MERENPOHJAN LEVIÄMISEN SELVITTÄMINEN HYDRODYNAAMISILLA LASKELMILLA

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5 No 3 1972 ss. 380-386; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

PEKKA RIISIÖ ja ERKKI NISKANEN

YLEISTÄ

Maankuoren liikunnot ovat kiinnostaneet tutkijoita jo niin kauan kuin tieteellistä tutkimustyötä geofysiikan ja geologian alalla on harrastettu. Maankuoressa havaittavat poimuttumisilmiöt ovat selviä viitteitä tällaisista kauan sitten tapahtuneista kuoren siirtymistä. Maanpinnan vertikaaliset liikkeet, kuten esimerkiksi Fennoskandian maannousu ja vastaavasti vajoaminen esim. Hollannin rannikolla, ovat olleet vuosisatoja tunnettuja ilmiöitä. Luetteloa voitaisiin jatkaa pitkään. Eräät geologiset tosiseikat viittaavat siihen suuntaan, että nykyiset mantereet ovat aikoinaan olleet yhtenä mantereena ja sitten syystä tai toisesta tuo ns. alkumanner on revennyt osiin, jotka ovat lähteneet vaeltamaan hiljalleen mantereiden nykyisiin asemiin. Väitetään että esim. Euroopan ja Amerikan välimatka muuttuu vieläkin, tosin hyvin hitaasti.

Tutkijoita on viime aikoina suuresti kiinnostanut ns. Atlantin repeämä. Näyttää siltä kuin valtava voima olisi riuhtaissut Amerikan ja Eurooppa-Afrikan välisen Atlantin pohjaan repeämän, joka on täysin selvästi mittauksilla osoitettavissa. Vastaavanlaisia repeämiä on muidenkin merten pohjissa.

Mannerliikuntojen teorian kannalta tällaiset repeämät ovat sitä tukevia fysikaalisia tosiasioita. Muun muassa Wegener on kuuluisa mannerliikuntateoriastaan, mutta geologina hän ei voinut millään laskelmalla osoittaa, että teoria pitäisi paikkansa. Ideoiden pätevyys on tietenkin osoitettava laskelmin käyttämällä sopivaa matemaattista mallia. Tämä vaatii ainakin kimmo- ja plastisuusteorian, hydrodynamiikan, lämmönjohtumisteorian jne. hyvää asiantuntemusta. Ensimmäisenä todella korkealuokkaisena maapallossa tapahtuvien liikuntojen tutkimuksena voitaneen mainita Pekeriksen (1935) julkaisu, joka perustuu konvektioteoriaan ja hydrodynamiikkaan. Merkillistä kyllä, hänen arvokas tutkimuksensa on saanut hyvin vähän huomiota osakseen. Konvektioteorialla maapallon yhteydessä tarkoitetaan seuraavaa. Syystä tai toisesta jollakin alueella on radioaktiivista ainetta normaalia huomattavasti enemmän, jolloin kyseinen alue (tavallisesti maankuoren alainen kerros) lämpiää ympäristöään korkeampaan lämpötilaan, aineen tiheys pienenee, potentiaalikenttä häiriytyy, ja näin virtaus pääsee alkuun. Tämä aiheuttaa puolestaan jännityksiä, jotka ovat paitsi virtauksesta myös lämpötilagradientista peräisin.

Fennoskandian maannousun perusteella Niskanen (1948) on laskenut maapallolle keskimääräisen viskositeetin, joka on samaa luokkaa ($1.5 - 4.6 \cdot 10^{22}$ g/cms) kuin arvo, johon on päästy kokonaan muita teitä. Alkudeformaationa Niskanen käytti aikaisemmassa julkaisussaan (1943) laskemaansa Fennoskandian aikoinaan peittäneen jäävuoren synnyttämää syvännettä. Edellä mainitut kaksi julkaisua, kuten myös Pekeriksen kokonaan muihin fysikaalisiin olettamuksiin pohjautuva tutkimus, perustuvat pallofunktioiden teorian hyväksikäyttöön.

