

STAATTISESTI MÄÄRÄÄMÄTTÖMÄN PALKIN KIEPAHDUSKUORMAN
MÄÄRITTÄMISESTÄ ENERGIAMENETELMÄN AVULLA

PENTTI LAASONEN

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5
No 3 1972 ss. 234-244; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

Ne palkin kiepahdusmuodon differentiaaliyhtälöt, joiden kautta kiepahduksen teoriassa määrittäyty kriittinen kuorma, voidaan johtaa staattisen tasapainon ehdoista. Menetelmän käyttö ei ole aivan yksinkertainen ja aivan paria tapausta lukuunottamatta johtaa varsin komplisoitujen simultaanisten transkendenttiyhtälöiden ratkaisemiseen. Yleensä onkin edullisempänä pidettävä energiamenetelmän käyttöä, ensiksikin, koska sen avulla mainitut yhtälöt saadaan tavallaan sivutuotteina johdetuiksi varsin helposti, ja toiseksi, koska energiamenettely mahdollistaa yksinkertaisten, mielivaltaisen hyviksi tarkentuvien likiarvojen määrittämisen. Menetelmä sisältää kuitenkin erään "sudenkuopan", johon lankeaminen nimenomaan poikittaissuunassa staattisesti määräämättömän palkin tapauksessa muodostuu kohtalokkaaksi, koska tämä joko johtaa väärään tulokseen tai ei anna tulosta lainkaan. Seuraavassa osoitetaan, missä tämä vaara piilee ja miten se vältetään.

Käytetään Ylisen oppikirjan mukaisia merkintöjä: palkin pituusakselin ja sen poikkileikkauksen pääjäyhyysakselien suuntaiset

koordinaatit ovat x , y ja z , poikkileikkauksen taivutusjäykkyydet y - ja z -akselien suhteen B_1 ja B_2 ($\gg B_1$), vääntöjäykkyys C , siirtymä z -suunnassa w ja vääntökulma ϕ . Jotta kysymys olisi puhtaasta kiepahduksesta, on edellytettävä, että kuormitus koostuu vain xy -tasossa vaikuttavista momenteista sekä y -akselin suuntaisista jatkuvista ja pistekuormista. Kiepahtaneen palkin potentiaalienergian z -suuntaisesta taipumisesta johtuva osa on $\frac{1}{2} \int_0^l B_1 w''^2 dx$ ja vääntymisestä johtuva osa $\frac{1}{2} \int_0^l C \phi'^2 dx$, molemmat integraalit ulotettuna palkin pituudelle. Yksinkertainen tarkastelu osoittaa, että jatkuvan kuorman q kiepahduksessa suorittama työ on

$$\int_0^l \left[\int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \right] w''(x) \phi(x) dx$$

Kohdalla $x = a$ vaikuttavan pistevoiman F suorittama työ on vastaavasti

$$F \int_a^l (x - a) w''(x) \phi(x) dx$$

ja kohdalla $x = a$ vaikuttavan momentin M suorittama työ

$$M \int_a^l w''(x) \phi(x) dx$$

Nämä kolme erilaista lauseketta voidaan esittää yhdenmukaisessa muodossa

$$\int_0^l m(x) w''(x) \phi(x) dx$$

kun $m(x)$ (eli taivutusmomentin vastasuure) on eri tapauksissa

$$m(x) = \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \quad (1)$$

tai $F(x - a)$ tai M . Energiayhtälö saadaan nyt ottamalla sen toiselle

puolelle potentiaalienergian kaksi termiä ja toiselle puolelle kaikkia kuormituksen osia vastaavat työintegraalit, jolloin myös tukivoimat ja -momentit on käsitettävä tällaisiksi. Pystysuunnassa staattisesti määräämättömälle palkille nämä on ensin määritettävä tavalliseen tapaan. Saatu yhtälö on

$$\frac{1}{2} \int_0^l B_1 w''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l C \phi'^2 dx = \int_0^l m w'' \phi dx \quad (2)$$

Koska kriittinen kiepahduskuorma on taipumafunktion $w(x)$ ja vääntökulmafunktion $\phi(x)$ suhteen stationaarinen, pätee tämä yhtälö myös näiden funktioiden suhteen yhden kerran varioituna. Jos ensimmäisen kertaluvun variaatiot ovat $\delta w(x)$ ja $\delta \phi(x)$, on siis

$$\int_0^l B_1 w'' \delta w'' dx + \int_0^l C \phi' \delta \phi' dx = \int_0^l m (\phi \delta w'' + w'' \delta \phi) dx$$

