SIMPSONIN KAAVAN SOVELTAMINEN LAATTOJEN VAIKUTUSKENTTIIN

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5 No 3 1972 ss. 252-257; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

PENTTI LOIKKANEN

Määritettäessä laattojen staattisia suureita $Z(u,v)$ jatkuvasta kuormasta $p(x,y)$ vaikutuskenttiä käyttämällä, joudutaan Z laskemaan muotoa

$$Z(u,v) = \iint_A p(x,y)\kappa(u,v;\ x,y)\ dx\ dy \qquad (1)$$

olevasta lausekkeesta. Tässä

u,v ovat laatan tarkasteltavan pisteen koordinaatit

x,y ovat muuttuvat koordinaatit

A on kuormitettu alue

$\kappa(u,v;\ x,y)$ on vaikutuskentän vaik. $Z(u,v)$ ordinaatta eli

$$\text{vaik. } Z(u,v) = \kappa(u,v;\ x,y) \qquad (2)$$

Kuormitusmääräysten mukaan pistekuormat muunnetaan tasaiseksi kuormaksi määrätylle jakaantumisalueelle, joten myös niiden vaikutus on määritettävissä lausekkeesta (1).

Viimeksi kuluneiden 30 vuoden aikana on julkaistu suuri joukko erilaisen muodon, mittasuhteet ja tuennan omaavien laattojen vaikutuskenttiä. Ne on tavallisimmin esitetty karttoina asianomaisen suureen, yleensä taivutusmomentin tai sen sijasta käyristymän, tasa-arvoviivojen muodostamien korkeuskäyrien avulla. Erityisesti liikkuvan kuorman rasittamissa laatoissa, kuten siltojen kansilaatoissa, vaikutuskenttien käyttö on edullista. Mitoituksessa tarvittavien kenttämomenttien ja leikkausvoimien vaikutuskentissä on pisteessä u,v singulaarinen kohta, äärettömän korkea joskin tilavuudeltaan äärellinen piikki. Seuraavassa tarkastellaan lausekkeen (1) laskemista Simpsonin kaavalla yleensä ja sen tarkkuutta erikoisesti singulaarisuuskohdissa.

Rajoitutaan käytännön tehtävissä yleisimpään tapaukseen, jossa jatkuva kuorma p(x,y) on arvoltaan vakio p. Tällöin lausekkeessa (1) Z on p-kertainen kuormitetun alueen yli integroitu vaikutusfunktio

$$Z(u,v) = p \iint_A \kappa(u,v;\, x,y)\, dx\, dy = p \cdot V \qquad (3)$$

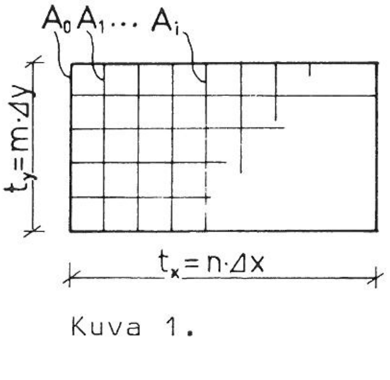
Suorakaiteen muotoisella kuormitetulla alueella saadaan kuvan 1 merkinnöin poikkileikkausaloiksi

$$A_i = \frac{1}{3} \Delta y \sum_{j=0}^{m} k_j \kappa_{ij}$$

ja tilavuudeksi

$$V = \frac{1}{3} \Delta x \sum_{i=0}^{n} k_i A_i = \frac{1}{9} \Delta x \Delta y \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} k_i k_j \kappa_{ij} =$$

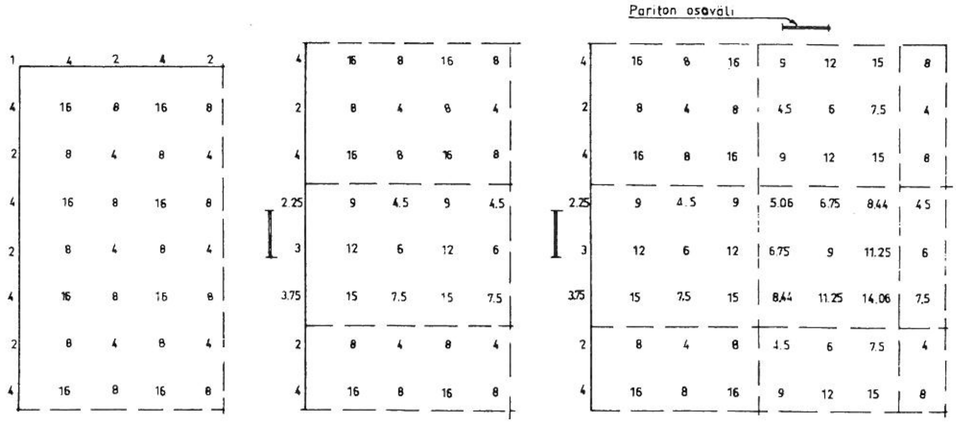
$$= \frac{1}{9} \Delta x \Delta y \sum k_{ij} \kappa_{ij} \qquad (4)$$



