

# PAALUPERUSTUKSEN JA RAKENTEEN YHTEISTOIMINTA

MATTI OLLILA

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5  
No 3 1972 ss. 275-285; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

---

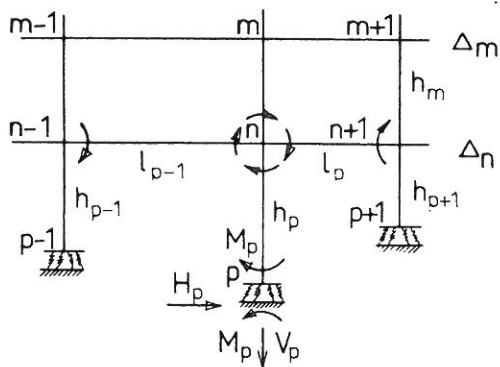
## JOHDANTO

Yleisen käytännön mukaan kantavat rakenteet jaetaan alarakenteeseen eli perustukseen ja ylärakenteeseen eli varsinaiseen runkoon. Näitä käsitellään tavallisesti täysin erillisinä ottamatta huomioon perustuksen liikkeiden vaikutusta ylärakenteen staattisesti määräämättömiin suureisiin ja toisaalta näiden muutosten vaikutusta perustukselle tuleviin kuormiin. Tällainen menettely on selvästi virheellinen, varsinkin mitä tulee jatkuviin, kimmoisasti maan varaan tai paa-luille perustettuihin rakenteisiin.

Seuraavassa esitetään menetelmä perustuksen kimmoisuuden huomioonottamiseksi sekä perustuksia että ylärakennetta mitoitettaessa. Tapaa on pidettävä lähinnä tarkistusluontoisena, koska alustava mitoit- tus joudutaan tekemään alkeismenetelmiä soveltaen, joskin jo tällöin on syytä ennakoida perustusten kimmoisuuden vaikutus. Näin vältetään tarpeettomia laskuvaiheita.

YLEINEN KERROSKEHÄ

Kuvassa 1 on esitetty monikerroksinen tasokehä, joka on ratkas-  
tu täydennetyllä kiertymäkulmamenetelmällä. Kaavoissa (1-10) kuvaavat  
kirjaimet  $m$  ja  $n$  kerrostasoja ja kirjain  $p$  kantavia pystylinjoja.



Kuva 1.

$$M_p \alpha_{pn} - M_{np} \beta_{np} + \frac{\Delta_n - \delta y_p}{h_p} + \alpha_{pn}^0 = -M_p \alpha_{M_p} + H_p \alpha_{H_p} + V_p \alpha_{V_p} \quad (1)$$

$$-M_p \beta_{np} + M_{np} \alpha_{np} + \frac{\Delta_n - \delta y_p}{h_p} + \alpha_{np}^0 = M_{nm} \alpha_{nm} - M_{mn} \beta_{mn} +$$

$$+ \frac{\Delta_m - \Delta_n}{h_m} + \alpha_{nm}^0 = M_{n,n-1} \alpha_{n,n-1} - M_{n-1,n} \beta_{n-1,n} + \frac{\delta z_p - \delta z_{p-1}}{l_{p-1}} +$$

$$+ \alpha_{n,n-1}^0 = M_{n,n+1} \alpha_{n,n+1} - M_{n+1,n} \beta_{n,n+1} + \frac{\delta z_{p+1} - \delta z_p}{l_p} + \alpha_{n,n+1}^0$$

(2-4)

$$\Sigma M_n = 0$$

(5)

$$H_p = Q_p^0 + \frac{M_{np} - M_p}{h_p} ; \quad \vec{\Sigma} H_p = \vec{\Sigma} H^0 \quad (6,7)$$

$$V_p = \vec{\Sigma} T_p^0 + \vec{\Sigma} \frac{M_{n,n-1} + M_{n-1,n}}{l_{p-1}} - \vec{\Sigma} \frac{M_{n,n+1} + M_{n+1,n}}{l_p} \quad (8)$$

