

## TASOKEHIEN ANALYSOINNISTA DIFFERENSSIMENETELMÄLLÄ

Pentti Tuominen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 17  
No 3 1984, s. 21...36

**YHTEENVETO:** Kirjoituksessa käsitellään differenssien käyttöä tasokehien laskemisessa ja esitetään tarkasteluihin perustuva laskentamenetelmä. Sitä sovelletaan esimerkkirakenteeseen. Lisäksi tarkastellaan esitetyn menetelmän ja elementtimenetelmän välistä yhteyttä. Tämä antaa aiheen käyttää differenssimuotoisia tasapainoyhtälöitä kehäsauvojen jäykkyykskertoimien numeeriseen määrittämiseen. Esimerkkinä käsitellään menetelmän soveltamista suoriin poikkileikkaukseltaan muuttuviin sauvoihin. Eräitä työn kehittämismahdollisuuksia pohditaan lyhyesti.

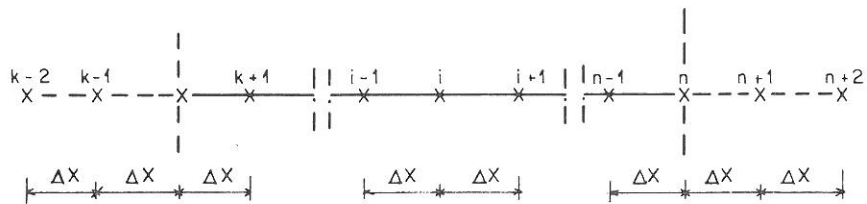
### Yleistä

Tämän kirjoituksen tarkoituksena on esittää differenssimenetelmän käyttöön perustuva tasokehien laskentamenetelmä sekä tarkastella tämän menetelmän ja elementtimenetelmän välistä yhteyttä kehärakenteita laskettaessa. Tässä yhteydessä tarkastellaan myös sauaelementtien jäykkyyismatriisien termien määrittämistä numeerisesti differenssiyhtälöitä käyttäen. Tapa on edullinen, kun kehärakenne sisältää geometrialtaan monimutkaisia sauaelementtejä ja ilmeisesti myös epälineaarisia tehtäviä käsiteltäessä. Tässä tarkastelussa rajoitutaan suoriin sauvoihin, joiden poikkileikkaus voi olla muuttuva.

### SAUVAN DIFFERENSSIVAKIOIDEN TASAPAINOYHTÄLÖT

Tarkastellaan kuvan 1 esittämää nurkkapisteiden  $k$  ja  $n$  välistä kehäsauvaa, joka on jaettu tasavälisiin  $\Delta x$ :n pituisiin osiin. Sauvalla ajatellaan olevan kummassakin päässä kahden jako-osan pituiset jatkeet. Sauvan vetojäykkyys on  $EA$  ja taivutusjäykkyys  $EI$ , jotka voivat olla muuttuvia.

Kussakin pisteessä  $(k-1) \dots (n+1)$  oletetaan tunnetuiksi sauvan pituussuuntainen siirtymä  $u$  ja pisteissä  $(k-2) \dots (n+2)$  taipuma  $v$ . Sauvan akselin venymät ja käyritykset voidaan esittää likimäärin siirtymien differenssien avulla. Tarkastellaan aluksi poikkileikkaukseltaan muuttumatonta sauvaa.



Kuva 1. Kehäsauvan (k, n) laskentapisteet. Sauvan jatkeet merkitty katkoviivalla.

Otetaan tarkasteltavaksi kuvassa 2 esitetty sauvan pistettä  $i$  ympäröivä differenssialkio.

Sauvan akselin suuntaisille alkioon vaikuttaville voimille voidaan kirjoittaa tasapainoyhtälö

$$N_{i+\frac{1}{2}} - N_{i-\frac{1}{2}} + X_i \Delta x = 0. \quad (1)$$

Kun venymä  $\epsilon_x = du/dx$  pisteissä  $i+\frac{1}{2}$  ja  $i-\frac{1}{2}$  lasketaan

siirtymien  $u_{i+1}$  ja  $u_i$  sekä  $u_i$  ja  $u_{i-1}$  differenssien avulla ja sovelletaan normaalivoiman laskemiseen kaavaa  $N = EA du/dx$ , yhtälö muuttuu siirtymien väliseksi yhtälöksi

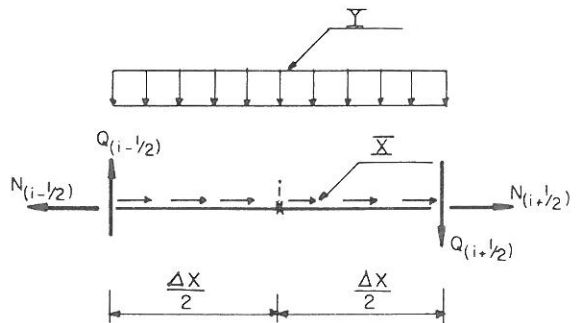
$$\frac{EA}{\Delta x} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + X_i \Delta x = 0. \quad (2)$$

Seuraavassa käytetään kaavasta (2) ja muissa esille tulevista differenssiyhtälöissä painokuvioesitystä. Esimerkiksi yhtälö (2) saa tällöin muodon

$$\frac{EAu}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + X_i \Delta x = 0. \quad (3)$$

Yhtälössä on sauvan pisteiden  $i-1$ ,  $i$  ja  $i+1$  siirtymien  $u$  kertoimet esitetty omissa ruuduissaan vasemmalta oikealle, tarkastelupisteen siirtymän kerroin aina keskimäisenä.

