

RAKENTEIDEN VARMUUDEN ARVIOINTI TODENNÄKÖISYYS- LASKENNAN MENETELMIN

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5
No 4 1972 ss. 439-463; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

MATTI HANNUS

YHTEENVETO

Artikkelissa tarkastellaan rakenteiden varmuutta todennäköisyyslaskennan menetelmin. Kuormia ja rakenteen ominaisuuksia käsitellään satunnaismuuttujina. Varmuutta mitataan luotettavuuden tai sen komplementin vaurioitumistodennäköisyyden avulla. Vaurioitumistodennäköisyyden määrittämistä ja rakenteiden mitoittamista tarkastellaan eräissä yksinkertaisissa tapauksissa. Käytännöllisenä varmuuden mittana esitellään luotettavuusluku, jonka määrittämiseksi riittää tuntea muuttujien keskiarvot ja -hajonnat. Toistuvan kuorman rasittaman rakenteen vaurioitumistodennäköisyydelle johdetaan yläraja. Samoin johdetaan useita mahdollisia vaurioitumismuotoja omaavan rakennesysteemin vaurioitumistodennäköisyydelle ylä- ja alaraja. Lopuksi tarkastellaan vaurioitumistodennäköisyyden määräytymistä kokonais- ja osavarmuuskertoimia käytettäessä. Osoittautuu, että kokonaisvarmuuskerroin ei sovi varmuuden mitaksi. Muuttujien todellisia hajontoja

vastaavat osavarmuuskertoimet sen sijaan johtavat todennäköisyyslaskennan kannalta tyydyttävään tulokseen.

1. JOHDANTO

Rakenteiden varmuutta on perinteisesti pidetty kokemusperäisenä suureena. Selvää varmuuden määritelmää ei yleensä ole esitetty, eikä näin ollen ole ollut käytettävissä rationaalista mittaa varmuuden arvioimiseksi. Todennäköisyyslaskenta ja tilastolliset menetelmät tarjoavat johdonmukaisen varmuuden käsittelytavan. Varmuus määritellään tarkoittamaan luotettavuutta eli todennäköisyyttä, että rakenne toteuttaa käyttöaikanaan sille asetetun tehtävän vaurioitumatta. Vaurioitumisella ymmärretään rakenteen jotain ei-toivottua käyttäytymistä eli rajatilaan joutumista.

Seuraavassa esitellään todennäköisyyslaskentaan perustuvan varmuusanalyysin käsitteitä ja pyritään antamaan kuva tilastollisten menetelmien soveltamisesta mitoittamiseen.

2. SATUNNAISMUUTTUJAT

Mitoituksen perustana käytettäviä kuormia ja rakenteen lujuusominaisuuksia ei yleensä ennakolta tarkoin tiedetä, vaan niihin liittyy aina jossain määrin epävarmuutta. Tilastollisin menetelmin voidaan koetuloksista saada tällaisten suureiden satunnaista käyttäytymistä kuvaavaa tietoa. Seuraavassa ajatellaan kaikki rakenteen toimintaan vaikuttavat tekijät satunnaismuuttujiksi, joiden todennäköisyysjakautumat tunnetaan. Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakautuman summafunktio

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

ilmoittaa todennäköisyyden, että X on pienempi tai yhtä suuri kuin eräs luku x . Summafunktion derivaatta

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

sanotaan todennäköisyysjakautuman tiheys- eli frekvenssifunktioksi. Satunnaismuuttujan X keskiarvo on

$$m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

ja keskihajonta

$$\sigma_X = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = \sqrt{E[(x - m_X)^2]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx}$$

missä merkintä $E(\cdot)$ tarkoittaa keskiarvo- eli odotusarvo-operaattoria. Dimensioton hajontaa kuvaava suure on variaatiokerroin

$$V_X = \sigma_X / m_X$$

Tärkein ja yleisemmin esiintyvä todennäköisyysjakautuma on normaali-jakautuma

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X}\right)$$

missä

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \phi(y) dy = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

on standardisoidun normaali-jakautuman (keskiarvo on 0 ja keskihajonta on 1) summafunktiio ja $\phi(\cdot)$ sen tiheysfunktio.

Kahden satunnaismuuttujan X ja Y yhteisjakautuman summa- ja tiheysfunktio ovat

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) = \frac{1}{dx dy} P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy)$$

Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi on

$$\begin{aligned}\sigma_{XY}^2 &= E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_X)(Y - m_Y) f_{XY}(x, y) dx dy\end{aligned}$$

ja korrelaatiokerroin

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Parametrit m_X , σ_X ja m_Y , σ_Y määritetään marginaalijakautumista

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$$

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat tilastollisesti riippumattomia, niin

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

ja

$$\sigma_{XY}^2 = 0, \rho_{XY} = 0$$

3. VAURIOITUMISTODENNÄKÖISYYS

Luotettavuus eli todennäköisyys, että rakenne ei vaurioidu, on

$$L = 1 - P_f \quad (1)$$

missä P_f on vaurioitumistodennäköisyys. Rakenteet pyritään yleensä mitoittamaan siten, että P_f on suuruusluokkaa $10^{-3} \dots 10^{-6}$. Koska luotettavuuden numeerinen arvo on hyvin lähellä ykköstä, on käytännöllisempää puhua luotettavuuden asemesta vaurioitumistodennäköisyydestä.

