

ELEMENTTIMENETELMÄN SOVELTAMISESTA KVASIHARMONISEN
YHTÄLÖN RATKAISEMISEEN

SEPPO ORIVUORI ja HARRY LAINE

Rakenteiden Mekaniikka
6 (1973) 2, s. 99...113
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

YHTEENVETO

Kirjoituksessa johdetaan kvasiharmonisen yhtälön ratkaisun kanssa ekvivalentti minimoitava funktionaali virtuaalisen työn periaatetta vastaavalla tavalla. Johdetaan yleisen elementin "jäykkymatriisi" yhtälön ratkaisemiseksi. Esitettyä teoriaa sovelletaan vedenvirtaus-tehtävien ratkaisemiseen. Käytetään sekä kolmion että suorakaiteen muotoisia elementtejä. Esitetään tuloksia termisen voimalaitoksen jäähdytysveden virtaustehtävistä.

1. YLEISTÄ

Toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (1)$$

kutsutaan kvasiharmoniseksi yhtälöksi. Yleisessä tapauksessa ovat yhtälön (1) k_x , k_y , k_z ja Q koordinaattien x , y ja z funktioita. Yhtälö (1) sisältää erikoistapauksena Poissonin yhtälön ($k_x = k_y = k_z =$

$k = \text{vakio}$) ja Laplacen yhtälön ($k_x = k_y = k_z = k = \text{vakio}$ ja $Q = 0$).

Yhtälöllä (1) on varsin keskeinen osa fysiikassa. Ilmioistä, jotka noudattavat edellä mainittua yhtälöä, mainittakoon mm.

- a) stationaarinen lämpötilajakautuma,
- b) sähköinen potentiaali,
- c) magneettinen potentiaali,
- d) sylinterimäisen sauvan vääntö,
- e) suotovirtaus,
- f) ideaalisen nesteen pyörteetön virtaus.

Taulukossa 1 on esitetty ϕ :n ja k :n merkitys tapauksissa a) - e).

Taulukko 1.

| Ilmiö | ϕ fysikaalinen merkitys | K-suureiden tulkinta | Huom. |
|-------|--------------------------------|---------------------------|--|
| a) | lämpötila T | lämmönjohtavuus λ | $\vec{J} = -\lambda \nabla T =$ lämpövirta |
| b) | sähköinen potentiaali V | sähkönjohtavuus σ | $\vec{J} = -\sigma \nabla V =$ virrantiheys |
| c) | magneettinen potentiaali V_m | permeabiliteetti μ | $\vec{B} = -\mu \nabla V_m =$ magneettisen vuon tiheys |
| d) | jännitysfunktio ϕ | | $\nabla^2 \phi = -2$ $\tau_{xy} = G\theta \frac{\partial \phi}{\partial z}$ ja $\tau_{xz} = -G\theta \frac{\partial \phi}{\partial y}$ $G = \text{liukumoduli}$ $\theta = \text{vääntymä}$ |
| e) | hydraulinen painekorkeus H | vedenläpäisevyys | |

Yhtälön yksikäsitteinen ratkaiseminen tietyssä alueessa V edellyttää reunaehtojen asettamista ϕ :lle. Tällaisina reunaehtoina tulee kyse-

seen mm.

$$a) \quad \phi(P) = \bar{\phi}, \text{ kun } P \text{ kuuluu alueen } V \text{ reunalle } \partial V, \quad (2a)$$

$$b) \quad -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \ell - k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} m - k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n = \bar{q} \quad (2b)$$

alueen reunalla ∂V ja ϕ annettu yhdessä V :n pisteessä.

Suureen päälle merkitty viiva tarkoittaa annettua arvoa ja ℓ , m sekä n ovat alueen reunan pisteeseen piirretyn alueesta pois päin suuntautuvan normaalin suuntakosineja. \bar{q} kuvaa vuota reuna-alueen lävitse. (Fysikaalinen merkitys riippuu tutkittavasta ilmiöstä.)

2. KVASIHARMONISEN YHTÄLÖN RATKAISEMISESTA

Kvasiharmonisen yhtälön (1) tarkka ratkaisu onnistuu ainoastaan erikoistapauksissa. Käytännön tehtävissä joudutaan turvautumaan likimääräisratkaisuihin. Elementtimenetelmä [1] tarjoaa erään keinon tällaisen löytämiseksi.