Sauvan akselia vastaan kohtisuorien voimien välille saadaan tasapainoyhtälö (kuva 2)



Kuva 2. Sauvan keskiosan differenssialkio ja siihen vaikuttavat voimat.

$$Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}} + Y_i \Delta x = 0. \quad (4)$$

Kun sauvan kaarevuuden muutos pisteessä  $i$  lasketaan toisen derivaatan likiarvona

$$\kappa_i \approx \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_i \approx \frac{v}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

saadaan vastaavalle taivutusmomentille  $M_i$  esitys

$$M_i \approx \frac{-EI v}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Leikkausvoiman lausekkeen  $Q = dM/dx$  approksimaationa saadaan

$$Q_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{M_{i+1} - M_i}{\Delta x} = \frac{-EI v}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Kun taipumista lasketut leikkausvoimien likiarvot sijoitetaan yhtälöön (4), tulee se korvatuksi yhtälöllä

$$\frac{EI v}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} - Y_i \Delta x = 0. \quad (8)$$

Samaan tapaan kuin edellä voidaan tasapainoyhtälöt esittää siirtymien avulla, kun tarkastellaan kuvassa 3 esitettyä  $\Delta x/2$ :n pituisista sauvan päästä erotettua alkiota.

Sauvan päästä erotetulle  $\Delta x/2$ :n pituiselle alkiolle (kuva 3) voidaan johtaa siirtymissä lausutut tasapainoyhtälöt samaan tapaan kuin edellä.

Sauvan akselin suuntaisille voimille kirjoitettua yhtälöä

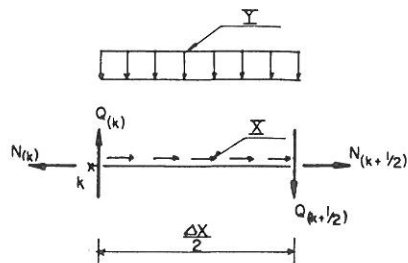
$$N_{k+\frac{1}{2}} - N_k + X_k \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (9)$$

vastaa differenssimuotoinen yhtälö

$$\frac{EAu}{\Delta x} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + X_k \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (10)$$

ja akselia vastaan kohtisuorien voimien välistä yhtälöä

$$Q_{k+\frac{1}{2}} - Q_k + Y_k \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (11)$$



Kuva 3. Sauvan päähän rajoittuva differenssialkio ja siihen vaikuttavat voimat.

yhtälö

$$\frac{E I v}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 3 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - Y_k \frac{\Delta x}{2} = 0. \quad (12)$$

Kun sauvan poikkileikkaus on muuttuva, saavat siirtymien väliset yhtälöt (3), (8), (10) ja (12) toisen asun. Otaksutaan edelleen, että palkin aksiaalinen venymä voidaan muuttuvasta poikkileikkauksesta huolimatta laskea lausekkeista

$$\epsilon_{x, i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u}{\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\epsilon_{x, k} \approx \frac{u}{\Delta x} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

sekä käyritymä lausekkeesta (5). Tällöin yhtälöiden (1) ja (4) siirtymissä esitettyt vastineet saavat muodot

$$\frac{E u}{\Delta x} \begin{bmatrix} A_{i-\frac{1}{2}} & -A_{i-\frac{1}{2}} & -A_{i+\frac{1}{2}} & A_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + X_i \Delta x = 0 \quad (15)$$

$$\frac{E v}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} I_{i-1} & -2I_{i-1} & -2I_i & I_{i-1} & +4I_i & +I_{i+1} & -2I_i & -2I_{i+1} & I_{i+1} \end{bmatrix} = Y_i \Delta x \quad (16)$$

sekä yhtälöiden (9) ja (11) vastineet muodot

$$\frac{E u}{\Delta x} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A_k & -A_{k+\frac{1}{2}} & A_{k+\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} A_k \end{bmatrix} + X_k \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (17)$$

ja

$$\frac{E v}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_{k-1} & -I_{k-1} & -I_k & \frac{1}{2} I_{k-1} & +2I_k & +\frac{1}{2} I_{k+1} & -I_k & -I_{k+1} & \frac{1}{2} I_{k+1} \end{bmatrix} = Y_k \frac{\Delta x}{2}. \quad (18)$$

Yhtälössä (18) esiintyvä ajateltu hitausmomentti  $I_{k-1}$  ei aiheuttane ongelmia.

