

RAKENTEEEN RAJAKUORMITUSTA KOSKEVA ALARAJALAUSE JA SEN SOVELTAMINEN

Markku Heinisuo

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 14
No. 2 1981 s. 17...37

YHTEENVETO: Artikkelissa käsitellään rakenteen pienimmän rajakuormituksen likimääräistä määrittystä. Ala- ja ylärajalauseet johdetaan. Konveksisuuslauseeseen perustuvaa osituskaavaa sovelletaan lähinnä kimmoteorian stabiilisuustehtäviin. Osituskaava antaa hyviä tuloksia erityisesti sauvarakenteiden rajakuormituksille.

JOHDANTO

Rakenteiden stabiilisuustehtävän tarkasteluihin sopivia käsikirjojen taulukoita on vähän. Käsikirjojen taulukoiden perusteella voidaan kuitenkin laskea eri kuormitustapausten rajakuormituskertoimen likiarvoja yksinkertaisella osituskaavalla. Se antaa alarajaratkaisun eli varmalla puolella olevan rajakuormituskertoimen arvon. Monissa suunnitteluohjeissa, kuten esimerkiksi RIL 106 /1/ ja RIL 113 /2/, suositellaan osituskaavaa käytettäväksi kimmoteorian stabiilisuustehtävissä.

Nylander /3/ totesi osituskaavan oikeaksi puristetun ja samalla taivutetun palkin tapauksessa. Renton /4/ todisti stabiilien kuormitusten konveksisuuslauseen kimmoteorian stabiilisuustehtävässä. Rentonin todistus perustuu Papkovichin /5/ esittämän kriittisen pinnan tarkasteluun. Renton tarkasteli rakennetta, jossa on n kappaletta pistevoimia. Osituskaava muistuttaa paljon Dunkerleyn v. 1895 esittämää likikaavaa, jolla voidaan arvioida usean vapausasteen värähtelijän alinta ominaiskulmataajuutta. Seuraavassa todistetaan osituskaava yleisemmin tapauksessa, jossa rakenteen muodonmuutosenergia U on yksikäsitteinen siirtymäfunktion u funktio, ja tarkastellaan osituskaavan sovellutusmahdollisuuksia sekä arvioidaan tulosten tarkkuutta.

RAJAKUORMITUKSEN ALA- JA YLÄRAJA

Rakenteeseen vaikuttava ajasta riippumaton voimakuormitus voidaan esittää sarakematriisina

$$\{P\} = \{P_1 \ P_2 \dots P_n\} = \lambda \{m_1 \ m_2 \dots m_n\}, \quad (1)$$

missä positiivinen luku λ on yhteinen kuormituskerroin ja m_i ($i=1,2,\dots,n$) on kuormituskomponentin P_i suhde tiettyyn vertailukuormitukseen.

Määritelmä 1 (Parland /6/): Konservatiivinen, ajasta riippumaton voimakuormitus $\{P\}$ on stabiili, jos

$$\forall \{\Delta u\} \neq \{0\}: \{P\}^T \{\Delta u\} < \Delta U, \quad (2)$$

missä $\{\Delta u\}$ on kinemaattisesti luvallinen siirtymäkenttä ja vektorin $\{\Delta u\}$ komponentit ovat voimien P_i vaikutuspisteiden siirtymät.

Epäyhtälössä (2) funktionaali ΔU on siirtymien $\{\Delta u\}$ ja $\{u\}$ funktio, siis $\Delta U = \Delta U(\{u\}, \{\Delta u\})$. Vektorin $\{u\}$ komponentit ovat rakenteen siirtymäkenttä alkutilassa. Funktionaali ΔU määritellään

$$\Delta U = U(\{u\} + \{\Delta u\}) - U(\{u\}), \quad (3)$$

missä U on rakenteen muodonmuutosenergia. Kun kinemaattiset yhtälöt $\epsilon = \epsilon(u)$ ja materiaaliyhtälöt $\sigma = \sigma(\epsilon)$ tunnetaan, niin funktionaalin U arvo voidaan laskea tunnetulla kaavalla

$$U = \int_V \int \{\sigma\}^T \{d\epsilon\} dV, \quad (4)$$

missä

$$\begin{cases} \{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}, \\ \{d\epsilon\} = \{d\epsilon_x d\epsilon_y d\epsilon_z d\gamma_{xy} d\gamma_{yz} d\gamma_{zx}\} \end{cases}$$

Pienimmän rajakuormituksen määrittämistä varten voidaan todistaa seuraava lause:

Lause 1. Stabiilien kuormitusten joukko on konvekksi edellyttäen, että ΔU on yksikäsitteinen siirtymien $\{\Delta u\}$ ja $\{u\}$ funktio.

Oletus: Kuormitukset $\{P\}_1$ ja $\{P\}_2$ ovat stabiileja eli

$$\begin{cases} \forall \{\Delta u\} \neq \{0\}: \{P\}_1^T \{\Delta u\} < \Delta U, \\ \forall \{\Delta u\} \neq \{0\}: \{P\}_2^T \{\Delta u\} < \Delta U. \end{cases} \quad (4')$$

Väite: Kuormitus

$$\{P\} = \alpha \{P\}_1 + (1-\alpha) \{P\}_2; \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5)$$

on stabiili.

Todistus:

$$\{P\}^T \{\Delta u\} = \alpha \{P\}_1^T \{\Delta u\} + (1-\alpha) \{P\}_2^T \{\Delta u\}$$

(4)

$$< \alpha \Delta U + (1-\alpha) \Delta U$$

$$= \Delta U$$

□

(6)

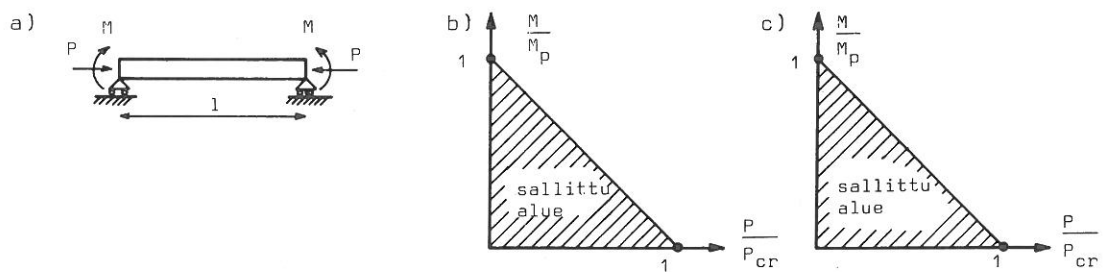
Renton /4/ todisti lauseen 1 kimmoisessa tapauksessa. Oletetaan seuraavaksi, että nollakuormitus $\{P\} = \{0\}$ on stabiili*. Tarkastellaan kuormitus-tilannetta, jossa kuormitus kasvaa nolasta täyteen arvoonsa. Kuormitus voi olla koko ajan stabiili, jolloin epäyhtälö (2) on voimassa $\forall \{\Delta u\} \neq 0$. Kun kuormitus kasvaa riittävän suureksi, niin saavutetaan ensimmäisen kerran rajatila.

Määritelmä 2 (Parland /6/): Kuormitus $\{P\}$ on rajakuormitus, jos

$$\begin{cases} \forall \{\Delta u\} \neq \{0\} : \{P\}^T \{\Delta u\} \leq \Delta U, \\ \exists \{\Delta u\} \neq \{0\} : \{P\}^T \{\Delta u\} = \Delta U, \end{cases} \quad (7)$$

Rakenteiden mekaniikassa tällaisia rajatiloja käsitellään plastisuusteoriassa ja stabiilisuusteoriassa.

