

ERÄS VISKOELASTINEN MALLI JA SEN SOVELLUS PUULLE

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5
No 3 1972 ss. 387-395; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

ILMARI SALA ja EERO OLKKONEN

JOHDANTO

Jatkuvan aineen viskoelastista käyttäytymistä tarkasteltaessa on totuttu nojautumaan tiettyihin mekaanisiin malleihin, jotka pohjautuvat Kelvinin ja Maxwellin peruselementteihin. Niissä aineen kimmoisuutta edustaa lineaarisesti toimiva jousi ja ajasta riippuvaa myötämistä lineaarinen viskovaimennin.

Ylinen [1] on perusteellisilla teorettis-kokeellisilla tutkimuksillaan osoittanut, että tavanomaisten, Kelvinin ja Maxwellin peruselementeistä koostuvien, lineaaristen mallien avulla voidaan puun viskoelastista käyttäytymistä kuvata perin puutteellisesti. Hän on myös ehdottanut erään hyvin käyttökelpoisen epälineaarisen mallimuunnoksen yksiakσιαaliselle puristukselle.

Aineen viskoelastisille tapahtumille on luonteenomaista niiden palautumattomuus. Tämän takia jännityksen ja muodonmuutoksen välinen riippuvuus, kun aika on vapaana parametrina, ei ole yksikäsitteisesti määritettävissä, vaan se riippuu, paitsi alkuarvoista, myös siitä jännitys- ja muodonmuutoshistoriasta, jonka alaisena kappale on ollut

ennen kyseistä ajankohtaa.

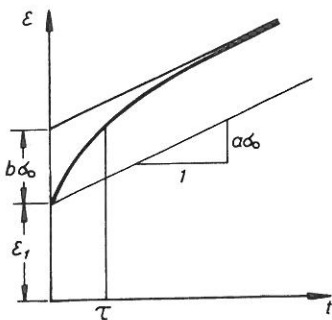
Seuraavassa on tarkoitus aluksi kokeilla erästä analyyttistä lauseketta kuvaamaan äkkiä syntyneen ja sen jälkeen vakiona pysyvän jännityksen aiheuttamaa puristumaa homogeenisessa suorassa ja tasapak- sussa sauvassa. Tutkimuksen jälkiosa taas käsittelee tasaisesti kas- vavan puristusjännityksen synnyttämää puristumaa edellämäinitunlai- sissa sauvoissa.

VIRUMISFUNKTIO

Viskoelastisen aineen käyttäytyminen vakiojännityksellä tapah- tuvassa suoran sauvan aksiaalisessa puristuksessa on kuvan 1 mukais- ta. Kuvaajakäyrän esittämä puristuma ϵ ajan t funktiona, kun puris- tusjännitys σ_0 on vakio, on esitettävissä esim. seuraavan analyyytti- sen lausekkeen avulla

$$\epsilon = \epsilon_1 + a\sigma_0 t + b\sigma_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (1)$$

jossa ϵ_1 on se ϵ :n arvo, joka vastaa arvoa $t = 0$, ja a kyseessä ole- valle aineelle ominainen vakio, yksikkönä tässä tutkimuksessa $\text{cm}^2/\text{kp h}$, samoin parametri b , jonka yksikkö on cm^2/kp , ja edelleen parametri τ ,



Kuva 1.

jonka yksikön on oltava sama kuin ajan t , tässä h . Kuten kuvasta 1 näkyy, ajan t kasvaessa yhtälön (1) oikean puolen kuvaajakäyrä lähennee asymptoottisesti suoraa, jonka kulmakerroin on $a\sigma_0$.

PURISTUSKOKEET PUUSAUVOILLA

VTT:n Metallilaboratoriossa suoritettavat kokeet osoittivat, että edellä esitetty matemaattinen lauseke hyvin tyydyttävästi pystyy edustamaan suomalaisen mäntypuun viskoelastista käyttäytymistä yksiaksiaalisessa puristuksessa. Parametrit a ja b määritettiin koetulostuskäyrien perusteella kuvan 1 mukaisesti mittaamalla, ja parametrin τ numeroarvoksi valittiin se koekäyrästä luettu ajan arvo, jolla lausekkeen (1) kolmas termi saa arvon $b\sigma_0(1 - \frac{1}{e}) \approx 0,63 b\sigma_0$. Tarkemmassa tutkimuksessa parametrien a , b ja τ numeroarvot voitaisiin määrittää kaikki yhtäaikaan päämääränä koetulostuskäyrän ja matemaattisen käyrän mahdollisimman hyvä yhteensopivuus kaikilla ajan t arvoilla.

Koekappaleet olivat suomalaista mäntypuuta, jonka ominaispaino oli 0,56, suhteellinen kosteus noin 8 % ja suhteellinen kesäpuun määrä noin 30 %. Puristuskappaleiden koko oli $20 \times 20 \times 100 \text{ mm}^3$.

