_3 -tasojen suhteen ja muuttumaton x_1 -akselin suunnassa. Hooken lain mukaiset voima-siirtymä-riippuvuudet ovat voimassa eli

$$\begin{aligned} M_i &= E I_i \kappa_i, \quad i = 2, 3 \\ N &= EA \varepsilon \\ M_t &= G I_t \theta_t \end{aligned} \quad (27)$$

missä E on kimmomoduuli, G liukumuoduuli, A sauvan poikkileikkauksen pinta-ala, I_2 ja I_3 sauvan jäyhyysmomentit akselien x_2 ja x_3 suhteen sekä I_t sauvan vääntöjäyhyysmomentti.

Taivutuksen ja aksiaalisen voiman vuorovaikutus otetaan huomioon. Taivutus käsitellään erikseen kummassakin symmetriatasossa. Vääntö käsitellään erillään muista voimista. Sauvavoimat saadaan lausutuiksi sauvan siirtymien avulla

$$M_{i1} = (E I_i / L) (C_{i1} \theta_{i1} + C_{i2} \theta_{i2}) \quad (28)$$

$$M_{i2} = (E I_i / L) (C_{i2} \theta_{i1} + C_{i1} \theta_{i2})$$

$$i = 2, 3$$

$$M_t = G I_t \theta_t$$

$$\begin{aligned} N &= EA [\delta/L + b_{21}(\theta_{21} + \theta_{22})^2 + b_{22}(\theta_{21} - \theta_{22})^2 + b_{31}(\theta_{31} + \theta_{32})^2 + \\ &\quad + b_{32}(\theta_{31} - \theta_{32})^2] \end{aligned}$$

missä L on sauvan alkuperäinen pituus, C_{i1} ja C_{i2} stabiliteettifunktioita sekä b_{i1} ja b_{i2} kaareutumiskäyräfunktionä (i=2,3).

Stabiliteetti- ja kaareutumiskäyräfunktionä saadaan sauvalle tasotapauksessa esitetyistä kaavoista /9/ käyttämällä tekijälle k vastaavaa arvoa

$$k_i^2 = |N|/EI_i, \quad i = 2,3 \quad (29)$$

Sauvan tangentiaalinen jäykkymatriisi

Sauvan siirtymälisäysten $\{\Delta u\}$ ja sauvavoimien lisäysten $\{\Delta S\}$ välinen yhteys saadaan differentoimalla kaavoista (28) muotoon

$$\{\Delta S\} = [t]\{\Delta u\} \quad (30)$$

missä tangentiaalista jäykkymatriisia $[t]$ (taulukko 1) johdattaessa on toista astetta olevat termit jätetty pois.

Taulukko 1. Sauvan tangentiaalinen jäykkymatriisi.

$$\begin{bmatrix} EI_2 C_{21}/L & 0 & EI_2 C_{22}/L & 0 & 0 & 2EA(\sigma_{21} + \sigma_{22}) \\ & EI_3 C_{31}/L & 0 & EI_3 C_{32}/L & 0 & 2EA(\sigma_{31} + \sigma_{32}) \\ & & EI_2 C_{21}/L & 0 & 0 & 2EA(\sigma_{21} - \sigma_{22}) \\ & & & EI_3 C_{31}/L & 0 & 2EA(\sigma_{31} - \sigma_{32}) \\ & & & & GI_t/L & 0 \\ \text{SYMM.} & & & & & EA/L \end{bmatrix}$$

$$\text{missä } \sigma_{i1} = b_{i1}(\theta_{i1} + \theta_{i2}), \quad i = 2,3$$

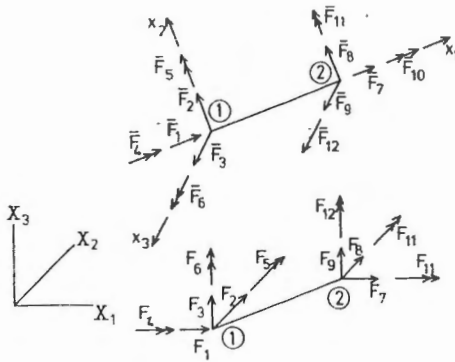
$$\sigma_{i2} = b_{i2}(\theta_{i1} - \theta_{i2})$$

Olkoot $\{F\}$ sauvanpäävoimat rakennekoordinaatistossa ja $\{\bar{F}\}$ vastaavat suureet sauvakoordinaatistossa (kuva 2). Rakenne- ja sauvakoordinaatiston suureiden välisen yhteyden välittää koordinaatiston muunnosmatriisi $[T]$ matriisiyhtälössä

$$\{F\} = [T]^T \{\bar{F}\}, \quad (31)$$

missä

$$[T] = \begin{bmatrix} [r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [r] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [r] \end{bmatrix} \quad (32)$$



Kuva 2. Sauvanpäävoimat rakenne- ja sauvakoordinaatistossa.