Tarkastellaan lähemmin yhtälön (1) ratkaisua reunaehdoin: q annettu osalla reunaa ∂V_1 ja ϕ annettu osalla reunaa ∂V_2 siten, että $\partial V_1 \cup \partial V_2 = \partial V$ ja $\partial V_1 \cap \partial V_2 =$ tyhjä joukko. Tällöin siis alueen V jokaisessa pisteessä pätee yhtälö (1), reunan ∂V_1 jokaisessa pisteessä on $k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \ell + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} m + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n + \bar{q} = 0$ ja reunan ∂V_2 jokaisessa pisteessä $\phi - \bar{\phi} = 0$. Oletetaan jatkossa, että tehtävän kaikki suureet ovat riippumattomia z -koordinaatista, ts. rajoitutaan kaksidimensioiseen ongelmaan.

Siirryttäessä kolmesta dimensiosta kahteen korvataan symboli V symbolilla A (vastaavasti $\partial V \rightarrow \partial A$). Edellä olevan perusteella voidaan kirjoittaa yhtälö

$$-\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] \delta \phi da + \int_{\partial A_1} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \ell + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} m + \bar{q} \right) \delta \phi ds = 0, \quad (3)$$

missä $\delta\phi = \phi$:n variaatio (vrt. virtuaalinen siirtymä, virtuaalisen työn periaate).

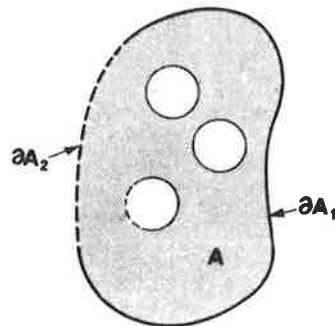
Olkoon ratkaisualue useasti yhtenäinen ja sen reunat A_1 ja A_2 kuten kuvassa 1.

Osittaisintegroimalla yhtälön (3) ensimmäisen integraalin kaksi ensimmäistä termiä saadaan

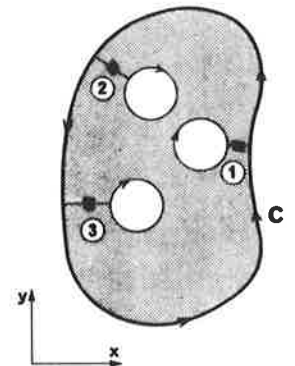
$$-\oint_C (k_x \frac{\partial\phi}{\partial x} l + k_y \frac{\partial\phi}{\partial y} m) \delta\phi ds + \int_A [k_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \delta(\frac{\partial\phi}{\partial x}) + k_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \delta(\frac{\partial\phi}{\partial y}) - Q\delta\phi] da + \int_{\partial A_1} (k_x \frac{\partial\phi}{\partial x} l + k_y \frac{\partial\phi}{\partial y} m + \bar{q}) \delta\phi ds = 0,$$

missä C on kuvan 2 mukaisilla leikkauksilla alkuperäisestä alueesta muodostetun yhdesti yhtenäisen alueen reuna. Leikkauksia pitkin vastakkaisuuntiin suoritettut integroinnit kumoavat toisensa. Tällöin supistuu edellinen muotoon

$$\delta \left\{ \int_A \left[\frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_y \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 - Q\phi \right] da + \int_{\partial A_1} \bar{q}\phi ds \right\} = 0. \quad (4)$$



Kuva 1. Useasti yhtenäinen tasoalue.
 ——— tarkoittaa reunan ∂A osaa ∂A_1
 ---- tarkoittaa reunan ∂A osaa ∂A_2
 $\partial A = \partial A_1 \cup \partial A_2$ on alueen A reuna.
 Fig. 1. Multiply-connected region in two dimensions.



Kuva 2. Kuvan 1 useasti yhtenäistä aluetta vastaava yhdesti yhtenäinen alue, joka on saatu edellisestä leikkauksilla 1, 2 ja 3.
 Fig. 2. Singly-connected region corresponding to the multiply-connected region of fig. 1 with cuttings 1, 2 and 3.

Kaavaa (4) kirjoitettaessa on lisäksi oletettu, että ϕ :stä varioimalla saatu funktio $\phi + \delta\phi$ toteuttaa myös ϕ :lle asetetut reunaehdot, ts. $\delta\phi = 0$ ∂A_2 :lla (kyseessä ns. luvallinen funktio).

Näin ollen muotoa (1) olevan yhtälön ratkaisu kahdessa dimensiossa edellä tarkastelluin reunaehdoin saadaan etsimällä funktionaalien

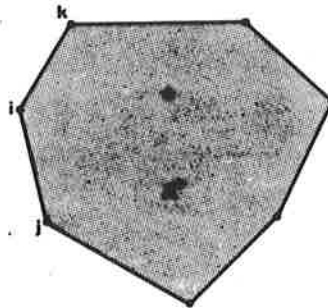
$$F(\phi) = \int_A \left[\frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - Q\phi \right] da + \int_{\partial A_1} \bar{q}\phi ds \quad (5)$$

stationaarinen arvo luvallisten funktioiden ϕ joukosta.