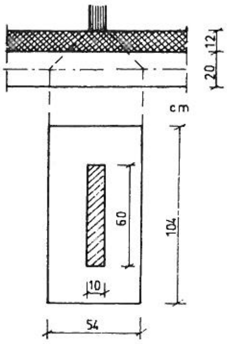
Kuva 1.

kun $k_{ij} = k_i k_j$ on verkon nurkkapisteen kohdalla olevan vaikutuspinnan ordinaatan κ_{ij} kerroin. Jos m ja n ovat parillisia, k_{ij}:n arvot ovat kuvan 2a mukaisia. Osavälein parittomuus muuttaa kertoimen kuvan 2b ja c mukaiseksi.

Esimerkki. Valitaan rakenteiden kuormitusnormien ajoneuvoliikenteen erillinen pyöräkuorma P ja 20 cm paksu ajotielaatta, jonka päällysteen paksuus on 12 cm. Jakaantumisalueeksi tulee $t_x t_y$ = 0,54 x 1,04 m^2, kuva 3. Valitaan suorakaiteen 4,0 x 4,8 m^2 muotoinen ja kai-

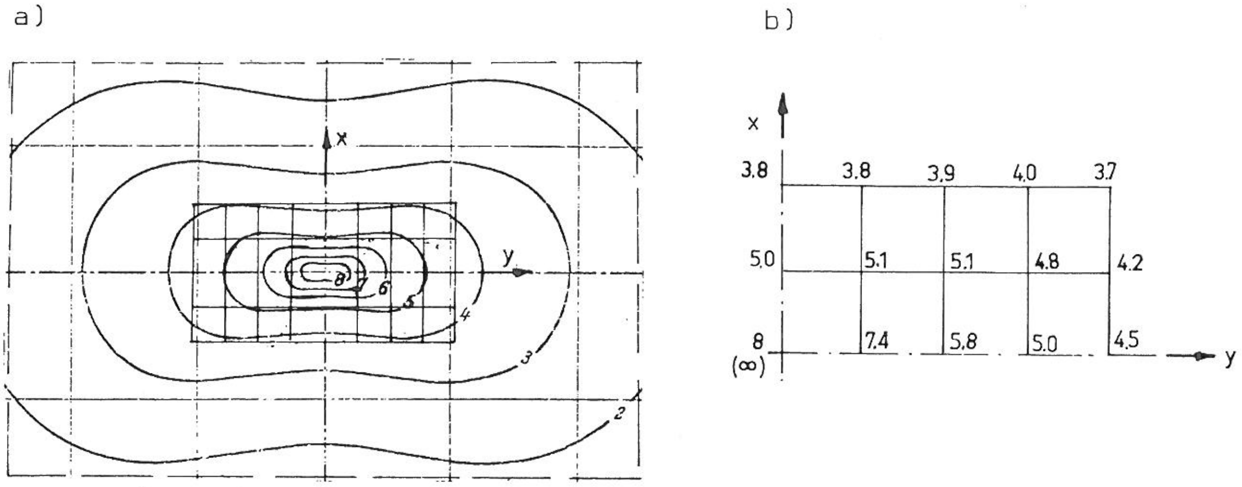


Kuva 2.



Kuva 3.

kilta reunoiltaan vapaasti tuettu laatta, jolloin laattateorian mukainen ratkaisu on yksinkertaisesti laskettavissa vertailukohdaksi. Tarkastellaan momenttia M_x laatan keskellä.



Kuva 4.

Kuvan 4a vaikutuskentän [1] kartasta luettavat korkeudet on I neljänneksen osalta merkitty kuvaan 4b.

