

SATUNNAISVÄRÄHTELYISTÄ

Matti A. Ranta

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 10
No. 3 1977 s. 9...17.

YHTEENVETO: Kirjoituksessa pyritään antamaan ainoastaan johdanto satunnaisvärähtelyjen teoriaan ja sen soveltamiseen. Homogeenisia stationaarisia prosesseja käsitellään hieman perusteellisemmin, sillä niillä on suurin merkitys käytännössä.

YLEISTÄ

Värähtelyjä tutkittaessa käytetään tavallisesti determinististä analyysiä, jolloin oletetaan rakenteen staattisten ja dynaamisten ominaisuuksien samoin kuin ulkoisten kuormitusten noudattavan täsmällisesti formuloitavissa olevia funktiomuotoja.

Deterministiselle prosessille on tyypillistä, että samanlainen koe antaa mittatarkkuuden rajoissa aina saman tuloksen. Jos tulokset jatkuvasti eroavat merkittävästi toisistaan sanotaan prosessin olevan luonteeltaan satunnaisen eli stokastisen, eli se on ns. random-prosessi. Satunnaisuuden aste voi tietenkin vaihdella eri prosesseilla. Stokastisuutta aiheuttavia ominaisuuksia voi olla sekä rakenteessa itsessään että kuormituksessa. Usein kuormituksen stokastisuus on ratkaiseva, jolloin itse rakennetta voidaan pitää deterministisenä. Tavallisin stokastinen kuormitus on tuulikuorma, maanjäristys, liikennetärinä tai epäsäännöllinen lämpötilan vaihtelu.

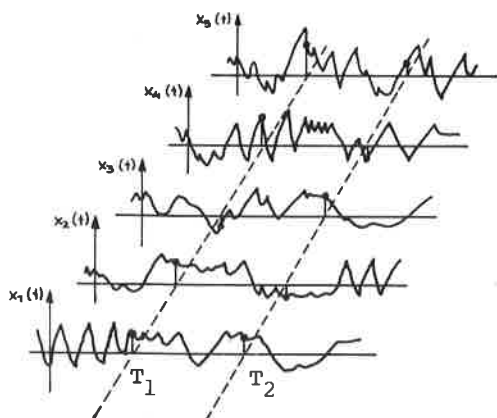
Insinöörin ratkaistavaksi tuleva stokastinen probleema kuuluu johonkin seuraavasta kolmesta ryhmästä:

1. Olosuhteiden mittaaminen,
2. Tällaisissa olosuhteissa toimivaksi tarkoitettun rakenteen suunnittelu,
3. Olemassa olevan rakenteen toimivuuden testaus.

On selvää, että stokastisen prosessin käyttäytymistä tutkittaessa tarvitaan enemmän havaintoja kuin deterministisestä prosessista kyseen ollen.

STOKASTISTA ANALYYSIÄ

Olkoon $X(t)$ stokastinen prosessi ja $x_i(t)$ eräs sen näytefunktio eli tulos i :nnessä kokeessa. Ajatellaan suoritetuksi n koetta, jotka esitetään seuraa-



Kuva 1. Ryhmä saman stokastisen prosessin eri realisatioita. [4]

vasti (kuva 1). Tällöin voidaan määrittellä seuraavat keskiarvot:

Aikakeskiarvo välillä $T_2 > t > T_1$ i:nnessä kokeessa

$$\bar{x}_i(t) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} x_i(t) dt, \quad (1)$$

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{\substack{T_2 \rightarrow +\infty \\ T_1 \rightarrow -\infty}} \bar{x}_i(t).$$

Ryhmäkeskiarvo eli odotusarvo

$$E_n[X(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (2)$$

$$m_x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n[X(t)].$$

Jos todennäköisyyshiiteysfunktio

$$p(x, t) \text{ ja } p(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (3)$$

tunnetaan saadaan odotusarvo eli keskiarvo

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, t) dx, \quad (4)$$

autokorrelaatiofunktio

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[x_1(t_1) x_2(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

sekä autokovarianssifunktio

$$\psi_{xx}(t_1, t_2) = E\{[x_1(t_1) - m_{x_1}(t_1)][x_2(t_2) - m_{x_1}(t_2)]\}. \quad (6)$$

Purkamalla jälkimmäisen oikea puoli saadaan

$$\psi_{xx}(t_1, t_2) = \phi_{xx}(t_1, t_2) - m_{x_1}(t_1)m_{x_2}(t_2). \quad (7)$$

