

Ilkka Kangas

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 9
No. 4 1976 s. 27...39

YHTEENVETO: Artikkelissa käsitellään tutkijoiden Vijakkhana, Nishino ja Lee esittämää elementtimenetelmää, jolla voidaan suorittaa toisen asteen teoriaan perustuva kehän kimmoplastinen analyysi sekä laskea kehän stabiilius. Artikkelissa on lisäksi esitetty perusteita kyseisen menetelmän teoriaan. Kirjoitukseen liittyvässä esimerkissä verrataan tällä teoriolla lasketun kaksikerroskehän tuloksia ensimmäisen asteen teoriolla laskettuihin tuloksiin.

Kimmoplastisessa analyysissä, jota artikkeli käsittelee, otetaan rakenteen toisen asteen teorian mukainen toiminta huomioon stabiiliusmatriisilla. Sekä jäykkyys- että stabiiliusmatriisien sopivuutta rajakuorman laskemiseen, rakenteen epälineaariseen käyttäytymiseen, helpotetaan Δ -funktion käytöllä. Rajakuorman laskemisessa voidaan myös nivelen palautuminen ottaa huomioon. Laskettaessa kehän rajakuormaa, tarkastetaan kehän stabiilius jokaisen nivelen syntymisen jälkeen laskemalla nurjahduskerroin sellaiselle rakenteelle, jossa plastinen nivel on korvattu rakennennivelellä.

JOHDANTO

Laskettaessa hoikkia monikerroskehiä alkaa kehäsauvojen aksiaalisilla kuormilla olla yhä enemmän vaikutusta rakenteen rajatilaan. Rakenne saattaa nurjahtaa, ennen kuin siihen on syntynyt niveliä niin paljon, että se menettäisi kantokykynsä muodostumalla mekanismiksi. Toisaalta rakenteeseen syntyvät nivelet kasvattavat nopeasti kehän sivusiirtymiä, jotka puolestaan aiheuttavat aksiaalisten voimien kanssa lisärasituksia sauvoihin.

Suurten kehien rajakuorman määrittämiseen käytetään nykyään matriisimenetelmiä, jotka on kehitetty alunperin kimmoisten rakenteiden laskemiseen tarkoitetuista menetelmistä. Kimmoplastisessa analyysissä lisätään asteittain kehän kuormaa ja seurataan momenttia kehän kriittisissä pisteissä. Kun momentti ylittää jossakin seurattavassa pisteessä kyseisen sauvan myötömomentin, asetetaan pisteeseen nivel, sekä annetaan nurkkaan, johon nivel liittyy, kuormitukseksi myötömomentin suuruinen momentti. Nivelten välisten osien oletetaan toimivan täysin kimmoisesti. Rakenteen stabiilius tutkitaan jokaisen nivelen syntymisen jälkeen.

Tarkasteltaessa kehiä toisen asteen teoriolla, käytetään yleensä jäykkymatriisissa stabiilisuusfunktioita. Tässä esityksessä käytetään tähän tarkoitukseen geometrasta jäykkymatriisia 1. stabiiliusmatriisia.

Matriisien sopivuutta rajakuorman laskemiseen parannetaan Δ -funktion käytöllä.

PERUSOLETUKSET

Materiaali oletetaan kimmoplastiseksi. Aineen jännitys-venymäkäyrää idealisoidaan kahdella suoralla, joiden kulmakertoimet ovat E ja 0 .

Kehän oletetaan toimivan paloittain kimmoisena rakenteena ja plastisoitumisen oletetaan rajoittuvan yhteen poikkileikkaustasoon.

Poikkileikkaus toimii niin kauan lineaarisesti kimmoisena, kun $M < M^*$, missä M^* = myötömomentti.

Oletetaan, että normaalivoimasta ja sauvan taipumasta johtuva sauvan lyheneminen ei vaikuta sauvan jäykkyyteen.

Muodonmuutoslujittumista ei oteta huomioon.