Sauvanpäävoimista

$$\{\bar{F}\} = \{-N \quad -V_{21} \quad -V_{31} \quad -M_t \quad M_{21} \quad M_{31} \quad N \quad V_{22} \quad V_{32} \quad M_t \quad M_{22} \quad M_{32}\}^T \quad (33)$$

taivutusmomentit, vääntömomentti M_t ja aksiaalinen voima N ovat suoraan yhteydessä siirtymiin. Leikkausvoimat lasketaan tasapainoehdoista. Sauvanpäävoimien ja sauvavoimien välisen yhteyden antaa matriisi $[B]$, jonka määrittelee yhtälö

$$\{\bar{F}\} = [B]^T \{S\} \quad (34)$$

Tasapainoyhtälöt johdetaan kuten tasotapauksessakin /8, 9/ inkrementaalisisessa muodossa ts. muodossa

$$\{\Delta F\} = [T]^T ([B]^T [t] [B] + [k_G]) [T] \{\Delta V\} = [K] \{\Delta V\}, \quad (35)$$

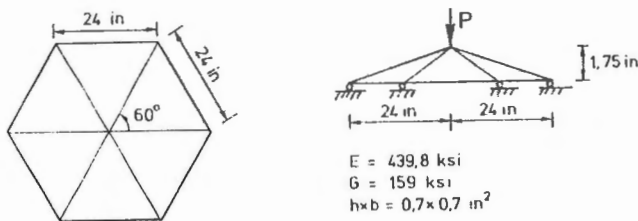
missä $[K]$ on sauvan tangentiaalinen jäykkymatriisi rakennekoordinaatistossa ja

NUMEERISET ESIMERKIT

Toteutetulla tietokoneohjelmalla on laskettu kaksi esimerkkiä ja saatuja tuloksia on verrattu kokeellisiin tai numeerisiin vertailutuloksiin.

