

BETONIN MUODONMUUTOSOMINAISUUDET JA LUJUUS TASOJÄNNITYS- JA TASOMUODONMUUTOSTILASSA

Matti Leskelä

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No 2 1985, s. 15...30

TIIVISTELMÄ: Tasojännitystila esiintyy tavanomaisesti monissa palkki- ja levyrakenteissa ja on luonteeltaan kaksiakselinen jännitystila. Tasomuodonmuutostila esiintyy myös joissakin betonirakenteissa, joita voidaan tarkastella ottamalla rakenteesta yksikkölevyinen kaista ja olettaen jokaiseen kaistaan sama voima- ja muodonmuutostila. Tällaisia ovat esimerkiksi seinät. Tasomuodonmuutostila on luonteeltaan kolmiakselinen jännitystila ja siitä erikoinen, että tasoa vastaan kohtisuora jännityskomponentti on kahden muun, tasossa vaikuttavan normaalijännityksen funktio, kun viimeksi mainitut ovat annettuja. Tässä esityksessä tarkastellaan lujuus- ja muodonmuutosominaisuuksia yleisten, kolmiakselisten murtoehtojen ja yhteensopivuusehtojen perusteella soveltaen epälineaarisia jännitys-muodonmuutosyhteyksiä. Murtoehtona käytetään tanskalaisen N.S. Ottosenin murtoehtoa. Tarkastelu rajoittuu pääjännitystiloihin.

JOHDANTO

Siitä huolimatta, että betonirakenteet ovat jännitystiloiltaan useimmiten vähintään kaksiakselisia, mitoituksessa sovelletaan pelkästään aksiaaliseen käyttäytymiseen perustuvia lujuusominaisuuksia. Näin päästään luonnollisesti varmimmalle puolelle. On kuitenkin tilanteita, joissa aksiaalisella lujuudella ei voida selittää kappaleen todellista käyttäytymistä ja yksinkertaisella tarkastelulla saadaan tilanne näyttämään mahdottomalta. Tällaisissa tapauksissa on turvaututtu kokeelliseen mitoitukseseen, mutta selvittämättä on saattanut jäädä se, miksi kappaleen kapasiteetti on paljon suurempi kuin laskenta aksiaalisen lujuuden perusteella osoittaa. Selitys saattaa löytyä jännitystilan luonteesta, jonka ansiosta lujuusominaisuudet muuttuvat. Tässä kirjoituksessa tarkastellaan betonin lujuusominaisuuksia pääasiassa moniakselisesti puristettuna, jolloin jännitykset pääsuunnissa murtohetkellä voivat olla moninkertaiset aksiaaliseen puristuslujuuteen f_c verrattuna.

Teorian kehittäminen tällä alueella on ollut voimakasta 1970-luvun alusta lähtien luultavasti siitä syystä, että merirakenteet ja voimalarakenteet ovat vaatineet ratkaisuja, joista ei selvitä yksinkertaisemmilla teorioilla. Joka tapauksessa ensimmäiset tutkimukset betonin moniakselisesta lujuudesta ovat jo yli viidenkymmenen vuoden takaa /18/.

Epälinearisuuden huomiointi betonimateriaalissa perustuu joko epälineaariseen kimmoisuuteen, ideaaliplastisuuteen, lujittuva-plastiseen malliin tai ns. endokrooniseen teoriaan /2/. Tässä esityksessä sovelletaan epälineaariseen kimmoisuuteen perustuvaa teoriaa.

KIMMOISUUTEEN PERUSTUVA KONSTITUTIIVINEN MALLI

Tarkastellaan betonia isotrooppisena materiaalina, jonka materiaaliominaisuuksien tunnuslukuina toimivat kimmokerroin E_c ja suppeumaluku ν_c . Konstitutiivinen yhteys yleisessä muodossa on /1/

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = E_n \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & \\ & D_{22} & D_{23} & & & \\ & & D_{33} & & & \\ \text{symm.} & & & D_{44} & & \\ & & & & D_{55} & \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{kun } E_n &= E_c / (1 + \nu_c)(1 - 2\nu_c), \quad D_{ii} = 1 - \nu_c, \quad i = 1, 2, 3 \\ D_{ii} &= (1 - 2\nu_c) / 2, \quad i = 4, 5, 6 \\ D_{ij} &= \nu_c. \end{aligned}$$

Linearisella aineella E ja ν ovat vakioita. Betonilla ne voidaan asettaa jännitys- ja muodonmuutostilan funktioiksi. Tämä tapahtuu esittämällä ne tilavuusmoduulin K_s ja leikkausmoduulin G_s funktioina, jos näille pystytään esittämään lausekkeet jännitys- ja muodonmuutostilan funktiona. K_s ja G_s ovat sekanttiarvoja, joiden riippuvuus muodonmuutostilasta tai jännitystilasta täytyy olettaa tunnetuksi,

$$K_s = K_s(\epsilon_o), \quad G_s = G_s(\gamma_o), \quad (2a)$$

$$\text{tai} \quad K_s = K_s(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad G_s = G_s(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (2b)$$

missä ϵ_o ja γ_o ovat muodonmuutostilan mukaiset oktaedriarvot, jotka ovat muodonmuutostilan invariantteja ja $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ovat edellisten kanssa yhteen kuuluvat pääjännitykset. Oktaedrimuodonmuutokset ovat pääsuunnissa vaikuttavien $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ avulla lausuttuna

$$\epsilon_o = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \quad (3a)$$

$$\gamma_o = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} . \quad (3b)$$