Esimerkki 1. Tarkastellaan kuvan 1 palkkia ($M^2 0, P^2 0$)



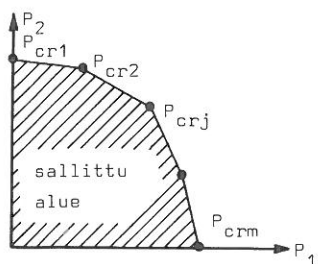
Kuva 1. Taivutettu ja puristettu sauva. a) Esimerkin 1 palkki, b) $P < P_{cr}$, c) $P_p < P_{cr}$. M_p = plastinen kantomomentti, EI = taivutusjäykkyys, P_p = poikkileikkauksen pinta-ala, σ_Y = myötöjännitys.

Oletetaan, että vääntönurjahdus ja kiepahdus on estetty. Mikäli tasonurjahduskuormitus $P_{cr} = \pi^2 EI / l^2$ on suurempi kuin plastinen kantokuorma $P_p = \sigma_Y A$ (kuva 1c), niin kuvan 1b sallittu alue (rajasuora ei kuulu alueeseen) on mitoittava. Kuvan 1 b rajasuoran yhtälö on

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{M}{M_p} = 1, \quad (8)$$

jota on käytetty useissa normeissa vedoten lukuisiin empiirisiin tuloksiin (ks. esim. Massonet /7/). Lauseen 1 perusteella kaava(8) antaa alaraja-arvion kriittiselle pinnalle, joka on todellisten rajakuormitusten P ja M määrittelemä pinta P, M -koordinaatistossa.

* Jos $\Delta U = 0$ (kivirakenteet), niin nollakuormitus ei ole määritelmän 1 mukaan stabiili.



Kuva 2. Kriittisen pinnan alaraja-arvio 2-ulotteisessa tapauksessa.

Yleisessä tapauksessa voidaan rajakuormitusta arvioida lauseen 1 perusteella seuraavasti. Lasketaan jollain keinolla m kappaletta ($m \geq n$) positiivisia rajakuormituksia P_{crj} ($j = 1, \dots, m$). Yhdistetään kuormituspisteet "konveksisti" hyper-tasoilla n -ulotteisessa kuormitusavaruudessa. Lauseen 1 perusteella vastaavat näin saadulla ulospäin kuperalla pinnalla olevat kuormituspisteet stabiileja kuormituksia tai erityistapauksena kriittisiä kuormituksia (kuva 2). Saatu pinnan yhtälö on alaraja-arvio tarkalle kriittiselle pinnalle, jolla olevat kuormitusyhdistelmät ovat rajakuormituksia. Käytännössä kannattaa laskea

rajakuormitukset (vrt. esim. 1) P_{crj} ($j = 1, \dots, n$) siten, että $P_i = 0$ ($i = 1, \dots, n, i \neq j$). Seuraavassa oletetaan, että kaikki kuormitukset P_i ovat positiivisia. Kriittisen pinnan alaraja-arvio on tällöin hypertaso

$$\frac{P_1}{P_{cr1}} + \frac{P_2}{P_{cr2}} + \dots + \frac{P_n}{P_{crn}} = 1. \quad (9)$$

Rajakuormitusta vastaavan kuormituskertoimen λ_{cr} alaraja-arvio λ_{cr}^- on kaavojen (1) ja (9) perusteella

$$\lambda_{cr}^- = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{P_{cri}}} \quad (10)$$

Osituskaava (10) muistuttaa ominaisvärähtelytehtävissä käytettyä Dunkerleyn likikaavaa. Osituskaavan (10) käytön edellytys on se, että rajakuormitukset P_{cri} tunnetaan. Jos reunakuormitus on jatkuvaa, niin se voidaan esittää muodossa

$$p(x) = \lambda f(x), \quad (11)$$

missä $f(x)$ on kuormituksen dimensioton ei-negatiivinen muotofunktio. Korvataan reunakuormitus pistevoimilla P_i , joita on n kpl ja joiden vaikutuskohdat ovat x_i ($i=1, 2, \dots, n$). Tällöin

$$P_i = p(x_i) \Delta x_i = \lambda f(x_i) x_i. \quad (12)$$

Osituskaavan (10) perusteella saadaan rajakuormituksen alaraja-arvio

$$\lambda_{cr}^- = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) x_i}{P_{cr}(x_i)}}.$$

Kun $n \rightarrow \infty$ siten, että $\max\{\Delta x_i | i = 1, 2, \dots, n\} \rightarrow 0$, niin edellisestä kaavasta saadaan

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{\int_{x=0}^L \frac{f(x)}{P_{cr}(x)} dx}. \quad (13)$$

Kaavan (13) avulla voidaan laskea jatkuvan rajakuormituksen alaraja-arvio, kun arvot $P_{cr}(x)$ tunnetaan kaikissa reunan pisteissä. Käsikirjoissa on taulukoituna suureen $P_{cr}(x)$ arvoja äärellisessä määrässä reunan pisteitä. Integrointi kaavan (13) nimittäjässä voidaan tällöin suorittaa numeerisesti. Rajamomentin laskukaava saadaan kahden vastakkaissuuntaisen pistemäisen kuormituksen vaikutuksesta, kuten vaikutusfunktioimenetelmissä on totuttu.

Kriittisen pinnan yläraja-arvio, ns. karakteristisen pinnan yhtälö voidaan laskea määritelmän 2 perusteella. Määritelmästä 2 seuraa kaavan (1) perusteella lause 2.

Lause 2. Kuormituskerroin λ_{cr} on rajakuormituskerroin, jos

$$\begin{cases} \forall \{\Delta u\} \neq \{0\} : \lambda_{cr} \leq \frac{\Delta U}{\{m\}^T \{\Delta u\}}, \\ \exists \{\Delta u\} \neq \{0\} : \lambda_{cr} = \frac{\Delta U}{\{m\}^T \{\Delta u\}}. \end{cases} \quad (14)$$

edellyttäen, että

$$\{m\}^T \{\Delta u\} > 0. \quad (15)$$

Ehto (15) tarkoittaa sitä, että rakenteen sortuessa kuormitus tekee positiivista työtä. Kaavojen (14) perusteella rajatilan kuormituskerroin λ_{cr} löytyy funktionaalin $\frac{\Delta U}{\{m\}^T \{\Delta u\}}$ absoluuttisesta minimikohdasta. Rajatilan ehto esitetään usein $\{m\}^T \{\Delta u\}$ seuraavassa muodossa: On löydettävä yhtälön $F(\lambda, \{u\}, \{\Delta u\}) = 0$ pienin juuri λ , missä funktionaali F on

$$F(\lambda, \{u\}, \{\Delta u\}) = \Delta U - \lambda \{m\}^T \{\Delta u\}. \quad (16)$$

Laskelmat helpottuvat huomattavasti, jos ehto

$$F(\lambda, \{u\}, \{\Delta u\}) = F(\lambda, \{\Delta u\}) \quad (17)$$

on täytetty. Esimerkiksi lineaarisessa kimmoteoriassa on puristetulle ja taivutetulle palkille voimassa muodonmuutosenergian lauseke

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA u'^2 dx, \quad (18)$$

missä EI on palkin taivutusjäykkyys, EA on palkin vetojäykkyys, v on palkin taipuma ja u on siirtymä palkin akselin suunnassa.

Tällöin

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \int_0^l EI(v+\Delta v)''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EA(u+\Delta u)'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EIV''^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EAu'^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI\Delta v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EA\Delta u'^2 dx \end{aligned} \quad (19)$$

vain, jos

$$\begin{cases} \int_0^l EI v'' \Delta v'' dx = 0 \\ \int_0^l EA u' \Delta u' dx = 0. \end{cases} \quad (20)$$

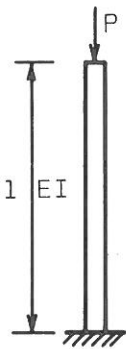
Ortogonaalisuusehdot (20) toteutuvat esimerkiksi, jos palkki ei alkutilassa taivu eikä rajatilassa puristu kasaan. Seuraavassa tarkastellaan osituskaavan (10) sovellutusmahdollisuuksia kimmoteorian stabiilisuustehtävissä.