Tarkastellaan aluksi yksinkertaistettua tapausta, missä muuttujina ovat rakenteen kapasiteetti R ja kuorma S . Niitä pidetään tilastollisesti riippumattomina satunnaismuuttujina, joiden todennä-

köisyysjakautumien tiheysfunktiot ovat $f_R(r)$ ja $f_S(s)$. Vaurioituminen tapahtuu niillä kombinaatioilla $\{R, S\}$, joilla kuorma on vähintään kapasiteetin suuruinen. Vaurioitumistodennäköisyys on siten

$$P_f = P(R - S \leq 0) = \int_{\{r,s|r-s \leq 0\}} f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (2)$$

Voidaan otaksua, että R ja S saavat vain positiivisia arvoja. Jos integroidaan ensin s :n suhteen, kaavasta (2) saadaan

$$P_f = \int_{r=0}^{\infty} \int_{s=r}^{\infty} f_R(r) f_S(s) dr ds = \int_0^{\infty} f_R(r) [1 - F_S(r)] dr \quad (3)$$

Vaihtoehtoisesti integroimalla ensin r :n suhteen saadaan

$$P_f = \int_{r=0}^s \int_{s=0}^{\infty} f_R(r) f_S(s) dr ds = \int_0^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (3')$$

Vain erikoistapauksissa voidaan yhtälöissä (2)...(3') välttyä numeeriselta integroinnilta.

Käyttökelpoinen ja havainnollinen tulos saadaan otaksumalla R ja S normaalijakautuneiksi. Tällöin ne saavat myös negatiivisia arvoja, mikä ei yleensä ole fysikaalisesti mielekäästä. Olkoot kapasiteetin ja kuorman keskiarvot ja -hajonnat m_R , σ_R ja m_S , σ_S . Määritellään varmuusmarginaali

$$Z = R - S \quad (4)$$

Sen keskiarvo on

$$m_Z = E(R - S) = m_R - m_S \quad (5)$$

ja keskihajonta

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E[(R - S)^2] - E(R - S)^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\sigma_{RS} \\ &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Normaalijakautuman ominaisuuksien mukaan Z on normaalijakautuneiden muuttujien lineaarifunktiona myös normaalijakautunut:

$$F_Z(z) = \Phi\left(\frac{z - m_Z}{\sigma_Z}\right)$$

Merkitsemällä

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} = \frac{1}{V_Z} = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (7)$$

saadaan vaurioitumistodennäköisyydeksi

$$P_f = P(Z \leq 0) = F_Z(0) = \Phi(-\beta) \quad (8)$$

Todetaan, että vaurioitumistodennäköisyys riippuu yksikäsitteisesti suureesta β , jota seuraavassa nimitetään luotettavuusluvuksi. Tuloksen mukaan luotettavuuslukua β voidaan käyttää vaihtoehtoisesti luotettavuuden (tai vaurioitumistodennäköisyyden) kanssa rakenteen varmuuden mittana.

Vastaava tulos saadaan, jos R ja S otaksutaan logaritmisesti normaalijakautuneiksi, jolloin niiden logaritmit ovat normaalijakautuneita. Uusi muuttuja

$$Z = \ln \frac{R}{S} = \ln R - \ln S \quad (9)$$

on normaalijakautunut. Logaritmisesti normaalijakautuneelle satunnaismuuttujalle X pätee [4]:n mukaan

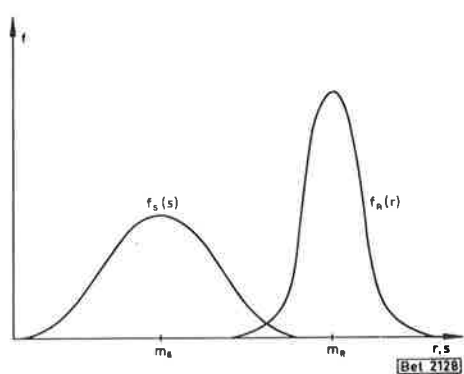
$$\begin{aligned} m_{\ln X} &= \ln(m_X) - \frac{1}{2} \ln(1 + V_X^2) \\ \sigma_{\ln X} &= \sqrt{\ln(1 + V_X^2)} \end{aligned} \quad (10)$$

Variaatiokertoimen saadessa pieniä arvoja, esim. $V_X < 0,3$, voidaan käyttää approksimaatioita

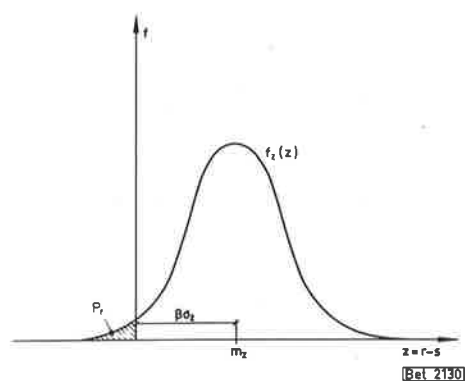
$$m_{\ln X} \approx \ln(m_X), \quad \sigma_{\ln X} \approx V_X \quad (11)$$

Nyt saadaan vaurioitumistodennäköisyydeksi

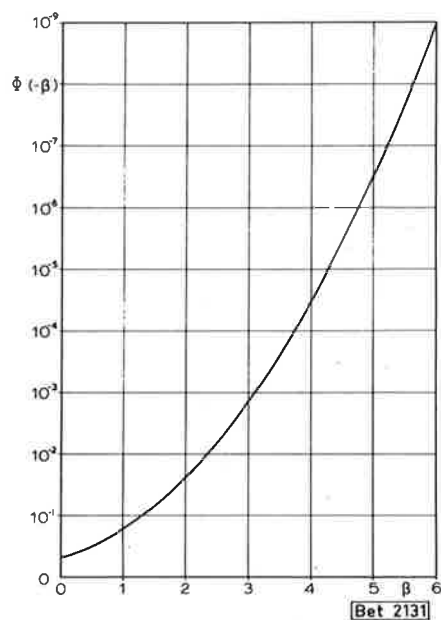
$$P_f = \Phi(-\beta)$$



Kuva 1. Kapasiteetin ja kuorman todennäköisyysjakaumat.



Kuva 2. Varmuusmarginaalin todennäköisyysjakauma.