Kuormitukset ja sivutuenta ovat sellaisia, että edellytykset tasokehätarkastelulle ovat olemassa.

RAKENTEEN VAKAVUUDEN LASKEMINEN JÄYKKYYS- JA STABIILIUSMATRIISIN AVULLA

Tarkastellaan rakennetta, jolla on kaikkiaan n kpl yleistettyjä koordinaatteja, siirtymäsuureita, kahdessa toisiaan hyvin lähellä olevassa siirtymätilassa. Ensimmäisessä siirtymätilassa, tasapainotilassa, on siirtymillä arvot q_i ja rakenteen ja kuormien muodostaman systeemin potentiaalienergialla arvo $V(q_i)$. Toisessa tasapainotilassa siirtymillä on arvot $q_i + \delta q_i$ ja potentiaalienergialla arvo $V(q_i + \delta q_i)$. Potentiaalienergian muutos on siten

$$\Delta V = V(q_i + \delta q_i) - V(q_i) \quad (1)$$

eli

$$\Delta V = \delta^1 V + \frac{1}{2} \delta^2 V + O(\delta^3) \quad (2)$$

missä

$$\delta^1 V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i \quad (3a)$$

$$\delta^2 V = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \partial q_i \partial q_j \quad (3b)$$

ja $O(\delta^3)$ sisältää kolmannen ja sitä suuremman kertaluvun termit /1/. Rakente on tasapainossa, jos $\delta^1 V = 0$ millä tahansa lisäsiirtymän arvolla. Rakenteen tasapainotila on labiili, jos rakenteen saadessa lisäsiirtymän toinen

variaatio $\delta^2 V < 0$ ja stabiili, jos $\delta^2 V > 0$. Näin ollen on kriittinen kuormitus, kuormitus, jolla rakenteesta tulee epästabiili, ratkaistavissa ehdosta

$$\delta^2 V = 0 \text{ ts. } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right) \text{ on positiivisesti semidefiniitti} \quad (4)$$

Tämä ehto täyttyy, kun vastaava determinantti menee nolllaksi.

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right| = 0 \quad (5)$$

Merkitään rakenteen muodonmuutosenergiaa U :lla ja potentiaalienergiaa, jonka Q_i kuormat tekevät q_i siirtymistä W_q :lla, sekä potentiaalienergiaa, jonka aksiaaliset voimat tekevät sauvojen lyhetessä taipumien vaikutuksesta W_n :llä.

Tällöin on kokonaispotentiaalienergia

$$V_{q_i} = U - W_q - W_n \quad (6)$$

Kriittisen kuormituksen ehto saa siten muodon

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right| = \left| \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right) - \left(\frac{\partial^2 W_q}{\partial q_i \partial q_j} \right) - \left(\frac{\partial^2 W_n}{\partial q_i \partial q_j} \right) \right| = 0 \quad (7)$$

Merkitään taipumat yleistettyjen koordinaattien avulla /2/

$$y(x) = \sum_{i=1}^4 q_i \phi_i(x) \quad (8)$$

missä q_i on yleistetty koordinaatti, siirtymä eri koordinaattipisteissä, ja $\phi_i(x)$ siirtymäfunktio eli muotofunktio, mikä kuvaa koordinaattipisteiden välillä olevan siirtymän laadun.

Jos sauvaa kuormittaa sekä momentti että normaalivoima N , sen kimmoviivan differentiaaliyhtälö on

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + N \frac{d^2 y}{dx^2} = p. \quad (9)$$

Jos tehdään sellainen approksimointi, että normaalivoima ei muuta sauvan taipumaviivan muotoa, jää sauvan toimintaa kuvaavaksi differentiaaliyhtälöksi

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p. \quad (10)$$

Tällöin on muodonmuutosenergia

$$U(q_i) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI [y''(x)]^2 dx. \quad (11)$$