TASONURJAHDOUS

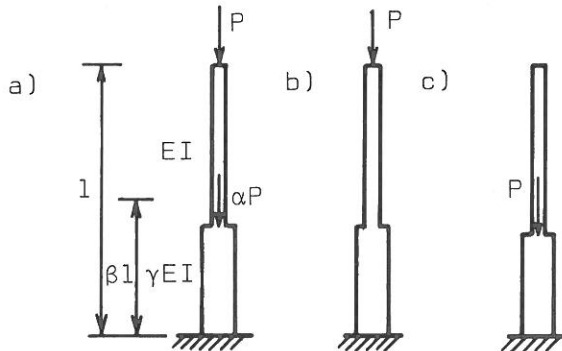
Kuvan 3 ulokepilarin tasonurjahduskuormitus on Eulerin mukaan

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad (21)$$

jossa EI on pilarin taivutusjäykkyys ja l on pilarin pituus.



Kuva 3. Puristettu pilari.



Kuva 4. a) Esimerkin 2 pilari, b) Kuormitustilanne, josta lasketaan P_{cr1} , c) Kuormitustilanne, josta lasketaan P_{cr2} .

Esimerkki 2. Lasketaan kuvan 4a pilarin tasonurjahduskuormituksen alaraja-arvio P_{cr}^- osituskaavalla (10). Kuormitusvektori

$$\{P\} = \lambda \{m_1 \ m_2\} = P \{1 \ \alpha\} \quad (22)$$

missä α (sekä β ja γ) ovat tunnettuja vakioita.

Osituskaavan (10) mukaan

$$P_{cr}^- = \frac{1}{\frac{1}{P_{cr1}} + \frac{\alpha}{P_{cr2}}}, \quad (23)$$

missä P_{cr1} ja P_{cr2} ovat kuvissa 4b ja 4c esitettyjen pilareiden vastaavat tasonurjahduskuormitukset. Tarkka arvo rajakuormitukselle P_{cr1} on (Timoshenko /8/)

$$P_{cr1} = \frac{m\gamma EI}{4 l^2} \quad (24)$$

missä kerroin m katsotaan teoksen /8/ taulukosta 2-10. Rajakuormitukselle P_{cr2} saadaan tarkka arvo kaavasta (21), ja se on

$$P_{cr2} = \frac{\pi^2 \gamma EI}{4 \beta^2 l^2}. \quad (25)$$

Alaraja-arvio kuvan 4a pilarin tasonurjahduskuormitukselle on kaavan (23) perusteella

$$P_{cr}^- = \frac{m}{\pi^2 + m\alpha\beta^2} \cdot \frac{\pi^2 \gamma EI}{4 l^2}. \quad (26)$$

Taulukossa 1 on vertailtu kaavan (26) antamia tuloksia käsikirjan /9/ arvoihin.

Taulukko 1. Kuvan 4a pilarin tasonurjahduskuormitus $P_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 \gamma EI}{4 l^2}$, kun kerroin k katsotaan taulukosta.

β	$1/\gamma$	m	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.25$		$\alpha = 0.67$		$\alpha = 1.50$		$\alpha = 4.00$	
0.4	0.1	2.40	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.23	0.24	0.21	0.24
0.4	0.2	4.22	0.43	0.44	0.42	0.42	0.41	0.43	0.39	0.42	0.34	0.40
0.4	0.4	6.68	0.68	0.68	0.66	0.67	0.63	0.67	0.58	0.64	0.47	0.56
0.4	0.6	8.19	0.83	0.84	0.80	0.83	0.76	0.79	0.69	0.75	0.54	0.62
0.4	0.8	9.18	0.93	0.92	0.90	0.93	0.85	0.89	0.76	0.82	0.58	0.66
0.4	1.0	9.87	1.00	1.00	0.96	0.99	0.90	0.94	0.81	0.86	0.61	0.68
0.6	0.1	4.50	0.46	0.48	0.44	0.45	0.41	0.46	0.37	0.42	0.28	0.35
0.6	0.2	6.69	0.68	0.68	0.64	0.67	0.58	0.62	0.50	0.56	0.34	0.40
0.6	0.4	8.51	0.86	0.88	0.80	0.83	0.71	0.74	0.59	0.64	0.38	0.42
0.6	0.6	9.24	0.94	0.96	0.86	0.90	0.76	0.79	0.62	0.66	0.40	0.42
0.6	0.8	9.63	0.98	1.00	0.90	0.93	0.79	0.81	0.64	0.67	0.41	0.42
0.6	1.0	9.87	1.00	1.00	0.92	0.93	0.81	0.84	0.65	0.67	0.41	0.43
			1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

1: kaavan 26 antama tulos; 2: käsikirjan antama tulos

Esimerkki 3. Kaavasta (21) saadaan kuvan 5 pilarille tarkka tasonurjahduskuormituksen arvo

$$P_{cr}(x) = \frac{\pi^2 EI}{4 x^2} \quad (27)$$

Osituskaavan ja kaavan (27) perusteella voidaan laskea mielivaltaisesti jakaantuneen puristavan kuormituksen kriittisen arvon alaraja tasavahvalle ulokepilarille. Jos puristava kuormitus on vakio p_0 , niin kriittisen kuormitustiheyden alaraja on

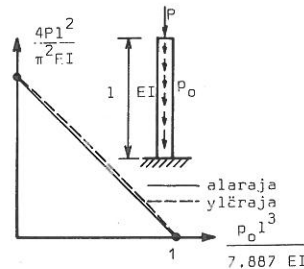
$$P_{ocr} = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1 \cdot 4x^2}{\pi^2 EI} dx} = \frac{3\pi^2 EI}{4 l^3} \approx 7.403 \frac{EI}{l^3} \quad (28)$$

Tarkka tulos voidaan laskea Besselin funktioiden avulla, ja se on (Timoshenko /8/)

$$P_{ocr} = 7.837 \frac{EI}{l^3} \quad (29)$$

Virhe tuloksessa (28) on noin 6 %.

Esimerkki 4. Jos tasavahvaa ulokepilaria kuormittaa sen oma painovoima p_0 , niin voidaan laskea, millaisen puristusvoiman P se nurjahtamatta kestää. Stabiilien kuormitusten joukko on havainnollistettu kuvassa 6. Mikäli pilari ei nurjahda oman painovoiman vaikutuksesta ($p_0 < p_{ocr}$), niin kuvan 6 suoralta voidaan lukea suurimman sallitun puristavan voiman alaraja P^- . Tarkka tulos (Grishcoff /10/) on piirretty kuvaan 6 katkoviivalla.

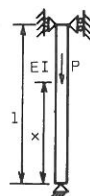


Kuva 6. Esimerkin 4 pilari ja kriittisen pinnan ala- ja yläraja.

Esimerkki 5. Kuvan 7 pilarin tasonurjahduskuormituksen tarkka arvo $P_{cr}(x)$ on (Timoshenko /8/) yhtälön

$$\sqrt{\frac{P_{cr}(x)}{EI}} (1-x) + \tan\left(\sqrt{\frac{P_{cr}(x)}{EI}} x\right) = 0 \quad (30)$$

pienin juuri. Yhtälön (30) pienimmät juuret on esitetty taulukossa 2 suhteen x/l eri arvoilla.



Kuva 7. Esimerkin 5 "peruspilari".