Kuva 3. Vaurioitumistodennäköisyys luotettavuusluvun funktiona.

missä

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \approx \frac{\ln(m_R) - \ln(m_S)}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \quad (12)$$

4. LIKIMÄÄRÄISMENETELMÄ

Käytännössä sekä kuorma että kapasiteetti ovat useiden muuttujien kuten rakenteen geometrian, materiaaliominaisuuksien ja ulkoisten voimien funktioita. Tämä voidaan ilmaista kirjoittamalla rajatilaehto muotoon

$$Z = R(\underline{X}) - S(\underline{X}) \leq 0 \quad (13)$$

tai yleisemmin

$$Z = g(\underline{X}) \leq 0 \quad (14)$$

Vektorin $\underline{X}$ komponentteina ovat kaikki rakenteen luotettavuuteen vaikuttavat satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \dots, X_n$, jotka seuraavassa otaksutaan tilastollisesti riippumattomiksi. Funktio $g(\cdot)$ määreytyy tarkasteltavan rajatilan mukaan.

Esimerkki 1.

Eulerin nurjahdusehto elastiselle tasajäykälle sauvalle on esitettävissä muodossa

$$Z = \pi^2 X_1 X_2 / X_3^2 - X_4 \leq 0 \quad (15)$$

missä

X_1 on materiaalin kimmokerroin

X_2 on poikkileikkauksen jäyhyysmomentti

X_3 on sauvan nurjahduspituus ja

X_4 on keskisesti vaikuttava puristava voima. $\square$

Käytetään satunnaismuuttujan X_1 todennäköisyysjakautuman ti-

heysfunktioille merkintää $f_i(\cdot)$ sekä keskiarvolle ja keskihajonnalle merkintöjä m_i ja σ_i . Vaurioitumistodennäköisyys saadaan kaavasta

$$P_f = \int \int \dots \int_{\{x | g(x) \leq 0\}} \prod_{i=1}^n f_i(x_i) dx_i \quad (16)$$

Integrointi tapahtuu sen alueen yli, jossa rajatilaehto on voimassa. Käytännössä tällaisten monidimensioisten integraalien laskeminen on hyvin työlästä, jopa mahdotonta. Yleistämällä kohdassa 3 esitetty menettely saadaan yksinkertainen likimääräismenetelmä, joka johtaa yleensä riittävään tarkkuuteen.

Kehitetään funktio $g(\underline{X})$ ensimmäisen asteen Taylorin sarjaksi pisteessä $\underline{m} = E(\underline{X}) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$:

$$g(\underline{X}) \approx g(\underline{m}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial x_i} (X_i - m_i) \quad (17)$$

Varmuusmarginaalin $Z = g(\underline{X})$ keskiarvolle ja keskihajonnalle saadaan approksimaatiot

$$m_Z = E[g(\underline{X})] \approx g(\underline{m}) \quad (18)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{E[g(\underline{X})^2] - E[g(\underline{X})]^2} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(\underline{m})}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2}$$

Asetetaan varmuuskriteeriksi mitoituksessa

$$\frac{m_Z}{\sigma_Z} \geq \beta \quad (19)$$

missä β määritetään halutun vaurioitumistodennäköisyyden mukaan yhtälöstä

$$\Phi(-\beta) = P_f$$

Tämä mitoitusmenetelmä johtaa tarkalleen haluttuun vaurioitumistodennäköisyyteen vain, jos funktio $g(\cdot)$ on lineaarinen ja muuttujat normaalijakautuneita. Satunnaismuuttujien X_i mahdollinen tilastollinen

riippuvuus on otettavissa helposti huomioon lisäämällä hajonnan lausekkeeseen (18) termit $\frac{\partial g(\underline{m})}{\partial x_i} \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial x_j} \sigma_{ij}^2$, $i \neq j$.

Esimerkki 2.

Suoritetaan mitoitus esimerkin 1 tapaukselle lähtöarvoilla

$$\beta = 4 \Rightarrow \Phi(-4) = 10^{-4.5} = 0,00003$$

$$m_1 = 1, \quad V_1 = 0,06$$

$$m_2 = ?, \quad V_2 = 0,06$$

$$m_3 = \pi, \quad V_3 = 0$$

$$m_4 = 1, \quad V_4 = 0,20$$

On valittava sellainen arvo jäyhyysmomentin keskiarvolle m_2 , että

$$m_2/\sigma_Z \geq 4 \text{ eli}$$

$$(m_2 - 1)/\sqrt{m_2^2(0,06^2 + 0,06^2) + 0,20^2} \geq 4 \quad (20)$$

mistä saadaan $m_2 \geq 2,06$. Jos esimerkissä 1 määritellään nurjahdusehto yhtälöllä

$$Z = \ln(\pi^2 \frac{X_1 X_2}{X_3 X_4}) \leq 0 \quad (21)$$

saadaan

$$\ln(m_2)/\sqrt{0,06^2 + 0,06^2 + 0,20^2} \geq 4 \quad (22)$$

mistä tulee $m_2 \geq 2,38$. Tulosten erilaisuus johtuu siitä, ettei muuttujien todennäköisyysjakautumien muotoa otettu huomioon. Virhettä sisältyy myös suureiden m_2 ja σ_Z määrittelyyn. Edellinen tulos on tarkempi, jos muuttujat ovat normaalijakautuneita, ja jälkimmäinen, jos ne ovat logaritmisesti normaalijakautuneita. $\square$