Kun rakenteeseen tulee siirtymätila q_i , kuormien Q_i potentiaalienergia on

$$W_Q = - \sum_i Q_i q_i. \quad (12)$$

Siirtymistä q_i aiheutuu samalla lyhenemä. Normaalivoimasta johtuva potentiaalienergian muutos tätä lyhenemää vastaten on

$$W_n = \frac{1}{2} \int_0^1 N [y'(x)]^2 dx. \quad (13)$$

Sijoitetaan yhtälöihin (11) ja (13) taipumaviivan (8) derivaatat ja merkittään

$$k_{ij} = \int_0^1 EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx = \int_0^1 EI \phi_i''(x)^T \phi_j''(x) dx \quad (14)$$

$$s_{ij} = \int_0^1 N \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx = \int_0^1 N \phi_i'(x)^T \phi_j'(x) dx \quad (15)$$

saadaan

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (16)$$

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j s_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \{q\}^T [S] \{q\}. \quad (17)$$

Kun sijoitetaan nämä lausekkeet kokonaisenergian lausekkeeseen saadaan kriittiseksi kuormitukseksi

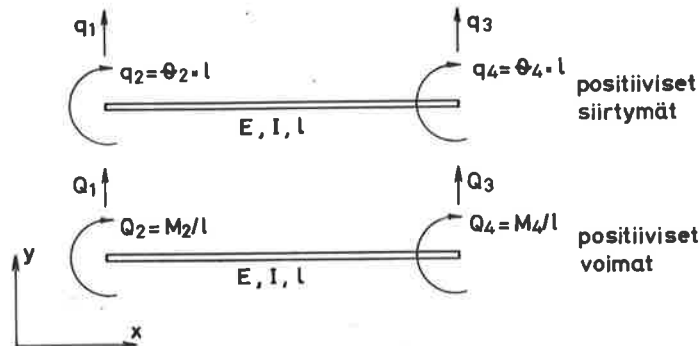
$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right| = | [K] - [S] | = 0. \quad (18)$$

Lausekkeesta on voimien Q_i vaikutus derivoitaessa hävinnyt. Kun otetaan kuormitusintensiteetti $\lambda = N_\lambda/N$ tekijäksi, saadaan stabiiliusehto muotoon (Tästä eteenpäin N tarkoittaa normaalivoimaa λ :n arvolla 1, ja $\lambda_{kr} = N_{kr}/N$)

$$|[K] - \lambda[S]| = 0. \quad (19)$$

SIIRTYMÄFUNKTIOT ELI MUOTOFUNKTIOT

Sauvan siirtymille ja voimille käytetään seuraavaa koordinaatistoa



Kuva 1. Siirtymien ja voimien merkkisäännöt.

Edellä tehtiin aproksimointi, että normaalivoima ei vaikuta kimmoviivan muotoon. Tämän perusteella voidaan laskea sauvan muotofunktiot $\phi_i(x)$ yhtälöstä

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \phi_i''. \quad (20)$$

Annetaan vuoron perään yhdelle siirtymistä arvo 1 ja asetetaan muut siirtymät nolllaksi, saadaan ratkaistuksi yleinen siirtymävektori

$$\phi(x')^T = \left\{ \begin{array}{l} (1 + 2x'), (1 - x')^2 \\ -x' (1 - x')^2, x'^2 (3 - 2x') \\ x'^2 (1 - x') \end{array} \right\} \quad (21)$$

missä $x' = x/l$.