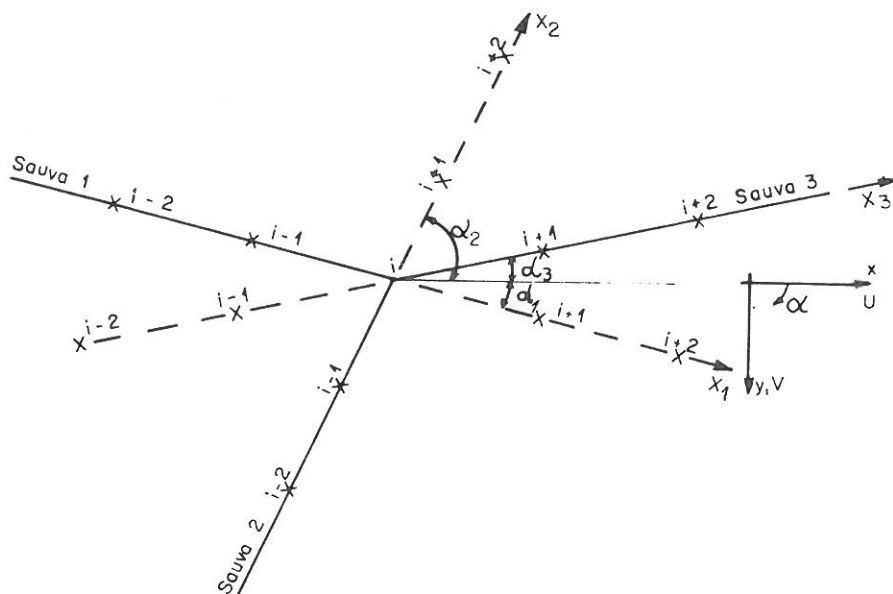
Tarkastellaan vielä vakiosuuruisen epäkeskisen normaalivoiman aiheuttamaa lisäystä sauvan akselia vastaan kohtisuorien voimien tasapainoyhtälöihin. Oletetaan, että sauvaan vaikuttavalla normaalivoimalla on vakioepäkeskisyyttä  $e$ . Normaalivoiman aiheuttama taivutusmomentti pisteen  $i$  kautta kulkevassa poikkileikkauksessa on  $M_i = N(e + v_i)$ . Tunnettujen taivutusmomenttien perusteella voidaan laskea leikkauksvoimien erotus

$$Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{N v}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

mikä tulee lisäyksenä tasapainoyhtälöiden (8) ja (16) vasempiin puoliin. Normaalivoiman vaikutuksen huomioon ottaminen on tarpeen stabiliteettitehtävissä. Vakiomomentti  $N_e$  on otettava mukaan sauvan reunaehtoja tarkasteltaessa.

#### KEHÄN NURKAN YHTEENSOPIVUUS- JA TASAPAINOEHDOT

Siirrytään tarkastelemaan kehärakenteen nurkan yhteensopivuus- ja tasapainoehtoja. Kuva 4 esittää jäykkää kehän nurkkaa, johon liittyy kolme sauva. Kunkin sauvan ajatellaan jatkuvan kahden jako-osan  $\Delta x_1$  verran nurkan ohi. Nurkan viereisissä ajatelluissa pisteissä tarvitaan laskennalliset siirtymät  $u$  ja  $v$ . Kahden jako-osan päässä olevassa pisteessä tarvitaan siirtymä  $v$ .



Kuva 4. Kehän nurkka, johon liittyy kolme sauva. Sauvojen laskentapisteet. Katkoviivalla on piirretty sauvojen ajateltu jatke.

Kehän nurkan yhteensopivuusehdot ovat ilmeiset. Kunkin sauvan nurkkapisteen siirtymät  $u$  ja  $v$  voidaan lausua peruskoordinaatiston  $(x, y)$  siirtymien  $U$  ja  $V$  avulla. Lisäksi voidaan olettaa, että sauvojen kiertymät nurkkapisteesä ovat yhtä suuria.

Kehän nurkan tasapaino on ilmaistavissa kahdella nurkkaan liittyvien sauvojen normaali- ja leikkausvoimien välisellä yhtälöllä, jotka voidaan kirjoittaa esimerkiksi  $x$ - ja  $y$ -suunnille. Lisäksi tarvitaan nurkan momenttitasapainon määrittävä

sauvojen taivutusmomenttien välinen yhtälö. Kuvassa 4 esitettyjen laskennallisten siirtymien ja nurkkapisteen siirtymien ratkaisemiseksi tarpeelliset yhtälöt on esitetty taulukossa 1. Taulukossa olevissa suureissa ensimmäinen indeksi tarkoittaa sauvaa ja toinen sauvan pistettä, jossa esiintyvistä suureista on kysymys. Samaa indeksointitapaa käytetään myös myöhemmin tässä kirjoituksessa.

Taulukko 1. Kuvassa 4 esitetyn kehän nurkan käsittelyssä tarpeelliset yhtälöt. Sarakkeissa 'lävistäjällä' ilmoitetaan kuvan 4 mukainen sauva ja laskeutapiste sekä siirtymä, jonka kerroin on luontevaa sijoittaa muodostettavan yhtälöryhmän lävistäjälle. Tasapainoyhtälöissä eksponentti n saa arvon 0 sauvan alkupäässä ja arvon 1 loppupäässä.

Sauva	Sauvan osa	Lävistäjällä		Yhtälö (differenssimuodossa)
		Piste	Siirtymä	
1	nurkka	1, i	u	yht. (10) tai (15)
1	"	1, i	v	yht. (12) tai (18)
1	ulkop.	1, i+1	u	$\sum_{l=1}^3 (-1)^n (N_{1,i} \cos \alpha_1 + Q_{1,i} \sin \alpha_1) = 0$
1	"	1, i+1	v	$M_{1,i} + M_{2,i} - M_{3,i} = 0$
1	"	1, i+2	v	$\sum (-1)^n (N_{1,i} \sin \alpha_1 - Q_{1,i} \cos \alpha_1) = 0$
2	nurkka	2, i	u	$u_{2,i} = U \cos \alpha_2 + V \sin \alpha_2$
2	"	2, i	v	$v_{2,i} = -U \sin \alpha_2 + V \cos \alpha_2$
2	ulkop.	2, i+1	u	yht. (10) tai (15)
2	"	2, i+1	v	$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{2,i} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{1,i} = \phi$
2	"	2, i+2	v	yht. (12) tai (18)
3	ulkop.	3, i-2	v	yht. (12) tai (18)
3	"	3, i-1	u	yht. (10) tai (15)
3	"	3, i-1	v	$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{3,i} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{1,i} = \phi$
3	nurkka	3, i	u	$u_{3,i} = U \cos \alpha_3 + V \sin \alpha_3$
3	"	3, i	v	$v_{3,i} = -U \sin \alpha_3 + V \cos \alpha_3$