3. KVASIHARMONISEN YHTÄLÖN RATKAISEMISESTA ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Elementtimenetelmän mukaisessa ratkaisussa jaetaan ratkaisualue äärelliseen määrään osa-alueita, elementtejä (kuva 6). Approksimoidaan ratkaisufunktioita paloittain jatkuvilla funktioilla ϕ^e kunkin elementin alueella (yläindeksi viittaa elementtiin e). Ratkaisufunktion ϕ approksimaatio koko alueessa on tällöin $\phi = \sum_{e=1}^E \phi^e$, missä E on elementtien lukumäärä. ϕ^e on kirjoitettavissa muotoon

$$\phi^e(P) = \begin{cases} N_i \phi_i + N_j \phi_j + \dots + N_k \phi_k, & \text{kun } P \in A^e \\ 0, & \text{kun } P \notin A^e \quad (\text{kuva 3}) \end{cases} \quad (6)$$



Kuva 3. Nurkkapisteiden i, j, \dots, k määrittelemä monikulmioelementti e .
 Fig. 3. Polygonal element e with the nodal points i, j, \dots, k .

Funktioita N_i kaavassa (6) kutsutaan muotofunktioiksi ja ϕ_i tarkoittaa funktion ϕ arvoa elementin e nurkkapisteessä i . Muotofunktiot N_i toteuttavat (6):n mukaan ehdot $N_i(P_j) = \delta_{ij}$, missä δ_{ij} = Kroneckerin symboli ja $N_i(P_j) = N_i$:n arvo nurkkapisteessä j . Kaava (6) voidaan kirjoittaa lyhyemmin

$$\phi^e = [N]\{\phi\}^e,$$

missä $[N] = [N_i N_j \dots N_k]$ ja (7)

$$\{\phi\}^e = [\phi_i \phi_j \dots \phi_k]^T = \text{funktion } \phi \text{ nurkkapistearvoista koottu pystyvektori.}$$

Kaavan (6) perusteella voidaan kunkin elementin osuus funktionaaliin (5) laskea erikseen, ts.

$$F(\phi) = \sum_{e=1}^E F(\phi^e). \quad (8)$$

Toistaiseksi tuntemattomat ϕ :n nurkkapistearvot ϕ_i (ϕ :n likiarvo nurkkapisteessä i) saadaan etsimällä funktionaalin stationaarinen arvo näiden nurkkapistearvojen suhteen. Näin saadaan riittävästi lineaarisia yhtälöitä tuntemattomien arvojen määräämiseksi. Elementin e osuus saadaan osittaisderivaattojen

$$\frac{\partial F(\phi^e)}{\partial \phi_i}, \frac{\partial F(\phi^e)}{\partial \phi_j}, \dots, \frac{\partial F(\phi^e)}{\partial \phi_k} \text{ avulla.}$$

Funktionaalin (5) ja kaavan (6) perusteella tulee

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\phi^e)}{\partial \phi_m} = & \int_A (k_x \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y}) d\phi_i + \dots + \int_A (k_x \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \\ & + k_y \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y}) d\phi_k - \int_A q N_m da + \int_{\partial A_1} \bar{q} N_m ds \end{aligned} \quad (9a)$$

tai lyhyemmin

$$\frac{\partial F(\phi^e)}{\partial \phi_m} = \int_A (k_x \frac{\partial N_m}{\partial x} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + k_y \frac{\partial N_m}{\partial y} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]) d\{\phi\}^e - \int_A q N_m da + \int_{\partial A_1} \bar{q} N_m ds \quad (9b)$$

Muodostamalla kunkin elementin kutakin nurkkapistettä kohden muotoa (9a) oleva lauseke, laskemalla kullakin $m:n$ arvolla ($1, 2, \dots, M =$ ratkaisualueella olevien nurkkapisteen lukumäärä) summa $\sum_{e=1}^E \frac{\partial F(\phi^e)}{\partial \phi_m}$ ja asettamalla näin saadut summalausekkeet yhtäsuuriksi kuin nolla syntyy lineaarinen yhtälöryhmä

$$[H]\{\phi\} = \{F\}, \quad (10)$$

$M \times M \quad M \times 1 \quad M \times 1$

missä $\{\phi\}$ on $\phi:n$ nurkkapistearvoista muodostettu pystyvektori, $\{F\}$ on kaavan (9) kahden viimeisen integraalin muotoisista termeistä koostuva "kuormitusvektori", vrt. analogia rakenteiden mekaniikan kanssa, $[H]$ on kaavan (9) ϕ -suureiden kertoimina olevien pintaintegraalien muotoisista termeistä muodostuva "jäykkymatriisi", vrt. analogia rakenteiden mekaniikan kanssa.