$$\delta_{y_p} = H_p y_{H_p} + V_p y_{V_p} - M_p y_{M_p} \quad (9)$$

$$\delta_{z_p} = H_p z_{H_p} + V_p z_{V_p} - M_p z_{M_p} \quad (10)$$

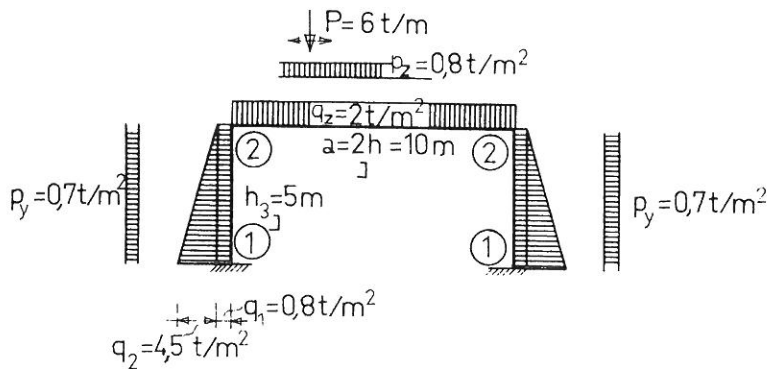
$$H = 1 \rightarrow \begin{cases} \delta_y = y_H \\ \delta_z = z_H \\ \phi_x = \alpha_H \end{cases} \quad (11)$$

$$V = 1 \rightarrow \begin{cases} \delta_y = y_V \\ \delta_z = z_V \\ \phi_x = \alpha_V \end{cases} \quad (12)$$

$$M = 1 \rightarrow \begin{cases} \delta_y = y_M \\ \delta_z = z_M \\ \phi_x = \alpha_M \end{cases} \quad (13)$$

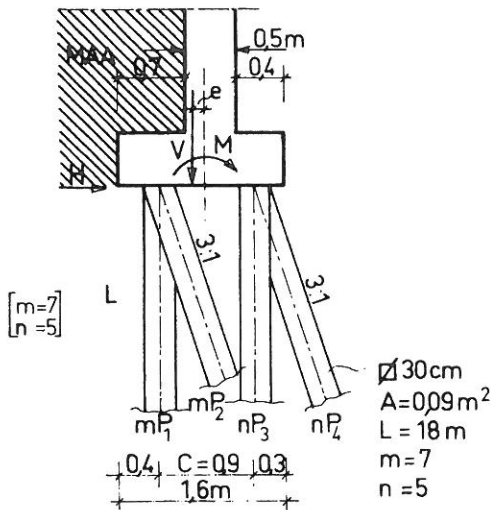
## ESIMERKKI

Asian havainnollistamiseksi on valittu mahdollisimman yksinkertainen, alikulkusiltana valitettavan yleisesti käytetty kehärakenne. Kehän kannat on otaksuttu kiinnitetyiksi, ja kuormitukset vastaavat tällaisella sillalla normaalisti esiintyviä kuormia (kuva 2).



Kuva 2.

Paalutus on esimerkissä tarkoituksella suunniteltu epäsymmetriseksi (kuva 3) ja osoitettu samalla kuinka suuri ero jo yksinkertaisissakin tapauksissa on tavanomaisella menetelmällä ja muodonmuutosmenetelmällä määritettyjen paalukuormien välillä.



Kuva 3.

### Ratkaisu erillisrakenteina

Voimamenetelmän mukaiset yhtälöt jäykkäkantaiselle kehälle ovat

$$M_1 \alpha_{12} + M_2 \beta_{12} + \alpha_{12}^0 = 0$$

$$M_1 \beta_{12} + M_2 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_2^0 = 0$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 2\beta_{12} = \frac{1}{3} h/EI$$

$$\alpha_{22} = 2\beta_{22} = \frac{2}{3} h/EI$$

$$[\bar{\alpha}_2 = \alpha_{21} + \alpha_{22}]$$

$$EI \alpha_{12}^0 = \frac{1}{24} q_1 h^3 + \frac{1}{45} q_2 h^3 + \frac{1}{24} p_y h^3$$

$$EI \alpha_{21}^0 = \frac{1}{24} q_1 h^3 + \frac{7}{360} q_2 h^3 + \frac{1}{24} p_y h^3$$

$$EI \alpha_{22}^0 = \frac{1}{3} q_2 h^3 + \frac{1}{4} P h^2 \quad [P \text{ keskellä}]$$

$$[\bar{\alpha}_2^0 = \alpha_{21}^0 + \alpha_{22}^0]$$

Ratkaisu on

$$M_1 = 0.182 q_z h^2 + 0.136 Ph - 0.114 q_1 h^2 - 0.072 q_2 h^2 - 0.114 p_y h^2$$

$$M_2 = -0.365 q_z h^2 - 0.272 Ph - 0.023 q_1 h^2 - 0.009 q_2 h^2 - 0.023 p_y h^2$$