Verkolla 1 saadaan (4):stä

$$V = 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot 0{,}27 \cdot 0{,}52\ (1 \cdot 3{,}7 + 2 \cdot 3{,}8 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 4{,}2)/8\pi = 0{,}1283\ m^2$$

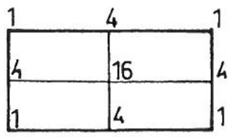
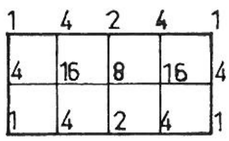
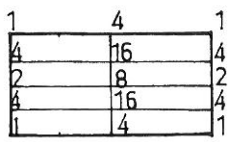
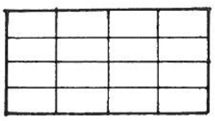
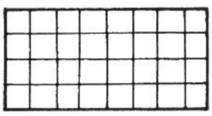
$$p = \frac{P}{t_x t_y} = 1{,}7806 \times P\ m^{-2}$$

$$m_x = pV = 0{,}229\ P$$

jne. Tulokset ovat taulukossa 1. Virhe on saatu vertaamalla tulosta tunnetun Navierin hitaasti suppenevan ratkaisun 45 x 45 termillä antamaan arvoon $m_x = 0{,}1965$ P. Lévyn ratkaisusta [4]:ssä johdetulla, hieman likimääräisellä, mutta nopeasti suppenevalla menettelyllä saadaan $m_x = 0{,}1973$ P.

Esitetty menettely tyydyttää käytännössä vaadittavan tarkkuuden myös kenttämomenteille, jos parabeli, jolla vaikutuspinnan ja pystytason leikkausviivaa approksimoidaan, ei kulje singulaarisuuskohdan

Taulukko 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Verkko</th><th>Δx</th><th>Δy</th><th>V</th><th>m_x/n_y</th><th>virhe</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>0,27</td><td>0,52</td><td>0,1283</td><td>0,229</td><td>+16,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>0,27</td><td>0,26</td><td>0,1172</td><td>0,209</td><td>+ 6,4</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>0,135</td><td>0,52</td><td>0,1100</td><td>0,1958</td><td>- 0,4</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>0,135</td><td>0,26</td><td>0,1100</td><td>0,1958</td><td>- 0,4</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>0,135</td><td>0,130</td><td>0,1105</td><td>0,1968</td><td>- 0,2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>m</td><td>m</td><td>m^2</td><td>P m/m</td><td>%</td></tr>
</table>

ylitse, ts. piikin huipun joka puolella on vähintään kaksi verkon nurkkapistettä (verkko 4). Lisäksi on muistettava, että tarkkuutta rajoittaa myös ordinaattojen lukemistarkkuus kartalta ja piikin katkaisemisesta aiheutuva virhe. Viimeksi mainittu on esimerkin tapauksessa suuruusluokkaa $\Delta V = 0{,}0003\ m^2$, joten $\Delta m/n_x \sim 0{,}0005$ P.

Tarvittava laskutyö riippuu verkon tiheydestä. Tässä suhteessa esitettyä vielä tehokkaampi menettely on korvata verkon ruudun nurkkapisteet yhdellä ruudun sisältä siten valitulla pisteellä, että mahdollisimman suuri tarkkuus saavutetaan. Tähän päästään Gaussin neliömuotoa soveltamalla [5], jolloin singulaarisuuskohdassa tarvitaan lisäksi korjaustermi. Käyttäen verkkoa 1 vastaavasti neljää pistettä saadaan esimerkin tapauksessa momentiksi m_x = 0,1987 P (virhe + 1,1 %), jolloin symmetriasyistä tarvitaan yksi ainoa ordinaatta.

Kirjallisuutta

[1] Pucher, A., Einflussfelder elastischer Platten, Wien 1958.

[2] Molkenthin, A., Einflussfelder zweifeldriger Platten mit freien Längsrändern / Influence Surfaces of Two-Span Continuous Plates with free Longitudinal Edges, Berlin 1971.

[3] Timoshenko, S., Woinowsky - Krieger, S., Theory of Plates and Shells, Tokyo 1959.

[4] Mikkola, M., Levyjen, laattojen ja kuorien teoriaa, Otaniemi 1969.

[5] Rieckmann, H-P., Numerische Integration von Einflussflächen für Plattenschnittlasten, Der Bauingenieur 11/1970.

Pentti Loikkanen, dipl.ins., teknillinen korkeakoulu, Otaniemi.