Sovelletaan taulukon 2 arvoja kuvan 8 pilarin nurjahduskuormituksen P_{cr} arvioimiseen. Osituskaavan perusteella

$$P_{cr}^- = \frac{1}{\frac{2}{P_{cr1}} + \frac{3}{P_{cr2}} + \frac{4}{1} \int_0^1 \frac{1}{P_{cr}(x)} dx}. \quad (31)$$

Taulukosta 2 saadaan $P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ ja

$$P_{cr2} = 1,6681 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad \text{Numeerinen integrointi}$$

Simpsonin kaavalla antaa integraalin arvoksi

$$0,5553 \frac{1}{\pi^2 EI}. \quad \text{Kaavan (31) perustella saadaan}$$

$$P_{cr}^- = \frac{1}{\frac{2}{1,6681} + 4 \cdot 0,5553} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} \approx 0,1661 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (32)$$

Artikkelin /11/ pohjalta on TTKK:ssa laadittu elementtimenetelmään perustuva tietokoneohjelma, joka antaa kuvan 8 pilarin tasonurjahduskuormitukselle ylärajan

$$P_{cr}^+ = 0,1715 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (33)$$

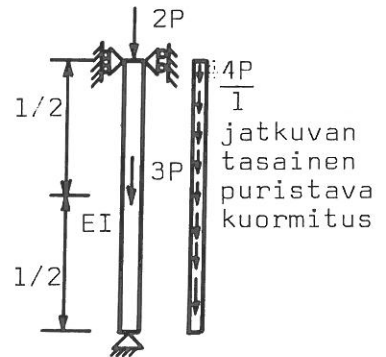
Kun taulukoidaan useimmiten rakennettavien pilareiden nurjahduskuormitukset $P_{cr}(x)$, niin osituskaavalla voidaan laskea nopeasti pilarin nurjahduskuormitus eri kuormitustilanteissa. Käsikirjassa /9/ on taulukoitu yleisimpien pilareiden nurjahduskuormituksia $P_{cr}(x)$.

Esimerkki 6. Kuvan 9a symmetrisen kehän

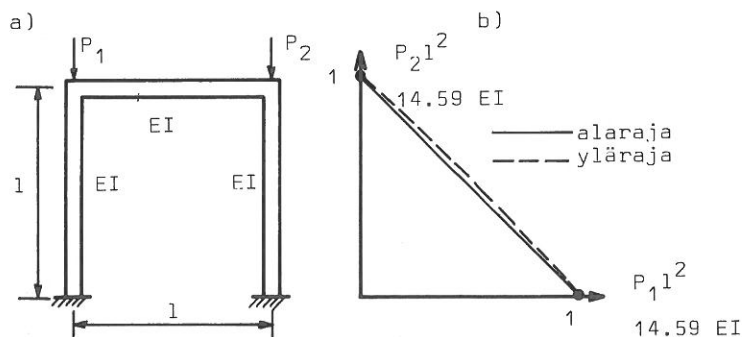
tarkka kriittinen pinta on esitetty kuvassa 9b (Renton /4/) katkoviivalla. Suurin virhe osituskaavaa sovellettaessa saadaan, kun ehto $P_1 = P_2$ on täytetty. Virhe on tällöin prosentoin suuruusluokkaa. Symmetrisessä kehässä on hyvä huomata se, että myös kriittinen pinta on symmetrinen. Yksiaukkoisen, yksikerroksisen kehän tasonurjahduskuormituksia on taulukoitu käsikirjassa /9/. Taulukossa 3 on esitetty kuvan 10 a symmetrisen kehän tarkkojen tasonurjahduskuormitusten arvot (liite 1). Taulukon 3 arvojen perusteella voidaan arvioida esimerkiksi kuvan 10 b kehän tasonurjahduskuormitusta osituskaavan avulla.

Taulukko 2.

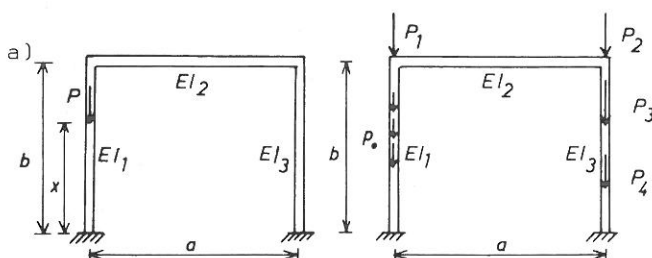
x/l	$\frac{P_{cr} l^2}{\pi^2 EI}$
1.00	1.0000
0.95	1.0008
0.90	1.0063
0.85	1.0203
0.80	1.0460
0.75	1.0862
0.70	1.1440
0.65	1.2237
0.60	1.3310
0.55	1.4746
0.50	1.6681
0.45	1.9325
0.40	2.3032
0.35	2.8416
0.30	3.6639
0.25	5.0112
0.20	7.4546
0.15	12.6451
0.10	27.2017
0.05	104.2210
0.00	∞



Kuva 8. Esimerkin 5 pilari.



Kuva 9. a) Esimerkin 6 kehä. b) Tarkka kriittinen pinta ja sen alaraja.

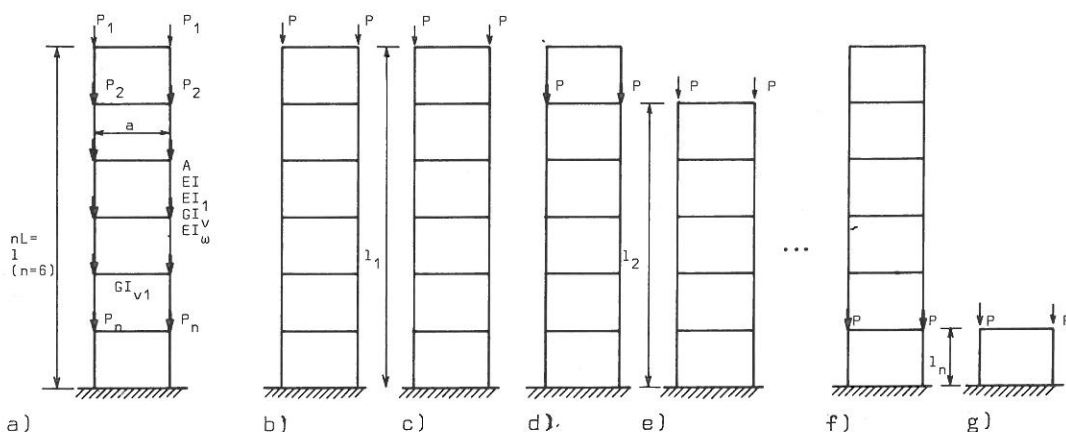


Kuva 10. Yksiaukkoinen tasokehä. a) Esimerkin 6 "peruskehä". b) Esimerkin 6 kehän kuormitus.

Taulukko 3. Kuvan 10a kehän tasonurjahduskuormitukset.

x/b	$P_{cr}/PE, \quad PE = \pi^2 EI_1 / 4b^2, \quad a = b$								
0.3	24.74	20.66	16.48	19.51	16.49	13.20	15.21	13.07	12.00
0.4	20.97	17.36	13.74	15.90	13.53	10.84	12.23	10.61	8.72
0.5	16.94	14.37	11.58	12.88	11.15	9.06	9.95	8.75	7.27
0.6	14.03	12.00	9.78	10.72	9.34	7.66	8.30	7.35	6.16
0.7	12.14	10.35	8.44	9.26	8.10	6.61	7.17	6.34	5.32
0.8	10.88	9.21	7.45	8.27	7.16	5.84	6.60	5.62	4.69
0.9	9.92	8.38	6.73	7.50	6.49	5.27	5.78	5.08	4.22
1.0	8.81	7.62	6.18	6.74	5.91	4.82	5.22	4.64	3.86
EI_1/EI_2	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
EI_1/EI_3	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	2.0	2.0	2.0

Esimerkki 7. Osituskaavan (10) käyttö perustui siihen, että kuormitus ositetaan erillisiksi kuormituksiksi P_i , joiden rajatilan arvot $P_{cr i}$ osataan laskea. Paitsi kuormitusta, niin myös rakennetta voidaan osittaa, jotta laskelmat muodostuisivat yksinkertaisemmiksi. Tällöin voidaan ehkä soveltaa plastisuusteoriasta tuttua maksimiperiaatetta, jonka perusteella rajakuormitus ei voi kasvaa, jos siteitä katkaistaan. Kuvan 11 a kehän tasonurjahduskuormituksen alaraja saadaan laskettua osituskaavalla, kun ositettujen rakenteiden (kuvat 11c, e, g) nurjahduskuormitukset lasketaan Eulerin kaavalla



Kuva 11. Monikerroksinen kehä. a) Esimerkin 7 ja 8 symmetrinen kehä. b) Ensimmäinen kuormituksen ositus. c) Rakennus ja kuormitus ositettu, lasketaan P_{cr1} . d) Toinen kuormituksen ositus. e) Rakennus ja kuormitus ositettu, lasketaan P_{cr2} . f) N:s kuormituksen ositus. g) Rakennus ja kuormitus ositettu, lasketaan P_{crn} .

$$P_{cri}^- = \frac{\pi^2 EI_i^-}{4 l_i^2}, \quad (34)$$

missä kehäsauvan taivutusjäykkyys EI_i^- on symmetrisessä tapauksessa (Parland /12/)

$$EI_i^- = 2EI + \frac{a^2 EA}{2(1 + \frac{2EA}{8l_i^2 k})}, \quad (35)$$

missä EI on paariesauvan taivutusjäykkyys ja EA on paariesauvan vetojäykkyys ja k on kehäsauvan leikkausjäykkyyksi.