Tällöin saadaan

$$M_{1 \max} = 6.4 \text{ Mpm/m}$$

$$M_{1 \min} = -3.3 \text{ Mpm/m}$$

$$M_{2 \max} = -19.7 \text{ Mpm/m}$$

$$M_{2 \min} = -35.5 \text{ Mpm/m}$$

Tukireaktion pysty- ja vaakakomponentit ovat

$$V_1 = V_0 + q_z h + \frac{P}{2}$$

$$H_1 = -0.546 q_z h - 0.408 P + 0.591 q_1 h + 0.394 q_2 h + 0.591 p_y h$$

Vaarallisimmat kuormayhdistelmät

A. Omapaino ja min. maanpaine

$$V_1 = 10 + V_0 = 24 \text{ Mp/m} \quad (V_0 = 14 \text{ Mp/m})$$

$$H_1 = 7.9 \text{ Mp/m}$$

$$M_1 = 3.3 - V_1 e = 0 \quad [e \approx 0.14 \text{ m}]$$

$$P_{\min} = B \frac{V_1 - 3H_1}{m + n} \approx 0$$

$$P_{\max} = B \frac{3H_1}{m + n} \approx \frac{24}{12} \cdot 3 \cdot 7.9 \approx 48 \text{ Mp}$$

B. Omapaino, hyötykuorma ja max. maanpaine

$$V_1 = 34 \text{ Mp/m} \quad [e \approx 0.07 \text{ m}]$$

$$H_1 = 5.8 \text{ Mp/m}$$

$$M_1 = -0.3 - 34 \cdot 0.07 = -2.7 \text{ Mpm/m}$$

$$P_1 = B \left( \frac{V_1 - 3H_1}{m + n} - \frac{M_2}{2mc} \right) \approx 38 \text{ Mp}$$

$$P_2 = B \left( \frac{3H_1}{m + n} - \frac{M_1}{2mc} \right) \approx 40 \text{ Mp}$$

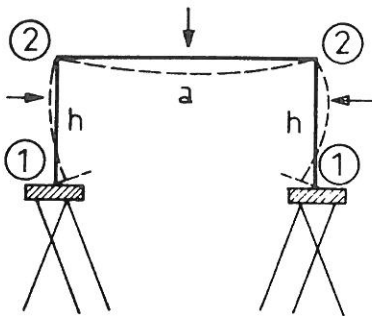
$$P_3 = B \left( \frac{V_1 - 3H_1}{m + n} + \frac{M_1}{2nc} \right) \approx 28 \text{ Mp}$$

$$P_4 = B \left( \frac{3H_1}{m + n} + \frac{M_1}{2nc} \right) \approx 30 \text{ Mp}$$

Ratkaisu kokonaisrakenteena (24 metrin kaista)

Kimmoisesti paalutukseen kiinnitettyä kehää tarkastellaan erikseen symmetrisenä ja antisymmetrisenä.

Symmetrinen kuormitus (kuva 4)



Kuva 4.

$$M_1 \alpha_{12} + M_2 \beta_{12} - \frac{\delta y_1}{h} + \alpha_{12}^0 = -M_1 \alpha_{M_1} + H_1 \alpha_{H_1} + V_1 \alpha_{V_1}$$

$$M_1 \beta_{12} + M_2 (\bar{\alpha}_2 + \beta_{22}) + \frac{\delta y_1}{h} + \bar{\alpha}_2^0 = 0$$