Koska variaatiofunktiosta $\delta \phi(x)$ voidaan aina edellyttää, että se häviää palkin päissä, on

$$\int_0^l C \phi' \delta \phi' dx = - \int_0^l (C \phi')' \delta \phi dx$$

joten variaatioiden erottamisella saadaan

$$\int_0^l [B_1 w'' - m \phi] \delta w'' dx = \int_0^l [(C \phi')' + m w''] \delta \phi dx \quad (3)$$

Variaation $\delta \phi$ valinnan vapaudesta johdetaan nyt tämän yhtälön oikeasta puolesta tunnetusti yhtälö

$$(C \phi')' + m w'' = 0 \quad (4)$$

Vastaavasti saadaan yhtälön (3) vasemmalta puolelta yhtälö

$$B_1 w'' - m \phi = 0$$

välittömästi vain silloin, kun $\delta w''$ on asianmukaisesti vapaasti va-

littavissa, so. kun kiinnitys ei tee palkkia poikittais-, so. z-suunnassa staattisesti määräämättömäksi. Jos sen sijaan palkki on molemmista päistään sivusuunnassa tuettu ja ainakin toisesta päästään jäykästi, on yhtälöstä

$$\int_0^l [B_1 w'' - m\phi] \delta w'' dx = 0$$

osittaisintegroinnilla johdettava uusi yhtälö, jossa on variaation ensimmäinen derivaatta $\delta w'$ tai, jos kummankin pään poikittaiskiinnitys on jäykkä, δw . Näin päästään, koska voidaan aina edellyttää palkin päissä $\delta w = \delta w' = 0$, yllä olevassa yhtälössä siirtämään yksi tai kaksi derivointioperaatiota tekijästä $\delta w''$ sen edellä olevaan hakasulkuausekkeeseen, minkä jälkeen tämä tekijä todetaan identtisesti häviäväksi. Saadaan

$$B_1 w'' - m\phi = c_1 + c_2 x \quad (5)$$

jossa vielä $c_2 = 0$, mikäli vain toisen pään poikittaisstuki on jäykkä.

Täten johdettuun differentiaaliyhtälöiden pariin

$$(C\phi') + mw'' = 0 \quad (4)$$

$$B_1 w'' - m\phi = c_1 + c_2 x \quad (5)$$

sisältyy näissä tapauksissa määräämättömiä vakioita, jotka määrittyvät ylimääräisten reunaehtojen perusteella. Niinpä saadaan jälkimmäisestä yhtälöstä jakamalla B_1 :llä ja integroimalla kahteen kertaan ehdot

$$\int_0^l w' - \int_0^l \frac{m}{B_1} \phi dx = c_1 \int_0^l \frac{1}{B_1} dx + c_2 \int_0^l \frac{1}{B_1} dx \quad (6)$$

$$\int_0^l w - \int_0^l \frac{(l-x)m}{B_1} \phi dx = c_1 \int_0^l \frac{l-x}{B_1} dx + c_2 \int_0^l \frac{l x - x^2}{B_1} dx$$

joista c_1 ja c_2 määräytyvät eräiden tuntemattoman ϕ integraalien lineaarilausekkeiden avulla. Kun yhtälöistä (4) ja (5) eliminoidaan w saadaan ϕ :lle toisen kertaluvun yhtälö

$$B_1(C\phi')' + m^2\phi = -c_1m - c_2mx \quad (7)$$

Sen sijaan että ratkaistaisiin ϕ tästä yhtälöstä, jossa c_1 ja c_2 siis saattavat riippua ϕ :stä, on mahdollista palata alkuperäiseen energiayhtälöön (2), lausua siinä (5):n nojalla w'' vääntökulmafunktion ϕ avulla ja täten päästä likimääräismenetelmien perusyhtälöön

$$\int_0^l C\phi'^2 dx = \int_0^l \frac{1}{B_1} (m\phi)^2 dx - \int_0^l \frac{1}{B_1} (c_1 + c_2x)^2 dx \quad (8)$$

Kriittinen arvo kuormalle q , joka sisältyy tekijänä funktioon m ja yhtälöiden (6) kautta myös suureisiin c_1 ja c_2 , on pienin niistä arvoista, jotka saadaan tästä yhtälöstä, kun annetaan ϕ :n varioida kaikkien ensimmäisen kertaluvun derivaattoineen jatkuvien ja reunaehdot toteuttavien funktioiden joukossa.

Tarkastetaan esimerkiksi tasajäykkää palkkia, jonka koko pituudelle on kuorma jakautunut tasaisesti ja jonka molemmat päät ovat vain sivusuunnassa jäykästi kiinnitetyt. Palkin pituudella on siis $q(x) = q = \text{vakio}$, mutta tukipisteissä sen sijaan on $q(x)$ sillä tavoin

ääretön, että $\int_0^{+0} q(\xi)d\xi = \int_{l-0}^l q(\xi)d\xi = -\frac{1}{2}q\ell$. Näin ollen on

$$m(x) = -\frac{1}{2}qx(\ell - x), \quad 0 < x < \ell \quad (9)$$

Reunaehtojen $w(0) = w'(0) = w(\ell) = w'(\ell) = 0$ perusteella saavat yhtälöt (6) muodon

$$\frac{q}{2B_1} \int_0^l x(\ell - x)\phi(x)dx = c_1 \frac{\ell}{B_1} + c_2 \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{B_1}$$

$$\frac{q}{2B_1} \int_0^l x(\ell - x)^2\phi(x)dx = c_1 \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{B_1} + c_2 \frac{1}{6} \frac{\ell^3}{B_1}$$

ja näistä

$$c_1 = \frac{q}{\ell^2} \int_0^{\ell} x(\ell - x)(2\ell - 3x)\phi(x)dx$$

$$c_2 = -\frac{3q}{\ell^3} \int_0^{\ell} x(\ell - x)(\ell - 2x)\phi(x)dx$$

sijoitettavaksi yhtälöön (8) muotoa

$$B_1 C \int_0^{\ell} \phi'^2 dx = \frac{1}{4} q^2 \int_0^{\ell} x^2 (\ell - x)^2 \phi^2 dx - \int_0^{\ell} (c_1 + c_2 x)^2 dx$$

Numeerista laskemista varten on luonnollisesti syytä käyttää hyväksi symmetriaa ja ottaa pituuskoordinaatiksi dimensioton

$$t = (\ell - 2x) : \ell \quad \text{eli } x = \frac{1}{2} \ell (1 - t)$$

Tällöin tulevat yhtälöt (9), (4), (5) ja (2) korvatuiksi seuraavilla (missä $w(t) = w(\frac{1}{2} \ell (1 - t))$ ja $\psi(t) = \phi(\frac{1}{2} \ell (1 - t))$):

$$m(t) = -\frac{1}{8} q \ell^2 (1 - t^2), \quad -1 < t < +1$$

$$C \psi'' - \frac{1}{8} q \ell^2 (1 - t^2) \omega'' = 0$$

$$\frac{4}{\ell^2} B_1 \omega'' + \frac{1}{8} q \ell^2 (1 - t^2) \psi = k_1 + k_2 t \quad (10)$$

$$\frac{4}{\ell^3} B_1 \int_{-1}^{+1} \omega''^2 dt + \frac{1}{\ell} C \int_{-1}^{+1} \psi'^2 dt = -\frac{q \ell}{4} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2) \omega'' \psi dt \quad (11)$$

Funktioiden w ja ϕ ollessa parillisia t :n suhteen on $k_2 = 0$, ja kun $w' = 0$ kummassakin palkin päässä, seuraa yhtälöstä (10) integroimalla

$$k_1 = \frac{1}{8} q \ell^2 \int_0^1 (1 - t^2) \psi dt \quad (12)$$

Riippuvuuden (10) perusteella saa (11) muodon

$$\frac{\ell}{2B_1} \int_0^1 (k_1 - \frac{1}{8} q \ell^2 (1 - t^2) \psi)^2 dt + \frac{2C}{\ell} \int_0^1 \psi'^2 dt =$$

$$= - \frac{q\ell^3}{8B_1} \int_0^1 (1-t^2)(k_1 - \frac{1}{8} q\ell^2(1-t^2)\psi)\psi dt$$

josta johdetaan

$$\frac{256B_1C}{q^2\ell^6} \int_0^1 \psi'^2 dt = \int_0^1 (1-t^2)^2 \psi^2 dt - \left[\int_0^1 (1-t^2)\psi dt \right]^2$$

Näin ollen on kuormituksen kriittinen arvo

$$q_{kr} = \frac{\sqrt{B_1 C}}{\ell^3} \cdot \min \lambda$$

missä

$$\lambda = 16 \sqrt{\frac{\int_0^1 \psi'^2 dt}{\int_0^1 (1-t^2)^2 \psi^2 dt - \left[\int_0^1 (1-t^2)\psi dt \right]^2}}$$

kun ψ ja ψ' ovat jatkuvia ja $\psi'(0) = \psi(1) = 0$. Esim. $\psi_1 = 1 - t^2$ antaa

$$\int_0^1 \psi_1'^2 dt = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^1 (1-t^2)\psi_1 dt = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^1 (1-t^2)^2 \psi_1^2 dt = \frac{128}{315}$$

joten vastaava likiarvo on $\lambda_1 = 20\sqrt{7} = 52,92$.

Haluttaessa parempaa likiarvoa käytetään yhtälöä (7) vastaavaa differentiaaliyhtälöä

$$B_1 C \frac{4}{\ell^4} \psi'' = \frac{1}{64} q^2 \ell^4 (1-t^2)\psi + \frac{1}{8} q\ell^2 (1-t^2)k_1$$

hyväksi sillä tavoin iteroimalla, että oikealle puolelle sijoitetaan $\psi_1 = 1 - t^2$ sekä vastaava k_1 arvo lausekkeesta (12), minkä jälkeen

kaksinkertainen integrointi antaa paremman funktion ψ_2 . Epäolennaisen vakiokertoimen poisjättämisen jälkeen saadaan

$$\psi_2 = 53 - 69t^2 + 19t^4 - 3t^6$$

$$\int_0^1 \psi_2'^2 dt = \frac{11826432}{3465}$$

$$\int_0^1 (1 - t^2)\psi_2 dt = \frac{2848}{105}$$

$$\int_0^1 (1 - t^2)^2 \psi_2^2 dt = \frac{829640704}{765765}$$

$$\lambda_2 = 50,13$$

Vastaavasti on seuraavan iteraation tulos (kokonaislukukertoimisena polynomina)

$$\psi_3 = 38063 - 50478t^2 + 15658t^4 - 3696t^6 + 495t^8 - 42t^{10}$$

$$\int_0^1 \psi_3'^3 dt = 1,752756462 \cdot 10^9$$

$$\int_0^1 (1 - t^2)\psi_3 dt = 1,943175544 \cdot 10^4$$

$$\int_0^1 (1 - t^2)\psi_3^2 dt = 5,569213715 \cdot 10^8$$

$$\lambda_3 = 50,021$$

Nelinumeroisena oikea arvo on 50,02, joten

$$F_{kr} = 50,02 \frac{\sqrt{B_1 C}}{l^2}$$

Jos kuormitus ei vaikuta elastisella akselilla vaan sen yläpuolella matkan a verran, koostuu kiepahduksen tapahtuessa suoritetun työn lauseke kahdesta termistä

$$\int_0^{\frac{\ell}{2}} \left[\int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \right] w''(x) \phi(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\ell}{2}} a(x) q(x) \phi^2(x) dx$$

Tästä aiheutuu vastaava muutos kriittisen kuormituksen arvon johtamisessa.

Tarkastetaan esimerkkinä palkkia, jonka keskellä on pistemäinen kuorma F korkeudella a poikkileikkauksen painopisteestä ja jonka molemmat päät ovat jäykästi kiinnitetyt. Taivutusmomentti saadaan joko suoraan tai (1):sta

$$m = \begin{cases} -\frac{1}{2} Fx & 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ -\frac{1}{2} F(\ell - x) & \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$

Kun siirrytään käyttämään dimensiotonta pituuskoordinaattia

$$t = 2x:\ell \quad \text{eli} \quad x = \frac{1}{2} \ell t$$

ja otetaan huomioon kiepahduksen ilmeinen symmetrisyys keskikohdan suhteen, voidaan rajoittaa arvoja $0 < t < 1$ vastaavaan osaan energialausekkeita. Kun merkitään $\omega(t) = w(\frac{1}{2} \ell t)$, $\psi(t) = \phi(\frac{1}{2} \ell t)$, saadaan energiayhtälö

$$\frac{8}{\ell^3} B_1 \int_0^1 \omega''^2 dt + \frac{2}{\ell} C \int_0^1 \psi'^2 dt = -F \int_0^1 t \omega'' \psi dt + \frac{1}{2} a F \psi^2(1)$$