VÄÄNTÖNURJAHDUS

Esimerkki 8. Kuvan 11a tasokehän vääntönurjahduskuormituksen aläraja-arvio voidaan laskea osittamalla kuormitus ja rakenne kuten esimerkissä 7. Vääntönurjahduskuormitukset P_{cri}^- saadaan tunnetusta ulokepilarille johdetusta kaavasta (Timoshenko /8/)

$$P_{cri}^- = \frac{2A}{2I + 2I_1 + \frac{a^2}{2} \cdot A} (GI_v^- + EI_w^- \frac{\pi^2}{4 l_i^2}) \quad (36)$$

missä I_1 on paariesauvan poikkipinnan neliömomentti kuvan tason suuntaisen akselin ympäri ja GI_v^- ja EI_w^- ovat kehäsauvan vääntö- ja käyristymisjäykkyydet. Jäykkyyksien GI_v^- ja EI_w^- laskukaavat ovat tässä tapauksessa (Parland /13/)

$$\begin{cases} GI_V^- = \frac{a}{1} \cdot \frac{GI_{V1}}{1 + \frac{GI_{V1}}{6aEI_1}} + 2GI_V, \\ EI_\omega^- = 2EI_\omega + \frac{a^2}{2} \cdot EI_1 \end{cases} \quad (37)$$

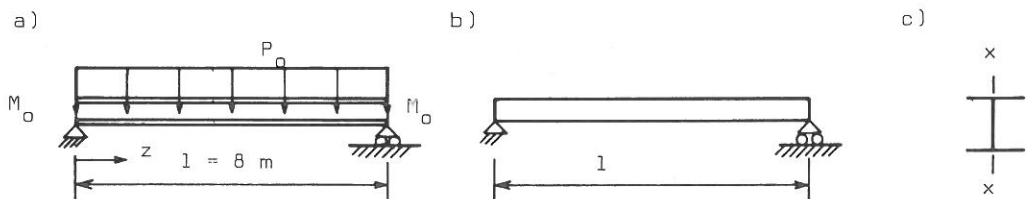
missä GI_V on paarresauvan ja GI_{V1} on poikkisiteen vääntöjäykkyys ja EI_ω on paarresauvan käyristymisjäykkyys.

Edellä esitetty laskentapa johtaa varmalla puolella olevaan tulokseen, koska osituskaava on alarajan kaava, ja rakenteesta on "unohdettu" kuormituksen yläpuolinen rakenne ja koska jäykkyyksien GI_V^- ja EI_ω^- (sekä esimerkissä 7 jäykkyyden EI^-) laskukaavat perustuvat alarajaratkaisuun.

KIEPAHDUS

Erilaisten kiepahdus- ja vääntönurjahdustapausten osalta käsikirjojen kokoelmat ovat sangen niukat. Taulukossa 4 on esitetty joitain kiepahduskuormitusten arvoja. Laskelmat on suoritettu pientietokoneella HP-45 nimenomaan sitä varten kehitetyllä (ks. esimerkki 5) tietokoneohjelmalla. Mainittu ohjelma perustuu elementtimenetelmään. Taulukkoon 4 on merkitty kirjallisuudesta löytyneet vertailuarvot. Käsikirjassa /2/ on esitetty vastaavia tuloksia suorakaidepalkille.

Esimerkki 9. Esimerkkinä lasketaan, kuinka suuren taivutusmomentin M_b kestää kiepahtamatta keskellä palkkia vaikuttavan tasaisen kuormituksen p_0 lisäksi.



Kuva 12. Esimerkin 9 palkki, poikkileikkaussuureet: $E = 210 \text{ GN/m}^2$, $G = E/2.6$, $I_x = 1160 \text{ cm}^4$, $I_y = 170 \text{ cm}^4$, $k = 0.0125 \text{ l/cm}$, $I_\omega = 420\,000 \text{ cm}^6$.

a) Palkki sivulta. b) Palkki päältä. c) Poikkileikkaus I-400.

Kun momentti M kuormittaa palkkia yksin, niin kiepahdusmomentti on (Timoshenko /8/)

$$M_{ocr} = \pi \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(kl)^2}} \cdot \frac{\sqrt{EI_x GI_y}}{1}. \quad (38)$$

Pelkän tasaisen kuormituksen p_0 kriittinen arvo on (Timoshenko /8/)

$$p_{ocr} = \gamma_4 \frac{\sqrt{EI_x GI_y}}{l^3}, \quad (39)$$

missä termi γ_4 on riippuvainen vääntöhoikkeudesta k_1 ja se saadaan esim. teoksen /8/ taulukosta 6-6. Tulos on $\gamma_4 = 29.8$. Taulukon 4 arvojen perusteella saadaan (suorittamalla integrointi numeerisesti) osituskaavalla tulos $\gamma_4 = 28.53$. Kaavojen (38) ja (39) avulla voidaan piirtää kriittisen pinnan alaraja-arvio (kuva 13). Yläraja-arvio voidaan laskea esimerkiksi otaksumalla palkin vääntymän muutokseksi kinemaattisesti luvalinen sinifunktio

$$\theta(z) = A \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (40)$$

missä A on tuntematon vakio. Timoshenkon /8/ mukaan valinta (40) on täysin oikea, kun kuormituksena on pelkästään momentti M. Tässä tapauksessa funktionaali $F(\lambda, \{u\}, \{\Delta u\})$ on (Parland /12/)

$$F(\lambda, u, \Delta u) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega \theta''^2 + GI_V \theta'^2 - \frac{M^2 \theta^2}{EI_x}) dz \quad (41)$$

missä M on palkin taivutusmomentti ulkoisesta kuormituksesta. Funktion (40) kaltaisella siirtymäotaksumalla ehto $F(\lambda, \{u\}, \{\Delta u\}) = 0$ johtaa suoraan tulokseen. Integroinnin jälkeen saadaan kriittisen pinnan yläraja-arvio (karakteristisen pinnan yhtälö)

$$M_0^2 + \frac{2\pi^2 - 3}{8\pi^2} \cdot M_0 p_0 l^2 + \frac{\pi^4 + 45}{120\pi^4} \cdot p_0^2 l^4 = \pi^4 \frac{EI_x EI_\omega}{l^4} + \pi^2 \frac{EI_n GI_V}{l^2} \\ \Rightarrow M_0^2 + 0.21200 M_0 p_0 l^2 + 0.01218 p_0^2 l^4 = \frac{\pi^2}{l^2} EI_x GI_V \left(\frac{\pi^2}{k^2 l^2} + 1 \right), \quad (42)$$

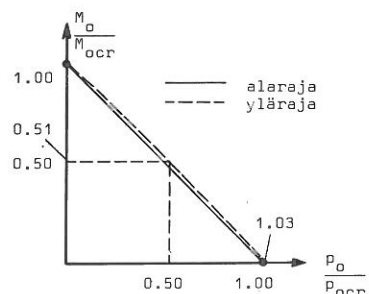
jonka kuvaaja on esitetty kuvassa 13 katkoviivalla.