Ratkaisemalla yhtälöryhmä (10) reunaehdoin: $\phi = \bar{\phi}$ reunalla ∂A_2 olevissa nurkkapisteeissä, saadaan kvasiharmoniselle yhtälölle likimääräinen ratkaisu nurkkapisteeissä $1, 2, \dots, M$. Edelleen kaavan (6) avulla löydetään $\phi:n$ approksimaatio ratkaisualueen A mielivaltaisessa pisteessä.

4. SOVELLUTUS VEDENVIRTAUSTEHTÄVÄÄN

Sovelletaan edellä esitettyä teoriaa vedenvirtaustehtävän ratkaisemiseen suljetussa kaksidimensioisessa alueessa. Käytetään ratkaisussa sekä kolmion että suorakaiteen muotoisia elementtejä (kuva 4).

Suorakaiteen muotoisella elementillä voidaan käyttää ϕ :lle approksimaatiota

$$\phi = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\phi_i + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\phi_j + \frac{x}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)\phi_k + \frac{x}{a}\frac{y}{b}\phi_l. \quad (11)$$

Soveltamalla kaavaa (9a) nurkkapisteille i, j, k ja ℓ sekä yhdistämällä tulokset matriisimuotoon saadaan suorakaiteen muotoiselle elementille seuraavat jäykkymatriisin ja kuormitusvektorin esitysmuodot

$$[H]^e = \frac{k_x}{6} \frac{b}{a} \begin{matrix} & i & j & k & \ell \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ \ell \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} + \frac{k_y}{6} \frac{a}{b} \begin{matrix} & i & j & k & \ell \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ \ell \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \{F\}_Q^e &= Qab \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T \text{ ja} \\ \{F\}_{\bar{q}}^e &= -\bar{q}a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T = \bar{q}\text{-kuorman osuus reunaelementissä, (kuva 4)} \end{aligned}$$

Q ja \bar{q} otaksuttu vakioksi elementin alueella.

Kolmion muotoiselle elementille vastaavat lausekkeet voidaan johtaa samalla tavalla. Käyttämällä ϕ :lle otaksumaa

$$\phi = L_i \phi_i + L_j \phi_j + L_m \phi_m, \quad (13)$$

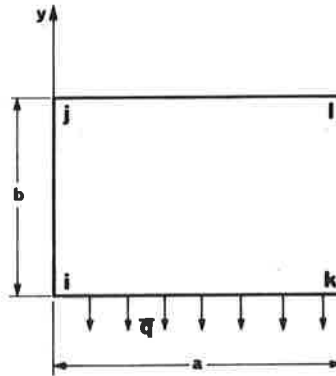
missä L -suureet ovat ns. pinta-alakoordinaatteja (vrt. [1], sivu 116) saadaan

$$[H]^e = \frac{k_x}{4\Delta} \begin{matrix} & i & j & k \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} \end{matrix} + \frac{k_y}{4\Delta} \begin{matrix} & i & j & k \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (14)$$

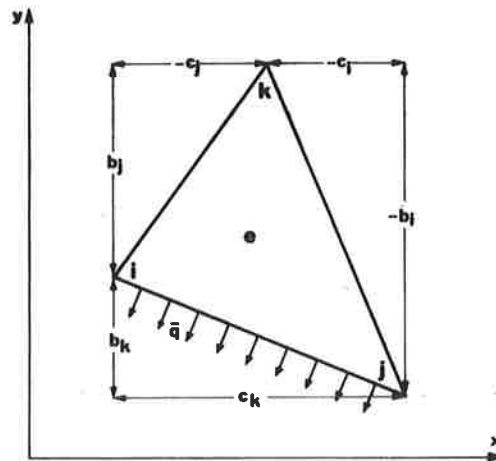
(suureiden b_i, c_i jne. merkitys selviää kuvasta 5)

$$\begin{aligned} \{F\}_Q^e &= Q \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T, \\ \{F\}_{\bar{q}}^e &= -\bar{q} \mathbf{1}_j \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T = \bar{q}\text{-kuorman osuus reunaelementissä} \\ & \hspace{10em} \text{(kuva 5).} \end{aligned}$$

ϕ :n approksimaatiot (11) ja (13) kuvaavat tarkasti lineaarista potentiaalijakautumaa.