HOMOGEENISUUS JA STATIONAARISUUS

Stokastisen prosessin sanotaan olevan (heikosti) homogeeninen, jos ajan lähtökohta on merkityksetön eli

$$p(x_1, t_1) = p(x_1, t_1 + a), p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1 + a; x_2, t_2 + a).$$

Jos erikoisesti $a = -t_1$, keskiarvo on ajasta riippumaton, ja autokorrelaatio sekä autokovarianssi riippuvat vain aikaerosta $\tau = t_2 - t_1$. Merkitään sil-

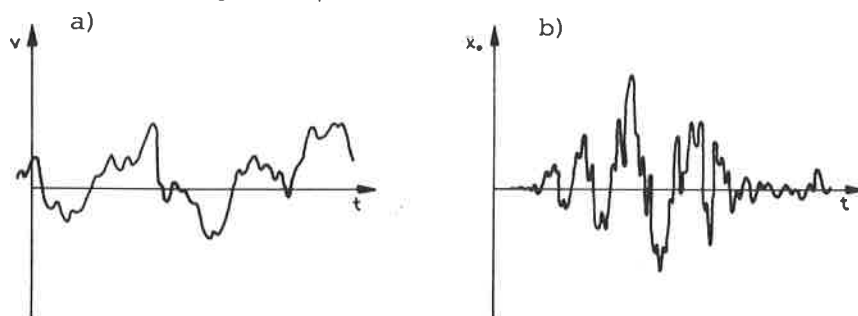
loin seuraavasti (ks. (4), (5) ja (6)):

$$\left. \begin{aligned} m_x(t) &= m_x \\ \phi_{xx}(t_1, t_1 + \tau) &= R_{xx}(\tau) \\ \psi_{xx}(t_1, t_1 + \tau) &= \Gamma_{xx}(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Yhtälöstä (7) seuraa tällöin

$$\Gamma_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - m_x^2 \quad (9)$$

Stationaarisuus taas tarkoittaa, että olosuhteissa ei tapahdu muutoksia. Prosessin alkamisesta on kulunut niin pitkä aika, että siitä aiheutuneet häiriöt ovat häipyneet. Kuvassa 2 nähdään kaksi esimerkkiä, joista a) on stationaarinen ja b) epästationaarinen.



Kuva 2. Stokastisten prosessien realisaatioita. Tuulen nopeus (a) on stationaarinen ja maanjäristyksen aikainen maanpinnan kiihtyvyys (b) epästationaarinen prosessi. [1]

ERGODISUUS

Prosessin sanotaan olevan keskiarvon suhteen ergodinen, jos todennäköisyydellä 1 aikakeskiarvo on sama kuin ryhmäkeskiarvo eli

$$P\{\langle x(t) \rangle = m_x(t)\} = 1. \quad (10)$$

On selvää, että keskiarvon $m_x(t) = m_x$ on oltava tällöin ajasta riippumaton.

Prosessi on korrelaation suhteen ergodinen, jos pätee:

$$P\{\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = R_{xx}(\tau)\} = 1. \quad (11)$$

Prosessin ergodisuudesta on se etu, että riittää tarkastella yhtä näytefunktiota keskiarvon ja joko korrelaatiofunktion tai autokovarianssifunktion määrittämiseksi. Kaksi näistä riittää karakterisoimaan prosessia, joka noudattaa Gaussin todennäköisyysjakautumaa.

SPEKTRAALITIHEYS ELI TEHOSPEKTRI

Spektraalitiheysfunktio $S_{xx}(\omega)$ saadaan autokovarianssin Fourier-muunnokse-
 na

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \Gamma_{xx}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Edelleen seuraa käänteisesti

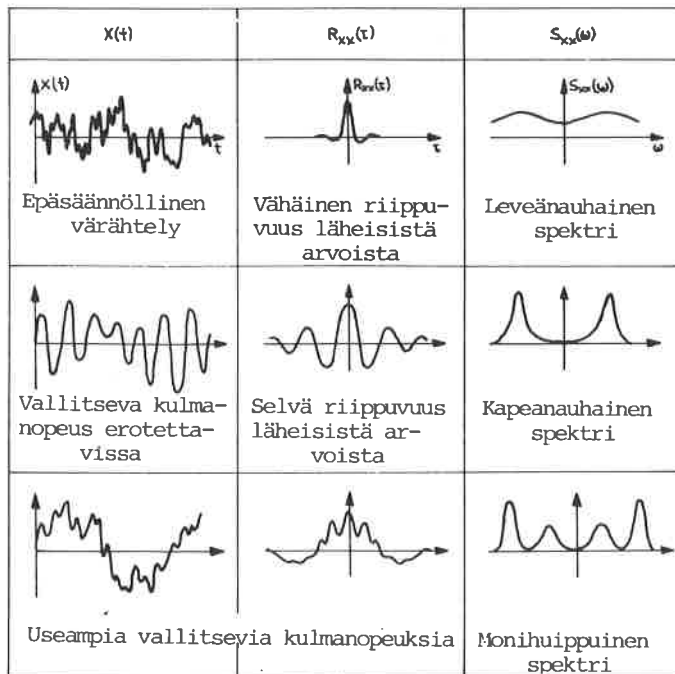
$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (13)$$