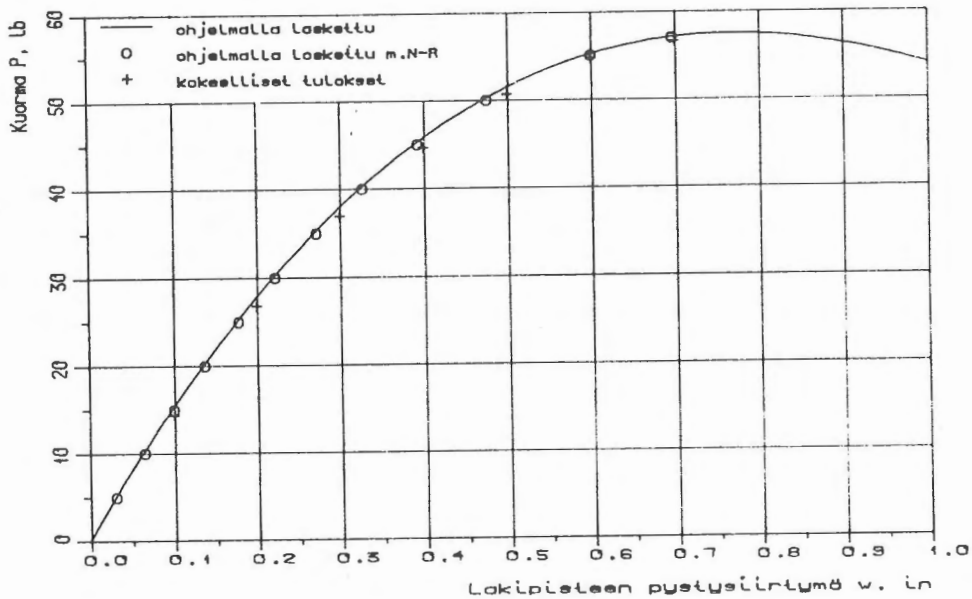
Matala avaruuskehä

Ensimmäisenä esimerkkinä laskettiin kuvan 3 kehärakenne. Ohjelmalla saatuja tuloksia lakipisteen pystysiirtymälle kuorman funktiona on verrattu kokeellisiin tuloksiin /4, 11/ (kuva 4). Ohjelmalla laskettaessa käytettiin yhtä elementtiä sauvaa kohti. Esimerkki laskettiin sekä vakiokaarenpituusmenetelmää /10, 9/ että modifioitua Newton-Raphson iterointimenetelmää käyttäen. Rakenne analysoitiin myös käyttäen Oranin /6/ tangentialista jäykkyyso-matriisia ja jäykkyyso-matriisilla, josta oli b_{1i} ja b_{2i} sisältävät tekijät poistettu. Lisäksi kiertymiä käsiteltiin joko suuntamatriisien avulla tai tavalla, jossa kokonaissiirtymät laskettiin summaamalla siirtymänlisäyksiä. Kuvassa 4 esitetty kuorma-siirtymäkäyrä on laskettu vakiokaarenpituusmenetelmällä kuorma-askeleen alkuarvolla $\Delta P_0 = 101b$.



Kuva 3. Matala avaruuskehä.

Modifioidulla Newton-Raphson menetelmällä laskettaessa kuorma-askele oli $\Delta P = 11b$. Tulokset olivat samat kaikilla eri tangentialisilla jäykkyyso-matriiseilla ja laskentamenetelmillä. Myöskään siirtymien käsittely ei vaikuttanut tuloksiin. Vakiokaarenpituusmenetelmällä kuorma-askeleen alkuarvolla $\Delta P_0 = 11b$ ja tangentialisella jäykkyyso-matriisilla termien $b_{1i} = b_{2i} = 0$ laskettaessa ratkaisu kuitenkin hajaantui siirtymän arvolla $w = 0,811 \text{ in}$. Taulukon 1 jäykkyyso-matriisia käytettäessä jou-



Kuva 4. Matalan avaruuskehän lokipisteen pystysiirtymä.

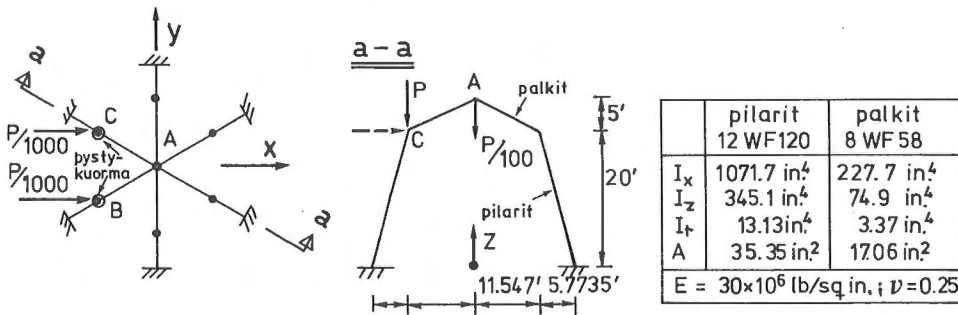
duttiin siirtymän arvolla $w = 7,22$ in vakiokaarenpituusmenetelmässä ($\Delta P_0 = 11b$) virhetilanteeseen, jossa yhtälöillä (30) /9/ ei ollut reaalista ratkaisua kuorma-askelen muutokselle. Keskimääräiset iterointikierrosten lukumäärät kuorma-askelta kohden eri menetelmillä on esitetty taulukossa 2.

Taulukko 2. Keskimääräiset iterointikierrosten lukumäärät kuorma-askeleella.

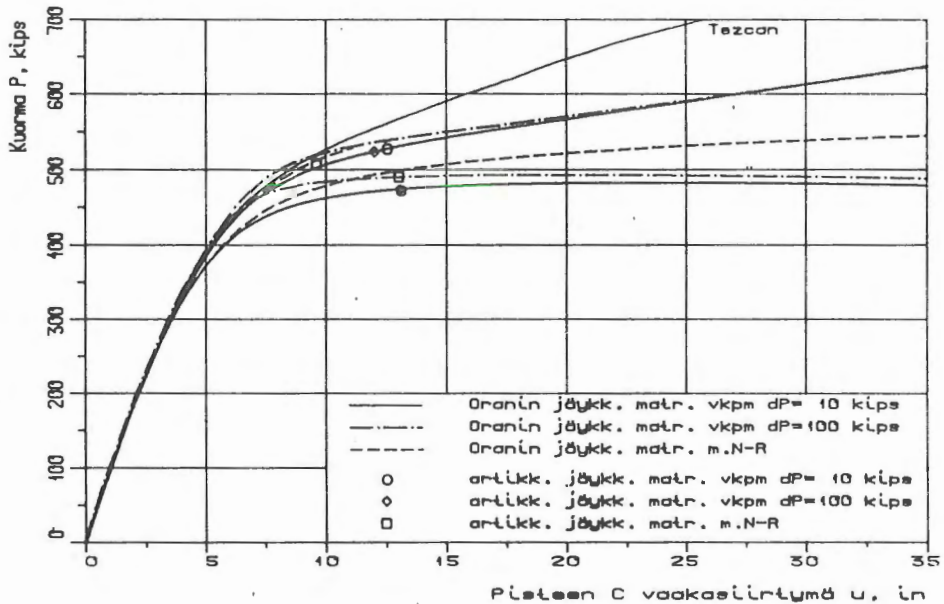
Menetelmä	vkpm $\Delta P_0 = 11b$	vkpm $\Delta P_0 = 101b$	m.N-R $\Delta P = 11b$
Taul. 1 jäykk.matr.	1,79	2,56	2,07
$b_{1i} = b_{2i} = 0$	2,27	4,47	2,67
Oranin jäykk.matr.	1,59	2,56	2,14
Kiertymät käsitellään suuntamatriisien avulla			
Taul. 1 jäykk.matr.	1,74	2,67	2,28
$b_{1i} = b_{2i} = 0$	2,24	4,29	2,93
Oranin jäykk.matr.	1,56	2,60	2,26
Kokonaisuudonmuutokset lasketaan summaamalla lisäyksistä			
	tol. $\epsilon = 0.00203$	tol. $\epsilon = 0.001$	tol. $\epsilon = 0.001$

Tezcan avaruuskehä

Toisena esimerkkinä laskettiin kuvan 5 mukainen avaruuskehä. Rakenne analysoitiin samoin kuin edellisessä esimerkissä käyttäen kolmea erilaista tangentiaalista jäykkyydsmatriisia, kahta erilaista kiertymän käsittelyä, vakiokaarenpituusmenetelmää ja modifioitua Newton-Raphson iterointimenetelmää. Laskennassa käytettiin yhtä elementtiä sauvaa kohti. Ohjelman avulla eri menetelmillä saatuja tuloksia rakenteen pisteen C vaakasiirtymälle kuorman funktiona on verrattu Tezcanin /5/ esittämiin vertailutuloksiin (kuva 6). Vertailutulokset on laskettu käsittelemällä suuria kiertymiä avaruudessa vektorina sekä lisäksi ottamatta huomioon sauvan kaareutumisen vaikutusta aksiaaliseen muodonmuutokseen. Vertailutuloksissa /5/ on kuorma luultavasti ilmoitettu kaksinkertaiseksi, sillä ohjelmalla laskettaessa päästiin rakenteen kuorma-siirtymäkäyrän lineaarisella osalla täsmälleen samoihin siirtymän u arvoihin puolta pienemmällä kuormalla. Kiertymien käsittelytapa vaikuttaa selvästi tuloksiin. Kuvan 6 kolme alinta käyrää on saatu käsittelemällä



Kuva 5. Tezcanin avaruuskehä.