LAATAN LOMMAHDUS

Esimerkki 10. Yhdistämällä osituskaavalla kuvan 14a ja b nivelisesti joka reunaltaan tuetun tasavahvan laatan lommahduskuormitukset (Bryan /15/), saadaan kriittisen pinnan alaraja-arvio, joka on piirrettyä kuvassa 14c, kun suhde $a/b = 1$. Kriittisen pinnan alarajan yhtälö on (merkinnät kuvassa 14)

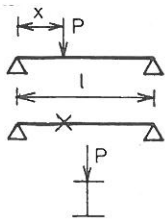
$$P_x \left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + \frac{b}{a} n^2 P_y = \left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + n^2 \right] \cdot \frac{\pi^2 D}{b}, \quad (43)$$

missä m ja n ovat sellaisia kokonaislukuja, että kuormituskerroin λ ($\{P\} = \{P_x P_y\} = \lambda \{m_1 m_2\}$, missä m_1 ja m_2 ovat tunnetut suhdeluvut) on mahdollisimman pieni. Brush /16/ on määrittänyt kriittisen pinnan tarkan yhtälön ja tulos on sama kuin kaavassa (43). Käsikirjassa /17/ on esitettyä monien laattojen kriittisten pintojen kuvaajia. Näitä tarkastellessa havaitaan, että



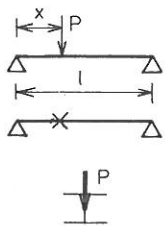
Kuva 13. Kriittisen pinnan alaraja ja yläraja (esimerkki 9).

Taulukko 4. Kiepahduskuormitusten arvoja



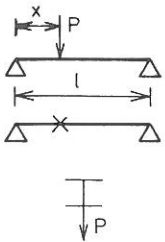
$x/l \backslash kl$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
0.1	300.73	156.86	89.78	71.34	62.91	59.45	55.04
0.2	130.19	96.04	55.46	32.05	29.03	27.75	35.75
0.3	84.32	44.40	26.17	21.39	19.66	18.98	18.83
0.4	67.53	35.64	21.17	17.46	16.17	15.73	15.82
0.5	63.02	33.29	19.82	16.40	15.23	14.84	15.00
0.5	77.5	43.1	20.1	16.7	15.4	15.0	15.1

/8/



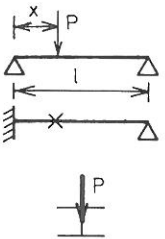
$x/l \backslash kl$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
0.1	378.4	196.3	110.2	85.34	74.58	69.08	60.49
0.2	193.7	100.4	56.49	43.74	38.26	35.47	31.15
0.3	137.9	71.55	40.25	31.21	27.33	25.37	22.38
0.4	115.8	60.14	33.86	26.28	23.04	21.41	18.95
0.5	109.7	56.98	32.08	24.91	21.85	20.31	18.00
0.5	131	71.7	31.9	25.0	21.8	20.2	17.7

/8/



$x/l \backslash kl$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
0.1	460.0	237.2	130.8	99.31	85.31	77.91	65.44
0.2	272.9	140.1	76.26	56.96	48.26	43.57	35.45
0.3	217.0	111.0	59.76	44.09	36.94	33.05	26.25
0.4	195.8	99.95	53.38	39.04	32.46	28.86	22.57
0.5	190.3	97.9	51.70	37.67	31.22	27.69	21.50
0.5	227	121	50.0	37.0	30.3	27.0	21.0

/8/



$x/l \backslash kl$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
0.1	672.2	343.3	181.2	131.3	108.2	95.64	73.33
0.2	336.7	171.3	90.68	65.65	54.11	47.79	36.76
0.3	230.4	117.3	62.16	45.08	37.23	32.97	25.72
0.4	185.6	94.58	50.20	36.51	30.26	26.89	21.31
0.5	169.1	86.23	45.85	33.44	27.80	24.78	19.90
0.6	172.9	88.17	46.94	34.29	28.57	25.53	20.68
0.7	201.4	102.6	54.65	39.93	33.28	29.76	24.19
0.8	282.3	143.9	76.46	55.74	46.36	41.38	33.53
0.9	577.7	293.7	155.2	112.4	92.94	82.52	65.96

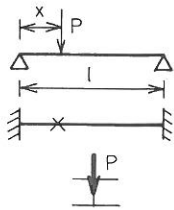


nivelinen kiinnitys



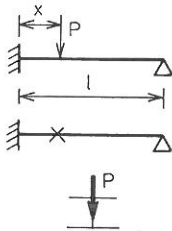
jäykkä kiinnitys

Taulukko 4 jatkuu

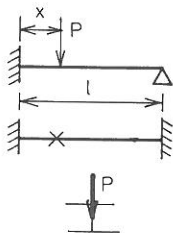


$\frac{x/l}{k/l}$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
0.1	876.9	443.2	228.5	160.0	127.7	109.6	78.17
0.2	436.5	220.6	113.7	79.67	63.57	54.59	39.11
0.3	301.1	152.1	78.53	55.09	44.64	37.91	27.47
0.4	247.9	125.3	64.73	45.48	36.42	31.41	22.96
0.5	233.6	118.1	61.03	42.90	34.37	29.66	21.74
0.5	415	220	88.8	64.1	50.2	43.1	31.7
0.5				66	54	45	25

/8/
/13/



$\frac{x/l}{k/l}$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
0.1	4978	2526	1343	978.8	812.9	724.0	575.3
0.2	1194	608.9	324.1	236.7	197.2	176.2	142.6
0.3	593.8	302.6	161.1	117.8	98.25	87.86	71.38
0.4	407.9	207.8	110.5	90.73	67.21	60.00	48.42
0.5	343.2	174.9	92.87	67.59	56.08	49.90	39.73
0.6	339.9	173.0	91.57	66.35	54.78	48.52	37.94
0.7	396.7	201.6	106.1	76.42	62.68	55.17	42.22
0.8	577.6	292.9	153.1	109.2	88.68	77.32	57.38
0.9	1312	663.9	343.7	241.8	193.3	166.05	116.2



$\frac{x/l}{k/l}$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
0.1	9357	4726	2441	1713	1370	1180	852.3
0.2	2150	1088	561.1	393.1	313.6	269.3	192.6
0.3	968.5	489.0	252.4	177.1	141.6	122.0	88.69
0.4	612.8	309.7	160.0	112.4	90.09	77.73	57.00
0.5	485.2	245.3	126.7	89.08	71.35	61.55	45.06
0.6	459.2	232.0	119.7	84.00	67.15	57.80	41.90
0.7	518.0	261.6	134.6	94.08	74.87	64.15	45.70
0.8	740.8	373.4	191.1	132.5	104.5	88.83	61.32
0.9	1729	867.7	439.8	300.6	233.1	194.4	124.74

$$\bar{P}_{cr} = \gamma \frac{\sqrt{EI_x GI_v}}{l^2}; \quad \gamma \text{ katsotaan taulukosta}$$

