

KOKOONPURISTUMATTOMAN AINEEN ANALYSOINTI
ALKUJÄNNITYSITEROINNILLA

JUKKA AALTO ja EERO-MATTI SALONEN

Rakenteiden Mekaniikka
6 (1973) 2, s. 67...98
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

YHTEENVETO

Puhdasta siirtymämenetelmää ei voida käyttää rakenteen aineen ollessa kokoonpuristumatonta. Kirjoitus selostaa tapaa, jolla tämä vaikeus voidaan välttää suorittamalla analysointi kokoonpuristuvasta aineesta olevan rakenteen avulla ajatellen rakenteessa vallitsevan sellaisen alkujännitystilän, että päädytäänkin kokoonpuristumatonta ainetta koskeviin yhtälöihin. Tuntematon alkujännitystilä määritetään iteroimalla. Menetelmää voidaan käyttää myös melkein kokoonpuristumattomalle aineelle, jolle siirtymämenetelmä johtaa helposti numeerisiin epätarkkuuksiin.

Menetelmän periaate käydään läpi kontinuumille tasomuodonmuutostapauksessa ja saatua teoriaa havainnollistetaan yksinkertaisen esimerkin avulla. Käytännön tapausten käsittelemiseksi on menettely selostettu myös elementtimenetelmän kannalta ja muutamia elementtimenetelmällä laskettuja sovellutuksia on esitelty. Kokoonpuristumattoman aineen ja kokoonpuristumattoman nesteen välisen analogian perusteella voidaan menettelyä käyttää myös hitaan viskoosin nestevir-

tauksen probleemien käsittelyyn.

1. JOHDANTO

Siirtymämenetelmä on nykyään tavallisin menettelytapa rakenteiden analysoinnissa etenkin numeerisia menetelmiä käytettäessä. Jos kuitenkin rakenteen aine on kokoonpuristumatonta, ei siirtymämenetelmää voida yleensä käyttää sellaisenaan. Tämä johtuu siitä, että jännitykset eivät ole tällöin enää pelkästään muodonmuutosten funktioita.

Lineaarisen isotrooppisen aineen yleiset jännitys-muodonmuutosyhtälöt ovat muotoa [1]

$$\sigma_x = 2G\epsilon_x + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (1)$$

... ..

missä liukumoduuli G ja Lamén parametri λ riippuvat kimmomoduulista E ja Poissonin vakioista ν seuraavasti

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (2)$$

Aineen ollessa kokoonpuristumatonta Poissonin vakio

$$\nu' = \frac{1}{2} \quad (3)$$

ja suhteellinen tilavuudenmuutos

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0, \quad (4)$$

joten normaalijännitysten lausekkeiden jälkimmäinen termi saa epämääräisen arvon $0/0$, jota merkitään tässä σ_m :llä. Kokoonpuristumattoman aineen konstitutiiviset yhtälöt ovat siis

$$\sigma_x = 2G'\epsilon_x + \sigma_m, \quad \tau_{xy} = G'\gamma_{xy}. \quad (5)$$

... ..

Kokoonpuristumattoman aineen ainevakioita on merkitty yläindeksillä

($G' = E'/3$). Muodostamalla normaalijännitysten summa ja ottamalla huomioon kokoonpuristumattomuusehto (4) saadaan tulos

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad (6)$$

jonka perusteella σ_m :ää nimitetään keskimääräiseksi normaalijännitykseksi.

Siirtymämenetelmän perustuntemattomina ovat siirtymäkomponentit u , v ja w . Kokoonpuristumattomalle aineelle tulee lisätuntemattomaksi keskimääräinen normaalijännitys σ_m ja tarvittava lisäyhtälö saadaan siirtymissä lausutusta kokoonpuristumattomuusyhtälöstä (4) [1]. Probleeman ratkaisu analyyttisin keinoin on harvoin mahdollista. Käytännössä on turvauduttava numeerisiin menetelmiin. Näitä on käsitelty mm. kirjoituksissa [2], [3].

Usein tehtävä pyritään yksinkertaistamaan käyttämällä siirtymämenetelmää ja valitsemalla ν :lle lähellä 0,5:ttä oleva arvo (esim. 0,4995). Tämä menettely ei anna aina riittävän tarkkaa tulosta ja johtaa helposti lisäksi numeerisiin epätarkkuuksiin [2].

Tässä kirjoituksessa on esitetty eräs vaihtoehtoinen tapa käsitellä kokoonpuristumatonta ainetta käyttäen tavanomaista siirtymämenetelmää ja ns. alkujännitysiterointia. Menetelmässä tarvitaan kokoonpuristuvan aineen yhtälöt alkujännityksillä täydennettynä, jotka johdetaan luvussa 2. Kokoonpuristumattoman aineen yhtälöt johdetaan luvussa 3. Alkujännitysiteroinnin periaate käydään läpi luvussa 4 ja saatuja kaavoja sovelletaan erääseen yksinkertaiseen esimerkkiin luvussa 5. Luvussa 6 on esitetty elementtimenetelmään perustuva numeerinen ratkaisutapa ja joitakin sillä saatuja tuloksia.

2. SIIRTYMÄMENETELMÄ ALKUJÄNNITYSTEN VAIKUTTAESSA

Johdetaan tavanomaiset siirtymämenetelmän yhtälöt alkujänni-

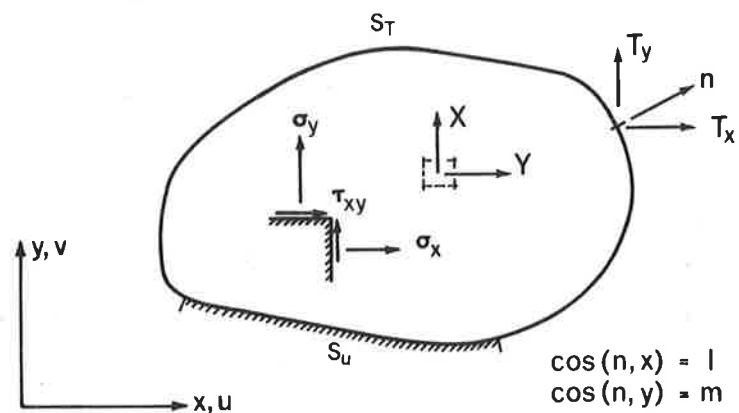
tysten vaikuttaessa ja tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tasomuodonmuutostapausta (kuva 1). Käytetään matriisimerkintöjä, jotta siirtyminen luvussa 6 esitetyn elementtimenetelmän kaavoihin kävisi joustavammin. Jännitysten $\{\sigma\}$ ja muodonmuutosten $\{\epsilon\}$ välinen riippuvuus on muotoa

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} + \{\sigma_0\}, \quad (7)$$

missä

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x_0} \\ \sigma_{y_0} \\ \tau_{xy_0} \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

$\{\sigma_0\}$ -vektori esittää mahdollisia alkujännityksiä, jotka vaikuttavat kappaleessa siinä tilassa, josta käsin siirtymiä ja muodonmuutoksia aletaan mitata. Alkujännitykset voivat olla esim. kappaleen valmistuksessa syntyneitä valssausjännityksiä tai esim. kallioperässä esiintyviä ns. tektoonisia jännityksiä. Seuraavassa ne ovat vain iterointimenettelyyn liittyviä kuviteltuja suureita, eikä niiden tarvitse näin ollen toteuttaa jännitysten tasapainoyhtälöitä kuten todellisten alkujännitysten.



Kuva 1. Tasomuodonmuutostapauksen suureita.
 Fig 1. Plane strain case.

Muodonmuutokset määritellään geometrisesti lineaarisessa teoriassa tiettyinä siirtymäkomponenttien u ja v osittaisderivaattoina kaavalla

$$\{\epsilon\} = [\partial]\{u\}, \quad (9)$$

missä

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad [\partial] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Jännitysten on toteutettava tasapainoyhtälöt

$$[\partial]^T\{\sigma\} + \{X\} = \{0\} \quad (11)$$

itse kappaleessa sekä reunaehdot

$$[n]^T\{\sigma\} = \{T\} \quad \text{pinnalla } S_T. \quad (12)$$

Pinta S_T tarkoittaa sitä kappaleen pinnan osaa, jolla tunnetaan vaikuttavat pintavoiman komponentit T_x ja T_y . Edellä on

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}, \quad \{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}, \quad [n]^T = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}, \quad (13)$$

jossa $\{X\}$ on tilavuusvoimavektori, $\{T\}$ pintavoimavektori ja $[n]$ pinnan normaalin suuntakosineista muodostettu matriisi. Lisäksi tulee siirtymien täyttää reunaehdot

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \quad \text{pinnalla } S_u. \quad (14)$$

Pinta S_u tarkoittaa sitä kappaleen pinnan osaa, jolla tunnetaan siirtymäkomponentit \bar{u} ja \bar{v} . Reunaehdot voivat tietenkin esiintyä myös sekamuodossa esim. siten, että jollain pinnan alueella tunnettuja suureita ovat esim. \bar{u} ja T_y .