$$\delta y_1 = H_1 y_{H_1} + V_1 y_{V_1} - M_1 y_{M_1} \quad (14)$$

$$H_1 = Q_1^0 + \frac{M_2 - M_1}{h}$$

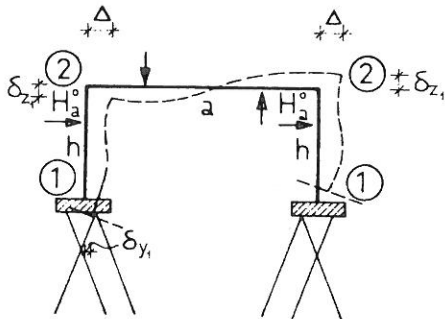
$$V_1 = V_1^0$$

$$\begin{aligned}
 & M_1 \left( \alpha_{12} + \alpha_{M_1} + \frac{y_{M_1}}{h} + \frac{\alpha_{H_1}}{h} + \frac{y_{H_1}}{h^2} \right) + M_2 \left( \beta_{12} - \frac{\alpha_{H_1}}{h} - \frac{y_{H_1}}{h} \right) + \\
 & + \bar{\alpha}_1^0 - Q_1^0 \left( \alpha_{H_1} + \frac{y_{H_1}}{h} \right) - V_1^0 \left( \alpha_{V_1} + \frac{y_{V_1}}{h} \right) = 0 \\
 & M_1 \left( \beta_{12} - \frac{y_{M_1}}{h} - \frac{y_{H_1}}{h^2} \right) + M_2 \left( \bar{\alpha}_2 + \beta_{22} + \frac{y_{M_1}}{h} + \frac{y_{H_1}}{h} \right) + \bar{\alpha}_2^0 + \\
 & + Q_1^0 \frac{y_{H_1}}{h} + V_1^0 \frac{y_{V_1}}{h} = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Ratkaistaan

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_1^S \\
 M_2 &= M_2^S
 \end{aligned} \tag{16}$$

Antimetrisen kuormitus (kuva 5)



Kuva 5.

$$\begin{aligned}
 M_1 \alpha_{12} + M_2 \beta_{12} + \frac{\Delta - \delta_{y1}}{h} + \alpha_{12}^0 &= -M_1 \alpha_{M_1} + H_1 \alpha_{H_1} + V_1 \alpha_{V_1} \\
 M_1 \beta_{12} + M_2 (\bar{\alpha}_2 - \beta_{22}) + \frac{2\delta_{z1}}{a} - \frac{\Delta - \delta_{y1}}{h} + \bar{\alpha}_2^0 &= 0 \\
 \delta_{y1} &= H_1 y_{H_1} + V_1 y_{V_1} - M_1 y_{M_1} \\
 \delta_{z1} &= H_1 z_{H_1} + V_1 z_{V_1} - M_1 z_{M_1} \\
 H_1 &= Q_1^0 + \frac{M_2 - M_1}{h} = H_a^0 \quad \text{siis} \quad \frac{M_2 - M_1}{h} = Q_{21}^0 \\
 V_1 &= V_1^0 - \frac{2M_2}{l}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 & M_1(\alpha_{12} + \alpha_{M_1} + \beta_{12} - 2 \frac{y_{M1}}{a}) + M_2(\bar{\alpha}_2 + \beta_{12} - \beta_{22} + \frac{2}{a} \alpha_{V_1} - \\
 & - \frac{4}{a^2} y_{V_1}) + \alpha_{12}^0 + \bar{\alpha}_2^0 - H_a^0(\alpha_{H_1} - 2 \frac{y_{H1}}{a}) - V_1^0(\alpha_{V_1} - 2 \frac{y_{V1}}{a}) = 0 \\
 & M_1 - M_2 + Q_{21}^0 h = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Ratkaistaan

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_1^a \\
 M_2 &= M_2^a
 \end{aligned} \tag{19}$$

Siis

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_1^s \pm M_1^a \\
 M_2 &= M_2^s \pm M_2^a
 \end{aligned} \tag{20}$$