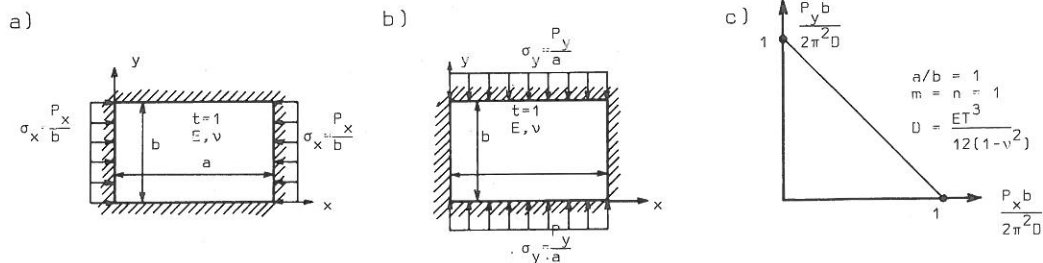
$$k = \sqrt{\frac{GI_v}{EI_\omega}}$$

EI_x = taivutusjäykkyys

GI_v = vääntöjäykkyys

EI_ω = käristysmisjäykkyys



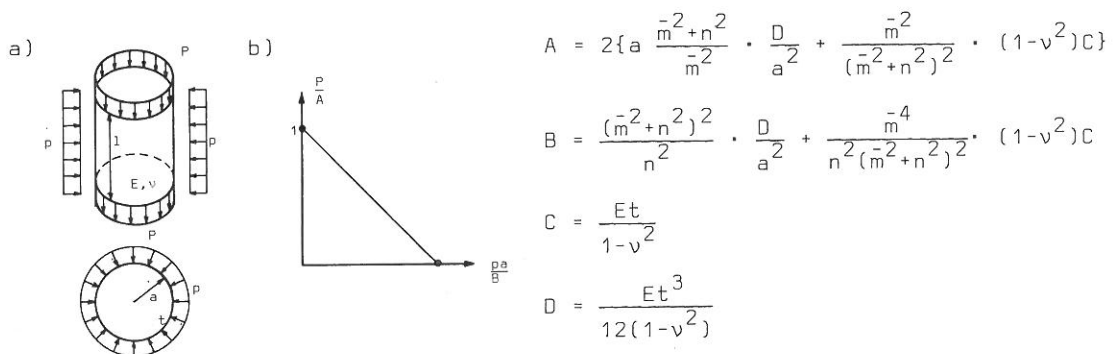


Kuva 14. Esimerkin 10 nivelisesti tuettu laatta. a) Kuormitus x-suunnassa. b) Kuormitus y-suunnassa. c) Tarkka kriittinen pinta.

osituskaava antaa yleensä suhteellisen hyviä tuloksia suorakaidelaatan lommahduskuormitukselle, kun suhde $a/b \approx 1$. Toisaalta, jos suhde a/b eroaa paljon ykkösestä, niin voidaan usein soveltaa palkkiteoriaa. Suurin virhe sovellettaessa osituskaavaa syntyy käsikirjan /17/ arvoihin verrattuna neliölaatalla, kun sitä kuormittaa taivutusmomentti ja leikkausvoima. Kriittisen pinnan yhtälö on silloin yksikköympyrä. Suurin virhe on tällöin noin 30 %.

KUOREN LOMMAHDUS

Esimerkki 11. Tarkastellaan kuvan 15a suoraa ympyräsylinterikuorta. Yhdistämällä osituskaavalla kriittinen aksiaalinen puristus P ja kriittinen ulkoinen paine p (Brush /15/) saadaan kriittisen pinnan alaraja-arvioksi (merkinnot kuvassa 14)



Kuva 15. Esimerkin 11 pyörähdyskuori. a) Kuormitus. b) Kriittinen pinta.

$$(\bar{m}^2 + n^2)^2 \left(n^2 p a + \frac{P}{2\pi a} \bar{m}^2 \right) = (\bar{m}^2 + n^2)^4 \frac{D}{a^2} + \bar{m}^4 (1 - v^2) C, \quad (44)$$

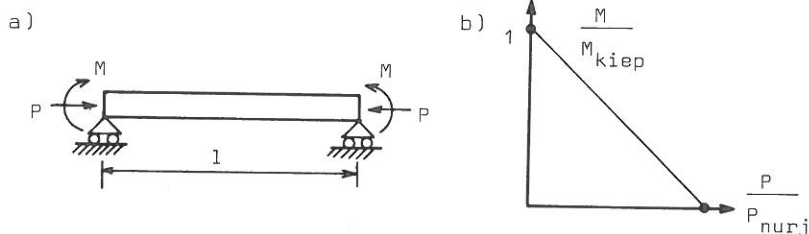
missä on merkitty $\bar{m} = \pi n a / l$. Kokonaisluvut m ja n määritetään sellaisiksi, että kuormituskerroin (vrt. esimerkki 10) on mahdollisimman pieni. Kaavaa (44) johdettaessa on käytetty alkutilan siirtymästä kalvotilan siirtymiä.

Teoksen /15/ mukaan kaava (44) on tarkka kriittisen pinnan yhtälö. Käsi-
kirjassa /18/ on esitetty kuorien tarkkoja sekä empiirisiä kriittisen pinnan
yhtälöitä ja kuvaajia.

ERI NURJAHDOUSKUORMITUSTEN YHDISTÄMINEN

Nylander /3/ totesi osituskaavan antavan hyviä tuloksia, kun lasketaan I-
palkin ns. avaruusunurjahduskuormitusta. Palkkia kuormittaa tällöin puristava
voima ja taivuttava momentti.

Esimerkki 12. Kuvan 16a tapauksessa kriittisen pinnan tarkka yhtälö on sama
kuin (Nylander /3/) osituskaavalla laskettu alaraja-arvio (kuva 16b).



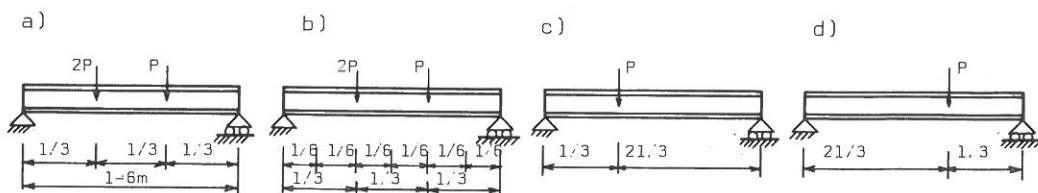
Kuva 16. Esimerkki 12 palkki. a) Kuormitus. b) Tarkka
kriittinen pinta.

Kuvassa 16b esitetyt M_{kiep} ja P_{nurj} arvot ovat riippuvia palkin sivusuuntaisesta
tuennasta sekä palkin materiaalista ja poikkileikkausmitoista /3/.
Mikäli kiepahdusmomentti M_{kiep} on suurempi kuin plastinen kantomomentti M_p ,
niin yhdistäminen voidaan suorittaa esimerkissä 1 esitetyllä tavalla.

Esimerkki 13. Tällä esimerkillä pyritään kuvaamaan sitä, kuinka osituskaavaa
käyttäen voidaan tietokoneen muistikapasiteettia säästää. Menetelmän varsi-
nainen hyöty saavutetaan tietenkin vasta paljon suuremmilla elementtimäärillä.
Ratkaistaan kuvan 17a palkin kiepahduskuormitus. Edellä mainittu elementti-
menetelmään perustuva tietokoneohjelma antaa tuloksen

$$P_{cr6}^+ = 119.24 \text{ kN}, \quad (45)$$

kun käytetään kuvassa 17b esitettyä tiheämpää elementtijakoa.



Kuva 17. Esimerkin 13 palkki. a) Tuenta ja kuormitus. b) Tiheämpi ja har-
vempi elementtijako. c) Ositettu kuormitus, lasketaan P_{cr2} .
d) Ositettu kuormitus, lasketaan P_{cr2} .

Kuvan 17b harvemmalla elementtijaolla saadaan tulos

$$P_{cr3}^+ = 119.66 \text{ kN} . \quad (46)$$

Samalla ohjelmalla lasketut kuvien 17c ja d palkkien kiepahduskuormitusten arvot ovat

$$P_{cr2}^+ = 347.22 \text{ kN}, \quad (47)$$

kun on käytetty kuvissa 17c ja d esitettyä elementtijakoa. Osituskaavan perusteella saadaan

$$P_{cr}^{\pm} = \frac{1}{\frac{2}{P_{cr1}^+} + \frac{1}{P_{cr2}^+}} = 115.74 \text{ kN}. \quad (48)$$

YHTEENVETO

Edellä kuvattu likimenetelmä ei anna mitään tietoa rajatilan siirtymäkentästä. Nurjahdusmuodoilla on merkittävä vaikutus ns. toisen kertaluvun teoriassa ja lisätukien paikan suunnittelussa. Osituskaava (10) antaa hyviä tuloksia pienimmälle rajakuormitukselle stabiilisuusteoriassa etenkin sauvarakenteissa. Tulokset ovat varmalla puolella ja laskukaava on yksinkertainen, joten se sopii hyvin tietokoneella suoritettujen tarkempien laskelmien tarkastukseen sekä alustavaan mitoittamiseen. Jos kuormituksen lisäksi joudutaan osittamaan myös rakenne, niin tulokset saattavat olla paljonkin virheellisiä. Pintarakenteisiin (laatat ja kuoret) voidaan osituskaavaa soveltaa varovasti.