Kimkokertoimen ja suppeumaluvun sekanttiarvot K_s :n ja G_s :n funktioina ovat

$$E_c = 9K_s G_s / (3K_s + G_s), \quad (4a)$$

$$\nu_c = (3K_s - 2G_s) / 2(3K_s + G_s), \quad (4b)$$

kun K_s ja G_s puolestaan ovat $K_s = E_c / 3(1 - 2\nu_c)$ ja $G_s = E_c / 2(1 + \nu)$. Kimmainen jännitys-muodonmuutosyhteys voidaan kirjoittaa K_s :n ja G_s :n avulla lyhyesti oktaedri-muodonmuutosten ϵ_o ja γ_o sekä vastaavien jännitysten σ_o ja τ_o kesken /1/

$$\sigma_o = 3K_s \epsilon_o, \quad \tau_o = G_s \gamma_o, \quad (5)$$

kun oktaedrijännitykset ovat

$$\sigma_o = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (6a)$$

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} . \quad (6b)$$

MUODONMUUTOSOMINAISUUKSIEN KUVAAMINEN

Betonille on ominaista suppeumaluvun kasvu lähestyttäessä murtotilaa. Jäykkyys-ominaisuuksia voidaan säädellä suoraan E_c :n ja ν_c :n avulla tai tilavuus- ja leikkausmoduuleilla K_s ja G_s . Mallin tulee olla sellainen, että suppeumaluvun todenmukainen muuttuminen saadaan esitettyä jokaisessa jännitystapauksessa.

Ottosen /5/ esittää, että murtohetkellä suppeumaluku on aina $\nu_{cf} = 0,36$. Kasvu rajoittuu /5/:n mukaan murtumisen lähelle, jolloin tapahtuu muutos 0,2:sta 0,36:een. Ottosen säätelee kimmokerrointa ja suppeumalukua epälineaarisuusindeksi β avulla. Tiettyyn jännitystilaan $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ liittyvä epälineaarisuusindeksi määritellään algebrallisesti pienimpien pääjännitysten σ_3 avulla,

$$\beta = \sigma_3 / \sigma_{3f} , \quad (7)$$

kun jännitystila $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ toteuttaa murtoehdon /4/. Epälineaarisuusindeksi kuvaa sitä, kuinka lähellä murtotilaa jännitystila on. Määrittely (7) liittyy pelkästään puristaviin jännitystiloihin. Kun suurin pääjännitys on positiivinen, muutetaan tarkastelujännitystilaa niin, että suurin pääjännitys on enintään nollan suuruinen eli jännitystilaan lisätään hydrostaattinen jännitystila $(-\sigma_1, -\sigma_1, -\sigma_1)$, jonka jälkeen tarkastellaan murtumista ja epälineaarisuusindeksiä jännitystilan $(0, \sigma_2^1, \sigma_3^1)$ perus-

teella

$$\beta = (\sigma_3 - \sigma_1) / \sigma_{3f}^i, \quad (8)$$

$$\sigma_2^i = (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Tällä toimenpiteellä on se vaikutus, että käyttäytyminen muuttuu vedettynä lineaarisemmaksi, mikä vastaa paremmin todellisuutta. Puristettuna $\beta = 1$ vastaa murtohetkeä ja $\beta > 1$ murtumisen jälkeistä tilaa. Vedettynä on $\beta < 1$ myös murtumisen jälkeen.

Kimmokertoimen sekanttiarvon laskemiseksi määritellään jännitystilaan liittyvä invarianttisuure κ seuraavasti

$$\kappa = (\sqrt{J_2} / f_c)_f - 1/\sqrt{3}, \quad (9)$$

missä sulussa oleva ja indeksillä f varustettu invariantti liittyy jännitystilaan $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tai jos vetojännityksiä esiintyy, muunnettuun jännitystilaan $(0, \sigma_2^i, \sigma_3^i)$. f_c on aksiaalinen puristuslujuus (0,7 K₂₈). Jos kysymyksessä on aksiaalinen kuormitus, on $\kappa = 0$ ja poikkeamajännitystilän toimen pääinvariantti $J_2 = 1,5\tau_0^2$. Riippuen κ :n suuruudesta, sekanttiarvo kimmokertoimelle E_{cf} murtotilassa on

$$E_{cf} = f_c / \epsilon_{cy}, \text{ kun } \kappa < 0,$$

$$E_{cf} = (f_c / \epsilon_{cy}) / (1 + 4(E_{co} \epsilon_{cy} / f_c - 1)\kappa), \text{ kun } \kappa > 0, \quad (10)$$

kun ϵ_{cy} on aksiaalinen huippujännitystä f_c vastaava puristuma ja E_{co} on alkukimmo kerroin. Aksiaalisten materiaaliominaisuuksien yhteensopivuusehtona on $E_{co} \epsilon_{cy} / f_c > 4/3$, jotta seuraavia lausekkeitä voidaan käyttää.

Sekanttiarvo E_c on alkuarvon ja murtoarvon funktiona

$$E_c = \frac{1}{2} E_{co} - \beta \left(\frac{1}{2} E_{co} - E_{cf} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} E_{co} - \beta \left(\frac{1}{2} E_{co} - E_{cf} \right) \right)^2 + E_{cf}^2 \beta (D(1-\beta) - 1)}, \quad (11)$$

missä positiivinen merkki liittyy jännitystiloihin ennen murtumista ja negatiivinen merkki murtumisen jälkeiseen tilaan. Parametrillä D säädellään muodonmuutoskäärän laskevan osan kaltevuutta, ts. sitä kuinka jyrkästi jännitys putoaa murtumisen jälkeen. D :lle esitetään seuraavat vaatimukset /3, 4/

$$(1 - A_E/2)^2 < D \leq 1 + A_E(A_E - 2), \quad \text{kun } A_E \leq 2$$

$$0 < D \leq 1, \quad \text{kun } A_E \geq 2, \quad (12)$$

$$A_E = E_{co} \epsilon_{cy} / f_c.$$

κ :n vaikutus muodonmuutosominaisuuksiin näkyy sekanttimoduulin murtoarvon muut-

tumisena. Kun kyseessä on suuria poikkeamajännityksiä τ_0 , on κ aina positiivinen ja sekanttimoduuli E_{cf} pienenee vastaavasti.

Suppeumaluvun sekanttiarvo määritetään Ottosenin periaatteen mukaan niin, että kasvu rajoittuu lähelle murtotilaa. v_c on vakio aina kunnes $\beta = 0,8$, minkä jälkeen tapahtuu kasvu murtoarvoon v_{cf} kun $\beta = 1$,

$$v_c = v_{cf} - (v_{cf} - v_{co}) \sqrt{1 - (\beta - 0,8)^2 / 0,04} . \quad (13)$$

Murtumisen jälkeinen kasvu perustuu ajatukseen, että kuormitusportaiden välillä tilavuusmoduuli pysyy vakiona, minkä perusteella suppeumaluku voidaan laskea. Joka tapauksessa on oltava $v_c \leq 0,5$.

Cedolin /6/ esittää tilavuusmoduulille ja leikkausmoduulille muodonmuutosten invarianteista ϵ_0 ja γ_0 riippuvat lausekkeet

$$K_s = K_0 (ab \frac{-|\epsilon_0|/c}{+d}), \quad (14)$$

$$G_s = G_0 (pq \frac{-\gamma_0/r}{-s\gamma_0+t}), \quad (15)$$

jotka ovat koetuloksiin sovitettuja parametrien a, b, c, d ja p, q, r, s, t avulla. K_0 on tilavuusmoduulin alkuarvo ($K_0 = E_{co}/3(1-2v_{co})$) ja G_0 leikkausmoduulin alkuarvo ($G_0 = E_{co}/2(1+v_{co})$). Käytetyt koetulokset ovat kaksiakselisia (tasojännitystila) ja lisäksi vakiosuhtein aikaansaatuja (proportionaalikuormitus). Funktiot eivät liene yleisiä, mikä näkyy myös suuresta yhteistutkimuksesta /13/, missä seitsemän huomattavaa tutkimuslaboratoriota Euroopassa ja Yhdysvalloissa vertasi identtisillä koekappaleilla aikaansaatuja tuloksia. Kävi selvästi ilmi, että koemenetelmä vaikuttaa tuloksiin merkittävästi, eniten tilavuusmoduulin arvioituun suuruuteen. Paras vastaavuus (14):n kanssa on saatu proportionaalikuormituksissa. Lausekkeiden parametreille Cedolin esittää arvot

$$a = 0,85, \quad b = 2,5, \quad c = 0,0014, \quad d = 0,15, \\ p = 0,81, \quad q = 2,0, \quad r = 0,002, \quad s = 2,0, \quad t = 0,19.$$

Toistaiseksi tilavuusmoduulia koskevaa täysin yksikäsitteistä ja perusteellista tietoa ei ole olemassa. Tasomuodonmuutostilassa syntyy tilanteita, joissa dilaatioita ei saada säädelyä aivan totuuden mukaisesti keskimääräisillä lausekkeilla.

Useimmissa malleissa K_s :lle on esitetty koetuloksiin sovitettu funktio, missä riippuvuutta on etsitty hydrostaattisista komponenteista, joko ϵ_0 :sta tai σ_0 :sta /6,9,10,11,12,14/. Näyttää kuitenkin siltä, että K_s on myös osittain τ_0 :n funktio. Samalla ϵ_0 on sekä σ_0 :sta että τ_0 :sta riippuva.

Tämä riippuvuus τ_0 :sta kuvastaa ϵ_0 :n olevan materiaalin sisäisten jännitysten

tai muodonmuutosten tai molempien funktio, kun sisäiset jännitykset johtuvat betonin materiaalirakenteesta tapahtuvasta uudelleen jakautumisesta. Tämä riippuvuus on tarkemmissa malleissa otettu huomioon /12,13,14/.

Kotsovos /12/ selittää yhteystekijää materiaalin sisäisten jännitysten σ_{int} avulla. Näiden jännitysten vaikutus liittyy sisäisen halkeilun tuottamaan uudelleen järjestymiseen materiaalirakenteessa ja vaikutus muodonmuutoksiin on sama kuin hydrostaattisella jännitystilalla $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{int}$. Tämä huomioiden ϵ_o ja σ_o riippuvat toisistaan kokonaisjännitystilalla $\sigma_o + \sigma_{int}$ perusteella seuraavasti

$$\epsilon_o = (\sigma_o + \sigma_{int}) / 3K_s, \quad K_s = K_s(\sigma_o), \quad (16)$$

$$\sigma_{int} / f_c = k(\tau_o / f_c)^n / (1 + l(|\sigma_o| / f_c)^m). \quad (17)$$

Parametrit k, l, m, n ovat betoniluokasta riippuvia.

$$\begin{aligned} k &= 4 / (1 + 1,137(f_c - 12,35)^{0,23}) \\ l &= 0,222 + 0,01319f_c - 0,00018f_c^2 \\ m &= -2,415, \quad \text{kun } f_c \leq 26 \text{ N/mm}^2 \\ m &= -3,5308 + 0,0428f_c, \quad \text{kun } f_c > 26 \text{ N/mm}^2 \\ n &= 1, \quad \text{kun } f_c \leq 26 \text{ N/mm}^2 \\ n &= 0,314 + 0,0264f_c, \quad \text{kun } f_c > 26 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

K_s ja G_s esitetään suhteessa alkuarvoihin K_{e1} ja G_{e1} , jotka ovat

$$\begin{aligned} K_{e1} &= 11000 + 4,72f_c^2 \\ G_{e1} &= 9224 + 165f_c + 3,374 \times 10^{-12} f_c^{8,273}. \end{aligned} \quad (19)$$

Systeemin alkujäykkyys määräytyy näiden perusteella. (19):n lausekkeet ennustavat suppeumaluvun alkuarvoksi $\nu_{co} \leq 0,15$. Sekanttioduulien suhteelliset arvot ovat

$$G_s / G_{e1} = 1 / (1 + C(\tau_o / f_c)^{d-1}). \quad (20)$$

$$K_s / K_{e1} = 1 / (1 + A_K (|\sigma_o| / f_c)^{b-1}), \quad \text{kun } |\sigma_o| / f_c \leq 2,43 \quad (21)$$

$$K_s / K_{e1} = 1 / (1 + 2^{b-1} A_K b - 2^b A_K (b-1) (f_c / |\sigma_o|)), \quad \text{kun } |\sigma_o| / f_c > 2,43.$$

Parametrit A_K, b, C, d ovat puristuslujuuden f_c funktioita,

$$\begin{aligned} A_K &= 0,516, \quad \text{kun } f_c < 26, \\ A_K &= 0,516 / (1 + 0,0043(f_c - 26)^{2,397}), \quad \text{kun } f_c \geq 26, \\ b &= 2,0 + 4,3 \times 10^{-8} f_c^{4,461} \end{aligned}$$

$$c = 3,573, \text{ kun } f_c \leq 26, \quad (22)$$

$$c = 3,573 / (1 + 0,0176(f_c - 26)^{1,414}), \text{ kun } f_c > 26,$$

$$d = 2,12 + 0,0222f_c, \text{ kun } f_c \leq 26$$

$$d = 2,7, \text{ kun } f_c > 26.$$

Jos lausekkeita (16) sovelletaan, lasketaan sekanttiarvo

$$K'_s = K_s \frac{1 + \mathcal{L}(|\sigma_o|/f_c)^m}{1 + k(\tau_o/|\sigma_o|)^n + \mathcal{L}(|\sigma_o|/f_c)^m}. \quad (23)$$

Nyt on $\epsilon_o = \sigma_o / 3K'_s$ ja K'_s :n lausekkeesta näkyy, että $K'_s \rightarrow K_s$, kun $\sigma_o \rightarrow 0$. Kun $|\sigma_o|$ kasvaa, lähestyy osoittaja ykköistä ja jos $\tau_o/|\sigma_o| \neq 0$, on nimittäjä ykköistä suurempi, eli $K'_s < K_s$. Suuruusero riippuu oktaedrijännitysten suhteesta. On huomattava, että $\tau_o = 0$ vain puhtaasti hydrostaattisessa jännitystilassa.

Edellisen perusteella tasojännitystilassa riittää, että käytetään pelkästään K_s :ää ja sisäisten jännitysten vaikutus jätetään ottamatta huomioon.

MURTOEHDOT

Jos tarkastellaan murtumista pääjännitystilan funktiona, ovat leikkausjännitykset nollija ja yhtälöstä (1) riittää normaalijännitykset sisältävä osa. Tasojännitystilassa $\sigma_1 = 0$ ja tasomuodonmuutostilassa puolestaan $\epsilon_1 = 0$. Tasojännitystilassa ei murtoehdon toteutuminen riipu muodonmuutostilasta, mutta tasomuodonmuutostilassa ehto $\epsilon_1 = 0$ säätelee kolmannen pääjännityksen suuruutta, joka riippuu jäykkyysominaisuuksista (ν_c, K_s, G_s).

Murtoehdoissa jossakin muodossa esiintyvät invariantit ovat /1,2,3/

$$(1) \text{ oktaedrisuureet } \sigma_o, \tau_o, \theta$$

$$(2) I_1, I_2, I_3, J_2, J_3.$$

$$I_1 = 3\sigma_o, \quad (24)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (25)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad (26)$$

$$J_2 = 1,5\tau_o^2 \quad (27)$$

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_o)(\sigma_2 - \sigma_o)(\sigma_3 - \sigma_o), \quad (28)$$

$$\cos 3\theta = \sqrt{2}J_3/\tau_o^3, \quad -60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ. \quad (29)$$

Murtoehtoja ovat esittäneet Ottosen /4/, Cedolin /6/, Kotsovos ja Newman /11/, Kupfer, Gerstle ja Hilsdorf (tasojännitystila) /9/ sekä William ja Warnke /8/. Monipuolisimmaksi ja tarkimmaksi näistä tunnustetaan Ottosenin murtoehto, joka käsittää kaikki rasiustapaukset.

Ottosenin murtoehtofunktio on muotoa

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = A \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + B \frac{I_1}{f_c} - 1. \quad (30)$$

Jännitystilat ennen murtumista antavat funktiolle negatiivisen arvon. Ehtoon liittyvä parametrifunktio λ on kulman θ funktio

$$\lambda = K_1 \cos\left\{\frac{1}{3} \arccos(K_2 \cos 3\theta)\right\}, \quad \text{kun } \cos 3\theta \geq 0, \quad (31)$$

$$\lambda = K_1 \cos\left\{\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-K_2 \cos 3\theta)\right\}, \quad \text{kun } \cos 3\theta \leq 0. \quad (32)$$

A , B , K_1 ja K_2 ovat sovituspäätelöparametrejä.