Sijoitetaan sitten numeroarvot. Paalutukselle saadaan

$$\begin{aligned}
 \Sigma \cos^2 \beta &= 12 \cdot \frac{1}{10} = 1.2 \quad ; \quad \Sigma \cos^2 \gamma = 12 + 12 \cdot \frac{9}{10} = 22.8 \\
 \Sigma \cos \beta \cos \gamma &= 12 \cdot \frac{3}{10} = 3.6 \\
 \Sigma y \cos \beta \cos \gamma &= (5 - 7)0.45 \cdot \frac{3}{10} = -0.27 \text{ m} \\
 \Sigma y \cos^2 \gamma &= (5 - 7)0.45(1 + \frac{9}{10}) = -1.71 \text{ m} \\
 \Sigma y^2 \cos^2 \gamma &= 12 \cdot 0.45^2 (1 + \frac{9}{10}) = 4.6 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

jolloin

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1.2 & 3.6 & -0.27\text{m} \\ 3.6 & 22.8 & -1.71\text{m} \\ -0.27\text{m} & -1.71\text{m} & 4.6\text{m}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_y \\ \delta_z \\ \phi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_y^0 \\ Q_z^0 \\ M_x^0 \end{pmatrix} \quad \text{eli} \quad \mathbf{DM} = \mathbf{K}$$

ja

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{L}{EA} \begin{pmatrix} 1.57 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 0.083 & 0.017\text{m}^{-1} \\ 0 & 0.017\text{m}^{-1} & 0.22\text{m}^{-2} \end{pmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{pmatrix} y_H & z_H & \alpha_H \\ y_V & z_V & \alpha_V \\ y_M & z_M & \alpha_M \end{pmatrix}$$

Merkitään

$$\bar{\lambda} = \frac{EI}{h} \frac{L}{EA} = \frac{24 \cdot 0.5^3 \cdot 18}{12 \cdot 5 \cdot 0.09} = 10 \text{ m}^2$$

$$Q_1^0 = \frac{1}{2} q_1 h + \frac{1}{3} q_2 h + \frac{1}{2} p_y h$$

$$V_1^0 = V_0 + q_z h + \frac{p}{2}$$

Yhtälöryhmästä (15) saadaan silloin

$$M_1 \left[ \frac{1}{3} + \bar{\lambda} \left( 0.22 + \frac{1.57}{5^2} \right) \right] + M_2 \left( \frac{1}{6} - \bar{\lambda} \frac{1.57}{5^2} \right) + \frac{1}{24} q_1 h^2 + \frac{1}{45} q_2 h^2 + \frac{1}{24} p_y h^2 - \bar{\lambda} Q_1^0 \frac{1.57}{5} - \bar{\lambda} V_1^0 \left( 0.017 - \frac{0.25}{5} \right) = 0$$

$$M_1 \left( \frac{1}{6} - \bar{\lambda} \frac{1.57}{5^2} \right) + M_2 \left( \frac{4}{3} + \bar{\lambda} \frac{1.57}{5^2} \right) + \frac{1}{24} q_1 h^2 + \frac{7}{360} q_2 h^2 + \frac{1}{24} p_y h^2 + \frac{1}{3} q_z h^2 + \frac{1}{4} Ph + \bar{\lambda} Q_1^0 \frac{1.57}{5} - \bar{\lambda} V_1^0 \frac{0.25}{5} = 0$$

$$\text{Siis } 3.16M_1 - 0.46M_2 + 0.066V_0 h + 0.066q_z h^2 + 0.033Ph - 0.273q_1 h^2 - 0.188q_2 h^2 - 0.273p_y h^2 = 0$$

$$-0.46M_1 + 1.97M_2 - 0.100V_0 h + 0.233q_z h^2 + 0.200Ph + 0.357q_1 h^2 + 0.230q_2 h^2 + 0.357p_y h^2 = 0$$

Ratkaisu on

$$M_1 = -0.014V_0 h^2 - 0.040q_z h^2 - 0.026Ph + 0.063q_1 h^2 + 0.044q_2 h^2 + 0.063p_y h^2$$

$$\text{josta } M_1 \text{ max} = + 4.4 \text{ Mpm/m}$$

$$M_1 \text{ min} = + 1.6 \text{ Mpm/m}$$

$$M_2 = 0.048V_0 h - 0.128q_z h^2 - 0.109Ph - 0.168q_1 h^2 - 0.108q_2 h^2 - 0.168p_y h^2$$