Jäykkyys- ja stabiiliusmatriisit voidaan näin ollen laskea lausekkeista (14) ja (15).

$$[K] = \frac{E \cdot I}{1^3} \begin{pmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$[S] = \frac{N}{I} \begin{pmatrix} 6/5 & -1/10 & -6/5 & -1/10 \\ -1/10 & 2/15 & 1/10 & -1/30 \\ -6/5 & 1/10 & 6/5 & 1/10 \\ -1/10 & -1/30 & 1/10 & 2/15 \end{pmatrix} \quad (23)$$

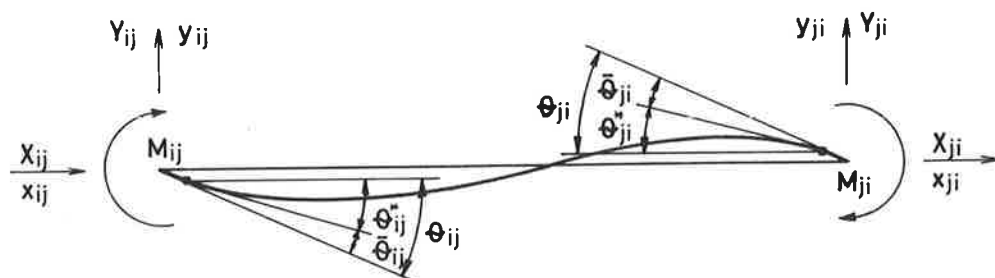
Siirretään matriisien kertoimet matriisiin sisään sekä otetaan aksiaali-voima huomioon. Alkuoletusten mukaisesti sauvan suuntainen siirtymä ei pienennä sauvan jäykkyyttä.

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{EA}{1} & 0 & 0 & -\frac{EA}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{1^3} & -\frac{6EI}{1^2} & 0 & -\frac{12EI}{1^3} & -\frac{6EI}{1^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{1^2} & \frac{4EI}{1} & 0 & \frac{6EI}{1^2} & \frac{2EI}{1} \\ -\frac{EA}{1} & 0 & 0 & \frac{EA}{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{1^3} & \frac{6EI}{1^2} & 0 & \frac{12EI}{1^3} & \frac{6EI}{1^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{1^2} & \frac{2EI}{1} & 0 & \frac{6EI}{1^2} & \frac{4EI}{1} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6N}{5 \cdot 1} & -\frac{N}{10} & 0 & -\frac{6N}{5 \cdot 1} & -\frac{N}{10} \\ 0 & -\frac{N}{10} & \frac{2 \cdot 1N}{15} & 0 & \frac{N}{10} & -\frac{N}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6N}{5 \cdot 1} & \frac{N}{10} & 0 & \frac{6N}{5 \cdot 1} & \frac{N}{10} \\ 0 & -\frac{N}{10} & -\frac{N}{30} & 0 & \frac{N}{10} & \frac{2 \cdot 1N}{15} \end{pmatrix} \quad (25)$$

SAUVAN VOIMATILAN LASKEMINEN

Matriisimenetelmiä on pyritty kehittämään siten, että ne soveltuisivat mahdollisimman joustavasti kehä rakenteiden ratkaisemiseen rajakuormateori-
alla /3/. Tällöin on voitava ottaa huomioon, että momentti poikkileikkauk-
sessa ei riipu nurkkapisteen kokonaiskiertymästä, kun myötömomentin arvo on
saavutettu. Käytetään plastisoituneelle sauvalle seuraavia merkintöjä.



Kuva 2. Plastisoituneen sauvan siirtymät ja voimat.

Merkitään

$$w_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, \theta_{ij})^T \quad w_{ji} = (x_{ji}, y_{ji}, \theta_{ji})^T \quad (26)$$

ja vastaavasti voimista

$$F_{ij} = (X_{ij}, Y_{ij}, M_{ij})^T \text{ ja } F_{ji} = (X_{ji}, Y_{ji}, M_{ji})^T \quad (27)$$

Kimmoisen sauvan voimien ja siirtymien riippuvuudeksi saadaan

$$\begin{Bmatrix} F_{ij} \\ F_{ji} \end{Bmatrix} = ([K] - \lambda[S]) \begin{Bmatrix} w_{ij} \\ w_{ji} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Kun sauvan pää plastisoituu, syntyy kimmoviivan tälle kohtaa epäjatkuvuus-
kohta. Sauvan pään kiertymä θ_{ij}^* on pienempi kuin nurkan kiertymä θ_{ij} ja
näin ollen on sauvan voimatila laskettava kiertymästä θ_{ij}^* . Momentin arvoksi
täytyy tulla M^* .