Tämä murtoehto on yleinen ja muihinkin materiaaleihin kuin betoniin soveltuva. Sen erikoistapauksia ovat Drucker-Pragerin myötöehto, joka saadaan, kun $A = K_2 = 0$ ja von Misesin myötöehto, joka saadaan arvoilla $A = B = K_2 = 0$ /1,19/. Invariantteja tarkastellaan algebrallisesti merkkeineen, veto positiivisena ja pääjännitykset ajatellaan suuruusjärjestykseen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Kulmasta θ on huomattava, että

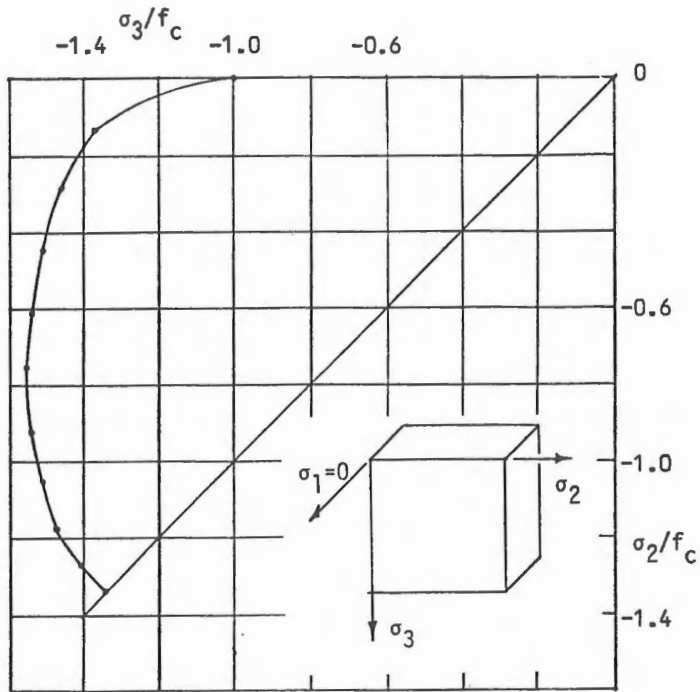
$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \text{ kun } \theta = 0,$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 > \sigma_3 \text{ kun } \theta = 30^\circ,$$

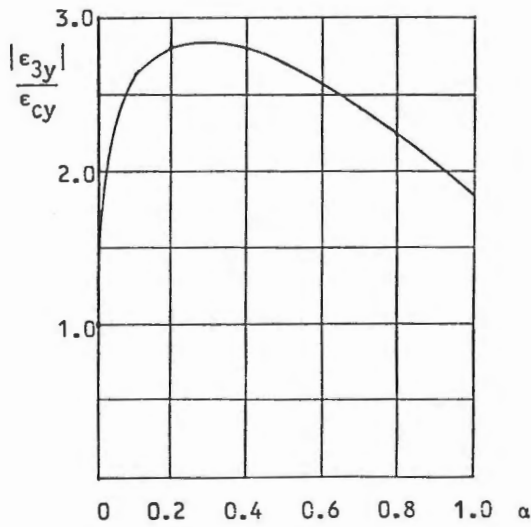
$$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \text{ kun } \theta = 60^\circ.$$

Suurin osa koetuloksista eri tutkijoilla on olemassa arvolle $\theta = 60^\circ$. Nämä ovat betonisylinterien kolmiakselikokeita, joissa jännitykset σ_1 , σ_2 on tuotettu nesteeseen paineella. Koska murtoehdon täytyy toteuttaa myös aksiaaliset jännitystapaukset, parametrien määrityksen täytyy olla sellainen, että aksiaalinen veto ja puristus ovat murtoehdon tarkkoja pisteitä, samoin kuin kaksiakselinen puristus.

Kalibrointi-arvoja suomalaisille betoneille ei ole olemassa. Seuraavissa taulukoissa on esitetty Ottosenin ehdottamia parametriarvoja /4/, jotka perustuvat amerikkalaisiin kokeisiin /17,18/ sekä saksalaisten koetulosten /15,16/ mukaiset arvot.



Kuva 1. Tasojännitystilän murtoehtopinta, Ottosenin murtoehto /4/.



Kuva 2. Maksimipuristuma murtohetkellä tasojännitystilassa, Kotsovosin jännitysmuodonmuutosmalli /12/.

Taulukko 1. Ottosenin murtoehdon vakiot /17,18/ mukaisena.

| f_{ct}/f_c | A | B | K_1 | K_2 |
|--------------|--------|--------|---------|--------|
| 0,087 | 1,2259 | 3,3699 | 11,9298 | 0,9914 |
| 0,121 | 0,8653 | 2,6322 | 9,6653 | 0,9801 |
| 0,145 | 0,6252 | 2,1386 | 8,1620 | 0,9647 |

Taulukko 2. Ottosenin murtoehdon vakiot /15/ ja /16/ perusteella /3/

| f_{ct}/f_c | A | B | K_1 | K_2 | |
|--------------|--------|--------|--------|--------|------|
| 0,121 | 2,1868 | 2,8460 | 9,1854 | 0,9962 | /15/ |
| 0,121 | 1,4426 | 2,7148 | 9,4710 | 0,9900 | /16/ |

Tasojännitystilassa tulokset eivät poikkea merkittävästi toisistaan riippumatta käytetyistä vakioista. Sen sijaan tasomuodonmuutostilassa vakiot vaikuttavat enemmän.

Murtoehtofunktiosta (30) näkyy, että murtumista säätelevät oktaedrijännitykset σ_o ja τ_o siten, että suurten poikkeamakomponenttien τ_o vaikuttaessa murtuminen tapahtuu herkimmin, kun hydrostaattinen komponentti on pieni. Edelleen huomataan, että puhdas hydrostaattinen puristusjännitys ei johda murtoehdon mukaan lainkaan murtumiseen, koska funktio on negatiivinen jos $\sigma_o < 0$, kun $\tau_o = 0$. Tämä merkitsee samalla sitä, että hallitsevan hydrostaattisen komponentin vaikuttaessa on odotettavissa huomattavaa lujuuden kasvua. Tämä näkyy myös koetuloksista /16/.