5. TOISTUVA KUORMITUS

Tarkastellaan rakennetta, johon vaikuttava kuorma toistuu n

kertaa saaden kullakin esiintymiskerralla $i = 1, 2, \dots, n$ satunnaisen arvon S_i . Oletetaan nämä arvot toisistaan riippumattomiksi. Rakenne vaurioituu, jos suurin arvoista S_i ylittää kapasiteetin R , jonka otaksutaan säilyvän muuttumattomana. Koska todennäköisyys, että $S_i \leq s$ on

$$P(S_i \leq s) = F_i(s) \quad (23)$$

niin todennäköisyys, että kaikki arvot $S_i \leq s$, $i = 1, 2, \dots, n$, on

$$P(S_1 \leq s, S_2 \leq s, \dots, S_n \leq s) = F_1(s)F_2(s)\dots F_n(s)$$

Tämä on samalla todennäköisyys, että suurin kuorman arvo $S_{\max} \leq s$. Jos kuormien S_i otaksutaan noudattavan samaa todennäköisyysjakautumaa

$$F_i(s) = F_S(s), \quad i = 1, \dots, n$$

tulee

$$P(S_{\max} \leq s) = F_{S_{\max}}(s) = F_S(s)^n$$

Vaurioitumistodennäköisyydelle (3) saadaan lauseke

$$P_{fn} = \int_0^{\infty} f_R(r) [1 - F_S(r)]^n dr \quad (24)$$

Lauseke (24) ilmaisee todennäköisyyden, että rakenne vaurioituu n :n ensimmäisen kuormituskerran aikana, joten se esittää samalla rakenteen satunnaisten kestojen N todennäköisyysjakautumaa

$$F_N(n) = P(N \leq n) = P_{fn} \quad (25)$$

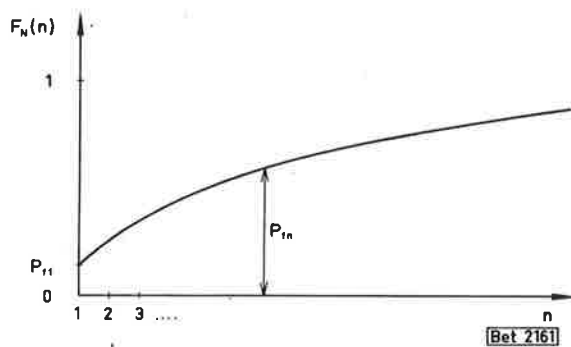
kun rakenteen ikää mitataan kuormituskertoina. Ottamalla huomioon, että lausekkeessa (24) on suurilla kuorman arvoilla $1 - F_S(r) \ll 1$, saadaan sillä alueella, jolla integrandi eroaa merkittävästi nolasta,

$$1 - F_S(r)^n \approx n[1 - F_S(r)]$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (24) saadaan

$$P_{fn} \approx n \int_0^{\infty} f_R(r) [1 - F_S(r)] dr = nP_{f1} \quad (26)$$

mikä on ylälikiarvo, joten sitä voidaan käyttää mitoituksen perustana.



Kuva 4. Vaurioitumistodennäköisyyden muuttuminen kuormituskertojen funktiona.

Useissa käytännön probleemoissa haetaan suoraan tietyn perusjoukon suurimman arvon todennäköisyysjakautuma eli ekstreemijakautuma. Tällöin kuormalla S tarkoitetaan suurinta rakenteen käyttöajan aikana esiintyvää (satunnaisten suuruista) kuormaa. Esimerkiksi tuulikuorman ja lumikuorman vuosittaisia ekstreemiarvoja kuvaamaan käytetään yleisesti Gumbelin todennäköisyysjakautumaa

$$F_{S1}(s) = \exp[-\exp[-\alpha(s - u)]] \quad (27)$$

missä parametrit α ja u määritetään havaittujen vuosittaisten maksimiarvojen perusteella. Kun rakenteen suunniteltu ikä on n vuotta, niin suurimman tänä aikana sattuvan kuorman todennäköisyysjakautuma on

$$F_{Sn}(s) = F_{S1}(s)^n = \exp[-\exp[-\alpha(s - u - \frac{1}{\alpha} \ln n)]] \quad (28)$$

6. RAKENNESYSTEEMIEN LUOTETTAVUUS

Edellä ilmaistiin rajatilaehto muodossa

$$Z = g(\underline{X}) \leq 0$$

Monimutkaisempia rakenteita tarkasteltaessa tämä ei enää ole mahdollista, sillä rakenne voi joutua rajatilaan usealla eri tavalla. Esimerkiksi kehärakenne voi myötää usean eri mekanismin mukaan. Staattisesti määrättyssä rakenteessa yhdenkin osan myötääminen tai murtuminen aiheuttaa koko rakenteen joutumisen rajatilaan. Analyttisesti tämä voidaan ilmaista muodossa

$$\min_{i=1}^n \{Z_i = g_i(\underline{X})\} \leq 0 \quad (29)$$

missä funktiot $g_i(\cdot)$ liittyvät eri vaurioitumismuotoihin.

Esimerkki 3.

Plastisuusteorian mukainen ehto kehärakenteen myötäämiselle tietyn mekanismin mukaan on muotoa

$$Z_i = \sum_j a_{ij} R_j - \sum_k b_{ik} S_k \leq 0 \quad (30)$$

missä R_j on myötömomentti nivelessä j

S_k on ulkoinen kuorma

a_{ij} ja b_{ik} riippuvat rakenteen geometriasta ja

$i = 1, 2, \dots, n$ on mekanismin järjestysnumero. $\square$

Rakennesysteemin vaurioitumistodennäköisyys on

$$\begin{aligned} P_f &= P(\min_{i=1}^n \{Z_i\} \leq 0) = 1 - P(Z_1 > 0, Z_2 > 0, \dots, Z_n > 0) \\ &= 1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f_{12\dots n}(z_1, z_2, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n dz_i \end{aligned} \quad (31)$$

missä $f_{12...n}(\cdot)$ on varmuusmarginaalien Z_i yhteisjakautuman tiheysfunktio. Kuten esimerkistä 3 havaitaan, muuttujia Z_i ei voida pitää riippumattomina, koska ne ovat yleensä yhteisten satunnaismuuttujien funktioita. Koska integraalin (31) laskeminen on kovin hankalaa, on tyydyttävä ylä- ja alalikiarvojen esittämiseen. Käytetään vaurioitumismuodon i mukaisen vaurion todennäköisyydelle merkintää

$$P_{fi} = P(Z_i \leq 0) = F_i(0) \quad (32)$$

missä $F_i(\cdot)$ on Z_i :n marginaalijakautuman summafunktio.

Jos ehdot $Z_i \leq 0$ ovat toisensa poissulkevia, ts. eivät voi olla samanaikaisesti voimassa, tulee [4]

$$P_f = \sum_{i=1}^n P_{fi} \quad (33)$$

Jos Z_i :t ovat tilastollisesti riippumattomia, saadaan yhtälöstä (31)

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} f_i(z_i) dz_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{fi}) \quad (34)$$

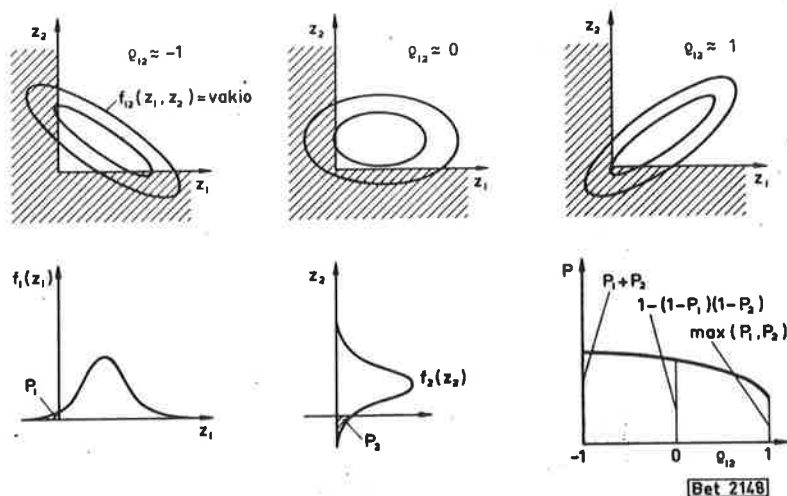
Koska todennäköisyydet P_{fi} ovat käytännössä hyvin pieniä, lausekkeiden (33) ja (34) ero on yleensä merkityksetön. Jos Z_i :t ovat täydellisesti korreloituneita, rakenne vaurioituu aina sen vaurioitumismuodon mukaan, jonka todennäköisyys on suurin, jolloin

$$P_f = \max_{i=1}^n \{P_{fi}\} \quad (35)$$

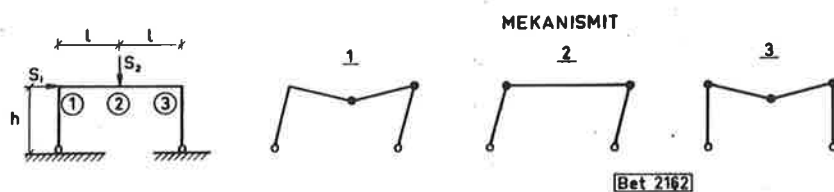
Voidaan osoittaa [4], että rakennesysteemin vaurioitumistodennäköisyys on aina rajojen

$$\max_{i=1}^n \{P_{fi}\} \leq P_f \leq \sum_{i=1}^n P_{fi} \quad (36)$$

välissä. Mitoituksen perustana on käytettävä ylärajaa.



Kuva 5. Vaurioitumismuotojen riippuvuuden vaikutus rakennesysteemin vaurioitumistodennäköisyyteen.



Kuva 6. Esimerkkirakenne ja sen vaurioitumismuodot.

Esimerkki 4.

Tarkastellaan kuvan 6 mukaista rakennetta. Merkitään nivel-
pisteiden myötömomenteja R_1 , R_2 ja R_3 . Mekanismien ehdot ovat

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2R_2 + 2R_3 - hS_1 - lS_2 \leq 0 \\ Z_2 &= R_1 + R_3 - hS_1 \leq 0 \\ Z_3 &= R_1 + 2R_2 + R_3 - lS_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Otaksutaan satunnaismuuttujat R_1 , R_2 , R_3 , S_1 ja S_2 normaalijakautu-
neiksi. Tarkastellaan vaurioitumistodennäköisyyksiä, kun myötömoment-

tien välillä on tilastollinen riippuvuus. Kuormat otaksutaan riippumattomiksi.

Mekanismit 1 saadaan

$$P_{f1} = \Phi(-\beta_1) \quad (38)$$

missä

$$\beta_1 = \frac{m_{Z1}}{\sigma_{Z1}} = \frac{2m_{R2} + 2m_{R3} - hm_{S1} - lm_{S2}}{\sqrt{4\sigma_{R2}^2 + 4\sigma_{R3}^2 + 8\sigma_{R2}\sigma_{R3}\rho_{R2R3} + h^2\sigma_{S1}^2 + l^2\sigma_{S2}^2}} \quad (39)$$

missä ρ_{R2R3} on R_2 :n ja R_3 :n korrelaatiokerroin. Muille mekanismeille saadaan vastaavat lausekkeet. Valitaan lähtöarvot

$$\begin{aligned} m_{R1} &= m_{R2} = m_{R3} = m_{S1} = m_{S2} = 1 \\ \sigma_{R1} &= \sigma_{R2} = \sigma_{R3} = 0,1, \quad \sigma_{S1} = \sigma_{S2} = 0,2 \\ \rho_{RiRj} &= \rho, \quad (\rho_{RiSj} = \rho_{S1S2} = 0) \\ l &= h = 1 \end{aligned}$$

jolloin saadaan taulukon 1 mukaiset tulokset.

Taulukko 1. Esimerkkilaskelman tulokset.