Taulukossa esiintyviä poikkileikkaukseltaan muuttuvan sauvan l suureita vastaa-

vat painokuviot

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{1,i} \approx \frac{v}{\Delta x_1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$N_{1,i} \approx \frac{EA_i u}{\Delta x_1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$M_{1,i} \approx \frac{-EI_i v}{(\Delta x_1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$Q_{1,i} \approx \frac{-Ev}{(\Delta x_1)^3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_{i-1} & l_{i-1} & \frac{1}{2}l_{i-1} & -\frac{1}{2}l_{i+1} & -l_{i+1} & \frac{1}{2}l_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

### NURKAN TASAPAINO- JA YHTEENSOPIVUUSEHTOJEN LUKUMÄÄRÄN VÄHENTÄMINEN

Ottamalla tuntemattomaksi nurkan kiertymä voidaan taulukossa 1 esitettyjen siirtymien ja yhtälöiden määrää vähentää. Sauvan  $l$  kiertymä kehän nurkkapisteessä on

$$\phi \approx \frac{v}{\Delta x_1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Tämän perusteella sauvan ajatellulla jatkeella olevan pisteen taipuman määrittää aina toinen lausekkeista

$$\begin{aligned} v_{1,i+1} &= v_{1,i-1} + 2\phi \Delta x, \\ v_{1,i-1} &= v_{1,i+1} - 2\phi \Delta x. \end{aligned} \quad (25)$$

Lisäksi on

$$\begin{aligned} u_{1,i} &= U \cos \alpha_1 + V \sin \alpha_1, \\ v_{1,i} &= -U \sin \alpha_1 + V \cos \alpha_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Sauvakohtaisissa koordinaatistoissa ovat sauvan  $l$  taivutusmomentti

$$M_{1,i} \approx \frac{EI_i v}{(\Delta x_1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EI_i v}{(\Delta x_1)^2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI_i}{\Delta x_1} 2\phi, \quad (27)$$

normaalivoima

$$N_{1,i-\frac{1}{2}} \approx \frac{EA_{i-\frac{1}{2}} u}{\Delta x_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

tai vastaavasti  $N_{1,i+\frac{1}{2}}$

ja leikkausvoima

$$Q_{1,i-\frac{1}{2}} \approx \frac{-Ev}{(\Delta x_1)^3} \begin{bmatrix} -l_{i-1} & 2l_{i-1} & +l_i & -l_{i-1} & -2l_i & l_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-Ev}{(\Delta x_1)^3} \begin{bmatrix} -l_{i-1} & 2l_{i-1} & +2l_i & -l_{i-1} & -2l_i & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{2El_i}{(\Delta x_1)^2} \phi \quad (29)$$

tai  $Q_{1,i+\frac{1}{2}}$  esitettävissä siirtymien  $U$  ja  $V$  sekä kiertymän  $\phi$  funktioina.

Sauvasta  $l$  nurkkaan kohdistuvat voimat  $N_{1,i}$  ja  $Q_{1,i}$  saadaan lisäämällä edellä esitettyihin voimiin kuormituksen vaikutukset  $X_i \Delta x/2$  ja  $Y_i \Delta x/2$ .

Siirtymien  $U$  ja  $V$  sekä kiertymän  $\phi$  laskemiseksi tarpeelliset kaksi voimien välistä tasapainoyhtälöä ja yksi momenttiyhtälö ovat nyt kirjoitettavissa.

Kun kehän nurkkapistettä voidaan pitää siirtymättömänä, yksinkertaistuvat tarvittavat yhtälöt. Nurkkapisteiden siirtymät voidaan merkitä nolliksi peruskoordinaatistossa samoin kuin kaikissa sauvakohtaisissa koordinaatistoissa. Ratkaistavaksi jää nurkan kiertymä  $\phi$ , joka lasketaan nurkalle kirjoitetusta momenttiyhtälöstä. Kuvan 4 esittämässä tapauksessa tämä yhtälö on

$$M_{1,i} + M_{2,i} - M_{3,i} = 0. \quad (30)$$

Siinä momenteilla  $M_{1,i}$  ja  $M_{3,i}$  on lausekkeet

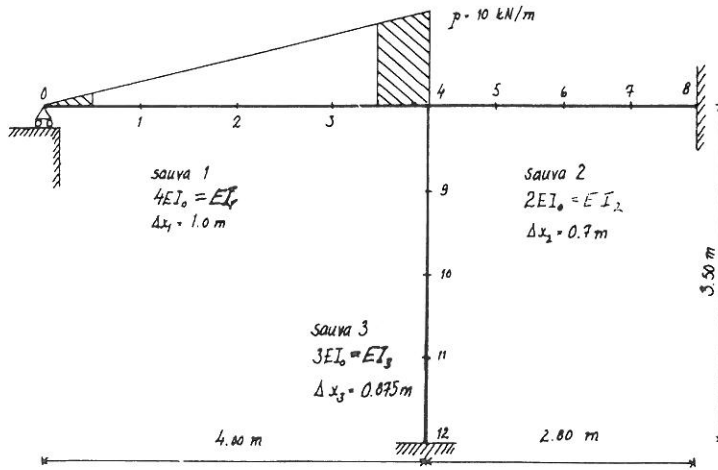
$$M_{1,i} = \frac{2El_{1,i}}{(\Delta x_1)^2} (v_{1,i-1} + \phi \Delta x) \quad (31)$$

$$M_{3,i} = \frac{2El_{3,i}}{(\Delta x_3)^2} (v_{3,i+1} - \phi \Delta x). \quad (32)$$