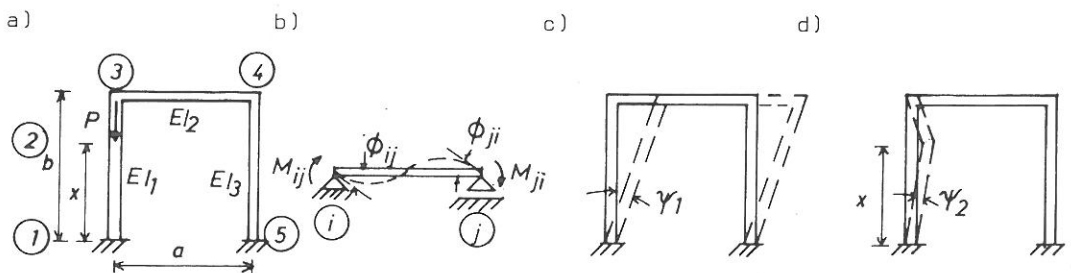
LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Puurakenteet, RIL 106, Helsinki 1975.
- [2] Teräsrakenteet, RIL 113. Helsinki 1977.
- [3] Nylander, H., Torsion, bending, and lateral buckling of I-beams. Kungl. Tekniska Högskolans Handlingar Nr. 102, Stockholm, Sweden, 1956.
- [4] Renton, J.D., Buckling of frames composed of thin-walled members, In: Thin-walled Structures. Edited by Chilver A.H, Chatto and Windus, London, 1967,
- [5] Papkovich, P.F., Works on the structural mechanics of ships. Volume 4, Moscow, 1963.
- [6] Parland, H., Kivirakenteet II. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Rakennusstatistiikka, Raportti 3, Tampere, 1978.
- [7] Massonnet, C.E., Save, M.A., Plastic Analysis and Design. Vol. I. Blaisdell Publishing Company, USA, 1965.
- [8] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, Tokyo 1961.

- [9] Rakennustekniikan käsikirja, Pääjakso 1, Yleiset perusteet 1 osa. Helsinki, 1969.
- [10] Grishcoff, N., Bull, acad. sci., Kiev, 1930.
- [11] Barsoum, R., Callgher, R., Internat'l. J. Num. Meth. Eng., 2, No.3. pp. 335-352, 1970.
- [12] Parland, H., Stabiilisuusteoria. Luentomonisteet, TTKK 1980. (Julkaisematton)
- [13] Parland, H., Rakenteiden vääntö. TTKK, Rakennetekniikan laitos, opetusmoniste n:o 1, Tampere, 1979.
- [14] Jeltsch, W., Formelsammlung zum kipp-problem. Tor-Isteg Steel corporation. Heft 59, Wien, 1975.
- [15] Bryan, G.H., Proc. London Math. Soc., vol. 22, p54, 1891.
- [16] Brush, D.O., Almroth, B.O., Buckling of Bars, Plates, and Shells. McGraw-Hill, USA 1975.
- [17] Gerard, G., Becker, H., Handbook of Structural Stability. Part I, Buckling of Flat Plates, NACA TN 3781, 1957.
- [18] Gerard, G., Becker, H., Handbook of Structural Stability, Part III. Buckling of Curved Plates and Shells, NACA TN 3783, 1957.

LIITE 1.

Lasketaan kuvan L1a kehän tarkka nurjahduskuormituksen arvo kehärakenteiden voimamenetelmällä. Merkinnot ja merkkisopimukset on esitetty kuvissa L1a ja L1b. Kun nurkkien momenttitasapainoyhtälöt on käytetty hyväksi, niin tuntemattomiksi parametreiksi voidaan valita sauvanpäämomentit M_{12} , M_{21} , M_{32} , M_{42} ja M_{54} sekä sauvakiertymät ψ_1 ja ψ_2 . Kiertymät ψ_1 ja ψ_2 on esitetty kuvissa L1c ja L1d. Kehäteorian perusyhtälöt ovat tässä tapauksessa



a) Esimerkkikehä. b) Merkkisopimuksia. c) Kiertymä ψ_1 . d) Kiertymä ψ_2 .
Kuva L1.

$$\begin{cases} \phi_{ij} = \alpha_{ij} M_{ij} \varphi(\gamma) - \beta_{ij} M_{ij} f(\gamma) + \psi_{ij}, & (i+j = 3) \\ \phi_{ij} = \alpha_{ij} M_{ij} - \beta_{ij} M_{ji} + \psi_{ij}, & (i+j > 3), \end{cases} \quad (L1)$$

missä ϕ_{ij} on nurkan i kiertymä (kuva L1b), α ja β ovat sauuvakioita

$$\alpha_{ij} = 2\beta_{ij} = \frac{1_{ij}}{3(EI)_{ij}}, \quad (L2)$$

sekä $\varphi(\gamma)$ ja $f(\gamma)$ ovat Berryn funktiot

$$\begin{cases} \varphi(\gamma) = 3(1/\gamma - 1/\tan\gamma)/\gamma \\ f(\gamma) = 6(1/\sin\gamma + 1/\gamma)/\gamma, \end{cases} \quad (L3)$$

missä muuttuja γ on

$$\gamma = \sqrt{\frac{P}{EI_1}} \cdot x. \quad (L4)$$

Ratkaisuyhtälöt ovat yhteensopivuusyhtälöt

$$\begin{cases} \phi_{12} = 0 \\ \phi_{21} = \phi_{23} \\ \phi_{32} = \phi_{34} \\ \phi_{43} = \phi_{45} \\ \phi_{54} = 0, \end{cases} \quad (L5)$$

sekä siirtyneiden kehien (kuvat L1c ja L1d) tasapainoyhtälöt

$$\begin{cases} M_{12} + M_{32} - M_{43} + M_{54} + P\psi_1 x = 0 \\ (b-x)M_{12} + bM_{21} - xM_{32} + (b-x)P\psi_2 x = 0. \end{cases} \quad (L6)$$

Yhtälät (L5) ja (L6) voidaan esittää matriisimuodossa ottamalla huomioon kaavat

$$\begin{cases} \psi_{12} = \psi_{21} = \psi_1 + \psi_2 \\ \psi_{23} = \psi_{32} = \psi_1 + \frac{x}{b-x} \psi_2 \\ \psi_{34} = \psi_{43} = 0 \\ \psi_{45} = \psi_{54} = \psi_1. \end{cases} \quad (L7)$$

Tulos on

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_{12}\varphi(\gamma) & -\beta_{12}f(\gamma) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 -\beta_{12}f(\gamma) & \alpha_{12}\varphi(\gamma)+\alpha_{23} & \beta_{23} & 0 & 0 & 0 & b/(b-x) \\
 0 & \beta_{23} & \alpha_{23}+\alpha_{34} & \beta_{34} & 0 & 1 & -x/(b-x) \\
 0 & 0 & \beta_{34} & \alpha_{34}+\alpha_{45} & \beta_{45}-1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \beta_{45} & \alpha_{45} & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & px & 0 \\
 b-x & b & -x & 0 & 0 & 0 & P(b-x)
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 M_{12} \\
 M_{21} \\
 M_{32} \\
 M_{43} \\
 M_{54} \\
 \psi_1 \\
 \psi_2
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (L8)$$

Yhtälöryhmällä (L8) on ei-triviaaliratkaisu, jos yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on nolla. Tästä ehdosta saadaan transkendenttinen yhtälö, jonka pienimmät juuret P on esitetty tekstin taulukossa 3. Erityistapauksessa $x = b$ saadaan hieman pienempi kerroinmatriisi (5x5) kuin edellä.

Markku Heinisuo, dipl.ins., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto