

TASAPAINOYHTÄLÖIDEN DISKRETOINTI

EERO-MATTI SALONEN

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5
No 3 1972 ss. 396-421; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

YHTEENVETO

Kirjoituksessa on selostettu, kuinka jännityksiä koskevat differentiaaliyhtälöt ja reunaehdot voidaan diskretoida käyttäen virtuaalisten siirtymien periaatetta sekä elementtimenetelmän paikallisia muotofunktioita. Menetelmää on sovellettu tasojännitystapaukseen sekä laatan ja palkin taivutukseen. Saadut diskreetit yhtälöt muistuttavat läheisesti differenssimenetelmän vastaavia yhtälöitä. Diskreettien tasapainoyhtälöiden hyväksikäyttöä plastiusteorian alarajalauseen ja komplementaarisen energian minimiperiaatteen yhteydessä on lisäksi käsitelty lyhyesti. Menetelmän etuna differenssimenetelmään verrattuna voidaan pitää sen soveltuvuutta epäsäännöllisen muotoisille rakenteille.

1. JOHDANTO

Kappaleessa vaikuttavien jännitysten on tunnetusti toteutettava tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(Annetut suureet on merkitty edellä ja seuraavassa tarvittaessa suureen päällä olevalla vaakaviivalla.) Käytettäessä numeerisia menetelmiä on yleistä, että vallitsevat yhtälöt diskretoidaan siten, että käsitellään vain tietyissä pisteissä olevia suureiden arvoja. Differentssimenetelmässä nämä pisteet valitaan tavallisesti tasaisin välein ja differentiaalilausekkeet korvataan numeerisesta matematiikasta tutuilla differentssikaavoilla. Täten esim. tasojännitystapauksen differentiaaliyhtälöiden

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} = 0 \quad (2b)$$

tilalle saadaan diskreetit yhtälöt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sigma_x}{2a} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{2a} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{X} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{2a} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sigma_y}{2a} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{Y} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Ne on esitetty kaaviollisessa muodossa verkolle, jonka solmuväli on a sekä x -akselin (vasemmalta oikealle) että y -akselin (ylhäältä alas-

päin) suunnassa. Piste, jossa yhtälöiden katsotaan olevan voimassa, on pienen neliön sisällä. Kaavioissa esiintyvät luvut ovat kertoimia, joilla vastaavissa pisteissä olevat kaavioiden vieressä esiintyvien suureiden arvot kerrotaan. Yhtälöiden vasemmat puolet muodostetaan laskemalla yhteen saadut tulot. Kuten nähdään ovat kaavat tässä tapauksessa hyvin yksinkertaiset. Kuitenkin on usein niin, ettei verkon solmupisteitä voida sijoittaa säännöllisesti rakenteessa olevien aukkojen ja epäsäännöllisyyksien takia. Usein on myös tarkkuuden lisäämiseksi tietyillä alueilla syytä vaihdella solmupisteiden tiheyttä. Differenssikaavojen johtaminen joka pisteelle on tällöin melko hankalaa. Tehtävää voidaan silloin lähestyä vaihtoehtoisesti toisella tavoin käyttäen hyväksi virtuaalisten siirtymien periaatetta ja elementtimenetelmän paikallisia muotofunktioita.

2. VIRTUAALISTEN SIIRTYMIEN PERIAATTEEN SOVELTAMINEN

Virtuaalisten siirtymien periaatteen mukaan staattisesti luovallisen (st. luv.) jännitystilän vallitessa on jännitysten $\{\sigma\}$ tekemä virtuaalinen työ yhtä kuin ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ eli

$$\int_V \{\sigma\}^T \delta\{\epsilon\} dV - \left(\int_V \{\bar{p}\}^T \delta\{f\} dV + \text{Reunatermit} \right) = 0 \quad (4)$$

Integrointi on edellisessä suoritettava tarkasteltavan kappaleen tilavuuden V yli. Merkintä $\{ \}$ tarkoittaa $n \times 1$ matriisia eli pystyvektoria ja yläindeksi T matriisin transponointia. $\{\bar{p}\}$ esittää tilavuusvoimien komponenteista \bar{X} , \bar{Y} ja \bar{Z} muodostettua vektoria, ja $\delta\{f\}$ vastaavista virtuaalisista siirroskomponenteista δu , δv ja δw muodostettua vektoria. Reunatermeillä tarkoitetaan kappaleen

reunoilla vaikuttavien voimien tekemää virtuaalista työtä. Niiden eksplisiittistä lauseketta ei ole tässä esitetty. Virtuaaliset muodonmuutokset $\delta\{\epsilon\}$ riippuvat virtuaalisista siirtymistä $\delta\{f\}$ vallitsevan muodonmuutos-siirtymälain mukaisesti.

Kaavaa (4) sovellettaessa on tärkeätä muistaa ensinnäkin, että jännitysten ei tarvitse olla mitään todellisia tietyn jännitysmuodonmuutoslain alaisina rakenteeseen ulkoisten kuormien vaikutuksesta syntyneitä jännityksiä. Riittää, että jännitykset ovat st. luv. Toisin sanoen niiden on vain toteutettava jännityksiä koskevat tasapainoyhtälöt kappaleen sisällä ja reunalla. Toiseksi on syytä muistaa, että virtuaaliset siirtymät ovat mielivaltaisia äärettömän pieniä ajateltuja siirtymiä. Näin ollen niiden ei tarvitse välttämättä toteuttaa rakenteen todellisille siirtymille asetettuja geometrisia reunaehtoja eikä olla jatkuvia itse kappaleessa, kunhan vain epäjatkuuskohdissa suoritettu virtuaalinen työ otetaan reunatermien avulla asiaankuuluvasti huomioon [1, s. 25].

Kirjoitetaan kaava (4) jatkoa varten kehitettynä tasojännitystapaukselle ($dV = 1 \cdot dx dy$):

$$\iint_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy - \left(\iint_A (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) dx dy + \right. \\ \left. + \text{Reunatermit} \right) = 0 \quad (5)$$

Muodonmuutos-siirtymäyhtälöiden

$$\{\epsilon\} \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

perusteella saadaan virtuaalisten muodonmuutosten lausekkeiksi

$$\delta\{\epsilon\} \equiv \begin{Bmatrix} \delta\epsilon_x \\ \delta\epsilon_y \\ \sigma\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial(\delta u)/\partial x \\ \partial(\delta v)/\partial y \\ \partial(\delta v)/\partial x + \partial(\delta u)/\partial y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

jotka on ajateltava sijoitetuiksi yhtälöön (5).

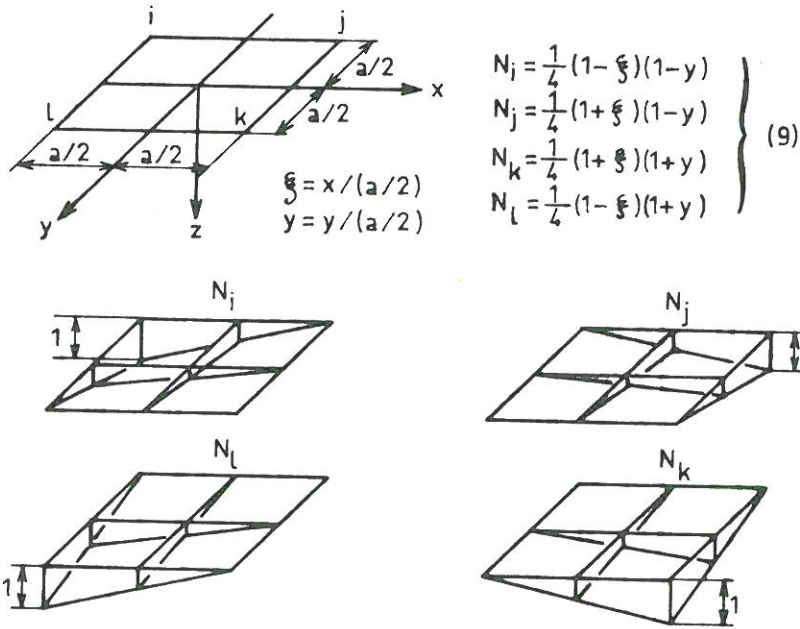
Virtuaalisten siirtymien periaatteen lisäksi käytetään hyväksi elementtimenetelmän käsitteitä. Jaetaan tarkastelun alainen rakenne osa-alueisiin eli elementteihin ja kuvataan jännitysten jakautuma kussakin elementissä elementin nurkkapisteissä r vallitsevien diskreettien jännitysarvojen $\{\sigma\}_r$ ja valittujen muotofunktioiden $[N(x,y,z)]_r$ (matriisi) avulla muodossa

$$\{\sigma\} = \sum_r [N]_r \{\sigma\}_r \quad (8)$$

Yhtälöä (5) voidaan pitää ehtona st. luv. jännitystilan olemassaololle. Kaavojen (8) antamat jännitysten jakautumat eivät yleensä pysty toteuttamaan millään nurkkajännitysten $\{\sigma\}_r$ arvoilla tasapainoyhtälöitä (2) täsmällisesti. Kuitenkin sijoittamalla arvot (8) yhtälöön (5) ja valitsemalla mielivaltaisen virtuaalinen siirtymä $\delta\{f\}$ voidaan integroinnit suorittaa ja tulokseksi saadaan yhtälö yleisesti ottaen rakenteen kaikkien diskreettien jännitysarvojen $\{\sigma\}_r$ välille, joka voidaan käsittää ehdoksi tasapainoyhtälöiden keskimääräiselle toteutumiselle rakenteessa. Tarpeelliset laskelmat vähenevät huomattavasti, jos virtuaaliset siirtymät valitaan paikallisiksi. Koska jännityksiä varten on jo valittu elementti-verkko, on yksinkertaisinta käyttää myös virtuaalisten siirtymien esittämiseen samaa verkkoa ja ehkä lisäksi myös samoja muotofunktioita. Täten virtuaalisiksi siirtymätiloiksi valitaan seuraavassa systemaattisesti tilat, jotka seuraavat antamalla rakenteen kussakin nurkkapisteessä vuorotellen kullekin virtuaaliselle siirtymäkomponentille nollasta eroava arvo. Tällöin integroinnit rajoittu-

vat vain tähän nurkkapisteeseen liittyviin elementteihin ja saaduis, sa diskreeteissä tasapainoyhtälöissä ovat mukana samoin vain ko. elementtien nurkkajännitykset.

Tarkastellaan edellä esitetyn sovellutuksena tasojännitystausta ja säännöllistä neliöelementtiverkkoa. Kullakin elementillä ijkl (kuva 1) on neljä nurkkapistettä. Muotofunktioiksi otetaan siirtymämenetelmässä yleisesti käytetyt [2, s. 109] funktiot (9) (kuva 1).



Kuva 1. Neliöelementti ijkl ja muotofunktiot N_i , N_j , N_k ja N_l .

Kaavan (8) esitysmuotoa käyttäen ovat jännitykset elementissä ijkl

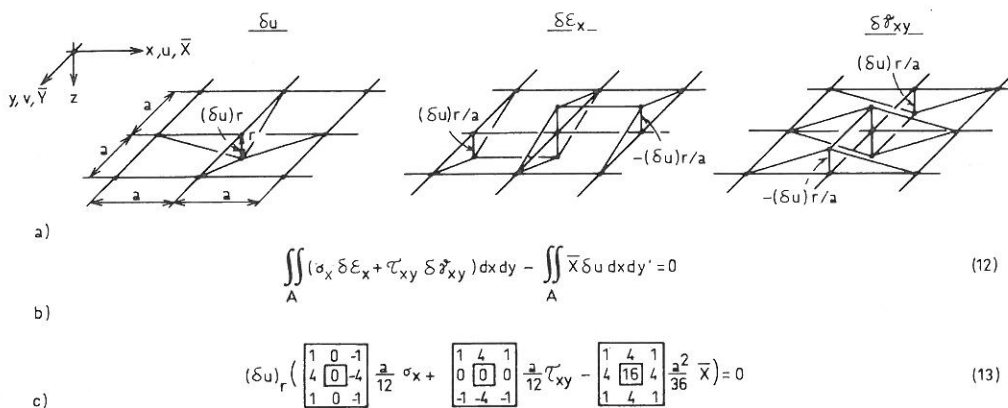
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_j +$$

$$+ \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k + \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_1 \quad (10)$$

tai yksinkertaisemmin esim. σ_x :lle

$$\sigma_x = N_i \cdot (\sigma_x)_i + N_j \cdot (\sigma_x)_j + N_k \cdot (\sigma_x)_k + N_1 \cdot (\sigma_x)_1 \quad (11)$$

Annetaan nyt elementtiverkon nurkkapisteelle r x -akselin suuntainen virtuaalinen siirtymä $(\delta u)_r \neq 0$. Käyttämällä muotofunktioita (9) myös virtuaalisien siirtymien kuvaamiseen kaavan (11) tapaan seuraa tästä kuvassa 2a näkyvä virtuaalinen siirtymätila. Virtuaaliset muodonmuutokset $\delta \epsilon_x$ ja $\delta \gamma_{xy}$ saadaan soveltamalla kaavoja (7). δv ja $\delta \epsilon_y$ häviävät valitussa siirtymätilassa. Kaava (5) supistuu nyt muotoon (12) (kuva 2b), jossa integroinnit ulottuvat vain neljän elementin alueelle, koska virtuaaliset siirtymät häviävät muualla rakenteessa. Suorittamalla laskelmat saadaan yhtälö (13) (kuva 2c)



Kuva 2. a) Virtuaalisesta siirtymästä $(\delta u)_r$ syntyvä virtuaalinen siirtymä- ja muodonmuutostila.
 b) Vastaava virtuaalinen työyhtälö.
 c) Vastaava diskreetti virtuaalinen työyhtälö.

Koska $(\delta u)_r \neq 0$, seuraa tästä sievennysten jälkeen yhtälö (14a)

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sigma_x}{2a} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{2a} + \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \bar{X} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\tau_{xy}}{2a} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sigma_y}{2a} + \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \bar{Y} = 0 \quad (14b)$$

Yhtälö (14b) seuraa vastaavasti antamalla nurkkapisteelle r y -akselin suuntainen virtuaalinen siirtymä $(\delta v)_r$. Pienessä neliössä oleva piste merkitsee kaavoissa (14) nurkkapistettä, jossa virtuaaliset nurkkasiirtymät on annettu. Vertaamalla kaavoja (14) differenssimenetelmän kaavoihin (3) havaitaan, että saadut yhtälöt voidaan ajatella eräänlaisiksi Simpsonin integroimiskaavan tapaan painotetuiksi keskiarvoiksi differenssimenetelmän yhtälöistä. Integrointeja suoritettaessa on myös tilavuusvoimien \bar{X} ja \bar{Y} jakautuma approksimoitu muotofunktioiden (9) avulla. Tämä ei ole tietenkään välttämätöntä, koska tilavuusvoimien ollessa tunnettuja suureita niiden osuus voidaan laskea haluttaessa käyttäen niiden todellista jakautumista.

Seuraavana sovellutuksena tarkastellaan laatan taivutusta. Vallitseva tasapainoyhtälö on käytettäessä kuvan 3a merkintöjä

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \bar{q} = 0 \quad (15)$$

Differenssimenetelmän avulla saatu normaali diskreetti vastine on

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{M_x}{a^2} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{M_{xy}}{4a^2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{M_y}{a^2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{q} = 0 \quad (16)$$

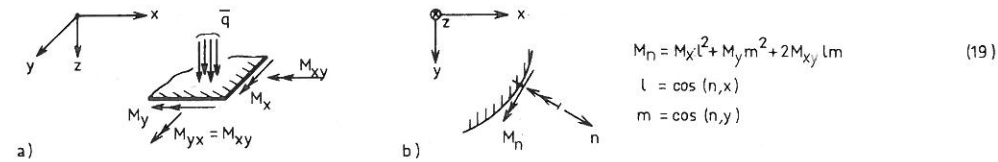
Laattateorian otaksumien johdosta yleisestä virtuaalisesta työyhtälöstä (4) tulee nyt yhtälö

$$\iint_A (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + 2M_{xy} \delta \kappa_{xy}) dx dy - \left(\iint_A \bar{q} \delta w + \text{Reunatermit} \right) = 0 \quad (17)$$

jossa virtuaaliset käyritymät $\delta \kappa_x$, $\delta \kappa_y$ sekä virtuaalinen vääntymä $\delta \kappa_{xy}$ riippuvat virtuaalisesta taipumasta δw seuraavasti

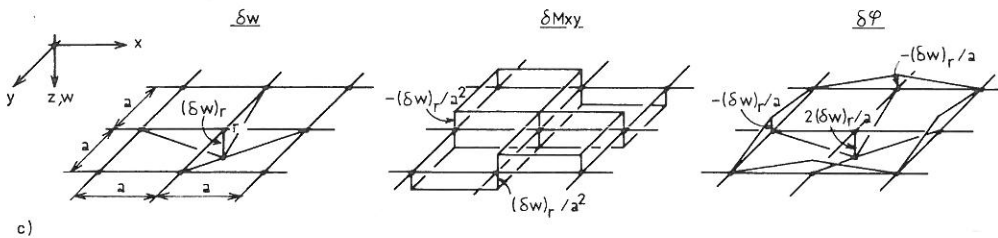
$$\begin{Bmatrix} \delta \kappa_x \\ \delta \kappa_y \\ \delta \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial^2(\delta w) / \partial x^2 \\ -\partial^2(\delta w) / \partial y^2 \\ -\partial^2(\delta w) / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Valitaan jälleen säännöllinen neliöelementeistä muodostettu elementtiverkko ja kuvataan voimasuureiden M_x , M_y , M_{xy} sekä myös virtuaalisen siirtymän δw jakautuma muotofunktioiden (9) avulla. Antamalla



$$M_n = M_x l^2 + M_y m^2 + 2M_{xy} lm \quad (19)$$

$l = \cos(n, x)$
 $m = \cos(n, y)$



$$\sum \int M_x \delta \varphi dy + 2 \iint_A M_{xy} \delta \kappa_{xy} dx dy + \sum \int M_y \delta \varphi dx - \iint_A \bar{q} \delta w dx dy = 0 \quad (20)$$

$$(\delta w)_r \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 8 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{M_x}{6} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{M_{xy}}{4} + \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \frac{M_y}{6} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{a^2}{36} \bar{q} \right) = 0 \quad (21)$$

Kuva 3. a) Laatan voimasuureet. b) Normaalimomentti M_n . c) Virtuaalisesta siirtymästä $(\delta w)_r$ syntyvä virtuaalinen siirtymä- ja muotonmuutostila. d) Vastaava virtuaalinen työyhtälö. e) Vastaava diskreetti virtuaalinen työyhtälö.

nurkkapisteelle r virtuaalinen siirtymä $(\delta w)_r$ saadaan kuvassa 3c näkyvä virtuaalisten siirtymien ja muodonmuutosten jakautuma. Valittu siirtymätila johtaa siis laatan katkeamiseen elementtien reunaviivoilla. Koska virtuaaliset siirtymät saavat olla mielivaltaisia, on tämä täysin sallittua ja laskelmien kannalta onkin helpompaa käyttää mahdollisimman yksinkertaisia virtuaalisia siirtymiä eikä esim. laatan siirtymämenetelmän muotofunktioita, jotka vaativat taipuman ensimmäisten derivaattojen jatkuvuutta. Nivelkohdissa suoritettu virtuaalinen työ on otettava huomioon joko ajattelemalla nivelien kummatkin puolet kappaleen rajapinnoiksi ja käsittämällä niissä vaikuttavat jännitykset ulkoisiksi reunavoimiksi tai mikäli halutaan laskea virtuaalinen työ sisäisten voimien tekemänä, voidaan virtuaalisten käyritymien kuvaajina käyttää Diracin δ -funktiota [3], [4]. Kuvaan 3c on piirretty näkyviin nivelkohdissa syntyneiden kulmanmuutosten $\delta\phi$ jakautumat. Kulmanmuutosta, joka aiheuttaa "venymän" laatan alapintaan, pidetään positiivisena. Pitämällä nivelien suuntaisten akselien suhteen vaikuttavia normaalimomenteja M_n ulkoisina voimina saadaan reunatermit kaavassa (17) viivaintegraaleina

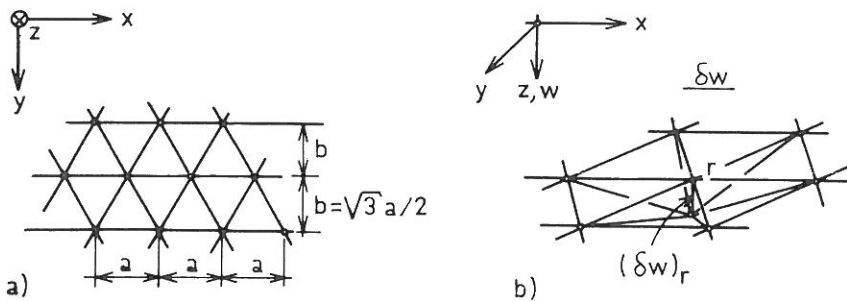
$$\Sigma - \int M_n \delta\phi ds$$

pitkin elementtien reunaviivoja. Koska normaalimomentti on tässä kaavan (19) (kuva 3b) perusteella x -akselin suunnissa integroitaessa M_y ja y -akselin suunnissa integroitaessa M_x ja koska $\delta\kappa_x$ ja $\delta\kappa_y$ häviävät itse elementtien alueilla, saa virtuaalinen työyhtälö lopuksi muodon (20) (kuva 3d). Suorittamalla integroinnit (\bar{q} :n jakautuma on approksimoitu muotofunktioiden avulla) saadaan ensin työyhtälö (21) ja tästä sieventämällä lopuksi yhtälö

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{M_x}{a^2} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{M_{xy}}{4a^2} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{M_y}{a^2} + \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \bar{q} = 0 \quad (22)$$

joka muistuttaa jälleen vastaavaa differenssimenetelmän yhtälöä (16).

Kuvassa 4d on vielä esitetty diskreetti tasapainoyhtälö (24) tasasivuisista kolmioelementeistä koostuvalle laatalle (kuva 4a). Elementeillä on kolme nurkkapistettä, ja muotofunktiot ovat lineaarisia x:n ja y:n suhteen [2, s. 49], joten nyt kaikki muodonmuutokset häviävät itse elementeissä ja virtuaalinen työyhtälö supistuu muotoon (23) (kuva 4c). Kulmanmuutokset $\delta\phi$ ovat nurkkapisteeseen r (kuva 4b) liittyvillä elementtien reunoilla suuruudeltaan $(\delta w)_r/b$ ja ulkopuolisilla reunoilla $-(\delta w)_r/b$. Ottamalla huomioon kaava (19)



$$c) \quad \sum \int M_n \delta \varphi ds - \iint_A q \delta w dx dy = 0 \quad (23)$$

$$d) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_{xy} \\ M_y \\ \bar{q} \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

Kuva 4. a) Tasasivuisista kolmioelementeistä muodostettu verkko. b) Virtuaalisesta siirtymästä $(\delta w)_r$ syntyvä virtuaalinen siirtymätila. c) Vastaava virtuaalinen työyhtälö. d) Vastaava diskreetti tasapainoyhtälö.

ja suorittamalla laskelmat saadaan lopuksi diskreetti tasapainoyhtälö (24), joka on kuormitustermejä lukuunottamatta identtinen differenssimenetelmällä [5] saadun tuloksen kanssa.

3. REUNAEDDOT

Staattisesti luvallisessa jännitystilassa on jännitysten toteutettava paitsi tasapainoyhtälöt kappaleen sisällä myös jännityksiä koskevat reunaehdot (mekaaniset reunaehdot) eli sisäisten jännitysten on oltava tasapainossa kappaleen pinnalla vaikuttavien annettujen ulkoisten voimien kanssa. Esim. tasojännitystapauksessa ovat reunaehdot

$$T_x \equiv \sigma_x l + \tau_{xy} m = \bar{T}_x \quad (25a)$$

$$T_y \equiv \tau_{xy} l + \sigma_y m = \bar{T}_y \quad (25b)$$

jossa \bar{T}_x ja \bar{T}_y ovat ulkoisten voimien x- ja y-akselin suuntaiset komponentit pintayksikköä kohti ja l ja m pinnan ulkoisen normaalin suuntakosinit (kuva 5a). Differenssimenetelmässä nämä yhtälöt voidaan kirjoittaa sellaisinaan kappaleen reunalla olevissa solmu-pisteissä. Käytettäessä virtuaalisten siirtymien periaatetta tulee reunaehtoien vaikutus taasen automaattisesti mukaan annetuista reu-navoimista syntyvien termien kautta. Esim. kuvan 5c esittämässä tapauksessa on virtuaalinen työyhtälö

$$\iint_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy - \left(\iint_A \bar{X} \delta u dx dy + \int_B \bar{T}_x \delta u ds \right) = 0 \quad (26)$$

jonka diskreetti muoto on käytettäessä muotofunktioita (9)

$$(\delta u)_r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{a}{12} \sigma_x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \frac{a}{12} \tau_{xy} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{a^2}{36} \bar{X} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{a}{6} \bar{T}_x \right) = 0 \quad (27)$$

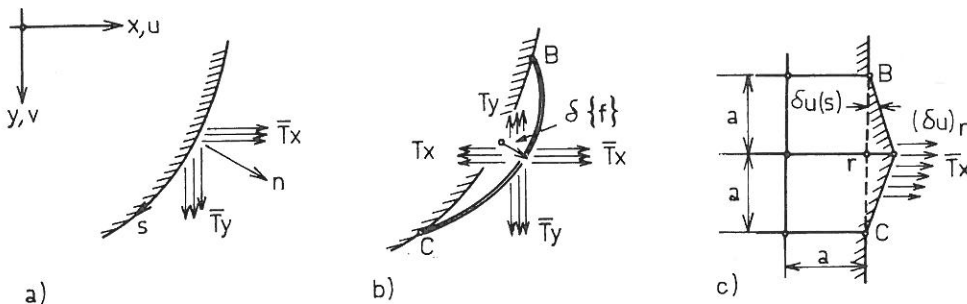
Yhtälö (27) on yhdistelmä jännitysten reunaehdosta sekä tasapainoyhtälöstä itse kappaleessa. Tämä nähdään kehittämällä jännitykset ja ulkoiset voimat Taylorin kehitelmäksi pisteen r suhteen ja säilyttämällä a :n alimmat potenssit, jolloin yhtälöstä (27) seuraa aluksi

$$(\sigma_x)_r - (\bar{T}_x)_r - \frac{a}{2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} \right)_r = 0 \quad (28)$$

Elementtien koon lähestyessä nollaa lähestyy yhtälö (28) lopuksi pisteittäistä reunaehto (25a).

Haluttaessa reunaehdot voidaan pyrkiä toteuttamaan käyttäen vain kappaleen reunalla olevia jännitysten arvoja valitsemalla virtuaaliset siirtymät sopivasti. Ajatellaan rakenteen reunalta erotetuksi äärettömän ohut kerros materiaalia ja annetaan vain tälle kerrokselle virtuaalinen siirtymä $\delta\{f(s)\}$ (kuva 5b). Jännitysten tekemä virtuaalinen työ häviää kerroksen tilavuuden ollessa äärettömän pieni. Ulkoisina voimina vaikuttavat kerroksen ulkopinnalla annetut \bar{T}_x - ja \bar{T}_y -voimat sekä kerroksen sisäpinnalla jännityskomponenteista lasketut T_x - ja T_y -voimat. Virtuaalinen työyhtälö on

$$\int_B^C ((T_x - \bar{T}_x)\delta u + (T_y - \bar{T}_y)\delta v) ds = 0 \quad (29)$$



Kuva 5. a) Kappaleen reunalla vaikuttavien ulkoisten voimien komponentit \bar{T}_x ja \bar{T}_y pintayksikköä kohti. b) Reunasta erotetulle kaistalle annettu virtuaalinen siirtymä $\delta\{f\}$. c) Virtuaalisesta siirtymästä $(\delta u)_r$ syntyvä virtuaalinen siirtymätila.

Virtuaaliset siirtymät voidaan edelleen esittää muotofunktioiden reuna-arvojen avulla. Jos lopuksi virtuaaliset siirtymät valitaan pisteettäisiksi Diracin δ -funktion avulla, päädytään differenssimenetelmän mukaisiin pisteettäisiin yhtälöihin.

Samoin kuin edellä reunaehtoja voidaan käsitellä muissakin (kuin tasojännitys) tapauksissa. Niinpä esim. laatan normaalimomenteja koskevia reunaehtoja tarkasteltaessa voidaan reunasta erotetulle kerrokselle antaa virtuaalisen kiertymän jakautuma pitkin reunaviivaa.

4. TASAPAINOYHTÄLÖIDEN KÄYTÖSTÄ

Jos rakenteelle on saatu virtuaalisten työyhtälöiden avulla m riippumatonta tasapainoyhtälöä n :n diskreetin jännityssuureen välille, on yleensä $n > m$ ja tasapainoyhtälöt eivät siis riitä yksinään jännitystilän määrittämiseen eli rakenne on st. määräämätön. Ratkaisuun tarvittavat lisäyhtälöt on tällöin johdettava muodonmuutosten yhteensopivuusehdoista rakenteen materiaalille kuuluvan muodonmuutos-jännityslain alaisena.

Kuitenkin voidaan joskus jo pelkkien tasapainoyhtälöidenkin avulla saada hyödyllisiä tuloksia. Jos nimittäin rakenteen analysoimiseksi saadaan käyttää plastisuusteoriaa ja kantokuormamenettelyä, voidaan soveltaa plastisuusteorian alarajalauseetta [6], jonka mukaan rakenne kestää sille asetetun kuormituksen, mikäli a) löydetään yksikin ko. kuormituksen suhteen staattisesti luvallinen jännitystila, jossa lisäksi b) myötöehtoa ei rikota missään pisteessä. Jokaista jännitystilaa, joka toteuttaa saadut diskreetit tasapainoyhtälöt, voidaan pitää diskreetissä mielessä staattisesti lu-

vallisenä. Valitsemalla $n - m$ jännityssuuretta $st.$ määräämättömiksi suureiksi $X_1, \dots, X_{(n-m)}$ ja antamalla näille mielivaltaiset arvot voidaan loput jännityssuureista ratkaista tasapainoyhtälöistä. Saatua ratkaisu täyttää siis ehdon a), joten rakenteen turvallisuuden osoittamiseksi riittää löytää jotkin $st.$ määräämättömien suureiden arvot (esim. kokeilemalla), joille myös ehto b) on voimassa. Helpompaa on kuitenkin käyttää alarajalauseetta mitoituksessa, jolloin $st.$ määräämättömien suureiden arvot voidaan valita mielivaltaisesti ja rakenne mitoittaa saadulle jännitystilalle siten, että myötöehtoa ei rikota.

Eräänä vaikeutena on ilmeisesti valita $st.$ määräämättömät suureet voimasuureiden joukosta. Kuten on tunnettua voimamenetelmän käytöstä ristikoille, voidaan $st.$ määräämättömät suureet (katkaistut sauvat) valita usein monella eri tavalla, mutta ei täysin mielivaltaisesti (ristikosta tulee helposti mekanismi). Diskreetoidulle kontinuumille on valinnan suorittaminen pelkästään harkinnan perusteella hyvin vaikeaa. Tällöin voidaan käyttää teoksessa [7] esitettyä Jordanin eliminointimenettelyä, joka valitsee $st.$ määräämättömät suureet automaattisesti tasapainoyhtälöistä vieläpä siten, että ne ovat pyöristysvirheiden välttämisen kannalta hyvin valitut.

Rakenteen käyttäytymisen selvittämiseksi käyttötilassa on tunnettava rakenteen materiaalin muodonmuutos-jännityslaki. Jos materiaali saadaan otaksua kimmoiseksi, voidaan $st.$ määräämättömien suureiden arvot määrittää sen tiedon perusteella, että $st.$ luovallisten jännitystilojen joukosta antaa todellinen tila rakenteen komplementaarisen energian lausekkeelle minimiarvon [1, s. 29]. Komplementaarisen energian lauseke Π_c koostuu annettujen siirtymien aiheuttamista reunatermeistä ja rakenteen jännityksissä ilmaistusta jännitysenergiasta. Jälkimmäinen saadaan diskreetille rakenteelle sum-

mana elementtien jännitysenergioista, jotka ovat funktioita diskreeteistä nurkkajännityksistä, jotka ovat taas funktioita diskreettien tasapainoyhtälöiden kautta riippumattomista suureista $X_1, \dots, X_{(n-m)}$. Nämä määritetään lopuksi yhtälöryhmästä (minimointiehdot)

$$\partial \Pi_c / \partial X_1 = 0, \dots, \partial \Pi_c / \partial X_{(n-m)} = 0 \quad (30)$$

Huomattavasti yksinkertaisempi tapa yhtälöiden muodostamisen kannalta on pitää kaikkia nurkkajännityksiä riippumattomina suureina ja tasapainoyhtälöitä sideyhtälöinä, jotka otetaan huomioon Lagrangen menetelmän [2, s. 37] avulla. Nyt kuitenkin tuntemattomien lukumäärä $n+m$ (n nurkkajännitystä + m Lagrangen kertojaa) kasvaa oleellisesti.

Edellä kuvattujen voimamenetelmien sijasta voidaan myös käyttää siirtymämenetelmää sijoittamalla diskreetteihin tasapainoyhtälöihin vallitsevien jännitys-muodonmuutos- ja muodonmuutos-siirtymälakien perusteella diskreetit siirtymät ja ratkaisemalla näin saaduista siirtymissä lausutuista tasapainoyhtälöistä ensin siirtymäsuureet. Tätä menettelytapaa on käytetty differenssimenetelmän avulla diskreetoiden laatan elasto-plastiseen analysoimiseen [8]. Menettelyn etuna on pidetty sitä, että syntyvässä fysikaalisesti epälineaarisisessa probleemassa itse tasapainoyhtälöt pysyvät koko ajan muuttumattomina.

5. SOVELLUTUS

Edellä esitettyjen käsitteiden havainnollistamiseksi on seuraavassa tarkasteltu hyvin yksinkertaista rakennetta (kuva 6a). Palkki on vasemmasta päästään jäykästi kiinnitetty ja oikeasta päästään vapaasti tuettu ja kuormitus \bar{q} pituusyksikköä kohti riippuu lineaari-

sesti x :stä. Rakenne on jaettu kahteen elementtiin, joilla kummallakin on kolme nurkkapistettä ijk (kuva 6b). Elementin jännitystilaa kuvaavat diskreetit voimasuureet ovat taivutusmomentin arvot M_i , M_j ja M_k vastaavissa pisteissä. Taivutusmomentin otaksuttu jakautuma elementissä on valittujen muotofunktioiden [2, s. 120] N_i , N_j ja N_k (kaavat (34)) avulla esitettyinä

$$M(x) = N_i(x)M_i + N_j(x)M_j + N_k(x)M_k \quad (31)$$

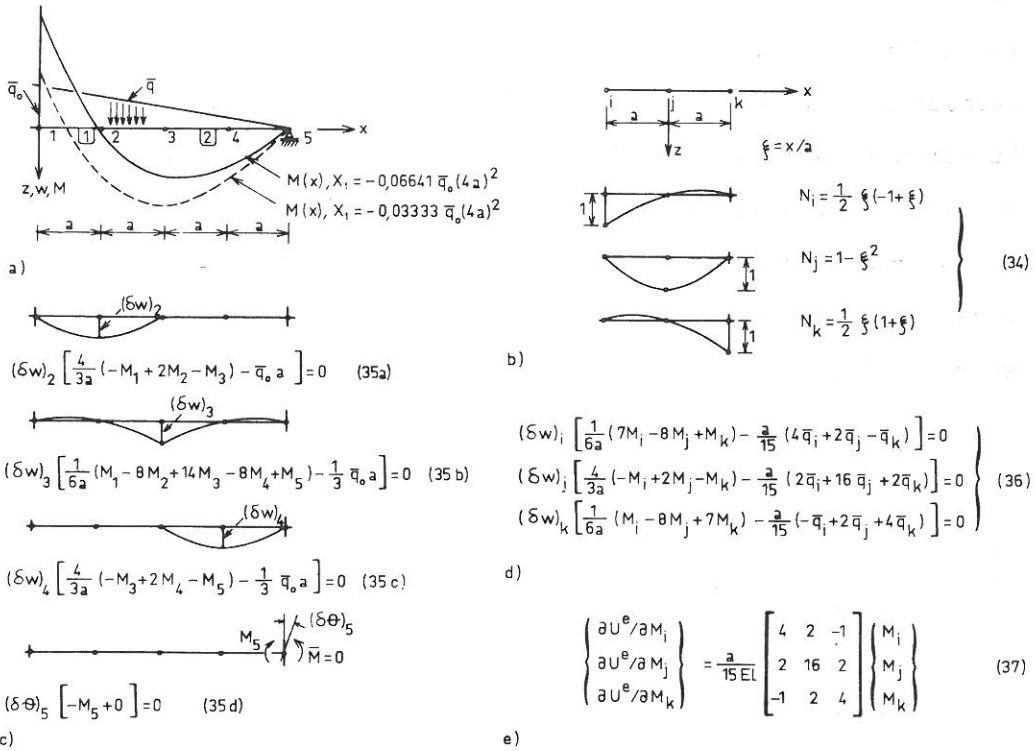
Annetaan nyt vuorotellen rakenteen nurkkapisteille r ($= 2, 3, 4$) virtuaalinen siirtymä $(\delta w)_r \neq 0$ ja esitetään virtuaalinen siirtymä δw muissa palkin pisteissä muotofunktioiden (34) avulla, jolloin saadaan kuvassa 6c näkyvät virtuaaliset siirtymätilat. Virtuaalinen työyhtälö on palkille

$$\int M \delta \kappa dx - (\int \bar{q} \delta w dx + \text{Reunatermit}) = 0 \quad (32)$$

jossa

$$\delta \kappa = - \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \quad (33)$$

Palkkiin syntyy virtuaalisista siirtymistä niveliä, joissa suoritettu virtuaalinen työ on otettava reunatermien avulla huomioon samaan tapaan kuin laatan yhteydessä on esitetty. Suorittamalla työyhtälöihin liittyvät laskelmat kertaalleen yleiselle elementille ijk (kuva 6d) saadaan itse rakennetta koskevat yhtälöt (35) helposti poimimalla tarvittavat termit yhtälöistä (36). Näitä yhtälöitä johdettaessa on nivelien muodostuminen pisteissä i ja k otettu jo huomioon, ja yleisen jatkuvan kuormituksen \bar{q} jakautuma on approksimoitu muotofunktioiden (34) avulla. Yhtälöihin (36) on helppo lisätä tarvittaessa muiden mahdollisten kuormitusten kuten esim. mielivaltaisessa pisteessä sijaitsevan pistekuorman aiheuttamat termit.



Kuva 6. a) Palkki ja kaksi st. luvallista momenttipintaa.
 b) Palkkielementti ijk ja muotofunktiot N_i , N_j ja N_k .
 c) Virtuaaliset siirtymätilat ja vastaavat diskreetit työyhtälöt
 d) Elementille muodostetut diskreetit virtuaaliset työyhtälöt
 e) Elementin jännitysenergian osittaisderivaattojen lausekkeet

Työyhtälöistä (35) seuraa sievennysten jälkeen yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} - \bar{q}_0 a^2 \begin{Bmatrix} 3/4 \\ 2 \\ 1/4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Viimeinen yhtälöistä (38) on itsestään selvä, mutta se on tässä haluttu johtaa työyhtälön (35d) avulla antamalla luvussa 3 esitetyllä tavalla rakenteen reunasta erotetulle äärettömän ohuelle kerrokselle virtuaalinen siirtymä $(\delta\theta)_5$. Yhtälöryhmässä (38) on viisi jännitysuuretta, joita sitoo neljä tasapainoyhtälöä, joten rakenne on kerran st. määräämätön kuten hyvin tiedetään tavanomaisen palkkiteorian perusteella. Jordanin menetelmää käyttäen tulee st. määräämättömäksi suureeksi X_1 tukimomentti M_1 ja yhtälöryhmä muuntuu muotoon

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \{X_1\} + \bar{q}_0 a^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 7/8 \\ 1 \\ 5/8 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Antamalla X_1 :lle (= M_1) mielivaltainen arvo ja laskemalla vastaavat voimasuureet M_1, \dots, M_5 yhtälöistä (39) saadaan siis ratkaisu, joka on st. luvallinen. Jos palkki mitoitetaan siten, että laskettu taivutusmomentti ei ylitä missään pisteessä palkin kantomomenttia, rakenne on alarajalauseen perusteella varmemmalla puolella. Tässä yhteydessä merkitsee siis alarajalauseen käyttö tuttua periaatetta, jonka mukaan palkin tukimomentit voidaan mitoitettaessa valita vapaasti, kunhan kenttämomenteja laskettaessa momenttipinnan sulkuviivan asema otetaan tukimomenttien arvojen mukaisesti.

Määritetään vielä rakenteen jännitystila komplementaarisen energian minimin periaatteen avulla olettaen palkin materiaalin olevan lineaarisesti kimmoista. Teknillisen taivutusteorian mukaan on elementin jännitysenergia

$$U^e = \frac{1}{2EI} \int_{-a}^a (M(x))^2 dx \quad (40)$$

jossa palkin taivutusjäykkyys EI on otaksuttu vakioksi. Sijoittamalla yhtälöön (40) taivutusmomentin lauseke (31) ja suorittamalla integrointi tulee U^e :stä elementin diskreettien momenttiarvojen funktio $U^e(M_i, M_j, M_k)$. Koska annetut siirtymät ovat nollan suuruisia, saadaan rakenteen komplementaariseksi energiaksi yksinkertaisesti

$$\begin{aligned}\Pi_C &= \sum_{e=1}^2 U^e = U^1(M_1, M_2, M_3) + U^2(M_3, M_4, M_5) = \Pi_C(M_1, \dots, M_5) = \\ &= \Pi_C(M_1(X_1), \dots, M_5(X_1)) = \Pi_C(X_1)\end{aligned}\quad (41)$$

Yhtälöryhmä (30) supistuu tässä yhdeksi yhtälöksi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_C}{\partial X_1} &\equiv \sum_{e=1}^2 \frac{\partial U^e}{\partial X_1} \equiv \frac{\partial U^1}{\partial M_1} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U^1}{\partial M_2} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U^1}{\partial M_3} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial X_1} + \\ &+ \frac{\partial U^2}{\partial M_3} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial X_1} + \frac{\partial U^2}{\partial M_4} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial X_1} + \frac{\partial U^2}{\partial M_5} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial X_1} = 0\end{aligned}\quad (42)$$

josta X_1 :n arvo voidaan määrittää. Termit $\partial U^e / \partial M_i$, $\partial U^e / \partial M_j$, $\partial U^e / \partial M_k$ lasketaan kertaalleen valmiiksi (kuva 6e) käytettäväksi yhtälössä (42). Yhtälön (42) muodostamisessa täytyy lisäksi käyttää hyväksi yhtälöitä (39). Koska tämä on hieman hankalaa, sovelletaan tässä Lagrangen kertojamenettelyä ja määritetään tuntemattomat M_1, \dots, M_5 , $\lambda_2, \dots, \lambda_5$ yhtälöryhmästä

$$\partial \Pi_C^+ / \partial M_1 = 0, \dots, \partial \Pi_C^+ / \partial M_5 = 0, \quad \partial \Pi_C^+ / \partial \lambda_2, \dots, \partial \Pi_C^+ / \partial \lambda_5 = 0 \quad (43)$$

jossa

$$\begin{aligned}\Pi_C^+ &= U^1(M_1, M_2, M_3) + U^2(M_3, M_4, M_5) + \lambda_2(-M_1 + 2M_2 - M_3 - \\ &- \frac{3}{4} \bar{q}_0 a^2) + \dots + \lambda_5(M_5 - 0)\end{aligned}\quad (44)$$

Vertaamalla lauseketta (44) virtuaalisiin työyhtälöihin (35) nähdään, että Lagrangen kertojat $\lambda_2, \dots, \lambda_5$ vastaavat itse asiassa ter-

mejä $(\delta w)_2, \dots, (\delta \theta)_5$. Yhtälöryhmäksi (43) saadaan

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 8 & 14 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 14 & 0 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 16 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \lambda_2 \\ M_3 \\ \lambda_3 \\ M_4 \\ \lambda_4 \\ M_5 \\ \lambda_5 \end{Bmatrix} = \bar{q}_0 a^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

jonka ratkaisu johtaa kuvassa 6a esitettyyn momenttipintaan ($X_1 = -0,06641 \bar{q}_0 (4a)^2$). Diskretoinnista johtuva virhe on tarkkaan ratkaisuun verrattuna sekä tuella että palkin keskipisteessä n. 0,4 %. Kuvaan on lisäksi piirretty mielivaltaista X_1 :n arvoa $-0,03333 \bar{q}_0 (4a)^2$ vastaava kaavojen (39) mukaan laskettu momenttipinta.

6. LOPPUTOTEAMUKSIA

Staattisesti luovallisilla jännitystiloilla on tärkeä merkitys statiikassa, koska jokaisen todellisen rakenteessa vallitsevan jännitystilan on välttämättä oltava staattisesti luovallinen ja koska esim. plastisuusteorian alarajalauseen ja komplementaarisen energian minimiperiaatteen yhteydessä staattisesti luovalliset jännitystilat muodostavat suoranaisten lähtökohdan laskelmille. Edellä on käsitelty diskretoituja tasapainoyhtälöitä ja staattisesti luovallisilla jännitystiloilla on tällöin tarkoitettu niitä tiloja, joissa diskreetit tasapainoyhtälöt toteutuvat. Todelliselle rakenteelle nämä tilat ei-

vät kuitenkin ole yleensä tarkasti ottaen staattisesti luovallisia. Käsitelystehdyn virheen suuruudesta voidaan saada seuraavalla tavalla. Koska diskreetit arvot määrittävät muotofunktioiden kautta jännitysten jakautuman joka pisteessä, voidaan kontinuumin tasapainoyhtälöitä soveltaa myös käänteisessä mielessä pitäen jännityksiä tunnettui-
na suureina ja laskea kuormitukset, jotka vaaditaan pitämään rakenne tasapainossa. Täten saadaan esim. yhtälöiden (2) avulla

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \\ Y &= -\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (46)$$

Näin lasketulle kuormitukselle on jännitystila kontinuumille staattisesti luovallinen. Vertaamalla laskemalla saatua kuormitusta todelliseen kuormitukseen voidaan siis saada arvio diskreetoinnissa syntyvästä virheestä. Esim. luvussa 5 käsitellyn palkin suhteen on helppo todeta, että diskreetti rakenne pystyy ottamaan vastaan vain kuormituksia, jotka muodosttuvat tasaisesta kuormasta kussakin elementissä sekä pistekuormista elementtien päätepisteissä. Laskettua lineaarisesti kimmoista diskreettiä ratkaisua vastaava kuormitus on seuraava: tasainen kuorma $3/4 \bar{q}_0$ elementillä 1 ja kuorma $1/4 \bar{q}_0$ elementillä 2, mikä on ilmeisesti melko hyvä approksimaatio todelliselle lineaarisesti muuttuvalle kuormitukselle. On huomattava, että esim. komplementaarisen energian minimin periaatetta käytettäessä syntyy yleensä vielä lisävirheitä johtuen siitä, että saatua jännitystilaa vastaavat muodonmuutokset täyttävät yhteensopivuusehdot vain keskimääräisessä muodossa.

Tämä kirjoitus perustuu useissa kohdin Giencken artikkeleihin [3] ja [4], joissa käytetyssä diskreetissä menetelmässä on so-

vellettu taitavalla tavalla yhtäaikaisesti virtuaalisten siirtymien ja virtuaalisten voimien periaatetta suorakaiteen muotoisten lineaarisesti kimmoisten levyjen ja laattojen analysointiin ja saatu välillä tuntemattomien lukumäärällä hyvin tarkkoja tuloksia. Giencken menetelmää samoin kuin differenssimenetelmää on kuitenkin vaikeaa soveltaa epäsäännöllisille rakenteille. Vaikka tässä kirjoituksessa on käsitelty vain yksinkertaisia säännöllisiä tapauksia, pitäisi esitetyn menetelmän olla periaatteessa helposti yleistettävissä monimutkaisille rakenteille käyttämällä esim. käyräviivaisia isoparametrisia elementtejä ja numeerista integroimista [2, s. 129]. Työyhtälöiden muodostaminen käsin on käytännössä jo yksinkertaisillekin rakenteille liian suuritöinen tehtävä, joten on joka tapauksessa turvauduttava tietokoneeseen ja tällöin ei rakenteen mutkikkuudella ole enää oleellista merkitystä.

Virtuaalisten siirtymien periaatetta voidaan soveltaa myös geometrisesti epälineaarisisille rakenteille, mutta tällöin on virtuaalisten siirtymien ajateltava tapahtuvan rakenteen muuttuneen geometrian suhteen ja saadut tasapainoyhtälöt sisältävät myös siirtymäsuureita. Virtuaalisten siirtymien esittämiseen voidaan käyttää eri muotofunktioita kuin itse siirtymien esittämiseen, koska edellisten ei tarvitse olla ajateltuina suureina yhtä jatkuvia kuin todellisten siirtymien.

Tässä kirjoituksessa on virtuaalisten siirtymien periaatetta käytetty tavalla, joka voidaan matemaattiselta kannalta tulkita valitsevien yhtälöiden diskretoinniksi käyttäen painotetun jäännöksen menetelmää (weighted-residual method [9], [2, s. 39]). Tarkastellaan tasojännitystapausta, jolloin jännitysten on oltakseen staattisesti luvallisia toteutettava differentiaaliyhtälöt (2) itse kappaleessa

A ja reunaehdot (25) reunalla S_σ (reunan osa, jolla on annettu mekaanisia reunaehtoja). Diskreettien arvojen ja muotofunktioiden avulla esitetyt jännitykset eivät yleensä pysty toteuttamaan vallitsevia yhtälöitä tarkasti, vaan syntyy virhe tai jäännös $R \neq 0$. Esim. yhtälöille (2a) ja (25a) on

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= R_1(x, y) \neq 0 \\ \bar{T}_x - \sigma_x \ell - \tau_{xy} m &= R_2(s) \neq 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Virheet R_1 ja R_2 yritetään saada painotetun jäännöksen menetelmässä mahdollisimman pieniksi alueilla A ja S_σ asettamalla ehtoja

$$\iint_A R_1(x, y) W(x, y) dx dy + \int_{S_\sigma} R_2(s) W(s) ds = 0 \quad (48)$$

joissa W on kulloinkin valittu painofunktio. Suorittamalla integroinnit voidaan siis saada diskreettejä jännitysarvoja koskeva yhtälöryhmä.

Muunnetaan ehtoa (48) osittaisintegroinnin avulla:

$$\iint_A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} W + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} W \right) dx dy + \iint_A \bar{X} W dx dy + \int_{S_\sigma} (\bar{T}_x - \sigma_x \ell - \tau_{xy} m) W ds \equiv \quad (49a)$$

$$\equiv \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x W) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} W) \right] dx dy - \iint_A \left(\sigma_x \frac{\partial W}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy +$$

$$+ \iint_A \bar{X} W dx dy + \int_{S_\sigma} (\bar{T}_x - \sigma_x \ell - \tau_{xy} m) W ds \quad (49b)$$

$$\equiv \int_S (\sigma_x \ell + \tau_{xy} m) W ds - \iint_A \left(\sigma_x \frac{\partial W}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy +$$

$$+ \iint_A \bar{X} W dx dy + \int_{S_\sigma} (\bar{T}_x - \sigma_x \ell - \tau_{xy} m) W ds \equiv \quad (49c)$$

$$\equiv - \iint_A \left(\sigma_x \frac{\partial W}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy + \iint_A \bar{X} W dx dy + \int_{S_\sigma} \bar{T}_x W ds +$$

$$+ \int_{S_U} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} m) W ds = 0 \quad (49d)$$

Muotoon (49c) on päästy soveltamalla Gaussin lausetta [1, s. 25], [10] lausekkeen (49b) ensimmäiseen integraaliin. Merkintä S_U tarkoittaa sitä reunan S osaa, jolla on annettuja siirtymiä koskevia geometrisia reunaehtoja. Jos nyt tulkitaan painofunktio W fysikaalisesti virtuaaliseksi siirtymäksi $-\delta u$, nähdään, että yhtälö (49d) esittää virtuaalisten siirtymien periaatetta. Jos W ei ole jatkuva, tulee yhtälöön Gaussin lausetta sovellettaessa lisäreunatermejä epäjatkuvuuskohdissa vastaten taas virtuaalisten siirtymien periaatetta. Yhtälöissä (48) voidaan painofunktiot valita usealla eri tavalla. Käytettäessä painofunktioina samoja muotofunktioita kuin mitä itse tuntemattomien suureiden esittämisessä on käytetty, kuten edellä on yleensä tehty, nimitetään menetelmää Galerkinin menetelmäksi [9].

Kirjallisuutta

- [1] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 1968.
- [2] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, 1971.
- [3] Giencke, E., Ein einfaches und genaues finites Verfahren zur Berechnung von orthotropen Scheiben und Platten. Der Stahlbau, 9, s. 260...268, 10, s. 303...315, 1967.
- [4] Giencke, E., Petersen, J., Ein finites Verfahren zur Berechnung schubweicher orthotroper Platten. Der Stahlbau, 6, s. 161...166, 7, s. 202...207, 1970.
- [5] Jensen, P.V., Analyses of Skew Slabs. Univ. Illinois Bull. 332, 1941.
- [6] Calladine, C.R., Engineering Plasticity. Pergamon Press, 1969, s. 96.
- [7] Przemieniecki, J.S., Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill, 1968, s. 205.

- [8] Bhaumik, A.K., Hanley, J.T., Elasto-Plastic Plate Analysis by Finite Differences. Journal of the Structural Division, ASCE, ST 5, 1967, s. 279...294.
- [9] Crandall, S.P., Engineering Analysis. McGraw-Hill, 1956, s. 230.
- [10] Väisälä, K., Vektorianalyysi. Werner Söderström, 1954, s. 57.

Eero-Matti Salonen, tekn.tri, VTT:n nuorempi tutkija