Tasomuodonmuutostilassa kasvaa hydrostaattinen komponentti, kun tasossa vaikuttavat jännitykset lähestyvät suuruudeltaan toisiaan. Myös kolmas, tasoa vastaan kohtisuora normaalijännitys on puristava, jos molemmat muut jännitykset ovat puristavia. Suppeumaluvun kasvaessa korkeammilla jännitystasoilla kasvaa myös kohtisuoran jännityksen suhteellinen suuruus verrattuna kahteen muuhun ja jännitystila lähestyy hydrostaattista.

Kun jäykkyys pienenee huomattavasti jännitystilan kasvaessa, muodonmuutokset tulevat monikymmenkertaisiksi aksiaalisiin arvoihin verrattuna tasomuodonmuutostilassa. Silti murtoehto (30) ei välttämättä ole toteutunut, jos tasossa vaikuttavien puristavien pääjännitysten suuruus on lähellä toisiaan. Tässä tilanteessa oktaedri-leikkausjännitys on pieni verrattuna vastaavan normaalijännityksen itseisarvoon. Materiaali vain jatkuvasti deformoituu jäykkyyden pienentyessä, jos kuormaa kasvatetaan. Silti tasapainotilanne löydetään joka kerta, jos murtoehto ei ole toteutunut.

Käytännön kannalta murtoehto (30) menettää merkityksensä ja kapasiteettia on tarkasteltava muodonmuutosten suuruuden perusteella.

Puristumille voidaan asettaa rajat kunkin tapauksen vaatimalla tavalla tai kapasiteettia voidaan tarkastella jäykkyyksien perusteella. Jos käytettävä konstitutiivinen malli on tarpeeksi luotettava, saadaan esimerkiksi suppeumaluvusta eräs kriteeri rajatilalle. Tähän tarkoitukseen soveltuu Kotsovosin malli. Sen sijaan Ottosenin malli menettää tasomuodonmuutostilan suuremmilla jännityssuhteilla käytökelpoisuutensa, koska sen lähtökohdaksi on, että murtohetkellä suppeumaluvulla on tietty arvo, joka on sidottu lausekkeeseen (30).

LASKENTATULOKSIA

Tasojännitystilassa laskenta Ottosenin murtoehtoa käyttäen antaa vastaavia tuloksia yleisesti hyväksytyin Kupferin ja Gerstlen murtoehdon kanssa /9/, joka esittää suljettuina funktioina eri merkisille jännityssuhteille

$$(a) \text{ kaksiakselinen veto } \sigma_{it} = f_{ct}, \quad i = 2, 3 \quad (33)$$

$$(b) \text{ veto-puristus } \sigma_{3t} = (1 + 0,8\sigma_2/f_c) f_{ct} \quad (34)$$

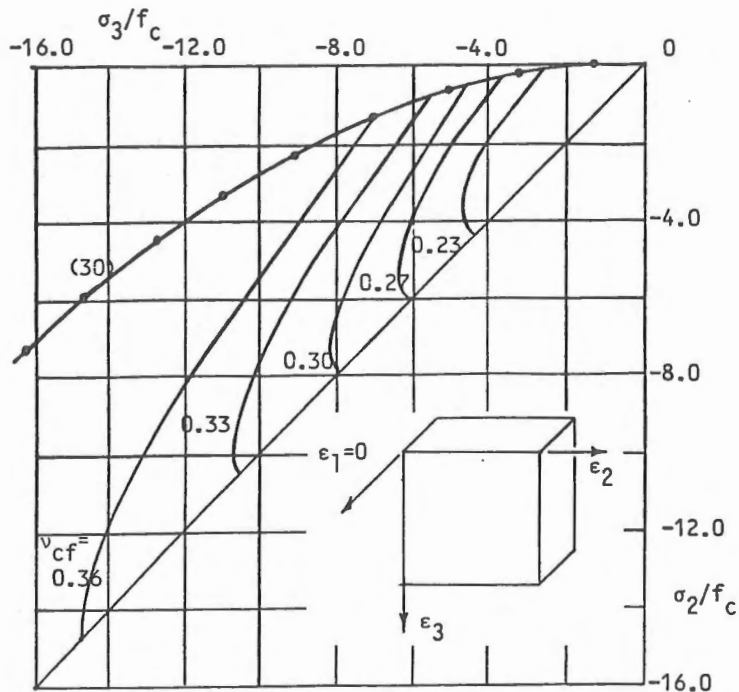
$$(c) \text{ kaksiakselinen puristus } \sigma_{3c} = - \frac{1 + 3,65\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c, \quad \alpha = \sigma_3/\sigma_2. \quad (35)$$

Edellä f_{ct} on aksiaalinen vetolujuus.

Tasomuodonmuutostilasta ei tutkittua tietoa ole juuri olemassa. Laskenta Ottosenin murtoehdon perusteella osoittaa, että suurin pääjännitys σ_{2c} , jota murtuminen edellyttää, kasvaa voimakkaasti suhteen α lähestyessä ykköstä. Samalla murtumiseen vaadittavat muodonmuutokset kasvavat satakertaisiksi ϵ_{cy} :hyn verrattuna. Murtoehdon toteutumisen rinnalla tutkittiin Kotsovosin mallilla suppeumaluvun rajoittamista rajatilan perusteena. Tämä leikkaa rajakuormaa, joka on silti vielä huomattava, riippuen käytetystä suppeumaluvun raja-arvosta $v_{cf} \leq 0,36$. Tulokset on esitetty kuvassa 3.