Koska $\Gamma_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}(-\tau)$, voidaan integraalit esittää myös seuraavasti:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Gamma_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (14)$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (15)$$

Kuvassa 3 nähdään muutamia tyypillisiä värähtelyjä ja niitä vastaavat $R_{xx}(\tau)$
 ja $S_{xx}(\omega)$ -funktiot. Yksinkertaisuuden vuoksi on näissä koordinaatisto valit-
 tu niin, että aikakeskiarvo on nolla, jolloin $\Gamma_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau)$.



Kuva 3. Stokastisten prosessien karakterisointi autokorrelaatiofunktion tai spektritiheyden avulla. [1]

NELIÖLLINEN KESKIARVO

Ergodisen prosessin neliölliselle keskiarvolle saadaan (ks. (5), (8) ja (9)) :

$$\langle x(t)^2 \rangle = E[X(t)^2] = R_{xx}(0) = m_x^2 + \Gamma_{xx}(0) = m_x^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (16)$$

Spektritiheys ilmaisee ω :n funktiona, kuinka suuri osa neliöllisestä keskiarvosta tai siihen verrannollisesta tehosta on peräisin tietyn taajuisesta värähtelystä. Siitä johtuu nimi tehospektri.

SATUNNAISPROSESSIN DERIVAATTA JA INTEGRAALI SEKÄ KONVERGENSSI NELIÖN KESKIARVON MIELESSÄ

Jos on olemassa sellainen satunnaisprosessi $X'(t)$, että kiinteällä t :n arvolla

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[\left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right|^2 \right] = 0 \quad (17)$$

eli

$$DX(t) = X'(t) = \text{l.i.m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}, \quad (18)$$

niin sanotaan prosessin $X(t)$ olevan derivoituvan neliön keskiarvon mielessä (l.i.m.) pisteessä t . Satunnaisprosessin integraalin täsmällinen määrittely sivuutetaan tässä. Erona deterministiseen määrittelyyn on se, että tavallisen raja-arvon lim tilalle tulee raja-arvo neliöllisen keskiarvon mielessä eli l.i.m..

Odotusarvo-operaattori E kommutoi derivaattaoperaattorin D ja integraalioperaattorin D^{-1} kanssa. Todistus perustuu siihen, että operaattorin lim tilalle tulee l.i.m..

STOKASTISEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN RATKAISEMISESTA

Olkoon meillä $Y(t)$:n lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka kertoimet ovat deterministiset ja kuormitustermi $X(t)$ stokastinen. Differentiaaliyhtälö voidaan esittää operaattorin

$$L(D_k) = \sum_{i=0}^n a_i D_k^i, \quad \text{jossa} \quad D_k = \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad (19)$$

avulla seuraavasti:

$$L(D_k)Y(t_k) = X(t_k). \quad (20)$$

Keskiarvon $m_y(t)$ määrittäminen: ottamalla yhtälön (20) odotusarvo E saadaan, koska $EL = LE$, yhtälö

$$L(D_k)m_y(t_k) = m_x(t_k), \quad (21)$$

josta keskiarvo $m_y(t)$ voidaan tarvittaessa määrittää.

Autokovarianssifunktion $\psi_{yy}(t_1, t_2)$ määrittäminen: Vähennetään yhtälö (21) yhtälöstä (20):

$$L(D_k)[Y(t_k) - m_y(t_k)] = X(t_k) - m_x(t_k). \quad (22)$$

Valitaan ensin $k = 2$ ja kerrotaan (22) lausekkeella $X(t_1) - m_x(t_1)$ sekä otetaan odotusarvo. Koska E ja L kommutoivat, saadaan yhtälön (6) avulla

$$L(D_2)E\{[X(t_1) - m_x(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]\} = \psi_{xx}(t_1, t_2). \quad (23)$$

Sen jälkeen valitaan $k = 1$ ja kerrotaan (22) lausekkeella $Y(t_2) - m_y(t_2)$ sekä otetaan odotusarvo. Tulos on

$$L(D_1)\psi_{yy}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_x(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]\}. \quad (24)$$