	$\rho = 0$	$\rho = 1$
P_{f1}	$10^{-6,54}$	$10^{-4,68}$
P_{f2}	$10^{-4,68}$	$10^{-3,63}$
P_{f3}	≈ 0	≈ 0
$\sum_{i=1}^3 P_{fi}$	$10^{-4,68}$	$10^{-3,60}$
$\max_{i=1}^3 \{P_{fi}\}$	$10^{-4,68}$	$10^{-3,63}$

Tässä tapauksessa ylä- ja alarajat ovat hyvin lähellä toisiaan. Ra-

kenteen eri osien välisellä korrelaatiolla todetaan olevan voimakas vaikutus rakenteen vaurioitumistodennäköisyyteen. $\square$

7. MONTE CARLO-MENETELMÄ

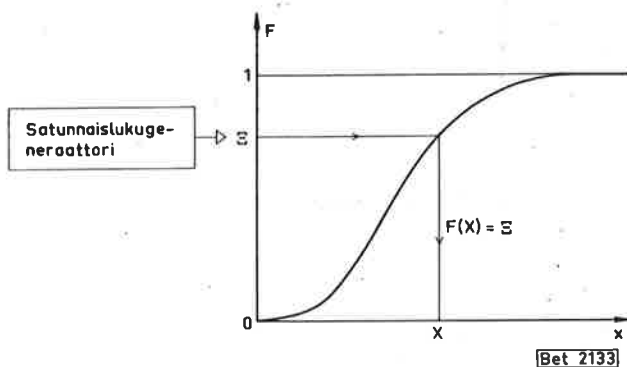
Monte Carlo-menetelmä perustuu satunnaislukujen käyttöön. Valitaan rakenteen parametreille (kuormat, materiaaliominaisuudet ja geometriset mitat) niiden todennäköisyysjakautumista satunnaisesti poimitut arvot ja sijoitetaan nämä arvot rajatilaehtoon. Toistamalla menettely riittävän monta kertaa ja laskemalla niiden tapausten osuus, joissa rajatilaehto on voimassa, saadaan estimaatti vaurioitumistodennäköisyydelle.

Useimmissa ohjelmointikielissä on valmiina satunnaislukugeneraattori, jolla saadaan tasaisen jakautuman

$$f_{\Xi}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0, & \text{kun } \xi < 0 \text{ tai } 1 < \xi \end{cases} \quad (40)$$

mukaan jakautuneita satunnaislukuja Ξ . Jonkin muun jakautuman mukainen satunnaisluku X saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$F_X(X) = \Xi \quad (41)$$



Kuva 7. Satunnaisluvun valinta.

Karkeasti voidaan sanoa, että laskettavien tapausten lukumäärän on oltava suuruusluokkaa $10/P_f$. Tällöin Monte Carlo-menetelmällä saadaan keskimäärin 10 vauriota esille, mikä riittää suhteellisen luotettavan estimaatin saamiseen vaurioitumistodennäköisyydelle. Tietokoneiden nopeus asettaa lukumäärälle 100...10000 tapauksen rajan tarkasteltavan rakenteen monimutkaisuudesta riippuen. Laskutyötä voidaan ratkaisevasti vähentää käyttämällä valikoivaa satunnaislukujen poimintaa [4]. Tällöin saadaan parannetuksi tarkkuutta mielenkiinnon kohteena olevalla alueella eli niillä muuttujien kombinaatioilla, jotka aiheuttavat rakenteen joutumisen rajatilaan.

8. VARMUUS- JA OSAVARMUUSKERTOIMET

Seuraavassa tarkastellaan lyhyesti vaurioitumistodennäköisyyden määräytymistä käytettäessä mitoitusperiaatteita, joissa muuttujien hajonta (epävarmuus) otetaan huomioon erilaisilla kertoimilla. Osoittautuu, että kussakin erikoistapauksessa on mahdollista valita sellaiset kertoimet, että päästään haluttuun todennäköisyyteen. Koska käytännössä nämä kertoimet kuitenkin pidetään samoina riippumatta muuttujien hajontojen suuruuksista, rakenteen vaurioitumistodennäköisyys saa hyvin vaihtelevia arvoja.

Tarkastellaan edelleen yhtälöä (2)

$$P(R - S \leq 0) = P_f$$

missä R ja S oletetaan normaalijakautuneiksi. Kun yhtälöissä (7) ja (8)

$$\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \beta, \quad \Phi(-\beta) = P_f$$

merkitään

$$\theta_m = m_R/m_S, \quad \sigma_R = m_R V_R, \quad \sigma_S = m_S V_S \quad (42)$$

saadaan (7) muotoon

$$\frac{\theta_m - 1}{\sqrt{(\theta_m V_R)^2 + V_S^2}} = \beta \quad (43)$$

missä θ_m :ää nimitetään keskeisvarmuuskertoimeksi. Ratkaisemalla yhtälö (43) saadaan

$$\theta_m = \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - \beta^2 V_R^2)(1 - \beta^2 V_S^2)}}{1 - \beta^2 V_R^2} \quad (44)$$

joka ilmaisee todennäköisyyttä $P_f = \Phi(-\beta)$ vastaavan keskeisvarmuuskertoimen kuorman ja kapasiteetin variaatiokertoimien avulla. Kuvassa 8 on esitetty keskeisvarmuuskertoimen ja vaurioitumistodennäköisyyden välinen yhteys. Niiden riippuvuus on hyvin heikko, eikä juuri muuta johtopäätöstä voida tehdä kuin, että keskeisvarmuuskertoimen suurentaminen pienentää vaurioitumistodennäköisyyttä. Sen sijaan kahdelle eri rakenteelle annettujen keskeisvarmuuskertoimien vertaaminen ei anna minkäänlaista kuvaa rakenteiden luotettavuuksien suhteesta, ellei vastaavia hajontoja tunneta.

Käytännön suunnittelussa perussuureina eivät yleensä ole muuttujien keskiarvot, vaan keskiarvon ja keskihajonnan avulla ilmaistut nimellisarvot. Kapasiteetin R ja kuorman S nimellisarvot ovat

$$\begin{aligned} r_k &= m_R - k_R \sigma_R = (1 - k_R V_R) m_R \\ s_k &= m_S + k_S \sigma_S = (1 + k_S V_S) m_S \end{aligned} \quad (45)$$

missä kertoimet k_R ja k_S vastaavat tiettyjä todennäköisyyksiä

$$\begin{aligned} p &= P(R \leq r_k) \\ q &= P(S > s_k) \end{aligned} \quad (46)$$

Määritellään suhde

$$\theta_k = \frac{r_k}{s_k} = \frac{1 - k_R V_R}{1 + k_S V_S} \theta_m \quad (47)$$

nimellisvarmuuskertoimeksi. Kerroin θ_k vastaa nykyisten mitoitusmääräysten mukaista kokonaisvarmuuskerrointa. Kuvassa 9 on esitetty vaurioitumistodennäköisyyden ja nimellisvarmuuskertoimen riippuvuus.