Erottamaan sauvan pään plastista ja kimmoista tilaa voidaan käyttää
 Δ -funktioita /4/.

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= +1, \text{ kun } M_{ij} = +M_{ij}^* && (\text{plastinen}) \\ \Delta_{ij} &= 0, \text{ kun } |M_{ij}| < M_{ij}^* && (\text{kimmoinen}) \\ \Delta_{ij} &= -1, \text{ kun } M_{ij} = -M_{ij}^* && (\text{plastinen}) \end{aligned} \quad (29)$$

Näin voidaan sauvan pään kiertymä esittää muodossa

$$\begin{aligned}\theta_{ij} &= (1-\Delta_{ij}^2)\theta_{ij} + \Delta_{ij}^2 \theta_{ij}^* \\ \theta_{ji} &= (1-\Delta_{ji}^2)\theta_{ji} + \Delta_{ji}^2 \theta_{ji}^*\end{aligned}\quad (30a)$$

ja vastaavasti momentti muodossa

$$\begin{aligned}M_{ij} &= (1-\Delta_{ij}^2) M_{ij} + \Delta_{ij}^2 M_{ij}^* \\ M_{ji} &= (1-\Delta_{ji}^2) M_{ji} + \Delta_{ji}^2 M_{ji}^*\end{aligned}\quad (30b)$$

Näitä kiertymän arvoja voidaan käyttää sauvan voimatilan laskemiseen olivatpa sauvan päät kimmoisia tai plastisia. Sijoitetaan uudet kiertymän ja momentin lausekkeet yhtälöön (28) ja otetaan muotoa $(1-\Delta^2)$ ja Δ^2 olevat tekijät kerroinmatriisiin. Tällöin saadaan yhtälöryhmä, joka ilmaisee sauvan voimatilan, olipa se täysin kimmainen tai plastisoitunut joko toisesta tai molemmista päistään.

$$\begin{Bmatrix} F_{ij} \\ 0 \\ F_{ji} \\ 0 \end{Bmatrix} = ([K] - \lambda[S]) \begin{Bmatrix} w_{ij} \\ \theta_{ij}^* \\ w_{ji} \\ \theta_{ji}^* \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_{ij} \\ 0 \\ Q_{ji} \end{Bmatrix}\quad (31)$$