Kun kehärakenteen nurkkapisteeet ovat siirtymättömiä, ei kehän sauvoille tarvitse muodostaa sauvojen akselien suuntaisia tasapainoyhtälöitä (3) tai (15).

#### LASKUESIMERKKI

Käsitellään esimerkkinä kuvassa 5 esitettyä kehärakennetta, jonka nurkkapisteeet oletetaan siirtymättömiksi. Kukin rakenteen kolmesta sauvasta jaetaan neljään yhtä suureen osaan.



Kuva 5. Esimerkkikehän mitat ja laskentapisteet.

Differenssipisteiden taipumien laskemiseksi saadaan taulukossa 2 esitetty yhtälöryhmä.

Taulukko 2. Kuvan 5 esimerkkikehään liittyvä yhtälöryhmä.

	$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$	$\phi_4$	$v_{2,5}$	$v_{2,6}$	$v_{2,7}$	$v_{3,9}$	$v_{3,10}$	$v_{3,11}$	Kuorm.
1	20,00000	-16,00000	4,00000								2,50000
2	-16,00000	24,00000	-16,00000								5,00000
3	4,00000	-16,00000	28,00000	8,00000							7,50000
4			8,00000	20,57143	-8,16327			-7,83673			-1,14638
5				-8,16327	40,81633	-23,32362	5,83090				
6					-23,32362	34,98542	-23,32362				
7					5,83090	-23,32362	40,81633				
8				-7,83673				31,34694	-17,81254	4,47813	
9								-17,91254	26,86880	-17,91254	
10								4,47813	-17,91254	22,39067	

Yhtälöissä on huomattava, että kuvassa 5 esitetty viivoitettu kuormitus on otettu huomioon kuormittamalla nurkkapistettä viivoitetun kuormituksen aiheuttamalla täyden kiinnityksen momentilla  $M = -1,14638$  kNm. Momentti on laskettu influenssi-viivasta korvaamalla kuormitus kahdella yksittäisvoimalla. Yhtälöryhmän kerroinmatriisin symmetrisyys on osoituksena Bettin-Maxwellin säännön toteutumisesta.

Yhtälöryhmän ratkaisuna saadaan taipumat ja nurkkapisteen kiertymä  $\phi_4$ . Taivutusmomentit lasketaan taipumista kaavoja (22) ja (27) käyttäen. Sauvan 1 taivutusmomentteihin on lisättävä vielä kuvassa 5 viivoitettuna esitetyn kuormituksen aiheuttamasta oikean pään tukimomentista tuleva lisäys. Saadut momentit ja vastaavat tarkan teorian mukaiset arvot on esitetty taulukossa 3.

Taulukko 3. Kuvan 5 esimerkkikehän taivutusmomentit differenssi- ja kiertymäkulma-menotelmällä laskettuina.

Sauva ja piste	Differenssimenetelmä	Tarkka tulos
1,1	4,5464	4,5325
1,2	6,5929	6,5650
1,3	3,6392	3,5974
1,4	-6,8144	-6,8701
2,4	-3,4908	-3,6158
2,5	-2,2214	-2,2599
2,6	-0,9521	-0,9040
2,7	0,3173	0,4520
2,8	1,5868	1,8079
3,4	3,3235	3,2542
3,9	2,4927	2,4407
3,10	1,6617	1,6271
3,11	0,8309	0,8136

Kun esimerkkikehä kuormitetaan nurkkapisteeseen 4 vaikuttavalla momentilla  $M = 1$  ovat tuloksena tukimomentit, jotka on esitetty taulukossa 4. Samassa taulukossa on lisäksi esitetty vastaavat momentit, jotka on laskettu jakamalla kehän sauvat kahdeksaan jako-osaan.

Differenssein lasketut momentit vastaavat verraten hyvin tarkkoja jakolukuja. Lasketuissa tapauksissa kiinnittää huomiota se, että sauvan 2 jäykkyys tulee käytetyssä laskutavassa aliarvioituksi.

Taulukko 4. Nurkkaan 4 vaikuttavan momentin  $M = 1$  jakautuminen esimerkkikehän sauvoille differenssimenetelmän mukaan.  $N$  on jako-osien lukumäärä. Vertailuarvona on sauvojen tarkat suhteelliset jäykkyydet.

Momentti, kuva 5	$N = 4$	$N = 8$	Tarkka tulos
$M_{1,4}$	0,36264	0,35776	0,35593
$M_{2,4}$	0,32647	0,33559	0,33898
$M_{3,4}$	0,31086	0,30667	0,30508

Esimerkkinä stabiliteettitehtävän käsittelystä lasketaan vielä esimerkkikehän pystysauvan nurjahdusvoima kimmoisessa tapauksessa. Laskenta on tehty jakamalla kehän sauvat kuuteen ja toisessa tapauksessa kahdeksaan yhtä suureen osaan. Muodostamalla tasapainoyhtälöt (8) ja nurkan momenttitasapainoyhtälö (30) saadaan kehän differenssimatriisi (jäykkymatriisi)  $\underline{\underline{A}}$ . Jaettaessa sauvat kuuteen osaan on matriisissa 16 riviä ja kahdeksaan osaan jaettaessa 22 riviä.