Variointi ja muuttujain erottaminen antaa

$$\frac{4}{\ell} C \psi'' - F t \omega'' = 0$$

$$\frac{16}{\ell^3} B_1 \omega'' + F t \psi = k_1 + k_2 t \tag{13}$$

joista ω'' eliminoimalla saadaan

$$\frac{64}{\ell^4} B_1 C \psi'' = -F^2 t^2 \psi + F t (k_1 + k_2 t) \tag{14}$$

Tässä tulevat ψ :n täytettäväksi reunaehdot $\psi(0) = \psi'(1) = 0$ sekä

yhtälön (13) ja reunaehtojen $\omega'(0) = \omega'(1) = 0$ perusteella integraaliehto

$$F \int_0^1 t\psi dt = k_1 + \frac{1}{2} k_2$$

Kun (13) derivoidaan ja otetaan huomioon, että $\omega'''(0) = 0$, nähdään, että $k_2 = 0$. Siis

$$k_1 = F \int_0^1 t\psi dt$$

Kun vielä energiayhtälössä kaikki termit lausutaan ψ :n avulla, saadaan

$$\frac{F^2 \ell^4}{64 B_1 C} \left\{ \int_0^1 t^2 \psi^2 dt - \left(\int_0^1 t\psi dt \right)^2 \right\} + \frac{a \ell F}{4C} \psi^2(1) = \int_0^1 \psi'^2 dt$$

eli jos merkitään

$$F = \lambda \frac{\sqrt{B_1 C}}{\ell^2}$$

$$\frac{\lambda^2}{64} \left\{ \int_0^1 t^2 \psi^2 dt - \left(\int_0^1 t\psi dt \right)^2 \right\} + \frac{a}{4\ell} \lambda \sqrt{\frac{B_1}{C}} \psi^2(1) = \int_0^1 \psi'^2 dt$$

Jos $a = 0$, on vastaava λ :n arvo

$$\bar{\lambda} = 8 \sqrt{\frac{\int_0^1 \psi'^2 dt}{\int_0^1 t^2 \psi^2 dt - \left(\int_0^1 t\psi dt \right)^2}}$$

Yleisessä tapauksessa on λ kehitettävissä suhteen a/ℓ sarjaksi

$$\lambda = \bar{\lambda} \left\{ 1 - \frac{a}{8\ell} \sqrt{\frac{B_1}{C}} \bar{\lambda} \frac{\psi^2(1)}{\int_0^1 \psi'^2 dt} + \dots \right\} \quad (15)$$

Kuorman kriittinen arvo F_{kr} saadaan etsimällä tämän lausekkeen minimi, kun ψ valitaan siten, että se toteuttaa reunaehdot $\psi(0) = \psi'(0) = 0$

Esim. $\psi_1 = 3t - t^3$

$$\int_0^1 \psi'^2 dt = \frac{24}{5}$$

$$\int_0^1 t\psi dt = \frac{4}{5}$$

$$\int t^2\psi^2 dt = \frac{332}{315}$$

$$\bar{\lambda}_1 = 24 \sqrt{\frac{210}{163}} = 27,24$$

Parempi likifunktio saadaan sijoittamalla ψ_1 yhtälöön (14) oikealle puolelle ja ratkaisemalla täten vasemmalta puolelta ψ_2 . Konnaislukukertoimisena se on

$$\psi_2 = 77t - 56t^3 + 63t^5 - 10t^7$$

$$\int_0^1 \psi_2'^2 dt = \frac{103933312}{15015}$$

$$\int_0^1 t\psi_2 dt = \frac{9128}{315}$$

$$\int_0^1 t^2\psi_2^2 dt = \frac{1148749951}{765765}$$

$$\bar{\lambda}_2 = 25,900$$

Enempi iterointi ei muuta ainakaan λ :n neljää ensimmäistä numeroa. Kun vastaavia arvoja käytetään (15):ssa, saadaan kiepahdusarvolle lauseke

$$F_{kr} = 25,90 \frac{\sqrt{B_1 C}}{l^2} \left\{ 1 - 2,561 \cdot \frac{a}{l} \sqrt{\frac{B_1}{C}} + \dots \right\}$$

Ne tapaukset, joissa palkin päissä on joustavia kiinnityksiä, eivät ole periaatteeltaan olennaisesti vaikeammin käsiteltäviä, vain numerolaskut luonnollisesti muodostuvat pitemmiksi.