Kuva 4. Suorakaiteen muotoinen elementti, jonka sivu ik ratkaisualueen reunalla.
 Fig. 4. Rectangular element with the side ik on a boundary of the domain.



Kuva 5. Kolmion muotoinen elementti, jonka sivu ij ratkaisualueen reunalla. l_{ij} = sivun ij pituus. Δ = kolmion ijk pinta-ala.
 Fig. 5. Triangular element with the side ij on a boundary of the domain. l_{ij} = length of the side ij. Δ = area of the triangle ijk.

Vedenvirtaustehtävässä on pääasiallisen kiinnostuksen kohteena nopeusvektorikentän määrittäminen. Tämä ei edellytä K-arvon tuntemista.

Haluttaessa tehtävän ratkaisuna saatavalle potentiaalille (veden pinnan korkeus nollassa mitattuna metreissä) yhteyttä todellisiin vesipintoihin voidaan K-arvona käyttää lukua 3000 m/s. Mainittu luku on saatu ekstrapoloimalla putkivirtauksista esitettyjä painehäviö/halkaisija-arvopareja. Siis

$$k_x = k_y = K = 3000 \text{ m/s.} \quad (15)$$

Jos halutaan ottaa huomioon ratkaisualueen syvyysvaihtelut, k_x :ää ja k_y :tä on painotettava kyseisen kohdan syvyydellä h.

Nopeusvektorin koordinaattiakselien suuntaiset komponentit v_x ja v_y kunkin elementin e alueella saadaan kaavoista

$$\begin{aligned} v_x^e &= -K \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \\ v_y^e &= -K \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \end{aligned} \quad (16)$$

Kolmioelementille saadaan

$$\begin{aligned} v_x^e &= -\frac{K}{2\Delta} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \\ v_y^e &= -\frac{K}{2\Delta} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \end{aligned} \quad (17)$$

Kyseessä on siis ns. vakionopeuselementti.

Kun suorakaiteen muotoiselle elementille sovelletaan kaavoja (16), todetaan nopeuskomponenttien muuttuvan lineaarisesti elementin alueella. Laskemalla näin saatujen lausekkeiden arvot elementin keskipisteestä tulee

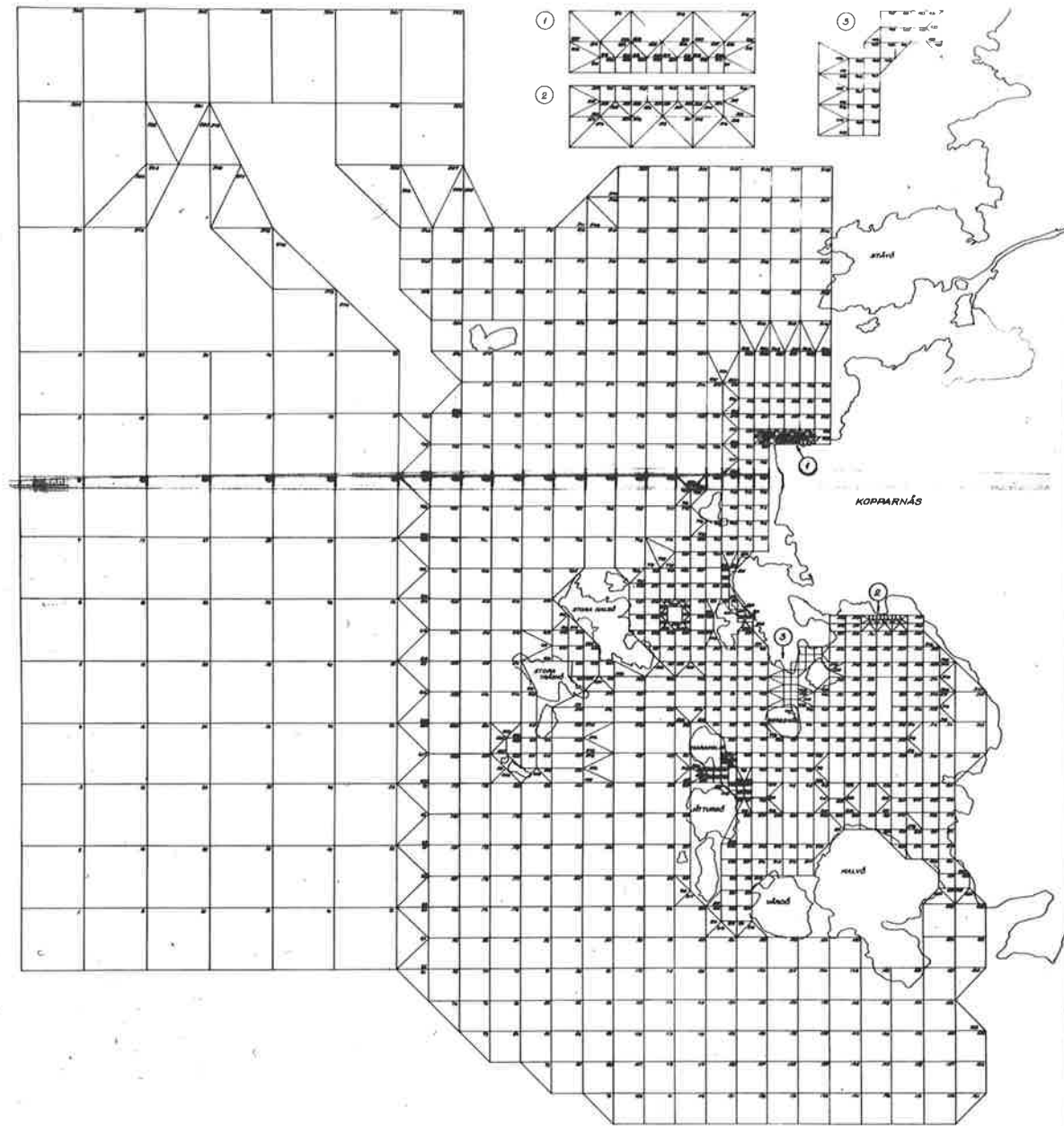
$$\begin{aligned} v_x^e &= K \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_j - \phi_k}{a} + \frac{\phi_j - \phi_l}{a} \right) \\ v_y^e &= K \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_i - \phi_j}{b} + \frac{\phi_k - \phi_l}{b} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Tarkastellaan esimerkkinä suunnitellun termisen voimalaitoksen jäähdytysveden aiheuttamaa virtausta Kopparnäsin edustalla. Rajataan tutkimuksen kohteeksi kuvan 6 mukainen alue ja jaetaan se elementteiksi

hin kuvassa esitetyllä tavalla. Kullakin elementillä on oma syvyytensä.

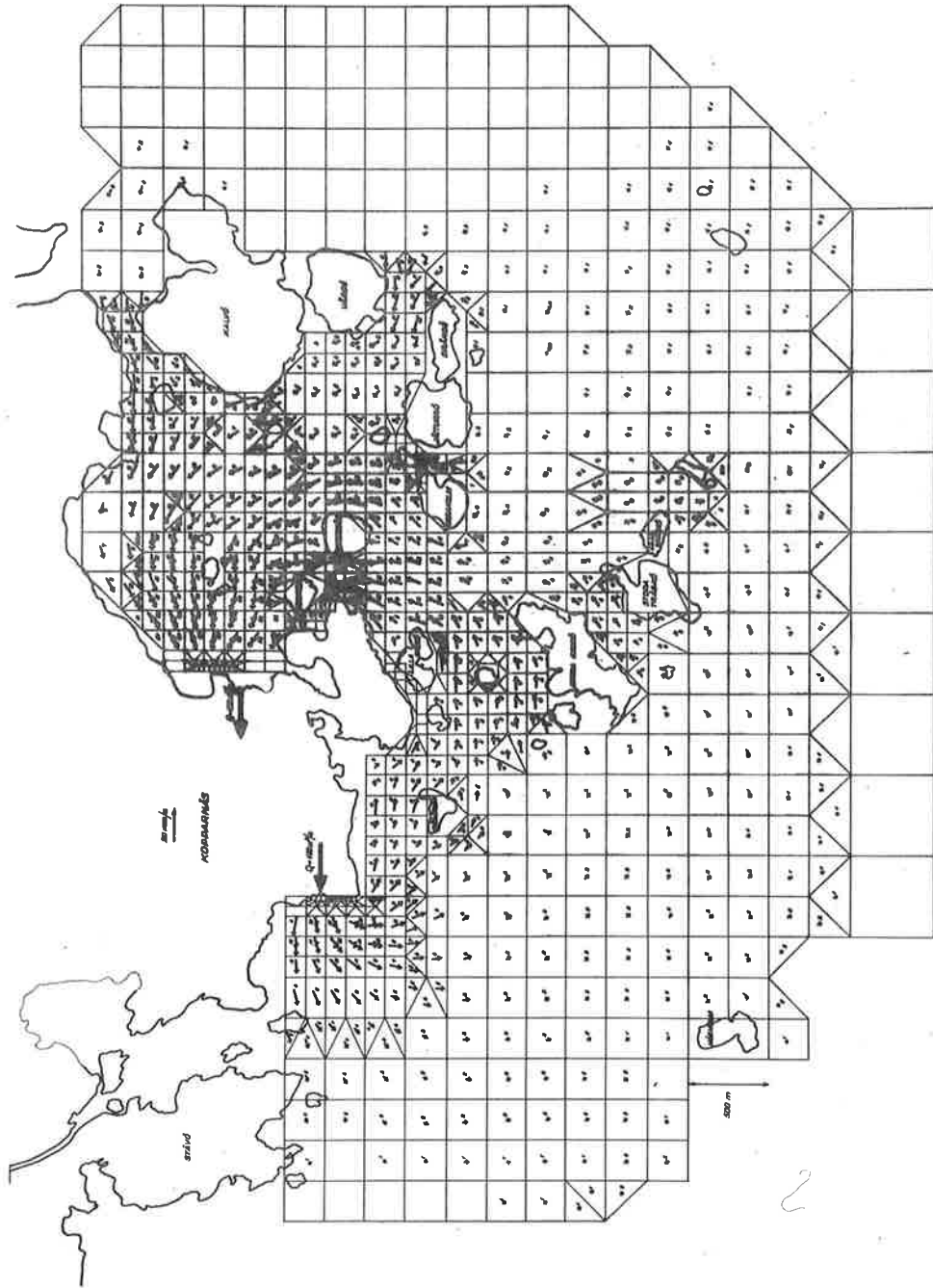
Tiheää elementtijakoa käytetään alueilla, joilla odotetaan tapahtuvan voimakkaita nopeuden muutoksia, esimerkiksi jäähdytysveden sisäänotto- ja poistoaukon ympäristössä. Tuodaan jäähdytysvettä $100 \text{ m}^3/\text{s}$ ratkaisualueeseen elementtien 805...808 kautta ($\bar{q} = -0,8 \text{ m}^2/\text{s}$, kts. kuva 6) ja otetaan sama määrä ($100 \text{ m}^3/\text{s}$) pois ratkaisualueesta elementeistä 403...406. Reunaehtoina käytetty muotoa (2b), \bar{q} nollassa poikkeava ainoastaan elementtien 403...406 ja 805...808 alueella. Kuvassa 7 esitetään osa ratkaisuna saadusta nopeusvektorikentästä. Nopeusvektorikentän perusteella on mahdollisuus piirtää virtausviivoja. Näiden avulla voidaan mm. laskea mahdollinen jäähdytysveden kiertoaika ja määrittää isotermien paikat. Kuvassa 8 esitetään osa nopeusvektorikentästä, joka syntyy ratkaisemalla edellä mainittu tehtävä alueessa, joka saadaan modifoimalla kuvan 6 aluetta kuvan 8 mukaisesti. Muutaman uuden nurkkapisteen avulla synnytetään kuvassa 8 näkyvä pato, joka pakottaa veden tekemään entistä pitemmän kierroksen. Edellä esitetyt tehtävät on ratkaistu Imatran Voima Osa-keskityksessä laaditulla yleisellä, elementtimenetelmään perustuvalla, modulaarisella ohjelmakokonaisuudella IVOFEM. Tämä ohjelma ratkaisee lineaarisen yhtälöryhmän aaltorintamamenetelmällä [2], [3] (the frontal solution technique). Aaltorintamamenetelmään on kehittynein Gaussin eliminaatioon perustuva tietokonesovellutus. Menetelmän ansiosta (ratkaisu etenee elementeittäin, ei nurkkapisteittäin) padon aikaansaaminen kuvan 6 malliin on mitä yksinkertaisinta.

Tietokoneena on käytetty GE-635 konetta (keskusyksikkö: 192K 36 bitin sanoja). Keskusyksikköaikaa kului puolisoitoista minuuttia tehtävää kohden (elementtejä ≈ 1000 , vapausasteita ≈ 1000 , maksimi puolinauhanleveys 58 vapausastetta.)

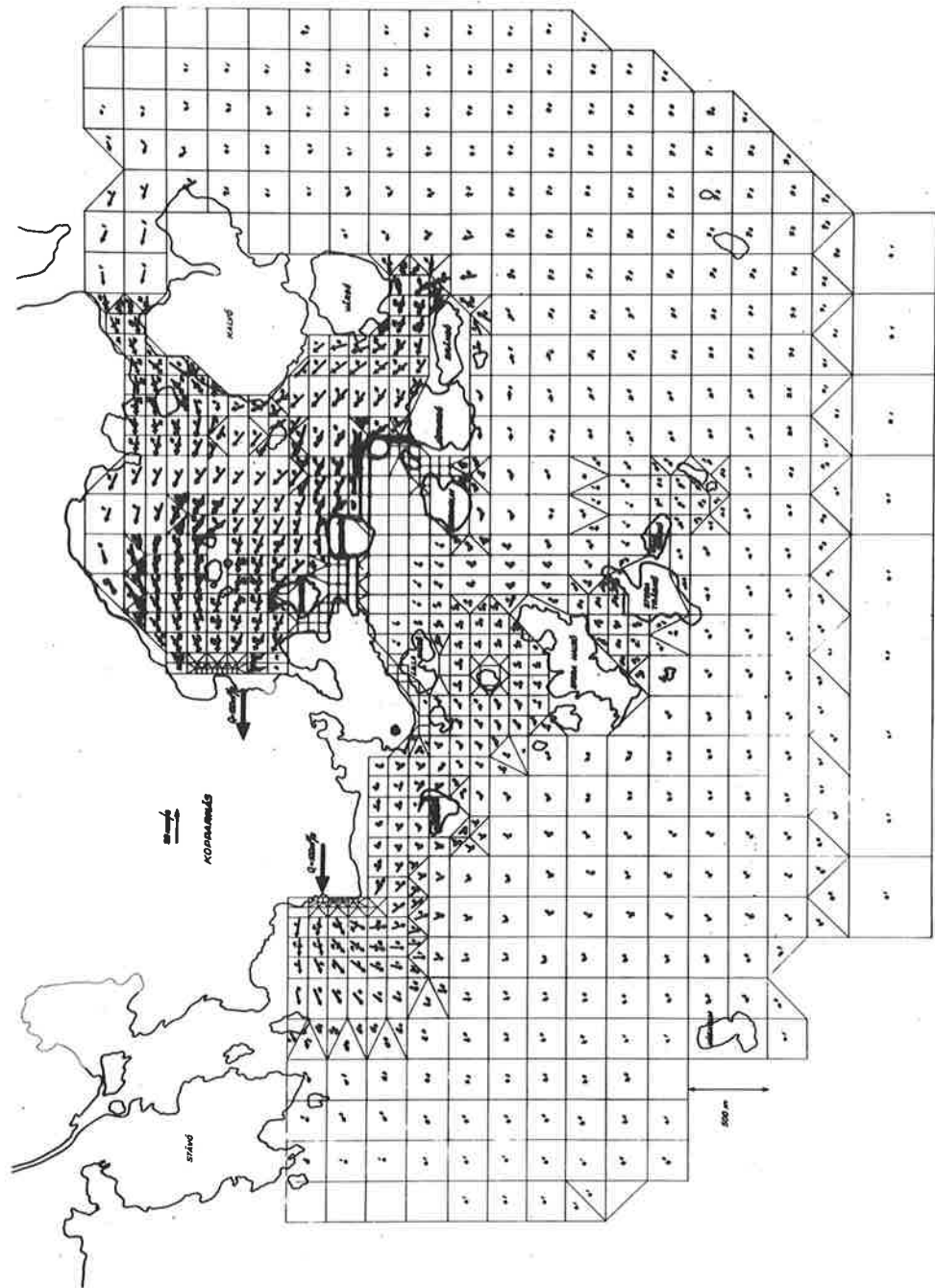


Kuva 6. Esimerkin virtaustehtävän ratkaisemiseen käytetty elementti-verkko.

Fig 6. Finite element mesh used in studying flow problem.



Kuva 7. Osa kuvan 6 elementtiverkolla saaduista nopeusvektoreista.
 Fig 7. Velocity field obtained by using the element mesh of fig. 6.



Kuva 8. Kuvan 6 elementtiverkkoa modifioimalla (pato) saadun virtaustehtävän nopeusvektoreita.
Fig 8. Element mesh of fig. 6 was modified in order to have a dam. Velocity field obtained by using the modified geometry.

KIRJALLISUUTTA

- 1 Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science. London. Mc Graw-Hill. 1971. s. 295...321.
- 2 Irons, B.M., A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis. Int. J. for Num. Methods in Engng 2 (1970), s. 5...32.
- 3 Hellen, T.K., A Front Solution for Finite Element Techniques, Central Electricity Generating Board, RD/B/N1459, Oct. 1969.

Seppo Orivuori, dipl.ins., Imatran Voima Oy, Helsinki.

Harry Laine, fil.maist., Imatran Voima Oy, Helsinki.