Yhtälöistä (23) ja (24) saadaan ratkaistuksi

$$L(D_2)L(D_1)\psi_{yy}(t_1, t_2) = \psi_{xx}(t_1, t_2). \quad (25)$$

Vastaava yhtälö, jossa ϕ on ψ :n tilalla, saadaan autokorrelaatiofunktioille. Ratkaisu heikosti homogeeniselle stationaariselle prosessille: Jos keskiarvot ovat ajasta riippumattomia, seuraa yhtälöstä (21)

$$m_y = \frac{1}{a_0} m_x. \quad (26)$$

Yhtälö (25) voidaan kirjoittaa muotoon

$$L(D_2)L(D_1)\Gamma_{yy}(t_2 - t_1) = \Gamma_{xx}(t_2 - t_1).$$

Jos merkitään $\tau = t_2 - t_1$ ja $D = \frac{\partial}{\partial \tau}$, havaitaan, että

$$L(D_2) = L(D), \text{ mutta } L(D_1) = L(-D).$$

Tällöin nähdään, että yhtälö (25) kuuluu nyt seuraavasti:

$$L(D)L(-D)\Gamma_{yy}(\tau) = \Gamma_{xx}(\tau). \quad (27)$$

Tämän yhtälön ratkaiseminen käy parhaiten yhtälön (12) määrittelemän Fourier-muunnoksen avulla. Osittaisintegroinnilla voi todeta, että yhtälössä (27) tulee D :n paikalle $i\omega$ ja Γ :n paikalle tulee tietenkin S . Tulos on seuraava:

$$L(i\omega)L(-i\omega)S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega). \quad (28)$$

Koska $L(i\omega)$ ja $L(-i\omega)$ ovat toistensa konjugaatit, on niiden tulo yhtä kuin itseisarvon neliö eli

$$L(i\omega)L(-i\omega) = |L(i\omega)|^2 = \frac{1}{|H(\omega)|^2}. \quad (29)$$

Funktiota $H(\omega)$ kutsutaan systeemin siirtofunktioksi ja funktiota $|H(\omega)|^2$ kutsutaan systeemifunktioksi.

Lopputulokseksi saadaan yksinkertainen kaava

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (30)$$

tehospektrien välille. Vertaamalla yhtälöitä (20) ja (30) nähdään, mikä etu saavutetaan, kun aikamuuttujan differentiaaliyhtälön sijasta saadaan kulmanopeuden funktiona algebrallinen yhtälö.

Autokovarianssifunktio $\Gamma_{yy}(\omega)$ saadaan käänteisellä Fourier-muunnoksella kaavaa (13) vastaavalla tavalla:

$$\Gamma_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (31)$$

Tämän integraalin laskeminen analyttisesti on usein erittäin vaikeaa ellei suorastaan mahdotonta. Siitä syystä joudutaan turvautumaan numeerisiin menetelmiin (ks. [4]).

Epästationaarisen prosessin ratkaisusta: Ajatellaan aluksi yhtälön (20) häiriötermin olevan Diracin deltafunktion eli yksikköhäiriön $X(t) = \delta(t - \tau)$. Tällöin vaste $Y(t) = h(t - \tau)$ on vaikutusfunktio eli Greenin funktio. Kyseisen Greenin funktion avulla saadaan sitten yhtälön (20) yksityisratkaisu

$$Y_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau. \quad (32)$$

Yhtälön (20) yleinen ratkaisu on deterministinen ja muotoa $U(t) = \sum C_i Y_i(t)$ jos C_i ovat alkuehdoista riippuvia deterministisiä vakioita. Täydellinen ratkaisu on yleisen ratkaisun $U(t)$ ja yksityisratkaisun $Y_0(t)$ summa.

Funktioiden $H(\omega)$ ja $h(t)$ välillä vallitsee yhteys

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (33)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Koska vain stokastinen osa $Y_0(t)$ kiinnostaa, jätetään $U(t)$ huomioon ottamatta. Ottamalla yhtälön (32) odotusarvo saadaan

$$m_{Y_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) m_X(t - \tau) d\tau. \quad (34)$$

Jos $m_X(t - \tau) = m_X$ eli vakio, seuraa (33):n avulla, kun $\omega = 0$, että

$$m_{Y_0} = H(0) m_X, \quad (26)$$

joka on sama kuin yhtälö (26).

Autokovarianssifunktioille saadaan yhteys

$$\psi_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\psi_{xx}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \quad (35)$$

Jos prosessi X on heikosti homogeeninen, saadaan

$$\Gamma_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\Gamma_{xx}(\tau + \tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \quad (36)$$

Kun muodostetaan tämän Fourier-muunnos kaavan (12) mukaan, saadaan (33) avulla uudelleen kaava (30).

Yhtälö (35) on yleistettävissä, joten vasteen kaikki statistiset ominaisuudet pystytään lausumaan herätteen vastaavien ominaisuuksien avulla.

Yleisemmän yhtälön ratkaisemisesta: Jos yhtälön (20) kertoimet ovat stokastisia (vakioita tai funktioita), ratkaisu vaikeutuu oleellisesti. Lähdekirjallisuudesta löytyy apua joihinkin tapauksiin (ks. [3]).

STOKASTISEN ANALYYysin SOVELTAMISESTA

Edellä ollut esitys on varsin suppea johdanto satunnaisvärähtelyjen teoriaan. Sovellutusten kannalta tärkeimmän alueen muodostavat homogeeniset stationaariset prosessit.

Aivan alussa mainittiin kolme tehtäväryhmää, jotka stokastisessa analyysissä tulevat kysymykseen.

1. Olosuhteiden mittaaminen: Tällöin rekisteröidään heräte $X(t)$ sopivan pitkällä aikavälillä ja lasketaan $S_{xx}(\omega)$.
2. Tällaisissa olosuhteissa toimivaksi tarkoitetun rakenteen suunnittelu: kuvan 3 perusteellakin jo havaitsee, että rakenne tulee suunnitella niin, että $S_{xx}(\omega)$:n ja $|H(\omega)|^2$:n huiput eivät satu lähekkäin eli että $S_{yy}(\omega)$ on mahdollisimman laakea.
3. Olemassa olevan rakenteen toimivuuden testaus: Tehtävään sisältyy paitsi herätteen spektrin $S_{xx}(\omega)$ laskeminen mittaustuloksista usein myös systeemifunktion $|H(\omega)|^2$ kokeellinen määrittäminen. Tällöin systeemiä kuormitetaan herätteellä $X(t)$, jonka tehospektri $S_{xx}(\omega)$ tunnetaan. Mitataan vaste $Y(t)$ ja lasketaan siitä $S_{yy}(\omega)$. Kaavasta (30) saadaan sitten $|H(\omega)|^2 = S_{yy}(\omega)/S_{xx}(\omega)$.

Rakenteen vaurioitumisen kannalta satunnaisvärähtelyjen alaisena voidaan erottaa kaksi erilaista mahdollisuutta:

- vaurioituminen tietyn amplitudirajan ylittyessä
- vähitellen tapahtuva vaurioituminen väsymisen seurauksena.

Näiden teoriaan ei puututa tässä vaan viitataan esim. lähteisiin [1] ja [2].

Stokastiselle analyysille on tyypillistä, että mittaustuloksia, joista erilaisia suureita tulee laskea, kertyy usein erittäin runsaasti. Näin ollen numeeriset laskut muodostavat analyysin suuritöisimmän vaiheen. Näiden laskujen nopeuttamiseksi on kehitetty erilaisia laskurutiineja kuten esim. FAST-FOURIER-TRANSFORMS rutiinit (ks. [4]).

LOPPUSANAT

Rakenteiden luotettavuusteoria yleensä ja satunnaisvärähtelyjen teoria erityisesti ovat viime vuosina kehittyneet tai paremmin sanottuna tulleet huomatuiksi ja käyttöön otetuiksi myös insinööritieteiden piirissä. Teoriat eivät suinkaan ole vielä täydellisiä vaan kaipaavat jatkuvaa kehittämistä ja ennen kaikkea soveltamista. Todennäköisyysteoreettisten laskumenetelmien merkitys tulee tulevaisuudessa jatkuvasti kasvamaan.

Lähdeluetteloon on suomenkielisten lisäksi valittu vain kolme muuta, sillä näiden perusteella kiinnostunut lukija jo pystyy tunkeutumaan aiheeseen.

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Matti Hannus: Rakenteiden luotettavuus. VTT. Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka, Helsinki 1973.
- [2] Simo Virtanen: Stokastiset prosessit rakenteiden mekaniikassa. TTKK. Moniste 2220, Tampere 1976.
- [3] T.T. Soong: Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, New York 1973.
- [4] D.E. Newland: Random Vibrations and Spectral Analysis, Longman, London 1975.
- [5] Athanasios Papoulis: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York 1965.

Matti Ranta, prof., Helsingin teknillinen korkeakoulu, Espoo Otaniemi.