Taulukko 1.

N:o	$\frac{E}{\text{kp/cm}^2}$	$\frac{\sigma_{ty}}{\text{kp/cm}^2}$	$\frac{\sigma_0}{\text{kp/cm}^2}$	$\frac{a}{\text{cm}^2/\text{kp h}}$	$\frac{b}{\text{cm}^2/\text{kp}}$	$\frac{\tau}{h}$	ϵ_1	$\frac{t_\infty}{h}$
1	$10,5 \cdot 10^4$	710	550	$4,0 \cdot 10^{-8}$	$1,09 \cdot 10^{-6}$	0,5	$7,0 \cdot 10^{-3}$	5
2	10,5	600	600	9,6	1,82	1,0	8,0	8
3	9,3	722	600	8,9	5,9	5,0	7,9	35
4	8,3	700	500	0	5,9	13	7,1	70
5	8,2	695	450	0	3,3	5,0	6,7	70
6	8,3	720	550	0	3,5	8,0	7,5	70

Taulukon 1 parametrien numeroarvojen suuresta hajonnasta ilmenee, että koekappaleet poikkeavat viskoelastisilta ominaisuuksiltaan huomattavasti toisistaan, vaikka olisivatkin lähtöisin samasta rungosta. Paitsi puun epähomogeenisesta luonteesta, erot aiheutuvat ilmeisesti myös koesauvaa puristavan vakiojännityksen σ_0 suuruudesta tyssäysrajaan σ_{ty} verrattuna. Koetulokset näyttävät jakautuvan kahteen ryhmään, joista toisessa $a = 0$, eli ϵ, t -käyrän asymptootti vaakasuora. Näillä kolmella sauvalla (n:ot 4, 5 ja 6) erotus $\sigma_{ty} - \sigma_0$ on suurempi kuin sauvoilla 1, 2 ja 3, joskin tämä eroavuus sauvojen 1 ja 6 välillä on vähäinen.

Valitettavasti tämän tutkimuksen tekijöillä resurssit ajan ja muittenkin mahdollisuuksien suhteen olivat niin rajoitetut, että asian tarkempi käsittely on jätettävä mahdollisten myöhempien tutkimusten varaan. Eräs yleisluontoinen toteamus lienee kuitenkin vielä paikallaan. Jokaisen koesauvan puristusjännitys kohotettiin kokeen jälkeentavanomaisen aineenkoestuskokeen nopeudella murtojännitykseen. Tällöin todettiin täten alkavan σ, ϵ -käyrän jyrkkyys suurin piirtein sauvan kimmokerrointa E vastaavaksi, tai ainakin suuremmaksi kuin mainitun käyrän sivuajan kulmakerroin varsinaisen kokeen jännitystä σ_0 vastaavassa pisteessä. Tämä seikka on yhtäpitävä tekijöitten aikaisemmin eräissä jääkokeissa toteaman seikan kanssa [2]. Mitä taulukkoon 1 vielä tulee, sen viimeisen sarakkeen t_∞ ilmoittaa sen ajankohdan, jolloin koetulosten perusteella voidaan katsoa asymptootin suunta saavutetuksi.

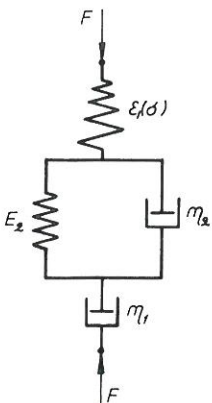
MONOTONISESTI KASVAVA JÄNNITYS

Edellä esitetty on käsitelty puun viskoelastista käyttäyty-

mistä vakiopuristusjännityksen alaisena. Tällöin on voitu vapaasti valita ϵ :n ja t :n välistä riippuvuutta kuvaamaan sellainen alkeisfunktioista koostettu lauseke, joka sisältää mahdollisimman vähän parametreja, mutta kuitenkin antaa tyydyttävän yhteensopivuuden koetulosten ja matemaattisen lausekkeen välille. Näin voidaan tehdä sen takia, että koekäyrän muoto on etukäteen pääpiirteittäin selvillä. Jos sen sijaan halutaan tutkia puristumaa ϵ ajan t funktiona esim. puristusjännityksen σ monotonisesti kasvaessa, on päästävä käsiksi tapahtuman differentiaaliyhtälöön. Tämä taas ei viskoelastisissa muodonmuutoksissa onnistune ilman mekaanisia malleja. Ainakin niiden käyttö on osoittautunut edulliseksi.