Ratkaisun on siis toteutettava konstitutiivinen yhtälö (7), muodonmuutos-siirtymäyhtälö (9), tasapainoyhtälö (11) sekä reunaehdot (12) ja (14). Siirtymämenetelmää käytettäessä pyritään tehtävä

ratkaisemaan sijoittamalla muodonmuutoksen lauseke (9) yhtälöön (7) ja saatu jännityksen lauseke yhtälöihin (11) ja (12), jolloin saadaan yhtälöt

$$[\partial]^T [C] [\partial] \{u\} + \{X\} + [\partial]^T \{\sigma_0\} = \{0\}, \quad (15)$$

$$[n]^T [C] [\partial] \{u\} = \{T\} - [n]^T \{\sigma_0\} \quad \text{pinnalla } S_T, \quad (16)$$

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \quad \text{pinnalla } S_U, \quad (14)$$

joissa esiintyy tuntemattomana enää siirtymävektori $\{u\}$. Alkujännitysten vaikutus tulee siis kaavojen (15) ja (16) perusteella otetuksi huomioon ajattelamalla todellisiin ulkoisiin kuormiin lisäytyksi tilavuusvoimat

$$\Delta\{X\} = [\partial]^T \{\sigma_0\} \quad (17)$$

kappaleen sisällä ja pintavoimat

$$\Delta\{T\} = - [n]^T \{\sigma_0\} \quad (18)$$

kappaleen pinnalla S_T .

Kirjoitetaan yhtälöt (15), (16) ja (14) havainnollisemman käsitteilyksen saamiseksi kehitettyinä, kun G ja λ ovat vakioita x :n ja y :n suhteen. Saadaan

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (G + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (15a)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (G + \lambda) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + Y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0,$$

$$\ell \left[(2G + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right] + mG \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = T_x - \ell \sigma_x - m \tau_{xy}, \quad (16a)$$

$$m \left[(2G + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \ell G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = T_y - m \sigma_y - \ell \tau_{xy}$$

pinnalla S_T ja

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \\ v &= \bar{v} \end{aligned} \quad \text{pinnalla } S_U. \quad (14a)$$

3. KOKOONPURISTUMATTOMAN AINEEN YHTÄLÖT

$[C]$:n lausekkeesta (8) nähdään, että λ :n nimittäjässä oleva termi $1-2\nu$ saa arvon nolla, kun ν on $1/2$. Täten siirtymämenetelmän yhtälöiden (15) ja (16) johtaminen ei onnistu, kun aine on kokoonpuristumatonta. Muodostetaan jatkoa varten kokoonpuristumattoman aineen yhtälöt tasomuodonmuutostapauksissa ottamalla käyttöön lisätuntematon σ_m . Ainoa muutos esitetyissä kaavoissa tulee konstitutiiviseen yhtälöön, joka on nyt yhtälöiden (5) mukaisesti esitettävissä muodossa

$$\{\sigma\} = [G]\{\epsilon\} + \{\sigma_m\}, \quad (19)$$

missä

$$[G] = \begin{bmatrix} 2G' & 0 & 0 \\ 0 & 2G' & 0 \\ 0 & 0 & G' \end{bmatrix}, \quad \{\sigma_m\} = \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Menettelemällä samoin kuin edellä kokoonpuristuvalla aineella saadaan yhtälöt

$$[\partial]^T [G] [\partial] \{u\} + [\partial]^T \{\sigma_m\} + \{X\} = \{0\}, \quad (21)$$

$$[n]^T [G] [\partial] \{u\} + [n]^T \{\sigma_m\} = \{T\} \quad \text{pinnalla } S_T, \quad (22)$$

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \quad \text{pinnalla } S_U, \quad (14)$$

joissa esiintyvät tuntemattomina $\{u\}$ ja σ_m . Kirjoitetaan vielä yhtälöt (21), (22) ja (14) kehitettyinä tapauksessa G' on vakio. Saadaan

$$G' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} + X = 0, \quad (21a)$$

$$G' \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + Y = 0,$$

$$2\lambda G' \frac{\partial u}{\partial x} + mG' \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda \sigma_m = T_x, \quad \text{pinnalla } S_T, \quad (22a)$$

$$2mG' \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda G' \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + m\sigma_m = T_y$$

$$u = \bar{u},$$

$$v = \bar{v},$$

$$\text{pinnalla } S_U. \quad (14a)$$

Yhtälöissä (21a) on suoritettu sievennyksiä ottamalla huomioon kokoonpuristumattomuusehto

$$\epsilon_x + \epsilon_y \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

Kokoonpuristumattomalle aineelle on tuntemattomien u , v ja σ_m toteuttava yhtälöt (21) ja (23) sekä reunaehdot (22) ja (14). Todetakaan lisäksi, että tasomuodonmuutostapauksessa ($\epsilon_z = 0$) seuraa kaavoista (5) suoraan tulos

$$\sigma_z = \sigma_m \quad (24)$$

4. ALKUJÄNNITYSITEROINTI

Alkujännitysiterointi on kehitetty alunperin epälineaarista muodonmuutos-jännityslakia

$$\{\epsilon\} = \{f(\{\sigma\})\} \quad (25)$$

(Merkintä tarkoittaa, että muodonmuutokset ovat esitettävissä jännitysten funktioina.) noudatettavan aineen analysoimiseksi lineaarisen aineen jännitys-muodonmuutoslain

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (7)$$

avulla muuntelemalla ajateltuja alkujännityksiä $\{\sigma_0\}$ siten, että itse asiassa noudatetaan lakia (25) [4]. Menettelyn periaate käy selville kuvan 2 kaaviollisesta esityksestä, joka kuvaa jännitysten ja muodonmuutosten välistä yhteyttä rakenteen jossain pisteessä. Rakent-

ne on analysoitu siirtymämenetelmällä lineaarisen teorian perusteella käyttäen tiettyjä (esim. arvaamalla saatuja) ajateltuja alkujännityksiä $\{\sigma_0\}^n$. Tarkasteltavaan pisteeseen saadaan ratkaisusta muodonmuutos $\{\epsilon\}^n$. Jännitys on siis kaavan (7) perusteella

$$\{\sigma\}^n = [C]\{\epsilon\}^n + \{\sigma_0\}^n \quad (26)$$

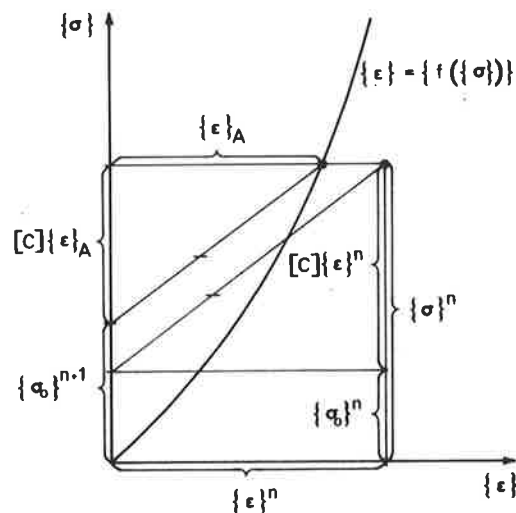
Jos nyt lasketaan jännityksistä $\{\sigma\}^n$ kaavan (25) mukaiset muodonmuutokset

$$\{\epsilon\}_A = \{f(\{\sigma\}^n)\} \quad (27)$$

eivät ne yleensä vastaa arvoja $\{\epsilon\}^n$ kuten pitäisi. Kuvitelluille alkujännityksille lasketaan uusi arvio

$$\{\sigma_0\}^{n+1} = \{\sigma\}^n - [C]\{\epsilon\}_A = \{\sigma\}^n - [C]\{f(\{\sigma\}^n)\} \quad (28)$$

Rakenne analysoidaan uudestaan lineaarisena käyttäen saatuja uusia ajateltuja alkujännityksiä, joiden vaikutus tulee esille analysoinnissa uusina ajateltuina lisäkuormina kaavojen (17) ja (18) mukaisesti. Alkujännitysten arvoja korjataan jälleen ja näin jatketaan kunnes



Kuva 2. Kaaviollinen esitys alkujännitysiteroinnista.
Fig 2. Symbolic representation of the initial stress iteration method.

tulokset (siirtymät, muodonmuutokset, jännitykset) ovat supenneet riittäväällä tarkkuudella.

Alkujännitysiteroinnilla voidaan haluttaessa analysoida myös toiset lineaariset aineominaisuudet (E' , ν') omaava rakenne [4]. Lineaarisen aineen (E' , ν') muodonmuutos-jännitysysteys voidaan nimittäin aina esittää ν' :n arvosta riippumatta muodossa

$$\{\epsilon\} = [C']^{-1}\{\sigma\}, \quad (29)$$

jossa

$$[C']^{-1} = \frac{1}{2G'} \begin{bmatrix} 1-\nu' & -\nu' & 0 \\ -\nu' & 1-\nu' & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Kaava (28) on nyt

$$\{\sigma_0\}^{n+1} = \{\sigma\}^n - [C][C']^{-1}\{\sigma\}^n = ([I] - [C][C']^{-1})\{\sigma\}^n. \quad (31)$$

[I] on yksikkömatriisi. Tällaisella alkujännitysiteroinnilla ei ole normaalisti mitään etuja, päinvastoin. Kuitenkin menettelyä voidaan soveltaa myös tapauksessa $\nu' = 1/2$, jolloin tavanomainen siirtymämenetelmä ei enää käy tai tapauksissa, joissa ν' on niin lähellä 0,5:ttä, että siirtymämenetelmä johtaa numeerisiin epätarkkuuksiin. Suorittamalla matriisioperaatiot saadaan

$$[I] - [C][C']^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{G}{G'} + \nu' \left(\frac{G}{G'}, -\frac{\lambda}{\lambda'} \right) & \nu' \left(\frac{G}{G'}, -\frac{\lambda}{\lambda'} \right) & 0 \\ \nu' \left(\frac{G}{G'}, -\frac{\lambda}{\lambda'} \right) & 1 - \frac{G}{G'} + \nu' \left(\frac{G}{G'}, -\frac{\lambda}{\lambda'} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{G}{G'} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Kun aine (E' , ν') on täysin kokoonpuristumatonta

$$\nu' = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\lambda'} = 0$$

ja kerroinmatriisiksi tulee

$$[I] - [C][F'] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \frac{G}{G'} & \frac{1}{2} \frac{G}{G'} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{G}{G'} & 1 - \frac{1}{2} \frac{G}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{G}{G'} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Matriisia $[C']^{-1}$ on merkitty $[F']$:lla, kun aine on kokoonpuristumaton. Alkujännitysten iterointikaava on tällöin

$$\{\sigma_0\}^{n+1} = ([I] - [C][F'])\{\sigma\}^n \quad (35)$$

Ainevakiot E ja ν , joilla laskelmat suoritetaan, voidaan valita periaatteessa vapaasti. Tässä on käytetty yleensä kahta eri tapaa:

Valitsemalla

$$E = E'$$

seuraa (34):stä

$$[I] - [C][F'] = \frac{1}{4(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1+4\nu & 3 & 0 \\ 3 & 1+4\nu & 0 \\ 0 & 0 & -2(1-2\nu) \end{bmatrix}. \quad (34a)$$

Valitsemalla

$$G = G'$$

saadaan yksinkertaisempi tulos

$$[I] - [C][F'] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34b)$$

Käytettäessä verrattain suurta ν :n arvoa ei tavoilla voine olla suppenevuuden kannalta paljon eroa, koska matriisit $[I] - [C][F']$ ovat tällöin melkein samoja.

Laskenta-algoritmi on aloitettu otaksuen paremman puutteessa alkujännitysten arvot nolliksi. Iteroinnin kulku on seuraava:

$$\text{Aloitus } \{\sigma_0\}^1 = \{0\}.$$

1. Laske ajatellut lisäkuormitukset

$$\Delta\{X\}^n = [\partial]^T \{\sigma_0\}^n, \quad \Delta\{T\}^n = -[n]^T \{\sigma_0\}^n.$$

2. Ratkaise $\{u\}^n$ yhtälöistä (15), (16) ja (14) kuormituksille

$$\{X\}^n = \{X\} + \Delta\{X\}^n, \quad \{T\}^n = \{T\} + \Delta\{T\}^n.$$

3. Laske

$$\{\epsilon\}^n = [\partial]\{u\}^n.$$

4. Laske

$$\{\sigma\}^n = [C]\{\epsilon\}^n + \{\sigma_0\}^n.$$

5. Laske seuraavaa kierrosta varten

$$\{\sigma_0\}^{n+1} = ([I] - [C][F'])\{\sigma\}^n.$$

Vaiheet 1...5 toistetaan iterointikierrosten n arvoilla 1, 2, 3, ... kunnes tulokset ovat supenneet (mikäli mahdollista) riittävällä tarkkuudella. Jos menettelyä käytetään melkein kokoonpuristumattomalle aineelle ($\nu' \approx 1/2$), alkujännitysten laskemiseen on käytettävä kaavaa (31).

5. YKSINKERTAINEN ESIMERKKI

Edellä saadun teorian sovellutuksena tarkastellaan hyvin yksinkertaista tasomuodonmuutostilan tapausta. Kuvassa 3b esitettyä kokoonpuristumattomasta aineesta olevaa kappaletta kuormittaa reunalla $y = b$ tasainen kuorma q pintayksikköä kohti. Muilla reunoilla kappale on tuettu siten, että siirtymä reunaa vastaan kohtisuorassa suunnassa on estetty, mutta reunan suunnassa voi siirtymä tapahtua kitkattomasti. Kokoonpuristumattoman aineen yhtälöt (21a), (23), (22a), (14a) tyydyttävä ratkaisu on yksinkertainen:

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ \sigma_m = -q \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \epsilon_x = 0 \\ \epsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sigma_x = -q \\ \sigma_y = -q \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \quad (36)$$

Siirtymää ei tapahdu ja kappaleessa syntyy tasainen hydrostaattinen jännitystila aivan kuin kyseessä olisi neste.

Sovelletaan nyt alkujännitysiterointia ja valitaan rakenne, jolla iterointi suoritetaan luvussa 4 esitetyn tavan $G = G'$ mukaisesti ja otetaan vielä syntyvien kaavojen yksinkertaistamiseksi ν :lle arvoksi nolla. Vallitsevat kokoonpuristuvan aineen yhtälöt (15a), (16a) ja (14a) toteuttava ratkaisu ($G = E/2$, $\lambda = 0$) on myös triviaali. Saadaan

$$\{u\}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{qy}{E}, \quad \{\epsilon\}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{q}{E}, \quad \{\sigma\}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} q, \quad \{\sigma_0\}^2 = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} q \quad (37)$$

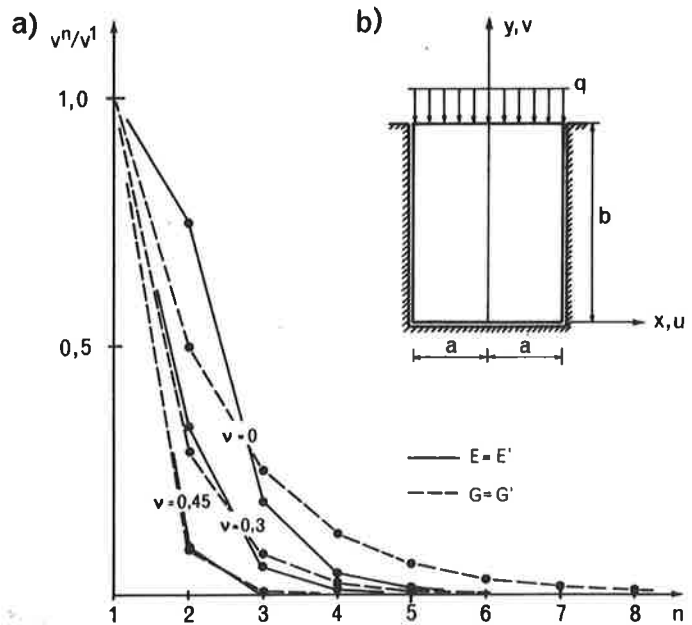
missä $\{\sigma_0\}^2$:n laskemiseksi on siis käytetty kaavaa (34b). Laskemalla ajatellut lisäkuormitustermit $\Delta\{X\}^2$ ja $\Delta\{T\}^2$ huomataan, että tilavuusvoimia ei synny ja ainoa lisäpintavoima suuruudeltaan $q/2$ y-akselin suuntaan syntyy reunalle $y = b$ ($l = 0$, $m = 1$). Näin ollen on rakenteen kuormana iteraatiossa 2 tasainen kuorma $q/2$ ja ratkaisu on

$$\{u\}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{Bmatrix} \frac{qy}{E}, \quad \{\epsilon\}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{q}{E}, \quad \{\sigma\}^2 = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} q, \quad \{\sigma_0\}^3 = \begin{Bmatrix} -3/4 \\ -3/4 \\ 0 \end{Bmatrix} q \quad (38)$$

Ajatelluksi lisäreunavoimaksi tulee $(3/4)q$ ja siis rakenteen kuormaksi kolmannella iteraatiolla $(1/4)q$. Saadaan

$$\{u\}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \frac{qy}{E}, \quad \{\epsilon\}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{q}{E}, \quad \{\sigma\}^3 = \begin{Bmatrix} -3/4 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} q, \quad \{\sigma_0\}^4 = \begin{Bmatrix} -7/8 \\ -7/8 \\ 0 \end{Bmatrix} q. \quad (39)$$

Neljännellä kierroksella on kuormitus $(1/2)^3 q$ ja n :llä $(1/2)^{n-1} q$. On helppo todeta, että tulokset suppenevat kohti oikeita arvoja (36). Kuvassa 3a on esitetty pystysiirtymien arvot v^n verrattuna vastaaviin arvoihin ensimmäisellä iteraatiolla v^1 iteraatiokerrosten n funktiona. Laskelmat on suoritettu myös tavalla $E = E'$ sekä v :n arvoilla 0,3 ja 0,45. Havaitaan, että suppenemisnopeus kasvaa ja että tavoilla $E = E'$ ja $G = G'$ saatujen tulosten erot pienenevät v :n kasvaessa. Lisäksi suuri v :n arvo tekee siirtymät pieniksi jo ensimmäisessä iteraatiossa, joten ainakin tämän esimerkin perusteella on mahdollisimman suuren v :n arvon käyttö laskentamallissa edullista suppenemisnopeuden kannalta.



Kuva 3. a) Pystysiirtymän riippuvuus iteraatiokierrosten lukumäärästä.
 b) Tasaisen kuorman kuormittama kappale.
 Fig 3. a) Relationship between vertical displacement and number of iterations.
 b) Solid under uniform load.

6. ELEMENTTIMENETELMÄN AVULLA SAATUJA TULOKSIA

Kontinuumin yhtälöiden (15), (16) ja (14) käyttö alkujännitysiteroinnissa on käytännössä yleensä mahdotonta tai liian suuritöistä vähänkin monimutkaisemmissa tapauksissa. Tämän vuoksi on turvauduttava numeerisiin menetelmiin, joiden avulla vallitsevat yhtälöt diskretoidaan tietokonekäyttöä varten sopivaan muotoon. Tässä on diskretointi suoritettu elementtimenetelmän avulla.

Elementtimenetelmän perusteita on selostettu mm. teoksessa [4]. Lyhyesti esitettynä menetelmä on seuraava. Tutkittava rakenne jaetaan osa-alueisiin eli elementteihin, joiden rajapinnoilta valitaan tietty määrä (yhteensä k kpl) ns. nurkkapisteitä. Siirtymät nurkkapisteissä (tasomuodonmuutostapaus) $u_1, v_1, u_2, \dots, u_k, v_k$ ($2k$ kpl) ovat diskretoidun rakenteen tuntemattomia verrattuna kontinuumin tuntemattomiin funktioihin $u(x,y), v(x,y)$. Siirtymätila rakenteen alueella approksimoidaan muodossa

$$\{u\} = [\Psi]\{U\}, \quad \{U\}^T = [u_1, v_1, u_2, \dots, u_k, v_k] \quad (40)$$

missä $[\Psi]$ -matriisin alkiot (ns. muotofunktiot) ovat tunnettuja $x:n$ ja $y:n$ funktioita, jotka määritellään erikseen elementteittäin ja jotka voivat saada nollasta eroavia arvoja kukin vain tiettyyn nurkkapisteeseen liittyvissä elementeissä. Kaavan (40) perusteella seuraa yhtälöistä (9) ja (7)

$$\{\epsilon\} = [B]\{U\}, \quad (41)$$

$$\{\sigma\} = [C][B]\{U\} + \{\sigma_0\}, \quad (42)$$

$$\text{missä } [B] = [\partial][\Psi]. \quad (43)$$

On ilmeistä, että jännitykset (42) eivät enää pysty toteuttamaan tasapainoyhtälöitä (11) ja reunaehtoja (12) täsmällisesti millään $\{U\}$ -

vektorin arvolla. Yhtälöt (11) ja (12) voidaan kuitenkin toteuttaa likimääräisesti esim. soveltamalla virtuaalisten siirtymien periaatetta. Kirjoittamalla virtuaalinen työyhtälö jännityksille (42) ja ulkoisille kuormille $\{X\}$ ja $\{T\}$ $2k$ kertaa käyttäen joka kerralla eri virtuaalista siirtymätilaa saadaan $2k$ lineaarista yhtälöä vektorin $\{U\}$ määrittämiseksi. Valitsemalla erityisesti kaavan (40) tapainen esitys myös virtuaalisille siirtymille tulee yhtälöryhmälle yksinkertainen muoto

$$[K]\{U\} = \{R\} + \Delta\{R\}, \quad (44)$$

$$\text{jossa } [K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV, \quad (45)$$

$$\{R\} = \int_V [\psi]^T \{X\} dV + \int_{S_T} [\psi]^T \{T\} dA, \quad (46)$$

$$\Delta\{R\} = - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV. \quad (47)$$

$[K]$ -matriisia nimitetään rakenteen jäykkyyssmatriisiksi ja $\{R\}$ -vektoria kuormitusvektoriksi. Alkujännitysten vaikutus voidaan siis ottaa huomioon lisäämällä kuormituksiin ajateltu kuormitus $\Delta\{R\}$. Integroinnit suoritetaan rakenteen tilavuuden V ja pinnan S_T yli. Yhtälöt (44) ovat diskreetti vastine kontinuumin siirtymämenetelmän yhtälöille (15) ja (16). Annettuja siirtymiä koskevat reunaehdot (14) otetaan huomioon vastaavina annettuina $\{U\}$ -vektorin komponentteina yhtälöryhmää (44) ratkaistaessa. Kun $\{U\}$ on ratkaistu, saadaan siirtymät, muodonmuutokset ja jännitykset kaavoista (40), (41) ja (42).

Laskenta-algoritmi on nyt

$$\text{Aloituspöytä } \{\sigma_0\}^1 = \{0\}$$

1. Laske ajateltu lisäkuormitusvektori

$$\Delta\{R\}^n = - \int_V [B]^T \{\sigma_0\}^n dV.$$

2. Ratkaise $\{U\}^n$ yhtälöstä

$$[K]\{U\}^n = \{R\}^n,$$

$$\text{jossa } \{R\}^n = \{R\} + \Delta\{R\}^n.$$

3. Laske

$$\{\epsilon\}^n = [B]\{U\}^n$$

4. Laske

$$\{\sigma\}^n = [C]\{\epsilon\}^n + \{\sigma_0\}^n$$

5. Laske seuraavaa kierrosta varten

$$\{\sigma_0\}^{n+1} = ([I] - [C][F'])\{\sigma\}^n.$$

Menettely on siis periaatteessa sama kuin kontinuumille, mutta kohta 2 on elementtimenetelmässä oleellisesti helpompi, sillä $\{U\}^n$ saadaan standardimenettelyllä lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuna.

Seuraavassa on esitetty muutamia elementtimenetelmällä saatuja tuloksia. Elementteinä on käytetty tehokkaiksi todettuja isoparametriisiä käyräviivaisia elementtejä [4]. Kaavojen vaatimat integroinnit on suoritettu numeerisesti. Täten suureet $\{\epsilon\}^n$, $\{\sigma\}^n$, $\{\sigma_0\}^n$ lasketaan kussakin elementissä vain integroimispisteissä. Suppenemista on tarkasteltu kehitetyssä ohjelmassa tutkien siirtymien muutosten suhdetta kokonaissiirtymiin käyttäen mittana suuretta

$$e^n = \frac{(u_1^n - u_1^{n-1})^2 + (v_1^n - v_1^{n-1})^2 + \dots + (v_k^n - v_k^{n-1})^2}{(u_1^n)^2 + (v_1^n)^2 + \dots + (v_k^n)^2}, \quad n \geq 2 \quad (48)$$

ja iterointi on lopetettu, kun e^n on alittanut lähtötietona annetun arvon tai kun iterointikierroksille sallittu maksimilukumäärä on ylitetty.

Laskelmissa kokeiltiin seuraavia elementtityyppejä

K3 - kolmioelementti, 3 nurkkapistettä (1)

K6 - kolmioelementti, 6 nurkkapistettä (3)

S4 - suorakaide-elementti, 4 nurkkapistettä (4)

S8 - suorakaide-elementti, 8 nurkkapistettä (4)

S12 - suorakaide-elementti, 12 nurkkapistettä (9)

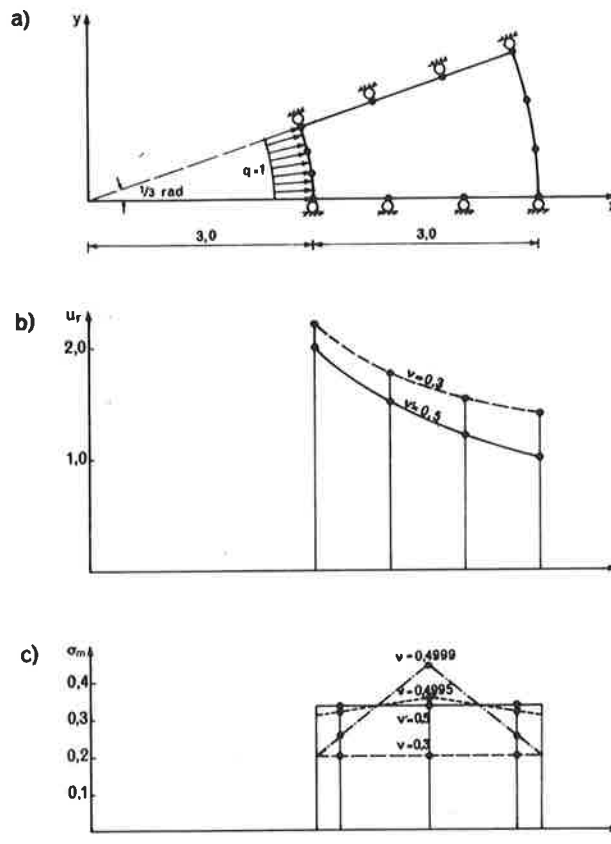
Käytettyjen integroimispisteiden lukumäärä elementtiä kohden on ilmoitettu suluissa.

Ensimmäisenä sovellutuksena ja ohjelman tarkistuksena laskettiin luvun 5 esimerkki suhteen b/a arvolla 2. Kaikilla elementtityypeillä saatiin samat tulokset kuin analyttisillä laskelmilla. Tämä onkin luonnollista, koska elementtimenetelmällä saadaan täsmällinen ratkaisu kokoonpuristuvalla aineella ko. tehtävässä. Suppenemismitta (48) on tässä esimerkissä ilman merkitystä kaikkien siirtymien läheisyydessä nollassa.

Toinen sovellutus koskee sisäpuolisen paineen $q = 1$ kuormittamaa paksuseinäistä sylinteriä. Muodonmuutokset sylinterin akselin suunnassa ovat estetyt, joten kyseessä on tasomuodonmuutostila. Sylinterin ulko- ja sisäsäteiden suhde on 2. Elementtisysteemi on muodostettu yhdestä S12 elementistä (kuva 4a). Laskentamalliksi on valittu $G = G'$ ($= 1$), $\nu = 0,3$. Suppenemiseksi tarvittiin vain kaksi iterointikierrosta. Kuvassa 4b on esitetty säteittäinen siirtymä u_r ensimmäisellä kierroksella ($\nu = 0,3$) ja lopullinen siirtymä ($\nu' = 0,5$) toisella kierroksella säteen r funktiona. Elementtimenetelmällä saadut arvot (pisteet) yhtyvät piirustuksen tarkkuudella tarkkaan ratkaisuun. Kuvassa 4c esitetyt keskimääräiselle normaalijännitykselle σ_m saadut tulokset ovat myös miltei identtiset analyttisen ratkaisun ($=$ vakio) kanssa. Tehtävä on ratkaistu myös tavanomaisella siirtymämenetelmällä ν :n arvoille 0,4995 ja 0,4999. Siirtymien arvot ovat vielä hyviä, mutta σ_m :n arvoissa (kuva 4c) näkyy jo selvästi epätarkkuutta. Numeeriset pyöristysvirheet riippuvat tietokoneen käyttämästä merkitsevien numeroiden määrästä. Tässä esitetyt laskelmat on suoritettu UNIVAC

1108:lla käyttäen yksinkertaista laskentatarkkuutta.

Tehtävä ratkaistiin myös analyyttisesti alkujännitysiteroinnilla muodostamalla tarvittavat kaavat napakoordinaatistossa. Säteettäinen ja tangentiaalinen jännitys ovat riippumattomia käytetystä ν :n arvosta, joten jo ensimmäisessä iteraatiossa saadaan jännityksille $\{\sigma\}^2$ lopullinen arvo. Alkujännitystilasta aiheutuu ajateltu lisäpai-



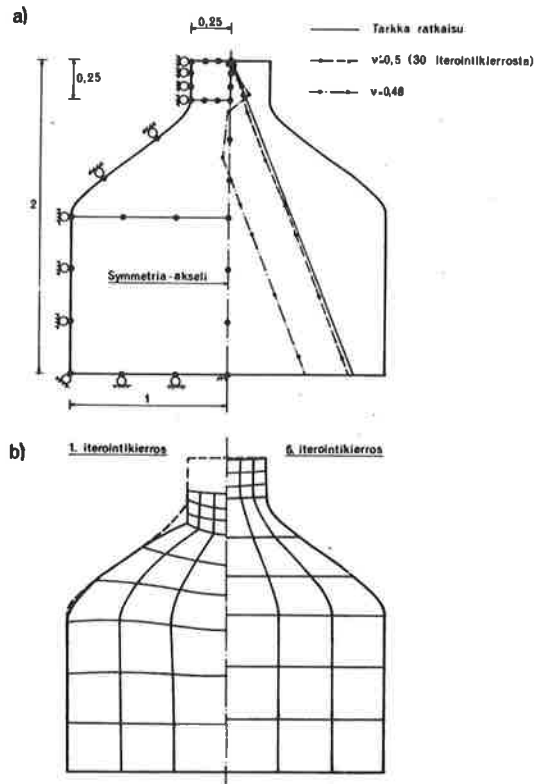
Kuva 4. a) Yhdestä S12-elementistä muodostettu elementtisy-
steemi paksuseinäiselle sylinterille
b) Säteettäinen siirtymä
c) Keskimääräinen normaali-jännitys
Fig 4. a) One S12-element system for thick walled cylinder
b) Radial displacement
c) Mean pressure

ne $q/3$ sylinterin sisä- ja ulkopinnalle, jonka vaikutuksesta siirtymätkin saavat oikeat kokoonpuristumattoman tapauksen arvot toisen iteraation aikana. Alkujännitysiterointi johtaakin aina lopulliseen ratkaisuun kahdella iteroinnilla laskentamallista riippumatta, mikäli rakenteen jännitykset ovat ainevakioiden arvoista riippumattomia.

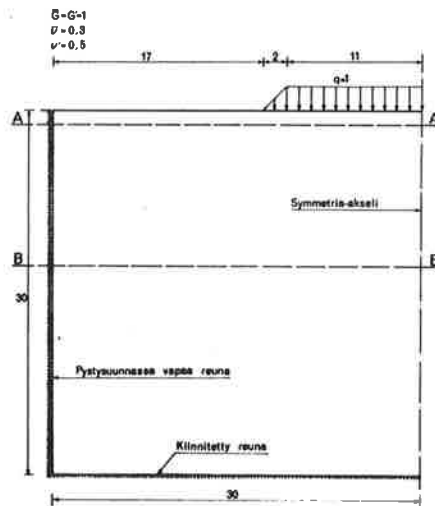
Sylinteri analysoitiin lisäksi pyörähdyssymmetrisiä tapauksia käsittelevällä ohjelmahaaralla. On mielenkiintoista todeta, että suppenemiseen tarvittiin nyt seitsemän kierrosta. Tämä on ymmärrettävissä otettaessa huomioon, että pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa joudutaan käsittelemään myös kolmatta normaalijännitystä σ_z , jonka arvo ei ole tässä esimerkissä ν :stä riippumaton.

Seuraava sovellutus on valittu lähinnä osoittamaan isoparametristen elementtien hyvää kykyä seurata monimutkaisia reunaviivoja. Kuvassa 5a esitettyä pullon muotoisen kappaleen puolikasta on approksimoitu vain kolmella S12-tyyppisellä elementillä. Aine on kokoonpuristumatonta ja kuormituksena on omapaino. Siirtymät reunaa vastaan kohtisuorassa suunnassa ovat estetyt lukuunottamatta yläpintaa, joka on vapaa. Tarkka ratkaisu vastaa nesteeseen syntyvää hydrostaattista jännitystilaa, joka kasvaa lineaarisesti alaspäin mentäessä. Siirtymiä ja muodonmuutoksia ei synny. Alkujännitysiterointi on suoritettu laskentamallilla $G = G'$, $\nu = 0,48$. Kuvassa 5b on piirretty näkyviin vasemmalle puolelle siirtymätila ensimmäisessä iteraatiossa ja oikealle puolelle siirtymätila kuudennessa iteraatiossa, jolloin siirtymät ovat jo huomattavasti pienentyneet. Kuvan 5a oikealla puolella on esitetty keskimääräisen normaalijännityksen jakautuma ensimmäisen iteraation ($\nu = 0,48$) ja kolmenkymmenen iteraation jälkeen. Tässä esimerkissä oli jännitysten suppeneminen verraten hidasta.

Neljäs sovellutus (kuva 6) on geotekniikkaan kuuluva esimerkki, jota on käsitelty kirjoituksessa [3]. Kun huokosveden kyllästämä maa



Kuva 5. a) Elementtisysteemi ja keskimääräinen normaali jännitys
 b) Siirtymät ensimmäisellä ja kuudennella iteraatiolla
 Fig 5. a) Element system and mean pressure distribution
 b) Displacements on the first and the sixth iteration



Kuva 6. Kuormituksen q kuormittama maapohja
 Fig 6. Soil under distributed loading q

joutuu äkillisen kuormituslisäyksen alaiseksi, se toimii aluksi käytännöllisesti katsoen kokoonpuristumattomana. Huokosveteen syntyy lisäpaine u_w , joka vähitellen häviää veden virtauksen johdosta ja lisäkuormitus siirtyy lopuksi pelkästään raerungolle ns. tehokkaiden jännitysten välityksellä. Merkitään tehokkaita jännityksiä ja raerunkoa koskevia suureita yläviivalla. Raerunko otaksutaan lineaarisesti kimmoiseksi kuormituslisäysten suhteen. Raerungon konstitutiiviset yhtälöt ovat ($\bar{\nu} \neq 1/2$)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= 2\bar{G}\epsilon_x + \bar{\lambda}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z), & \bar{\tau}_{xy} &= \bar{G}\gamma_{xy} \\ \dots & & \dots & \end{aligned} \quad (49)$$

Jännitysten otaksutaan yleensä muodostuvan tehokkaista jännityksistä ja huokosveden paineesta u_w (puristus negatiivista) seuraavasti

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}_x + u_w, & \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} \\ \dots & & \dots & \end{aligned} \quad (50)$$

Yllä olevista kaavoista saadaan keskimääräiseksi normaalijännitykseksi

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{2\bar{G} + 3\bar{\lambda}}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + u_w \quad (51)$$

Heti äkillisen kuormituslisäyksen jälkeen eli ns. konsolidoitumattomassa tilassa maa otaksutaan kokoonpuristumattomaksi. Huokosvedenpaineen lisäykselle saadaan silloin yhtälöstä (51) tulos

$$u_w = \sigma_m \quad (52)$$

ja konsolidoitumattoman maan konstitutiiviset yhtälöt ovat siten muotoa

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\bar{G}\epsilon_x + \sigma_m, & \tau_{xy} &= \bar{G}\gamma_{xy} \\ \dots & & \dots & \end{aligned} \quad (53)$$

Konsolidoitumaton analyysi on siis suoritettava kokoonpuristumattomana käyttäen G' :lle arvoa \bar{G} . Konsolidoitunut analyysi, jossa $u_w = 0$,

voidaan suorittaa normaalilla siirtymämenetelmällä käyttäen ainevakioita \bar{G} ja $\bar{\lambda}(\bar{\nu})$.

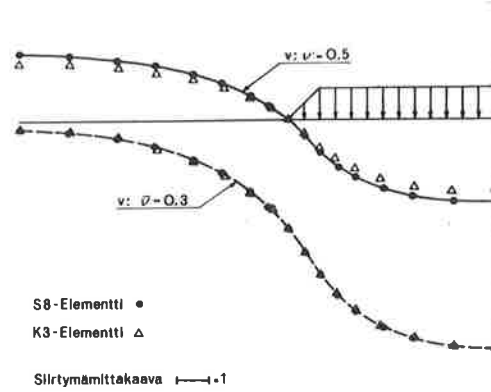
Kuvan 6 esimerkissä ovat raerungon aineominaisuudet $\bar{G} = 1$, $\bar{\nu} = 0,3$. Laskentamalli on valittu tavalla $G = G' (= \bar{G} = 1), \nu = 0,3$. Valitsemalla tämä ν :n arvo saadaan ensimmäisellä iteraatiolla sivutuloksena konsolidoitunut analyysi. Kaikilla elementtityypeillä saatiin käyttämällä suunnilleen samaa määrää vapausasteita (= nurkkapistesiirtymäkomponenttien lukumäärä vähennettynä reunaehdoissa annettujen komponenttien lukumäärä) miltei samat tulokset ensimmäisellä iteraatiolla eli siis normaalilla siirtymämenetelmällä. Suoritettaessa iterointia pieneni mitta e^n aluksi nopeasti. Jatkettaessa iterointia riittävästi saavutettiin kuitenkin kaikilla elementeillä lopuksi tilanne, jossa mitta e^n alkoi pienetä hyvin hitaasti. Mitan arvo vaihteli tässä vaiheessa eri tyypeillä huomattavasti. Elementtityyppien järjestys suppenevuuden perusteella oli huonommasta parempaan K3, S4, K6, S12 ja S8. Mittojen suhde esim. elementeillä K3 ja S8 oli luokkaa 10^3 . K6, S12 ja S8 elementeillä saadut siirtymät olivat 8...10 kierroksen jälkeen käytännön kannalta identtisiä ja supenneita. Osittaisena selityksenä suppenevuuseroille saattaa olla integroimispisteiden lukumäärän ja vapausasteiden lukumäärän suhteen ero eri elementtityypeistä muodostetuilla rakenteilla. Iteroinnissa pyritään itse asiassa toteuttamaan kokoonpuristumattomuusehto integroimispisteiden kohdilla. Jokainen integroimispiste merkitsee siis yhtä nurkkapistesiirtymiä koskevaa lineaarista lisäyhtälöä, joka siirtymien tulisi toteuttaa riittävällä tarkkuudella tasapainoyhtälöiden lisäksi. Kirjoittajilla on tarkoitus kokeilla jatkossa muita mahdollisia tapoja alkujännitysten määrittämiseksi kuin yksinkertainen integroimispisteiden hyväksikäyttö.

Kuvassa 7 näkyy maanpinnan pystysiirtymä alkutilassa ja konsolidoituneessa tilassa laskettuina K3- ja S8-elementeillä. Tulokset ovat hyvin lähellä toisiaan ensimmäisellä iteraatiolla ($\bar{v} = 0,3$). Sen sijaan kokoonpuristumattomassa tapauksessa K3-elementeillä saadut tulokset poikkeavat huomattavasti S8-elementeillä saaduista arvoista, joita voidaan pitää käytännön kannalta tarkkoina.

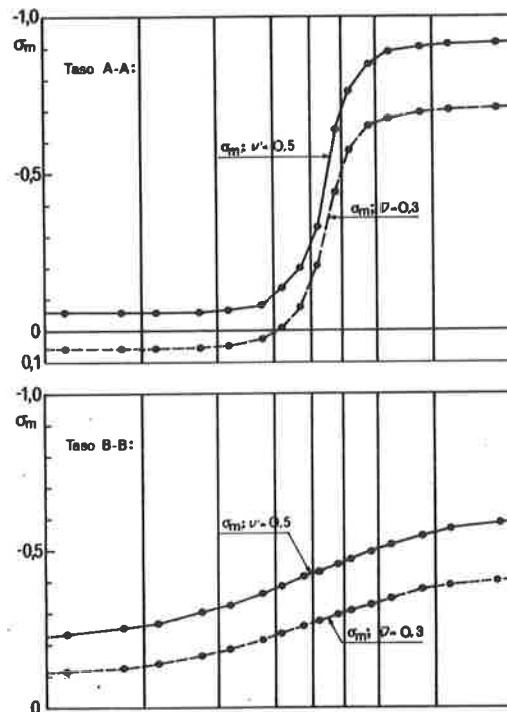
Kuvassa 8 on esitetty keskimääräinen normaalijännitys σ_m kahdella syvyydellä konsolidoitumattomassa tilassa ($u_w = \sigma_m$) ja konsolidoitumisen tapahduttua laskettuna S8-elementeillä. Nähdään, että keskimääräinen normaalijännitys muuttuu melko paljon konsolidaation aikana. Täten yleisesti tehty otaksuma σ_m :n pysymisestä vakiona konsolidaation aikariippuvuutta tutkittaessa syntyvien yhtälöiden yksinkertaistamiseksi ei ole tämän esimerkin tapauksessa hyvin perusteltavissa [3].

Kuva 9 antaa havainnollisen käsityksen siirtymistä alkutilassa sekä lopullisessa konsolidoituneessa tilassa. Nuolten vektorisumma esittää lopullista siirtymää ja katkoviivalla piirretty nuoli siis konsolidaation johdosta tapahtuvaa siirtymää. Lasketut tulokset olivat hyvässä sopusoinnussa kirjoituksessa [3] esitetyn aineiston kanssa.

Elementtimenetelmässä käy epähomogeenisuuden huomioonottaminen hyvin helposti antamalla lähtötietoina kullekin elementille omat asiaankuuluvat aineominaisuudet. Tärkeä etu alkujännitysiteroinnissa on lisäksi, että sitä voidaan soveltaa, vaikka vain jotkin rakenteen materiaaleista olisivat kokoonpuristumattomia. Kokoonpuristuvasta materiaalista olevissa elementeissä käytetään laskentamallissa yksinkertaisimmin elementin todellisia aineominaisuuksia, jolloin kerroinmatriisista $[I] - [C][C']^{-1}$ tulee nollamatriisi ja alkujännitykset



Kuva 7. Maanpinnan pystysiirtymä alkutilassa ($v' = 0.5$) ja konsolidoituneessa tilassa ($\bar{v} = 0.3$)
 Fig 7. Vertical displacement on top of the soil in un-drained ($v' = 0.5$) and drained ($\bar{v} = 0.3$) state

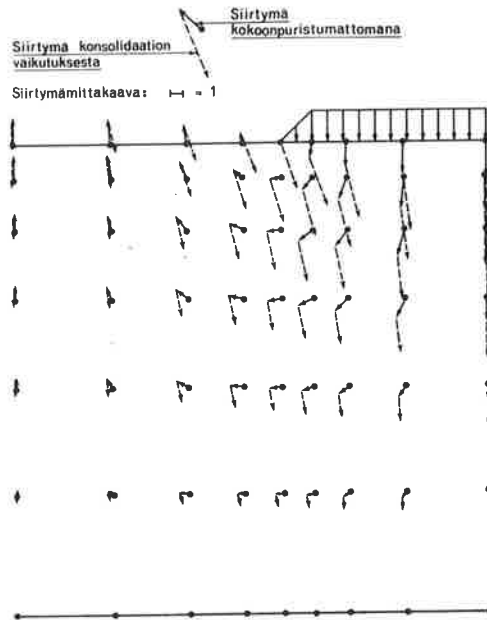


Kuva 8. a) Keskimääräinen normaalijännitys tasossa A-A
 b) Keskimääräinen normaalijännitys tasossa B-B
 Fig 8. a) Mean pressure in plane A-A
 b) Mean pressure in plane B-B

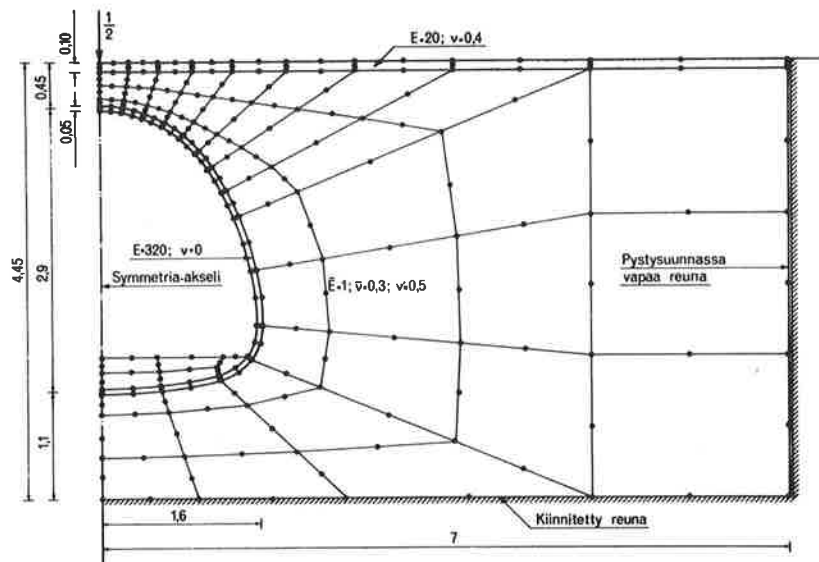
häviävät. Tästä on esimerkkinä pyritty analysoimaan tiepenkereen alla olevaa teräksistä aaltolevyrumpua (kuva 10) tasomuodonmuutostilassa. Rakenteen ajatellaan muodostuvan kolmesta eri materiaalista. Pengermateriaalin raerungon aineominaisuuksiksi on valittu $\bar{E} = 1$, $\bar{\nu} = 0,3$ ja sen otaksutaan olevan huokosveden täyttämä ja siis kokoonpuristumatonta äkillisille kuormituksille. Tien päällysrakenteelle on otettu $E = 20$, $\nu = 0,4$. Tyypillistä aaltolevyä on approksimoitu noin aaltolevyn kokonaispaksuuden paksuisella kerroksella (5 cm), jonka kimmokerroin on valittu siten, että kerroksen taivutusjäykkyys on sama kuin aaltolevyn. Näin saadaan kerrokselle suhteellinen kimmokerroin $E = 320$. Kerroksen vetojäykkyys tulee noin 1,5 kertaiseksi aaltolevyn vetojäykkyyteen verrattuna, mutta tällä ei liene oleellista vaikutusta tuloksiin. Koska aaltolevyn veto- ja taivutusjäykkyys rummun akselin suunnassa (aaltoja vastaan kohtisuorassa) ovat hyvin pieniä, voidaan kerrokselle ottaa $\nu = 0$.

Rakenne on analysoitu käyttäen kuvassa 10 esitettyä elementtisysteemiä (73 S8-elementtiä, 262 nurkkapistettä). Alkujännitysiterointi on suoritettu tavalla $G = G'$. Laskentamallin Poissonin vakioksi on otettu 0,3, jolloin tapaus $u_w = 0$ saadaan jälleen suoraan ensimmäisen iteraation tuloksena.

Rakenteeseen vaikuttaa symmetria-akselin kohdalla viivakuorma 1, joten symmetrian perusteella elementtisysteemin kuorma on 1/2. Kuvassa 11 on esitetty rummun keskipinnan siirtymät lyhyt- ($\nu' = 0,5$) ja pitkäaikaisen ($\bar{\nu} = 0,3$) kuormituksen vaikutuksesta. Rummun taivutusmomentti ja normaalivoima pituusyksikköä kohti on saatu integroimispisteiden jännityksistä otaksumalla normaalijännitysten jakautuvan lineaarisesti kussakin leikkauksessa ja ottamalla elementissä olevan kahden leikkauksen arvoista keskiarvo, joka sijoitetaan elementin keskipisteeseen. Näin lasketut tulokset lyhytaikaiselle kuormitukselle



Kuva 9. Siirtymät alkutilassa ja konsolidoitumisen tapahduttua
 Fig 9. Undrained displacements followed by drained displacements



Kuva 10. S8-elementeistä muodostettu elementtisyteemi
 Fig 10. S8-element system

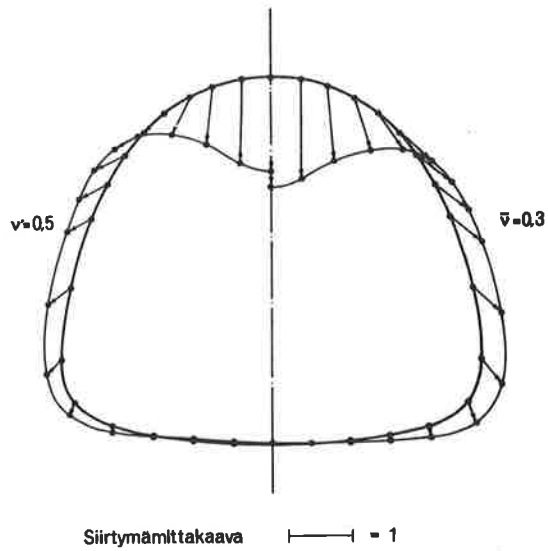
on piirretty kuvaan 12. Taivutusmomentti on katsottu positiiviseksi, jos se aiheuttaa vetoa rummun sisäpintaan. Normaalivoima on positiivinen, jos se on vetävä.

7. LOPPUTOTEAMUKSIA

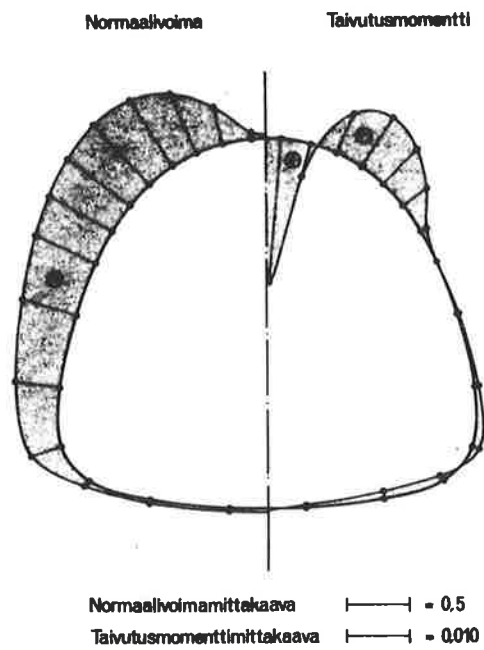
Edellä kaavat on johdettu tasomuodonmuutostapaukselle ja isotrooppiselle aineelle. Yleistykset avaruusjännitystapaukselle ja anisotrooppiselle aineelle eivät tuota mitään teoreettisia vaikeuksia. On huomattava, että tasojännitystapauksessa aineen kokoonpuristumattomuus ei estä tavanomaisen siirtymämenetelmän käyttöä, koska $[C]$ -matriisin alkiot pysyvät tällöin äärellisinä.

Kaavan (25) yhteydessä suoritettua iterointia on nimitetty teoksessa [4] alkumuodonmuutositeroinniksi. Kysymyksessä on pelkästään nimitysero, sillä korvaamalla esitetyissä kaavoissa suure $\{\sigma_0\}$ suureella $-[C]\{\epsilon_0\}$ ja käsittelemällä $\{\epsilon_0\}$:aa ajateltuna alkumuodonmuutoksena päästään ns. alkumuodonmuutositerointiin. Tässä on käytetty alkujännityksiä, koska näin saadaan jonkin verran yksinkertaisempia lausekkeita.

Alkujännitysiteroinnilla on eräitä etuja verrattuna menetelmään, jossa keskimääräinen normaalijännitys σ_m on otettu lisäperustuntemattomaksi. Paitsi että tuntemattomien lukumäärä pysyy pienempänä on tärkeätä, että yhtälöryhmän (44) kerroinmatriisi on rakenteen jäykkyysmatriisina positiivisesti definiitti ja ratkaisu on silloin suoritettavissa yksinkertaisella ja nopealla algoritmilla ilman, että on vaaraa nolllalla jakamisesta laskennan aikana. Todettakoon, että menetelmä, jossa σ_m on mukana tuntemattomana, saattaa johtaa singulaariseen yhtälöryhmään K3-elementtejä käytettäessä [3]. Haitta-



Kuva 11. Rummun siirtymät
 Fig 11. Displacements of the culvert



Kuva 12. Normaalivoima ja taivutusmomentti
 Fig 12. Axial force and bending moment

puolena alkujännitysmenetelmällä on tietenkin iterointi, jonka aiheuttamaa laskenta-aikaa voidaan kuitenkin huomattavasti pienentää kirjoittamalla yhtälöryhmän ratkaisuohjelman muodossa, jossa ensimmäisen ratkaisun jälkeiset ratkaisut saadaan hyvin nopeasti käyttäen hyväksi ensimmäisessä ratkaisussa kertyneitä tietoja. Tällaista algoritmia on käytetty lasketuissa esimerkeissä.

Alkujännitysiterointimenettelyn suppenevuudesta on kirjoittajilla lähinnä vain numeeristen kokeilujen antamia tuloksia. Käyttämällä suurta v :n arvoa laskentamallissa päästään usein jo ensimmäisellä iteraatiolla verraten lähelle kokoonpuristumattoman aineen tilannetta ja suppeneminen on tällöin nopeaa.

Reunaehdot vaikuttavat kuitenkin oleellisesti suppenemiseen. Tarkastellaan tästä esimerkkinä kuvan 3b esittämää tapausta. Suppenemisnopeus ei riipu suhteen b/a arvosta. Jos sen sijaan reunat $x = \pm a$ kiinnitetään ja alareunan $y = 0$ annetaan olla vapaa, muuttuu tilanne täysin. Ensimmäisen iteroinnin aikana ($\{\sigma_0\}^1 = \{0\}$) siirtyy kuormitus lyhyellä matkalla kiinnitetyille reunoille ja siirtymät sekä muodonmuutokset rajoittuvat kuorman vaikutuskohdan läheisyyteen. Kuitenkin on helppo todeta, että yhtälöt (21a), (23), (22a) ja (14a) toteuttava tarkka ratkaisu kokoonpuristumattomalle aineelle on tässä tapauksessa

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \frac{q}{2G'b} (x^2 - a^2) \\ \sigma_m &= -\frac{qy}{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \epsilon_x &= 0 \\ \epsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{qx}{G'b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{qy}{b} \\ \sigma_y &= -\frac{qy}{b} \\ \tau_{xy} &= \frac{qx}{b} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

kun ulkoista kuormitusta täydennetään vielä päissä $y = 0$ ja $y = b$ arvoista (54) johtuvilla τ -jännityksillä. y -akselin suuntaiset siirtymät esiintyvät siis vähentymättöminä myös kuormittamattomassa päässä. Jos suhde b/a on suuri, on luonnollista, että tarvitaan

hyvin paljon iterointikertoja, ennenkuin kuormitetun pään siirtymät pääsevät leviämään kappaleen toiseen päähän. Suppenemisen nopeuttamiseksi olisi tällaisissa tapauksissa tärkeätä pystyä tekemään parempi otaksuma alkujännityksistä, joilla iterointi aloitetaan. Arvioimalla lopulliseksi jännitystilaksi $\{\sigma\}$ saadaan kaavaa (35) soveltamalla iteroinnin aloittamiseksi

$$\{\sigma_0\}^1 = ([I] - [C][F'])\{\sigma\}. \quad (55)$$

Jos lopullinen jännitystila osattaisiin arvata oikein, antaisi ensimmäinen iterointi tällöin oikeat tulokset.

Kokoonpuristumattoman aineen yhtälöitä tarvitaan käytännössä tavallisimmin geotekniikassa. Kumimaiset aineet saattavat myös olla melkein kokoonpuristumattomia [2]. Menetelmän laajentaminen fysikaalisesti epälineaarisen kokoonpuristumattoman tai melkein kokoonpuristumattoman aineen analysointiin ei tuota periaatteellisia vaikeuksia menetelmän iteratiivisen luonteen takia, koska ainoa muutos tulee tällöin vain kaavan (25) eksplisiittiseen muotoon. Kirjoittajilla on tarkoitus käyttää menetelmää myös konsolidaation aikariippuvuuden tutkimiseen soveltamalla ajan suhteen vastaavantapaista menettelyä kuin mitä on käytetty kirjoituksessa [5].

Lisämerkitystä esitetylle menetelmälle löytyy ottamalla huomioon, että kokoonpuristumattoman aineen yhtälöt ovat analogisia hitaan, stationaarisen, viskoosin, kokoonpuristumattoman nestevirtauksen yhtälöiden kanssa [6]. Suorittamalla seuraavat sijoitukset kokoonpuristumattoman aineen yhtälöihin

$$\begin{aligned} \sigma_m &\rightarrow && - \text{paine,} \\ \{\epsilon\} &\rightarrow && \text{muodonmuutosnopeusvektori,} \\ G' &\rightarrow && \text{viskositeetti,} \\ \{u\} &\rightarrow && \text{virtausnopeusvektori,} \end{aligned}$$

päädytään nestevirtauksen yhtälöihin. Ainoa ero kokoonpuristumattoman nesteen yhtälöissä tulee tasapainoyhtälöihin (11), joissa esiintyy yleisessä tapauksessa lisätermejä [7], jotka kuitenkin häviävät virtauksen ollessa stationaarista ja hidasta. Kokoonpuristumattoman aineen ohjelmalla voidaan siis analysoida sellaisenaan hidasta virtausta tulkitsemalla saadut siirtymät virtausnopeudeksi. Tästä ovat yksinkertaisia esimerkkejä luvun 5 sovellutus, luvun 6 kolmas sovellutus sekä ratkaisu (54), jonka voidaan ajatella esittävän tasovirtausta putkessa putken päissä vallitsevan paine-eron johdosta. Kehitettyä ohjelmaa on käytetty mm. maankuoren ja vaipan liikkeiden tutkimiseen nestevirtauksena.

KIRJALLISUUTTA

1. Sokolnikoff I.S., Mathematical theory of elasticity. 2. painos. New York, McGraw-Hill, 1956.
2. Herrmann L.R., Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 3 (1965), s. 1896...1900.
3. Christian J.T., Undrained stress distribution by numerical methods. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 94 (1968), s. 1333...1345.
4. Zienkiewicz O.C., The finite element method in engineering science. 2. painos. Lontoo, McGraw-Hill, 1971.
5. Christian J.T., Boehmer J.W., Plane strain consolidation by finite elements. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 96 (1970), s. 1435...1457.
6. Nadai A., Theory of flow and fracture of solids. 1. osa. 2. painos. New York, McGraw-Hill, 1950, s. 397.
7. Brown C.E., Fluid Mechanics. Basic concepts. Luku 68 teoksessa Handbook of engineering mechanics. Toim. Flügge W, New York, McGraw-Hill, 1962.

Jukka Aalto, dipl.ins., VTT:n tutkimusassistentti.
Eero-Matti Salonen, tekn.tri, VTT:n nuorempi tutkija.