Sauvan 3 differenssipisteille kirjoitetaan vielä yhtälöt (19), joissa on mukana normaalivoima  $N$ . Näin saadaan matriisi  $\underline{\underline{NB}}$ . Ratkaisemalla ominaisarvottehtävä  $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{NB}} = 0$  eräällä matemaattisen NAG-ohjelmiston aliohjelmalla saadaan tulokseksi kuutta jako-osaa käytettäessä

$$N = 3,74603EI_0 = 1,54984 \frac{\pi^2 EI_3}{l_3^2} \quad (33)$$

ja jaettaessa sauvat kahdeksaan osaan

$$N = 3,83310EI_0 = 1,58596 \frac{\pi^2 EI_3}{l_3^2} \quad (34)$$

Tulokset eivät poikkea paljoakaan tarkasta arvosta

$$N = 3,84770EI_0 = 1,59190 \frac{\pi^2 EI_3}{l_3^2} \quad (35)$$

Oletetaan nyt, että kehän jalan poikkileikkaus muuttuu siten, että ylhäältä puoleen väliin saakka taivutusjäykkyys on kuten edellä  $EI_3 = 3EI_0$  ja pienenee siitä alkaen jalan kärkeen mennessä lineaarisesti arvoon  $EI_0$ . Vallitsevat tasapainoyhtälöt kirjoitetaan tällöin yhtälön (16) mukaisesti. Ominaisarvottehtävän ratkaisuna saatu nurjahdusvoiman arvo

$$N = 1,31412 \frac{\pi^2 EI_3}{l_3^2} \quad (36)$$

lienee kohtalaisen tarkka. Tulos on laskettu jakamalla kehän sauvat kahdeksaan osaan.

#### ESITETYN MENETELMÄN YHTEYDESTÄ ELEMENTTIMENETELMÄÄN

Otetaan vielä tarkasteltavaksi esimerkkikehän ratkaisemiseksi käytetty yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisi on esitetty taulukossa 2.

Yhtälöryhmän kolmella ensimmäisellä rivillä on esitetty kehäsauvan 1 differenssipisteille 1, 2 ja 3 kirjoitetut leikkausvoimien väliset tasapainoyhtälöt (8). Sauvan 1 taipumien lisäksi esiintyy yhtälöissä tuntemattomana kolmannessa yhtälössä nurkkapisteen 4 kiertymä  $\phi_4$ .

Onko mitään saavutettavissa siirtämällä kiertymä  $\phi_4$  kertoimiseen yhtälöryhmän oikealle puolelle? Voimme nyt ratkaista palkin 1 taipumat  $v_{1,1}$ ,  $v_{1,2}$  ja  $v_{1,3}$  kuormitustermien ja kiertymän  $\phi_4$  funktioina. Kun näin tehdään, saadaan taipumalle  $v_{1,3}$  arvo

$$v_{1,3} = 1,19318/EI_0 - 0,636363\phi_4. \quad (37)$$

Kun tämä sijoitetaan neljännen rivin momenttiyhtälöön, tulevat palkin 1 osuutena siihen yhtälön (27) mukaisesti termit

$$M_{1,4} = \frac{2EI_1}{(\Delta x_1)^2} (v_{1,3} - v_{1,4}) + \frac{2EI_1}{\Delta x_1} \phi_4 \quad (38)$$

$$= 8,000EI_0 (1,19318/EI_0 - 0,636363\phi_4) + 8,000EI_0\phi_4 = 9,54545 + 2,90909EI_0\phi_4.$$

Tarkka arvo on kiertymäkulmamenetelmän mukainen tulos

$$M_{4,0}^0 + \frac{3EI_1}{l_1} \phi_4 = 10,66667 + 3,0000EI_0\phi_4. \quad (39)$$

Käytetyssä laskutavassa on siis palkille 1 laskettu tukimomentti ja jäykkyyskerroin numeerisesti differenssiyhtälöitä käyttäen. Suurehko ero tukimomenttien välillä aiheutuu lähes kokonaan kuvassa 5 esitetyn viivoitetun kuormituksen jäämisestä pois differenssimuotoisista tasapainoyhtälöistä.

Kun rivien 5...7 ja 8...10 yhtälöistä ratkaistaan sauvojen 2 ja 3 taipumat kier-

tymän  $\psi_4$  funktioina ja sijoitetaan rivin neljä yhtälöön, on laskumenetelmä palautunut kehän ratkaisemiseen kiertymäkulmamenetelmällä. Ratkaisutapa voidaan tulkitä myös elementtimenetelmäksi, jossa kehän sauvojen jäykkyyssmatriisit sisältävät vain yhden termin. Tämä johtuu reunaehtojen huomioon ottamisesta differenssiyhtälöissä sekä kehän nurkkapisteiden siirtymättömysoletuksesta.

Seuraavassa taulukossa esitetään vielä vertailu tasapainoyhtälöistä (8) lasketujen sauvojen jäykkyysskertoimien ja tarkkojen arvojen välillä. Sauvat on jaettu neljään ja kahdeksaan osaan yhtälöitä muodostettaessa.