Yksinkertaisin malli, joka vakiojännityksellä johtaa yhtälöön (1), lienee kuvan 2 esittämä. Parametrit η_1 , η_2 ja E_2 ovat vakioita, yksiköiltään kuten $1/a$ ja $1/b$, sekä $\epsilon_1(\sigma)$ tavanomaisessa aineenkoetuksessa saadun puristumapiirroksen mukainen puristuma jännityksen funktiona. Muodonmuutoksen differentiaaliyhtälöksi saadaan tällöin

$$\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau} = \frac{\sigma(t)}{\eta_1} + \frac{\sigma(t)}{\tau E_2} + \frac{\epsilon_1(\sigma)}{\tau} + \epsilon_1'(\sigma)\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau \eta_1} \int_0^t \sigma dt \quad (2)$$



Kuva 2.

jossa $\tau = \frac{\eta_2}{E_2}$, σ on monotonisesti muuttuva ajan funktio, $\epsilon_1'(\sigma)$ on derivaatta σ :n suhteen ja $\dot{\epsilon}$ sekä $\dot{\sigma}$ derivaatat ajan suhteen.

Olettamalla σ vakioksi σ_0 saadaan $\dot{\sigma} = 0$ ja $\int_0^t \sigma dt = \sigma_0 t$, joten yhtälö muuttuu muotoon

$$\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau} = \frac{\sigma_0}{\eta_1} + \frac{\sigma_0}{\tau E_2} + \frac{\epsilon_1}{\tau} + \frac{\sigma_0}{\tau \eta_1} t$$

joka alkuehdon $t = 0$, $\epsilon = \epsilon_1$ huomioon ottaen antaa

$$\epsilon = \epsilon_1 + \frac{\sigma_0}{\eta_1} t + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

mikä on sama kuin yhtälö (1), kun merkitään $a = 1/\eta_1$ ja $b = 1/E_2$.

Ellei σ ole vakio, on ϵ :n ratkaisemiseksi yhtälöstä (2) tunnettava funktioiden $\epsilon_1(\sigma)$ ja $\sigma(t)$ muoto. Seuraavassa otaksutaan jännityksen kasvavan tasaisesti, eli $\sigma = kt$, jossa k on vakio, jonka yksikkö on $\text{kp/cm}^2\text{h}$. Vertauspuristuma $\epsilon_1(\sigma)$ oletetaan Neuberin [3] mukaan seuraavaksi

$$\epsilon_1(\sigma) = \frac{1}{E} \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{ty}}\right)^2}} \quad (3)$$

Edelleen edellytetään σ :n pysyvän arvoltaan niin paljon tyssäysrajan σ_{ty} alapuolella, että parametri $a = 1/\eta_1$ voidaan ottaa nolllaksi. Tästä seuraa myös, että lauseke (3) voidaan korvata sen potenssikehitelmän kolmella ensimmäisellä termillä, jolloin

$$\epsilon_1(\sigma) = \alpha \sigma + \beta \sigma^3 + \gamma \sigma^5 \quad (4)$$

ja

$$\epsilon_1'(\sigma) = \alpha + 3\beta\sigma^2 + 5\gamma\sigma^4 \quad (4')$$

jossa $\alpha = 1/E$, $\beta = 1/2E\sigma_{ty}^2$, $\gamma = 3/8E\sigma_{ty}^4$.

Kun $\sigma = kt$ ja $b = 1/E_2$, yhtälö (2) saa muodon

$$\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau} = ak + \frac{k}{\tau} (b + \alpha)t + 3k^3\beta t^2 + \frac{k^3}{\tau}\beta t^3 + 5k^5\gamma t^4 + \frac{k^5}{\tau}\gamma t^5 \quad (5)$$

Tälle differentiaaliyhtälölle saadaan alkuehdon $t = 0, \epsilon = 0$ toteuttava ratkaisu

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_2} (e^{-t/\tau} - 1)\frac{\tau}{t} + \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_2}\right)\sigma + \frac{1}{2E\sigma_{ty}^2}\sigma^3 + \frac{3}{8E\sigma_{ty}^4}\sigma^5 \quad (6)$$

kun $\sigma = kt$

Valitsemalla parametrille τ taulukon 1 sauvojen 4, 5 ja 6 antama keskimääräinen arvo $\tau = 8,7$ h ja vastaavasti $E_2 = 2,6 \cdot 10^5$ kp/cm² sekä edelleen kaikkien sauvojen keskiarvoina $\sigma_{ty} = 690$ kp/cm² ja $E = 9,2 \cdot 10^4$ kp/cm² saadaan yhtälöstä (6) tasaisesti kasvavan jännityksen sauvassa aiheuttamalle puristumalle ϵ taulukon 2 esittämät arvot laskettuina yhtälöstä (6) muutamilla erillisillä ajan ja vastaavilla σ :n arvoilla. Taulukkoon on merkitty myös koetulokset ja suhteelliset erot näihin nähden. Koe tehtiin vain yhdellä sauvalla jännityksen kasvunopeuden ollessa $k \approx 43$ kp/cm²h.

Taulukko 2.

$\frac{t}{h}$	$\frac{\sigma}{\text{kp/cm}^2}$	$\frac{\epsilon_{\text{lask}}}{10^{-4}}$	$\frac{\epsilon_{\text{kok}}}{10^{-4}}$	ero %
10,0	434	65,8	66,8	-1,5
12,2	523	89,3	88,5	+0,9
12,8	550	97,8	98,5	-0,7

Jos yhtälöstä (6) jätetään σ^5 -termi pois, saadaan taulukon laskettujen ϵ -arvojen tilalle seuraavat: 63,0, 82,1 ja 88,8 suhteellisten erojen koetuloksiin nähden ollessa -5,7 %, -7,2 % ja -10 %.

Taulukon 2 sisältämien ajan arvojen alapuolella ei yhtälön (6) yhteensopivuus koetulosten kanssa ole aivan yhtä hyvä. Tähän lienee

useitakin syitä löydettävissä. Itse asiassa ei yhtä pieniä eroja voida vaatiakaan, koska käytetyt viskoelastisten parametrien numeroarvot määritettiin kokeitten perusteella, jotka edustivat juuri samaa jännitysaluetta kuin taulukko 2. Automaattilaite ei pystynyt pitämään jännityksen kasvunopeutta täysin vakiona. Laskuissa käytettiin mitattuja jännityksiä, koska ajan vaikutus tulokseen on vähäisempi yhtälön (6) mukaan. Edelleen voi asiaan, vaikkakin ehkä vähäisesti, vaikuttaa se, että teorian mukaan kimmokerroin E on ajasta riippumaton, sehän on sidottu vain puristumapiirroksen alkukaltevuuteen. Tosiasias-
sa se ei liene jännityksen kasvunopeudesta täysin riippumaton. Tässä käsitellyn hitaan kokeen σ, ϵ -käyrä alkaa jyrkkyydellä, joka aika hyvin vastaa aineen kimmokerrointa, siis laskuissa käytettyä E -arvoa, mutta jännityksen hiukan kohottua alkaa loiva ja matala painuma, joka tasottuu myöhemmin, mutta vaikuttaa omalta osaltaan juuri siihen suuntaan, että lasketut ϵ -arvot jäävät tuolla alueella liian pieniksi kokeellisesti saatuihin verrattuina. Onko tuo "painuma" oleellinen vaiko satunnainen, on mahdotonta ratkaista yhden kokeen perusteella. Eräs syy voi vielä piillä siinä, että muodonmuutoslaissa (3) oletettiin käyräparametrit E ja σ_{ty} ilman muuta aineen kimmokertoimeksi ja tyssäysrajaksi. Tarkemmissa tutkimuksissa ne olisi syytä määrittää samanaikaisesti pyrkien siihen, että lausekkeen (3) ja kokeellisen puristumapiirroksen yhteensopivuus on mahdollisimman hyvä koko käyrän osalta, tai kulloinkin tarvittavalla jännitysalueella. Näinhän Neuber itsekin on kaavaansa käyttänyt. Tietenkin voidaan myös ajatella yhtälön (4) kertoimien α , β ja γ arvot määritettävän samanaikaisesti edellä esitetyllä periaatteella. Eri aineille voisi kokeilla myös nimittäjään jotakin luvusta 2 poikkeavaa eksponenttia ja juuren indeksiä.

Tämän tutkimuksen teoreettisesta puolesta vastaa I. Sala, kun taas E. Olkkonen on suunnitellut ja toteuttanut kokeet, jotka on saatu suorittaa VTT:n Metallilaboratoriossa. Tästä myötämielisyydestä työtämme kohtaan esitämme vilpittömän kiitoksemme Laboratorion Johdolle.

Kuvien piirtämisestä kiitämme DI Esko Härköstä.

Kirjallisuutta

- [1] Ylinen, A., Über die Bestimmung der zeitbedingten elastischen und Festigkeitseigenschaften des Holzes mit Hilfe eines allgemeinen nichtlinear visko-elastischen rheologischen Modells, Holz als Roh- und Werkstoff, Bd. 23 (1965) S. 193-196.
- [2] Sala, I. and Olkkonen, E., On the visco-elastic properties of ice and wood, Geophysica, Vol. 11 No 2, Helsinki 1971.
- [3] Neuber, H., Kerbspannungslehre. Zweite erweiterte Auflage, Berlin 1958, S. 188 etc.

Ilmari Sala, professori

Eero Olkkonen, ins., Valtion teknillinen tutkimuslaitos, Metalliteknillinen laboratorio