YHTEENVETO

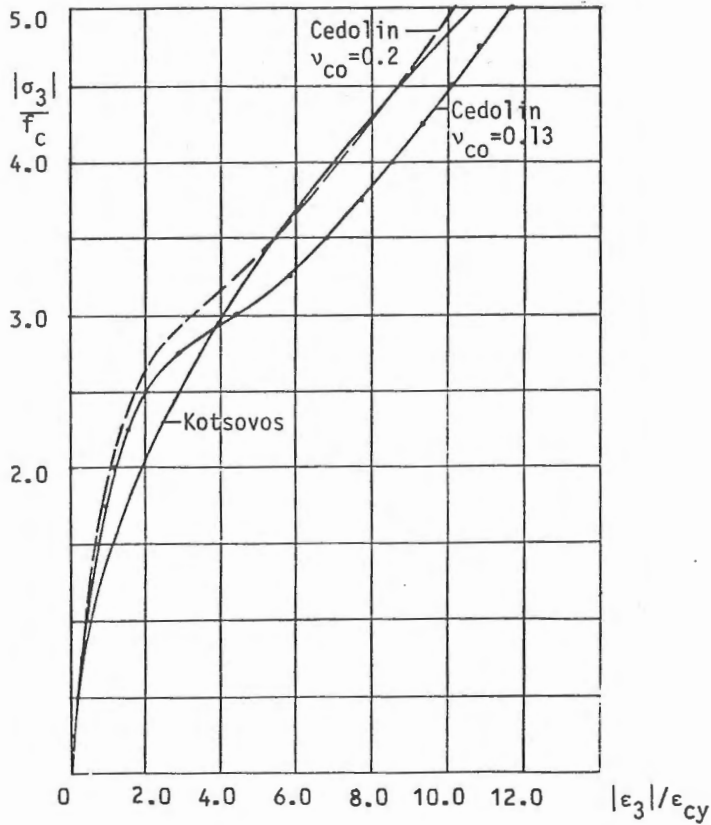
Epälineaariseen kimmoisuuteen perustuvat konstitutiiviset mallit ovat edullisia betonin käyttäytymisen kuvaamisessa. Materiaalia tarkastellaan isotrooppisena sekantti- tai tangenttiperiaatteella. Tässä yhteydessä on käytetty vain sekanttiperiaatetta, koska siitä on ollut riittävästi koetuloksia saatavilla Suomesta.



Kuva 3. Tasomuodonmuutostilan murtoehtopinta ja suppeumaluvun rajoittamiseksi mukaisia kuvaajia, Ottosenin murtoehto /4/ ja Kotsovosin jännitys- ja muodonmuutosmalli /12/.

Eri mallien tarkkuus vaihtelee, mutta tasojännitystilassa erot eivät ole kovin suuria. Sen sijaan tasomuodonmuutostilassa ratkaisee mallissa käytettävien materiaalin tunnuslukujen valinta ja erojen suuruus riippuu käytetyistä alkuoletuksista. Kotsovosin mallissa ainoa asetettava suure on aksiaalinen puristuslujuus. Cedolinin mallissa täytyy asettaa suppeumaluvun alkuarvo ja kimmokertoimen alkuarvo.

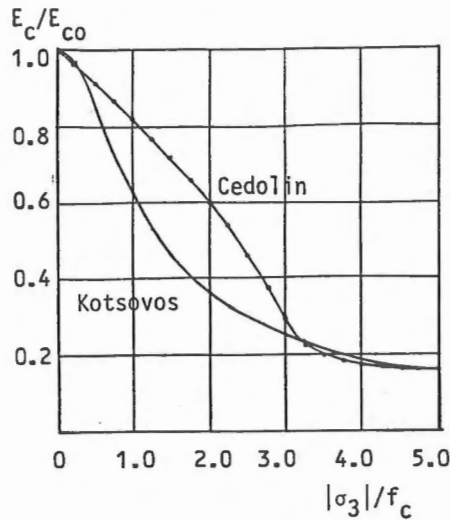
Näiden mallien vertailu osoittaa, että parhaaseen vastaavuuteen jännitys-muodonmuutos-ominaisuuksien kuvaamisessa päästään, kun asetetaan $\nu_{co} = 0,2$ ja $E_{co} = 5000 \sqrt{K_{28}}$, vaikka Kotsovosin malli ennustaa suppeumaluvulle $\nu_{co} = 0,13 \dots 0,15$ ja $E_{co} > 5000 \sqrt{K_{28}}$. Kuorman kasvaessa Cedolinin malli ennustaa suppeumaluvulle alkusi kasvua, mutta tietyssä vaiheessa saattaa tapahtua myös laskua. Tämä merkitsee aineen lujittumista, mikä ei kuitenkaan liene totuudenmukaista. Sen välttämiseksi voidaan ohjelmoitaessa asettaa vaatimus suppeumaluvun pysyttämiseksi vähintään edellisessä kuormaportaassa saavutetulla tasolla.



Kuva 4. Jännitys-puristumakuvaajia tasomuodonmuutostilassa jännityssuhteen ollessa $\alpha = 0,3$, laskettuna Kotsovosin mallilla /12/ ja Cedolinin mallilla /6/.

Kimmokertoimen sekanttiarvo putoaa Kotsovosin mallin mukaan aluksi nopeasti, mutta se saavuttaa Cedolinin mallin mukaisen arvon suurilla kuormilla. Tämän vuoksi viimeksi mainittu osoittaa alussa jäykempää käyttäytymistä (kuva 4).

Tasojännitystilaa on käsitelty huomattavan paljon eri tutkimuksissa ja siihen liittyvät mallit ovat olleet yksinkertaisia käsitellä ja ne antavat yksikäsitteisiä tuloksia sen vuoksi, että tasojännitystilaa on jännitysten ja muodonmuutosten suhteen huomattavan deviatorinen kaikilla jännityssuhteilla. Tällöin jännitysten invariantteina esitettävät murtoehdot toteutuvat kohtuullisilla jännitystasoilla ja lisäksi jännitys-muodonmuutuskäyristä löydetään selvä huippukohta /7/ vastavasti kuin aksiaalisessakin tapauksessa (kuva 2).



Kuva 5. Kimmokertoimen sekanttiarvon pieneneminen jännityssuhteen ollessa $\alpha = 0,3$ tasomuodonmuutostilassa.

Tasomuodonmuutostila on kolmiakselisen jännitystilän yksityistapaus, jota ei ole tutkittu sanottavasti. Tällainen jännitystila löytyy kuitenkin eräistä käytännön rakenteista. Jos yritetään saada jännityksinä lausuttu murtoehto toteutumaan, kun tasossa vaikuttavat jännitykset ovat samaa suuruusluokkaa (α lähellä ykköstä), joudutaan oletamaan hyvin korkea jännitystila, jolloin betonin jäykkyys on jo hyvin pieni ja muodonmuutokset jopa satakertaisia aksiaaliseen murtotilaan verrattuna. Tällaista ei voida hyödyntää käytännössä.

Useimmiten tasomuodonmuutostilassa esiintyy jännityskombinaatioita, joissa tasossa vaikuttavista pääjännityksistä vain toinen on huomattava (pieni α). Nämäkin jännityssuhteet antavat jo suuremman lujuuden kuin f_c , esimerkiksi $\alpha = 0$ vastaa lujuutta $\sigma_{3c} \approx 1,5f_c$. Jo hyvin pieni α :n lisäys nostaa lujuutta runsaasti tämän yli, mikä näkyy kuvasta 3.

Esitetyt jännitystilat selittävät monia muuten selittämättä pysyviä ilmiöitä, mm. sen käytännössä havaitun tosiasian, että koekuormituksissa ei laattojen myötöviivoilla havaita betonin puristumurtumisen ulkoisia tunnusmerkkejä, vaikka kiertymät olisivat moninkertaisesti puristuman ϵ_{cu} edellyttäviä. Vastaavasti palkkien

myötönivelissä nämä merkit havaitaan selvästi betonin rapautuessa. Tämä antaa aiheen kysyä, mitkä ovat laattojen yllirauoituksen todelliset rajat ja todelliset kiertymäkapasiteetit.

Eri lähteiden lausekkeissa esiintyvät vakiot riippuvat käytetystä aksiaalisen puristuslujuuden määrittelystä, joka eurooppalaisessa ja amerikkalaisessa käytännössä perustuu sylinterilujuuteen. Lähteiden vakiot on muutettu kuutiolujuuteen (särmän pituus 150 mm) perustuvaan määrittelyyn käyttämällä kuutiolujuuden ja sylinterilujuuden suhteena 1/0,85.

LÄHDELUETTELO

- [1] Valiappan, S., Continuum mechanics fundamentals. A.A. Balkema. Rotterdam 1981.
- [2] State-of-the-Art Report on finite element analysis of reinforced concrete. ASCE (American Society of Civil Engineers) 1982.
- [3] CEB Bulletin d'Information No 156: Concrete under multiaxial states of stress, constitutive equations for practical design. June 1983.
- [4] Ottosen, N.S., A failure criterion for concrete. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 103 No EM4 1977.
- [5] Ottosen, N.S., Constructive model for short time loading of concrete. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 105 No EM1 February 1979.
- [6] Cedolin, L., Crutzen, Y.J.R., Dei Poli, S., Triaxial stress-strain relationship for concrete. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 103 No EM3 June 1977.
- [7] Ahmad, S.H., Shah, S.P., Complete triaxial stress-strain curves for concrete. ASCE Journal of the Structural Division Vol. 108 No ST4 April 1982.
- [8] William, K.J., Warnke, E.P., Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. IABSE Report Vol. 19, 1974. Colloquium on "Concrete structures subjected to triaxial stresses", ISMES Bergamo. 1974.
- [9] Kupfer, H.B., Gerstle, K.H., Behavior of concrete under biaxial stresses. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 99 No EM4 August 1973.
- [10] Gerstle, K.H., Simple formulation of biaxial concrete behavior. ACI Journal January-February 1981.
- [11] Kotsovos, M.D., Newman, J.B., Generalized stress-strain relations for concrete. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 104 No EM4 August 1978.
- [12] Kotsovos, M.D., A mathematical model of the deformational behaviour of concrete under generalized stress based on fundamental material properties. Materials and Structures, RILEM Vol. 13 No 76 July-August 1980.
- [13] Gerstle, K.H., Aschl, H., Bellotti, R., Bertacchi, P., Kotsovos, M.D., Ko, H.Y., Linse, D., Newman, J.B., Rossi, P., Schickert, G., Taylor, M.A.,

Traina, L.A., Winkler, H., Zimmerman, R.M., Behavior of concrete under multi-axial stress states. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 106 No EM6 December 1980.

- [14] Stankowski, T., Gerstle, K.H., Behavior of concrete under multiaxial load histories. RILEM-CEB-CNRS International Conference on Concrete under Multi-axial Conditions, Vol. 1, Toulouse Mai 1984.
- [15] Schickert, G., Winkler, H., Versuchsergebnisse zur Festigkeit von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung. DAFStb Heft 277, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1977.
- [16] Linse, D., Aschl, H., Versuche zum Verhalten von Beton unter Mehrachsiger Beanspruchung Technische Universität München. Lehrstuhl für Massivbau, München, März 1976.
- [17] Balmer, G.G., Shearing strength of concrete under high triaxial stress - computation of Mohr's envelope as a curve. Structural Research Report No SP 23 US Dept of Int., Bureau of Reclamation, Denver, Colorado 1949.
- [18] Richardt, F.E., Brandtzaeg, A., Brown, R.L., A study of failure of concrete under combined compressive stresses. University of Illinois, Bulletin No 185, Eng. Exp. Stat., Urbana 1928.
- [19] Hoffman, O., Sachs, G., Introduction to the theory of plasticity for engineers. McGraw-Hill Book Company 1953.

Matti Leskelä, dipl.ins., Suomen Akatemian tutkimusassistentti