$$\text{josta } M_2 \text{ max} = - 18.0 \text{ Mpm/m}$$

$$M_2 \text{ min} = - 27.2 \text{ Mpm/m}$$

Lasketaan paalukuormat

$$A. \quad V_1 = 24 \text{ Mp/m} \quad \therefore 576 \text{ Mp}$$

$$H_1 = 6.0 \text{ Mp/m} \quad \therefore 144 \text{ Mp}$$

$$M_1 = 1.1 \text{ Mpm/m} \quad \therefore 26 \text{ Mpm}$$

Näistä saadaan siirtymät

$$\frac{EA}{L} \delta_y = 1.57 \cdot 144 - 0.25 \cdot 576 = 82 \text{ Mp}$$

$$\frac{EA}{L} \delta_z = -0.25 \cdot 144 + 0.083 \cdot 576 + 0.017 \cdot 26 = 12.4 \text{ Mp}$$

$$\frac{EA}{L} \phi_x = 0.017 \cdot 576 + 0.22 \cdot 26 = 15.5 \text{ Mpm/m}$$

Paalukuormat lasketaan kaavasta

$$P = \frac{EA}{L} \left[ \delta_y \cos\beta + (\delta_z + \phi_x y) \cos\gamma \right]$$

jolloin saadaan

$$P_{\min} = P_1 = 12.4 - 15.5 \cdot 0.45 \approx 5 \text{ Mp}$$

$$P_{\max} = P_4 = 82 \frac{1}{\sqrt{10}} + (12.4 + 15.5 \cdot 0.45) \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 44 \text{ Mp}$$

$$B. \quad V_1 = 34 \text{ Mp/m} \quad \therefore 816 \text{ Mp} \quad (e = 0.07 \text{ m})$$

$$H_1 = 4.8 \text{ Mp/m} \quad \therefore 115 \text{ Mp}$$

$$M_1 = 3.2 - 34 \cdot 0.07 = 0.8 \text{ Mpm/m} \quad \therefore 19 \text{ Mpm}$$

Siirtymät

$$\frac{EA}{L} \delta_y = -24 \text{ Mp}$$

$$\frac{EA}{L} \delta_z = 39 \text{ Mp}$$

$$\frac{EA}{L} \phi_x = 18 \text{ Mpm}$$

Paalukuormat

$$P_1 = 31 \text{ Mp}, P_2 = 22 \text{ Mp}, P_3 = 47 \text{ Mp}, P_4 = 37 \text{ Mp}$$

#### JOHTOPÄÄTÖKSET

Edellä esitetty yksinkertainen esimerkki, jossa havainnollisuuden lisäämiseksi paalujen kiinnityksen ja niihin vaikuttavan kimmoisen maanvastuksen vaikutus on jätetty huomioonottamatta, osoittaa selvästi perustuksen kimmoisuuden merkityksen olevan varsin oleellisen sekä ylärakenteita että perustuksia mitoitettaessa. Älköön kuitenkaan tämä kokonaisrakenteen tarkastelun näennäinen hankaluus vierotako ketään käyttämästä jatkuvia rakenteita perustusolosuhteista riippumatta, sillä staattisesti epämääräisten suureiden vaikutus rakenteen kokonaisvarmuuteen sekä massameneekkiin on yleensä aina positiivinen.

Käytetyt merkinnät

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	anturan siirtymät
$\phi_x, \phi_y, \phi_z$	anturan kiertymät
$x, y, z$	paalun yläpäähän koordinaatit
$\alpha, \beta, \gamma$	paalun suuntakulmat
$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$	paalun yläpäähän siirtymät
$Q_x^0, Q_y^0, Q_z^0$	perustuksen ulkoiset kuormat
$M_x^0, M_y^0, M_z^0$	perustuksen ulkoiset taivutusmomentit

$$\Omega = \begin{vmatrix} & x & \\ z \nearrow & + & \searrow y \\ & \alpha & \\ \gamma \nearrow & + & \searrow \beta \end{vmatrix} \quad \text{kierrovaihteluoperaatio}$$

$$\Delta_x = \delta_x + \phi_y z - \phi_z y$$

$$\Delta_y = \Omega \Delta_x$$

$$\Delta_z = \Omega \Delta_y$$

$$\frac{L}{EA} N = \Delta_x \cos \alpha + \Delta_y \cos \beta + \Delta_z \cos \gamma$$

Matti Ollila, dipl.ins., Ins.tsto Eero Paloheimo & Matti Ollila,  
Helsinki