Kertoimet k_R ja k_S on valittu vastaamaan todennäköisyyksiä $p = 0,005$ ja $q = 0,05$. Havaitaan, että valittaessa $\theta_k > 1,5$ vaurioitumistodennäköisyys on kaikissa lasketuissa tapauksissa pienempi kuin 10^{-4} .

Muuten riippuvuus on melko heikko.

Osavarmuuskertoimien johtamiseksi approksimoidaan yhtälössä (7)

$$\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \beta$$

neliöjuurilauseketta lineaarifunktiolla

$$\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \approx \alpha_R \sigma_R + \alpha_S \sigma_S \quad (48)$$

Geometrisesti tämä merkitsee ympyrän korvaamista suoralla, joten approksimaatio voi päteä vain rajoitetuilla kombinaatioilla $\{\sigma_R, \sigma_S\}$.

Jos $1/3 \leq \sigma_R/\sigma_S \leq 3$, niin valitsemalla $\alpha_R = \alpha_S = 0,75$ tehdään yhtälössä (48) enintään $\pm 6 \%$ virhe. Yhtälö (7) saadaan muotoon

$$m_R - \beta \alpha_R \sigma_R = m_S + \beta \alpha_S \sigma_S \quad (49)$$

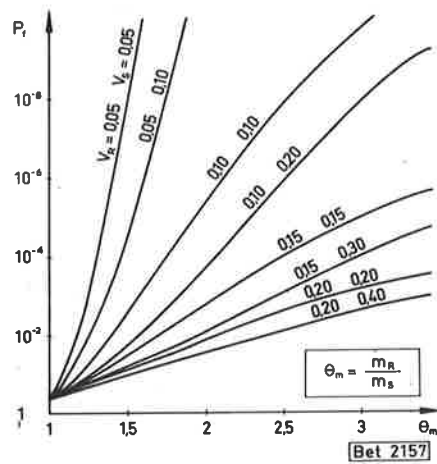
tai

$$\gamma_{mR} m_R = \gamma_{mS} m_S \quad (50)$$

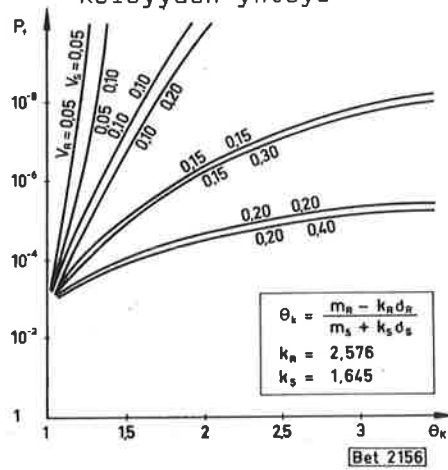
missä osavarmuuskertoimet keskiarvojen suhteen ovat

$$\begin{aligned} \gamma_{mR} &= 1 - \beta \alpha_R V_R \\ \gamma_{mS} &= 1 + \beta \alpha_S V_S \end{aligned} \quad (51)$$

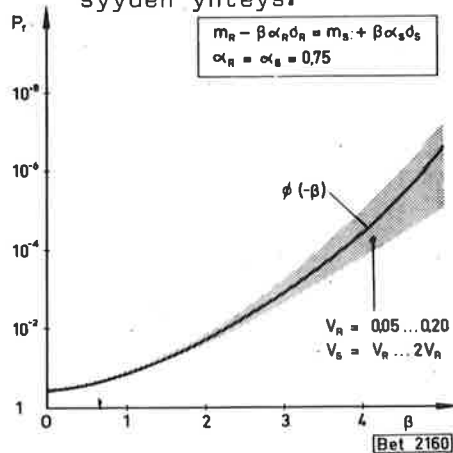
Vallitsevan ajattelutavan mukaan osavarmuuskertoimet määritellään yleisesti muuttujien nimellisarvojen suhteen:



Kuva 8. Keskeisvarmuuskertoimen ja vaurioitumistodennäköisyyden yhteys.



Kuva 9. Nimellisvarmuuskertoimen ja vaurioitumistodennäköisyyden yhteys.



Kuva 10. Vaurioitumistodennäköisyys osavarmuuskertoimia käytettäessä.

$$\begin{aligned}\gamma_{kR} &= \gamma_{mR} / (1 - k_R V_R) \\ \gamma_{kS} &= \gamma_{mS} / (1 + k_S V_S)\end{aligned}\tag{52}$$

Käytännössä esiintyy pyrkimys määritellä osavarmuuskertoimet lukuarvoltaan ykköistä suuremmiksi. Tämä voitaisiin tietenkin tehdä ilmoittamalla (51):ssä osavarmuuskertoimen γ_{mR} käänteisluku, jolla sitten jaettaisiin keskiarvo m_R . Osavarmuuskertoimet on kuitenkin johdonmukaisinta määritellä kuten yhtälössä (51).

Kertoimia α_R ja α_S , jotka ovat aina ykköistä pienempiä, voidaan nimittää yhteisvaikutuskertoimiksi. Ne ottavat huomioon usean satunnaisvaikutuksen samanaikaisuuden. Osavarmuuskertoimen α -kerroin on sitä suurempi, mitä voimakkaammin muuttujan hajonta vaikuttaa rakenteen toimintaan.

Kuvassa 10 on esitetty yhtälöiden (49)...(51) mukaan mitoitettun rakenteen vaurioitumistodennäköisyyden riippuvuus parametrista β . Kaikki lasketut käyrät sattuiivat varjostetun alueen sisään. Osavarmuuskertoimet on määritelty todellisia hajontoja vastaaviksi, mistä johtuen on saavutettu selvä riippuvuus vaurioitumistodennäköisyyden ja varmuuden mittana käytetyn β -suureen välille. Se, että lasketut käyrät ovat poikenneet kuvassa esitetystä käyrästä $P_f = \Phi(-\beta)$, johtuu ainoastaan parametrien α_R ja α_S valinnassa tehtävästä virheestä.

9. JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Varmuuden arviointi on keskeinen probleema rakenteen mitoituksen kannalta. Varmuuskertoimen käyttö varmuuden mittana ei tilastolliselta kannalta ole perusteltua. Vaurioitumistodennäköisyys antaa johdonmukaisen kuvan varmuudesta, mutta sen määrittäminen on hankalaa. Suhteellisen yksinkertaiseen ja käytännölliseen laskutapaan

päästään ottamalla luotettavuusluku β varmuuden mitaksi. Käyttämällä muuttujien todellisia hajontoja vastaavia osavarmuuskertoimia päästään melko tarkkaan tulokseen. Osavarmuuskertoimen tulee riippua

- halutusta luotettavuustasosta (β)
- muuttujan hajonnasta (V)
- muuttujan vaikutuksesta rakenteen toimintaan (α).

Koska mitoitusyhtälön mahdollisella epälineaarisuudella voi olla ratkaiseva merkitys lopputulokseen, on kunkin muuttujan osavarmuuskertoimella kerrottu arvo sijoitettava yhtälöön sellaisenaan. Ei siis tule esimerkiksi kertoa teräsbetonipalkin kantokykyä teräksen ja betonin osavarmuuskertoimilla, vaan kertoa teräksen ja betonin lujuudet osavarmuuskertoimilla, jonka jälkeen lasketaan palkin kantokyky saatuja arvoja käyttäen. Tällöin osavarmuuskerrointia ei ole tarpeen määritellä lainkaan, vaan sijoitetaan mitoitusyhtälöön muuttujan mitoitusarvo

$$x^* = m_x \pm \beta \alpha_x \sigma_x \quad (53)$$

missä etumerkki $\pm$ valitaan sen mukaan ovatko muuttujan suuret vai pienet arvot vaarallisia.

Osavarmuuskertoimien edellyttämä muuttujien hajontojen vaikutuksen erottaminen (48) on approksimaatio, joka pätee vain tietyllä alueella. Tästä syystä on eri osavarmuuskertoimien kertominen keskenään hyvin kyseenalainen tapa ottaa huomioon usean epävarmuustekijän samanaikaisuus.

MERKINTÖJÄ

X, x	satunnaismuuttuja (suuri kirjain) ja sen arvo (pieni kirjain)
$\underline{X}, \underline{x}$	vektori
$F_X(x), f_X(x)$	todennäköisyysjakautuman summa- ja tiheysfunktio
$\Phi(x), \phi(x)$	normaalijakautuman summa- ja tiheysfunktio
$E(\cdot)$	odotusarvo-operaattori
m_X	satunnaismuuttujan X keskiarvo
σ_X	keskihajonta
V_X	variaatiokerroin
ρ	korrelaatiokerroin
R, r	kapasiteetti tai lujuus ja sen arvo
S, s	kuorma tai kuorman vaikutus ja sen arvo
Z	varmuusmarginaali
β	luotettavuusluku
$g(\underline{X})$	satunnaismuuttujien funktio
$P(A)$	ilmiön A todennäköisyys
P_f	vaurioitumistodennäköisyys
P_{fn}	vaurioitumistodennäköisyys, kun kuorma toistuu n kertaa
P_{fi}	i :nnen vaurioitumismuodon todennäköisyys
$\prod_{i=1}^n a_i$	lukujen $a_i, i = 1, \dots, n$ tulo
Ξ, ξ	tasaisesti välillä $[0,1]$ jakautunut satunnaisluku ja sen arvo
θ_m, θ_k	keskeis- ja nimellisvarmuuskerroin
γ_m, γ_k	osavarmuuskerroin keski- ja nimellisarvon suhteen
x^*	satunnaismuuttujan mitoitusarvo
$\square$	esimerkin päättyminen

KIRJALLISUUTTA

- [1] Ang A. & Amin M., Safety factors and probability in structural design. Journal of the structural division, ASCE, 95 (1969) July s. 1389...1405.
- [2] Cornell A.M., Bounds on the reliability of structural systems. Journal of the structural division, ASCE, 93 (1967) February, s. 171...200.
- [3] Freudenthal A.M. et. ot., The analysis of structural safety. Journal of the structural division, ASCE, 92 (1966) October, s. 2183...2196.
- [4] Hannus M., Rakenteiden luotettavuus. Otaniemi 1972. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, n. 110 s. Ilmestyy lähiaikoina.
- [5] Haugen E.B., Probabilistic approaches to design. New York, John Wiley & Sons, 1968. 323 s.
- [6] Lind N.C., Consistent partial safety factors. Journal of the structural division, ASCE, 97 (1971) June, s. 1651...1669.
- [7] Paloheimo E., On the reliability of structural elements and structures. Otaniemi 1970. Helsingin teknillinen korkeakoulu. Tieteellisiä julkaisuja 33. 90 s.
- [8] Task Committee on Structural Safety of the Administrative Committee on Analysis and Design of the Structural Division. Structural safety - a literature review. Journal of the structural division, ASCE, 98 (1972) April, s. 845...884.

Artikkeli liittyy kirjoittajan varmuustoimikunnan johdolla suorittamaan tutkimukseen rakenteiden varmuudesta. Tutkimusta on tehty Valtion teknillisen tutkimuskeskuksen Betonitekniikan laboratoriossa Tekniikan edistämissäätiön apurahan turvin.