missä

$$Q_{ij} = \Delta_{ij} M_{ij}^*$$

$$Q_{ji} = \Delta_{ji} M_{ji}^*$$

ja matriisit ovat

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ij}^2) & -\frac{6EI}{l^2}\Delta_{ij}^2 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ji}^2) & -\frac{6EI}{l^2}\Delta_{ji}^2 \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ij}^2) & \frac{4EI}{l}(1-\Delta_{ij}^2) & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ij}^2) & \frac{2EI}{l}(1-\Delta_{ij}^2)(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{2EI}{l}(1-\Delta_{ij}^2)\Delta_{ji}^2 \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2}\Delta_{ij}^2 & 0 & \frac{4EI}{l}\Delta_{ij}^2 & 0 & \frac{6EI}{l^2}\Delta_{ij}^2 & \frac{2EI}{l}\Delta_{ij}^2(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{2EI}{l}\Delta_{ij}^2\Delta_{ji}^2 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ij}^2) & \frac{6EI}{l^2}\Delta_{ij}^2 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{6EI}{l^2}\Delta_{ji}^2 \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{2EI}{l}(1-\Delta_{ij}^2)(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{2EI}{l}\Delta_{ij}^2(1-\Delta_{ji}^2) & 0 & \frac{6EI}{l^2}(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{4EI}{l}(1-\Delta_{ji}^2) & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2}\Delta_{ji}^2 & \frac{2EI}{l}(1-\Delta_{ij}^2)\Delta_{ji}^2 & \frac{2EI}{l}\Delta_{ij}^2\Delta_{ji}^2 & 0 & \frac{6EI}{l^2}\Delta_{ji}^2 & 0 & \frac{4EI}{l}\Delta_{ji}^2 \end{bmatrix}\quad (32)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6N}{5I} & -\frac{N}{10}(1-\Delta_{ij}^2) & -\frac{N}{10}\Delta_{ij}^2 & 0 & -\frac{6N}{5I} & -\frac{N}{10}(1-\Delta_{ji}^2) & -\frac{N}{10}\Delta_{ji}^2 \\ 0 & -\frac{N}{10}(1-\Delta_{ij}^2) & \frac{2}{15}N(1-\Delta_{ij}^2) & 0 & 0 & \frac{N}{10}(1-\Delta_{ij}^2) & -\frac{N}{30}(1-\Delta_{ij}^2)(1-\Delta_{ji}^2) & -\frac{N}{30}(1-\Delta_{ij}^2)\Delta_{ji}^2 \\ 0 & -\frac{N}{10}\Delta_{ij}^2 & 0 & \frac{2}{15}N\Delta_{ij}^2 & 0 & \frac{N}{10}\Delta_{ij}^2 & -\frac{N}{30}\Delta_{ij}^2(1-\Delta_{ji}^2) & -\frac{N}{30}\Delta_{ij}^2\Delta_{ji}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6N}{5I} & \frac{N}{10}(1-\Delta_{ij}^2) & \frac{N}{10}\Delta_{ij}^2 & 0 & \frac{6N}{5I} & \frac{N}{10}(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{N}{10}\Delta_{ji}^2 \\ 0 & -\frac{N}{10}(1-\Delta_{ji}^2) & -\frac{N}{30}(1-\Delta_{ij}^2)(1-\Delta_{ji}^2) & -\frac{N}{30}\Delta_{ij}^2(1-\Delta_{ji}^2) & 0 & \frac{N}{10}(1-\Delta_{ji}^2) & \frac{2}{15}N(1-\Delta_{ji}^2) & 0 \\ 0 & -\frac{N}{10}\Delta_{ji}^2 & -\frac{N}{30}(1-\Delta_{ij}^2)\Delta_{ji}^2 & -\frac{N}{30}\Delta_{ij}^2\Delta_{ji}^2 & 0 & \frac{N}{10}\Delta_{ji}^2 & 0 & \frac{2}{15}N\Delta_{ji}^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Kun plastisessa poikkileikkauksessa kiertymissuunta vaihtuu, palaa poikkileikkaus välittömästi kimmoiseen tilaan, ts. nivel palautuu. Kimmoisen tilan jäykkyydestä ja nivelen kokonaiskiertymästä laskettua voimavektoria on korjattava lausekkeella

$$\begin{Bmatrix} F_{ij}^0 \\ 0 \\ F_{ji}^0 \\ 0 \end{Bmatrix} = ([K] - \lambda[S]) \{0, 0, (\theta'_{ij} - \theta^*_{ij}), 0, 0, 0, (\theta'_{ji} - \theta^*_{ji}), 0\}^T \quad (34)$$

missä θ'_{ij} ja θ'_{ji} ovat nivelen palautumishetken kokonaiskiertymiä.

Tällöin saadaan sauvalle tasapainoyhtälö, jolla sauvan voimatila voidaan lausua, olivatpa sauvan päät kimmoisessa, plastisessa tai palautuneessa tilassa ja muodostivatpa nämä tilat millaisen kombinaation tahansa.

$$\begin{Bmatrix} F_{ij}^0 \\ 0 \\ F_{ji}^0 \\ 0 \end{Bmatrix} = ([K] - \lambda[S]) \begin{Bmatrix} w_{ij} \\ \theta^*_{ij} \\ w_{ji} \\ \theta^*_{ji} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{ij}^0 \\ Q_{ij} \\ F_{ji}^0 \\ Q_{ji} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Siirtymiseen sauvakoordinaatistosta systeemikoordinaatistoon ja elementeistä kootun rakenteen tasapainoyhtälöiden muodostamiseen ei tässä ole syytä puuttua. On kuitenkin huomattava, että vektori $\{F_{ij}^0, Q_{ij}, F_{ji}^0, Q_{ji}\}^T$ liitetään kuormitusvektoriin tasapainoyhtälöitä muodostettaessa.

PALOITTAIN KIMMOISEN KEHÄN RAJAKUORMAN LASKEMINEN

Kehän rajakuormaa laskettaessa tarkkaillaan kahta eri kerrointa, nurjahduskerrointa λ_{kr} sekä kerrointa λ_q , joka ilmoittaa, millä kuormitusintensiteetillä rakenteen eri nivelet syntyvät.

Koska rakenteen tasapainoyhtälöt, joista λ_q ratkaistaan, ovat epälineaarisia johtuen normaalivoiman rakenteen jäykkyyttä pienentävästä vaikutuksesta, on λ_q iteroitava. Tähän voidaan käyttää lineaarista ekstrapolointia, jonka Jennings ja Majid /5/ ovat esittäneet. Kahdella eri kuormakertoimen arvolla lasketuista voimavektoreista voidaan jokaiselle sauvan päälle laskea ennustearvo, millä kuormitusintensiteetillä sauvan päähän syntyisi nivel.

$$\lambda = \frac{\lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2}{M_2 - M_1} + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{M^*}{M_2 - M_1}, \quad \lambda_2 > \lambda_1 \quad (36)$$

Kun jatketaan iterointia, valitaan kehän eri pisteitä varten lasketuista ennustearvoista pienin.

Kun λ_q :n arvo on riittävällä tarkkuudella laskettu, ratkaistaan rakenteen nurjahduskerroin λ_{kr} kyseisessä niveltilassa. Tämän jälkeen muutetaan sen sauvan pään Δ kertoimen arvo, johon nivel syntyi ja lasketaan matriisit uusilla Δ :n arvoilla. Tämän lisäksi lasketaan nivelen syntymisestä johtuvat korjauskertoimet kuormitusvektoriin. Heti uuden nivelen syntymisen jälkeen on tarkistettava, purkautuiko jokin aikaisemmin syntynyt nivel. Nivel on purkautunut, jos

$$\frac{(\theta_{ij} - \theta_{ij}^*)_2 - (\theta_{ij} - \theta_{ij}^*)_1}{(\theta_{ij} - \theta_{ij}^*)_1} < 0, \quad (37)$$

missä indeksi 1 tarkoittaa rakenteen tilaa ennen ko. nivelen syntymistä ja 2 rakenteen tilaa nivelen syntymisen jälkeen.

Mikäli nivel on purkautunut, tehdään vastaavat muutokset kerroinmatriisiin ja kuormitusvektoriin ennen kuin uutta λ_q :ta aletaan iteroida.

Rakenteen rajatilaa vastaava kuormitusintensiteetti $(\lambda_q)_n$ on saavutettu, kun

$$(\lambda_{kr})_{n-1} > (\lambda_q)_n > (\lambda_{kr})_n \quad (\text{Alaindeksit viittaavat nivelien lukumäärään}) \quad (38)$$

Laskemista voidaan haluttaessa jatkaa kehän ollessa jo epästabiili, kunnes tulokseksi saadaan kuormakerroin, jolla rakenteesta tulee mekanismi.

MENETELMÄN TARKKUUS

Stabiiliusmatriisilla ja stabiiliusfunktioilla korjatulla jäykkyysmatriisilla suoritettua stabiiliustarkastelua ei ole kovin perusteellisesti verrattu. Eräitä hajanaisia tuloksia sekä teorian vertailuja on kuitenkin käytettävissä.

Nurjahduskuorma stabiiliusmatriiseilla laskettuna on aina ylärajaratkaisu. Energiaperiaate johtaa luonnollisesti tähän, kun laskennassa ei käytetä puristetun sauvan tarkkaa kimmoviivaa, vaan sen likiarvoa. Suurin tuloksen tarkkuuteen vaikuttava tekijä on vapausasteiden lukumäärä. Niinpä esimerkiksi sauvalla, jolla vapausasteita on vain yksi, saattavat tulokset olla moninkertaiset oikeisiin arvoihin nähden.

Tulosten tarkkuus riippuu nimenomaan vaakasiirtymän suuruudesta. Niinpä esimerkiksi vaakasuunnassa tuetuille jäykkäkantaisille kehillle antaa menetelmä epätarkkoja tuloksia ilman keinotekoisia vapausasteiden lisäämistä, osasauvoihin jakamista.

Hartz /2/ on laskenut yksittäisiä sauvoja ja yksinkertaisia kehiä ja on saanut virheeksi yleensä alle 1 %, kun vapausasteita on ollut sauvalla vähintään kaksi tai enemmän. Tutkijat Vijakkhana, Nishino, Lee ovat saaneet kriittisen kuormituskertoimen arvoksi vajaan 0,5 % stabiiliusfunktioilla laskettua suuremman, kun vertailu on suoritettu siirtyvälle kaksikerroskehälle.

Tällaiset tarkkuudet ovat riittäviä nurjahduskertoimen laskemiseen rajakantavuusteorian yhteydessä ja yleensä normaaleissa mitoitus tehtävissä myöskin kimmoteorian mukaan laskettaessa. Tärkeä osuus stabiiliusmatriisilla on λ_q :n laskemisessa, missä se edustaa rakenteen ns. toisen asteen teorian mukaista käyttäytymistä. Suurilla kehillä, mihin niveliä syntyy paljon, alkavat sivusiirtymät olla jo sellaisia, että aksiaaliset voimat aiheuttavat merkittäviä lisärasituksia sauvoihin ja vaikuttavat siten myös rajakuormaan.

SOVELLUTUS

Harrison /6/ on laskenut siirtyvän kaksikerroskehän rajakuorman ensimmäisen asteen teorialla. Lasketaan tämä sama kehä edellä esitettyyn teoriaan perustuvalla tietokoneohjelmalla /7/.



Nivel syntyi:

Esitettyyn teoriaan perustuva kimmoplastinen analyysi, kun stabiiliusmat-
riisissa on käytetty kullakin sauvalla koko ajan samaa normaalivoiman liki-
arvoa $N_1 = 60/2$ ja $N_2 = 30/2$.

Nivel syntyi:

Eroa eri teorioilla laskettuun rajakuormaan syntyi vain n. 3 %. Nurjahdus-kertoimista päätellen kehä onkin suhteellisen jäykkä.

KIRJALLISUUSLUETTELO

- /1/ Rubinstein M.F., Structural Systems - Statistics Dynamics and Stability
- /2/ Hartz B.I., Matrix Formulation of Structural Stability Problems, Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 91, No. ST6. Dec 1965.
- /3/ Vijakkhana C., Nishino F., Lee S.L., Inelastic Stability of Unbraced Building Frames, Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 100, No. ST3. March 1974.
- /4/ Lee S.L. and Heidebrecht A.C., Piecewise Linear Behaviour of Elastic - Plastic Frames, Journal of the Franklin Institute. Vol. 281, Apr 1966.
- /5/ Jennings A. and Majid K.J., An Elastic - Plastic Analysis by Computer for Framed Structures Loaded up to Collapse Structural Engineer Vol. 43, Dec., 1965, pp. 407-412.
- /6/ Harrison H.B., Computer Methods in Structural Analysis, Englewood Cliffs 1973.
- /7/ Kangas, Ilkka, Teräshehän stabiilisuuden ja rajakuorman laskeminen, Oulun Yliopisto, Diplomityö 1975.