Taulukko 5. Esimerkkikehän sauvojen jäykkyysskertoimet differenssiyhtälöistä laskettuina. Vertailukohtana vastaava tarkka arvo. Sauvalla 3b on tekstissä esitetty lineaarisesti muuttuva jäykkyys. N on jako-osien lukumäärä.

Sauva	Sauvan jäykkyysskerroin $/(EI_0)$		
	N = 4	N = 8	Tarkka arvo
Sauva 1	2,90909	2,97670	3,00000
Sauva 2	2,61905	2,79221	2,85714
Sauva 3	2,49351	2,55150	2,57143
Sauva 3b	-	2,48254	-

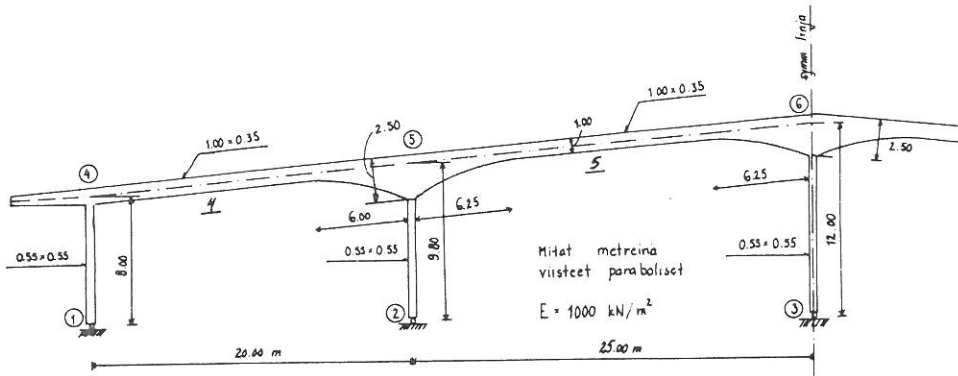
Tuloksista nähdään, että toisesta päästään nivelöidyillä sauvoilla 1 ja 3 tulosten tarkkuus on sama. Jäykästi kiinnitetyn sauvan 2 jäykkyyssvakiota laskettaessa virhe on suurempi.

Kun rakenteen kunkin sauvan jäykkyysskertoimet ja kiinnitysmomentit voidaan laskea erikseen, vähenee staattisten tehtävien ratkaisemisessa tarvittava muistitila ja laskuaika oleellisesti. Sama koskee edellä esitetynlaisia stabiliteettitehtäviä. Esimerkkinä käsitellyssä kehässä sauvojen 1 ja 2 jäykkyysskertoimet voidaan laskea erikseen ja sijoittaa momenttiyhtälöön. Nurjahdusvoiman laskemiseksi tarvittava ominaisarvotehtävä sisältää nyt vain kuusi tai kahdeksan yhtälöä, kun sauva 3 on jaettu kuuteen tai kahdeksaan osaan. Kun halutaan selvittää kehärakenteen värähtelyitä, joudutaan samoin kuin stabiliteettitehtävissä matriisin ominaisarvojen ratkaisemiseen. Useiden värähdysmuotojen laskeminen vaatii rakenteen sauvojen jakamista vastaavasti moneen osaan. Tässä tapauksessa ei ominaisarvotehtävän redusoiminen pienemmäksi stabiliteettitehtävän tavoin ilmeisestikään onnistu.

ESIMERKKI POIKKILEIKKAUKSELTAAN MUUTTUVIEN SAUVOJEN JÄYKKYYSKERTOIMIEN MÄÄRITTÄMISESTÄ

On selvää, ettei suoran poikkileikkaukseltaan muuttumattoman sauvan jäykkyykskertoimia kannata laskea differenssiyhtälöitä (8) käyttäen, koska kertoimien analyttiset lausekkeet ovat tunnettuja. Toisin on kuitenkin, kun kehäsauvan poikkileikkaus on muuttuva tai sauva on käyrä. Tällöin kertoimien numeerinen ratkaiseminen on edullista. Sama koskee myös epälineaarisesti toimivia kehäsauvoja, joiden laskennallinen käsittely on samankaltaista poikkileikkaukseltaan muuttuvien sauvojen kanssa.

Seuraavassa esimerkissä lasketaan lähteessä /3, s. 316...320/ esitetyn kehän sauvojen jäykkyyksvakiota. Kehä on esitetty kuvassa 6.



Kuva 6. Esimerkkikehä 2.

Laskennassa käytetään palkkien jännemittana pilarien vaakasuoraa etäisyyttä toisistaan samoin kuin kirjan esimerkissä. Pilarin 2-5 yläpäässä oletetaan olevan 0,8 metrin mittainen täysin jäykkä osa. Sauvassa 3-6 oletetaan olevan samanlainen jäykkä osa, mutta sen osalta ei tuloksia esitetä. Laskentaa varten sauvat on jaettu kahteenkymmeneen osaan. Kunkin sauvan jakopisteet numeroidaan nolasta kahteenkymmeneen. Nurkkien 4 ja 5 väliselle palkille 4 saadaan taipumat  $v_{4,1} = 0,884135\phi_4$  ja  $v_{4,19} = 0,0056191\phi_4$ , kun nurkan 4 kiertymä  $\phi_4$  on kertoimiseen yhtälöryhmän oikealla puolella. Näistä taipumista saadaan jäykkyykskertoimet

$$a_{4,5} = \frac{2EI_4}{\Delta x} \left( 1 - \frac{v_{4,1}}{\Delta x \phi_4} \right) = 58,33333 (1 - 0,884135) = 6,7588 \quad (40)$$

ja

$$b_{4,5} = \frac{2EI_5}{(\Delta x)^2} \frac{v_{4,19}}{\phi_5} = 2 \cdot 911,45833 \cdot 0,0056191 = 5,1216. \quad (41)$$

Seuraavassa taulukossa esitetään rakenteen muita differenssiyhtälöistä laskettuja jäykkyyksvakioita sekä vastaavat lähteen /3/ esimerkissä lasketut arvot. Lisäksi esitetään saman lähteen taulukoiden 8, 10 ja 11 mukaan interpoloiden lasketut arvot. Tämä sen takia, että kirjassa sivulla 317 esitetyt arvot vaikuttavat epätarkoilta ja lienevät saman kirjan käyrästöjen perusteella laskettuja.

Taulukko 5. Kuvan 6 esimerkkikehän jäykkyyksvakioita differenssiyhtälöistä (16) laskettuina ja lähteen /3/ mukaan.

Sauva	Vakio	Jäykkyyksvakioiden arvoja laskettuina		
		yht. (16)	/3/ s. 317 esim.	/3/ taul. 8, 10 ja 11
4-5	$a_{4,5}$	6,759	6,77	6,778
	$b_{4,5}$	5,122	5,08	5,148
	$a_{5,4}$	11,120	11,06	11,150
5-6	$a_{5,6}$	9,790	9,74	9,788
	$b_{5,6}$	6,595	5,63	6,594
2-5	$a_{5,2}$	3,023	2,96	3,029

Taulukossa esitetyille jäykkyykskerroimille on käytetty samoja merkintöjä kuin em. lähteessä. Käytetyllä jaolla lasketut kertoimet ovat riittävän tarkkoja rakenteiden suunnittelussa käytettäväksi. Pilarin jäykkyykskerrointa laskettaessa on käytetty kaksinkertaisen tarkkuuden desimaalilukuja. Lisäksi saatu tulos on interpoloitu lineaarisesti tuloksista pilareille, joissa suuri hitausmomentti ( $= 1000 \text{ m}^4$ ) ulottuu yläpäästä kahden ja kolmen jako-osan päähän. Tällaisena laskutapa muistuttaa suoraviivaista interpolointia lähteen /3/ taulukoista.

#### LOPPUSANAT

Edellä esitetyissä esimerkeissä on käsitelty vain palkin taivutusjäykkyyteen liittyvien jäykkyykskerrointen laskemista differenssimuotoisista palkin tasapainoyhtälöistä. Lukijalla on näin mahdollisuus kokeilla vetojäykkyykskerroimien mää-

rittämistä palkin akselin suuntaisista tasapainoyhtälöistä. Laskutapa ei ehkä ole kovinkaan edullinen, mutta sopinee harjoitustehtäväksi.

Suoran palkin jäykkyyskertoimien ja kiinnitysmomenttien määrittäminen differenssimuotoisista tasapainoyhtälöistä on verraten helposti liitettävissä aliohjelmana elementtimenetelmää käyttäviin ohjelmiin. Suurempi työ on laatia tietokoneohjelma kirjoituksen alkuosan esityksen perusteella. Sen etuna olisi mahdollisuus soveltaa ratkaisutapaa muihinkin kuin staattisiin tehtäviin.

Laskutavan kehittäminen käyräviivaisen tasosauvan osalta on vielä kesken. Aihe lienee kuitenkin vaivannäön arvoinen. Väännön huomioon ottaminen laajentaisi työn käsittämään myös avaruuskehät ja arinarakenteet. Muista kehittämismahdollisuuksista kirjoittajaa kiinnostaa erityisesti jäykkyyskertoimien numeerinen määrittäminen laatta- ja kuorirakenteille.

#### LÄHDELUETTELO

- [1] Hsien-San Tsang, Analysis of rigid frames by difference equations, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 89, No. ST2, April 1963.
- [2] Keintzel, E., Die Berechnung axialsymmetrischer räumlicher Stockwerkrahmen mit Hilfe von Differenzgleichungen, Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl., Tome 9 No 4, Bucarest, 1964.
- [3] Guldan, R., Rahmentragwerke und Durchlaufträger, sechste erweiterte Auflage. Springer-Verlag, Wien, 1959.
- [4] Salonen, E-M., A rectangular plate bending element the use of which is equivalent to the use of the finite difference method, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, 1971, pp. 261-274.
- [5] Wyatt, M.J., Davies, G., Snell, C., A new difference based finite element method, Proceedings Instn. Civil Engineers, Part 2, 1975, 59, Sept., pp. 395-409.
- [6] Heins, C.P., Building grid analysis, Build. Sci. Vol. 7, pp. 265-269, Pergamon Press, 1972.
- [7] Kilpeläinen, M., Arinarakenteisten välipohjapalkkistojen staattisesta ratkaisemisesta differenssimenetelmällä. Oulun yliopisto, Rakennusinsinööriosasto, Diplomityö, Oulu, 1966.
- [8] Tuominen, P., Differenssianalyysiin perustuva sylinterikuoren ratkaisumalli, Oulun yliopisto, Rakennetekniikan laitos, Lisensiaattityö, Oulu, 1983.

*Pentti Tuominen, tekn. lis., Oulun yliopisto, Rakentamistekniikan osasto*