Kuva 6. Rakenteen kuorma-siirtymäkäyrät.

kiertymiä suuntamatriisien avulla ja kolme ylintä laskemalla kokonaissiirtymät summaamalla siirtymänlisäyksistä. Myöskin laskentamenetelmä ja kuorma-askelen suuruus vaikuttavat tuloksiin. Vakiokaarenpituusmenetelmällä kuorma-askelen alkuarvolla $\Delta P_0 = 10$ kips laskettaessa saatiin kuitenkin kaikilla eri tangentiaalisilla jäykkymatriiseilla samat tulokset. Kuorma-askelen alkuarvolla $\Delta P_0 = 100$ kips ja modifioidulla Newton-Raphson iterointimenetelmällä (kuorma-askel $\Delta P_0 = 10$ kips) laskettaessa poikkesivat Oranin jäykkymatriiseilla saadut tulokset kahdella muulla jäykkymatriiseilla lasketuista tuloksista siirtymän arvosta $u \approx 7,5$ in lähtien. Kuvassa 6 on esitetty merkein kohdat, joissa taulukon 1 jäykkymatriiseilla laskettaessa ratkaisu hajaantui tai joutui edellisessä esimerkissä esitettyyn virhetilanteeseen vakiokaarenpituusmenetelmässä. Myös jäykkymatriiseilla termein $b_{1i} = b_{2i} = 0$ laskettaessa ratkaisu hajaantui ennen merkeillä esitettyjä siirtymän arvoja. Tällä jäykkymatriiseilla laskettaessa tarvittiin myös eniten iterointikierroksia kuorma-askelta kohti. Taulukossa 3 on esitetty eri menetelmillä tarvittavien keskimääräisten iterointikierrosten lukumäärät kuorma-askelta kohti.

Taulukko 3. Keskimääräiset iterointikierrosten lukumäärät kuorma-askeleella.

Menetelmä	vkpm $P_0=10$ kips tol. $\epsilon=0,001$	vkpm $P_0=100$ kips tol. $\epsilon=0,001$	m.N-R $P=10$ kips tol $\epsilon=0,001$
Kiertymät käsitellään suuntamatriisien avulla			
Taul. 1 jäykk.matr.	2,04	2,29	2,04
$b_{1i}=b_{2i}=0$	4,09	5,00	2,87
Oranin jäykk.matr.	2,02	2,97	2,13
Kokonaisuudonmuutokset lasketaan summaamalla lisäyksistä			
Taul. 1 jäykk.matr.	2,12	3,91	2,20
$b_{1i}=b_{2i}=0$	4,03	4,88	2,92
Oranin jäykk.matr.	2,01	3,97	2,32

LÄHDELUETTELO

- [1] Bathe, K.-J. & Bolourchi, S., Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering 14(1979), s. 961 - 986.
- [2] Belytschko, T., Schwer, L. & Klein, M.J., Large displacement, transient analysis of space frames. International Journal for Numerical Methods in Engineering 11(1977), s. 65-84.
- [3] Remseth, S.N., Nonlinear static and dynamic analysis of framed structures. Computers & Structures 10(1979), s. 879-897.
- [4] Connor, J. Jr., Logcher, R.D. & Chan, S.C., Nonlinear analysis of elastic framed structures. Journal of the Structural Division, ASCE 94(1968)ST6, s. 1525-1547.
- [5] Tezcan, S.S. & Mahapatra, B.C., Tangent stiffness matrix for space frame members. Journal of the Structural Division, ASCE 95(1969)ST6, s. 1257-1270.
- [6] Oran, C., Tangent stiffness in space frames. Journal of the Structural Division, ASCE 99(1973)ST6, s. 987-1001.
- [7] Mikkola, M.J., Modelling of geometrically nonlinear problems of framed structures. Julaisematon käsikirjoitus. 1981. 41 s.

- [8] Virtanen, H., Taso- ja avaruuskehien geometrisesti epälineaarinen analysointi. Diplomityö. Teknillinen korkeakoulu, Rakenteiden mekaniikka. Helsinki 1983. 76 s.
- [9] Virtanen, H., Mikkola, M., Tasokehien geometrisesti epälineaarinen analysointi. Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18 No.1 1985, s. 53-68.
- [10] Crisfield, M.A., A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-trough". Computers & Structures 13(1981), s. 55-62.
- [11] Chu, K-H & Rampetsreiter, R.H., Large deflection buckling of space frames. Journal of the Structural Division, ASCE 98(1972)ST12, s. 2701-2722.

*Martti Mikkola, professori, Helsingin teknillinen korkeakoulu, rakennus-
insinööriosasto*
*Hannu Virtanen, dipl.ins., Helsingin teknillinen korkeakoulu, rakennus-
insinööriosasto*