Viime vuosina Kaitera (1971) on tutkinut maankuoren liikuntoja pyrkien mm. selvittämään edellä kerrotun atlanttisen repeämän syntyä. Matemaattisfysikaalisia laskelmia varten hän on aiemmin saanut apua mm. Niskaselta ja Kutvoselta (1971). Riisiö on ryhtynyt jatkamaan näitä geofysikaalisia laskelmia, joiden tarkoituksena on selvittää, voivatko maanpäälliset kuormituserot, esimerkiksi eroosion kuljettamien ainesten kerääntyminen valtamerien pohjaan, aikaansaada niin voimakkaita virtauksia maankuoren alaisessa viskoosisissa aineessa, että maankuori saattaisi revetä, ts. kuoreen syntyisi vetolujuuden ylittäviä jännityksiä. Probleeman käsittely johtaa suuritöisiin laskelmiin, joiden pääpiirteitä seuraavassa selostetaan. Huomattakoon, että Kutvosen laskelmissa ei maan pallomaisuutta otettu huomioon. Kuitenkin on kysymys yli koko maapallon ulottuvasta kuormituksen siirtymisestä ja siitä johtuvasta deformaatiosta, joten pallomuoto on otettava laskelmiin mukaan. Tämä on juuri Riisiön tutkimuksen päätavoite.

RATKAISUMALLI

Vuosimiljoonien aikana mm. eroosion johdosta on valtameren ja mantereiden välille syntynyt eräänlainen paine-ero, jolloin puristus valtameren kohdalla on suurempi kuin mantereen kohdalla. Jotta kuormitus eli em. paine-ero saataisiin lausutuksi matemaattisessa muodossa, on mantereiden sijoituksessa tehtävä joitakin yksinkertaistuksia. Tällöin voidaan esim. ajatella, että maapallolla olisi kaksi mannerta, jotka pallokalotin muotoisina sijaitsisivat vastakkaisilla puolilla maapalloa. Kuormituksen määräämistä varten ajatellaan mantereilta siirretyksi tietyn suuruinen tasainen kuorma valtameren kohdalle, jolloin kuormitus voidaan lausua Legendren polynomien avulla seuraavasti

$$f(\theta) = \frac{q_1}{\cos\theta_o} \sum_{n=1}^{\infty} (P_{2n+1}(\cos\theta_o) - P_{2n-1}(\cos\theta_o))P_{2n}(\cos\theta) \qquad (1)$$

$$q_2 = \frac{1 - \cos\theta_o}{\cos\theta_o} q_1 \qquad (2)$$

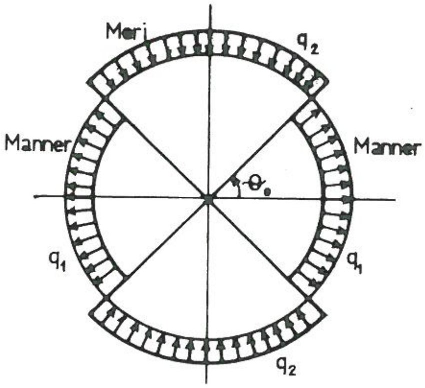
$f(\theta)$ = kuormitusfunktio

P_i = Legendren i:nnen kertaluvun polynomi

q_1 = kuormitus mantereella

q_2 = kuormitus merellä

θ_o = rajakulma



Kuva 1.

Mallissa otaksutaan lisäksi maapallon sisuksen käyttäytyvän erittäin viskoosin nesteen tavoin. Koska viskositeetti ja tiheys muuttuvat, vieläpä todennäköisesti epäjatkuvasti, maapallon säteen funktiona, on palloa käsiteltävä monesta kerroksesta koostuneena. Kussakin kerroksessa viskositeetti ja tiheys pysyvät vakioina.

VISKOOSIN VIRTAUKSEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Käytetään seuraavia merkintöjä

u = virtausnopeus säteen suunnassa

v = virtausnopeus sädettä vastaan kohtisuorassa suunnassa

$\overline{w}$ = nopeusvektori ($\overline{w} = u\overline{e}_r + v\overline{e}_\theta$)

μ = viskositeettikerroin ($\mu = \nu\rho$)

ρ = tiheys

g = vetovoiman kiihtyvyys

p = viskoosi paine

Koska virtaus on erittäin hidasta, voidaan massavoimien vaikutus jättää huomioon ottamatta. Siten on maapallon tietyssä kerroksessa voimassa seuraavat differentiaaliyhtälöt, kun käytetään sylinterisymmetristä pallokoordinaatistoa

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu(\nabla^2 u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v}{r^2}\cot\theta) - \rho g \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu r(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2\theta}) \tag{4}$$

Nesteen kokoonpuristumattomuudesta saadaan lisäehdoksi

$$\nabla \cdot \overline{w} = 0 \tag{5}$$

Yhtälöiden (3) ja (4) ratkaisuihin päästään käsiksi vain Legendren polynomisarjojen avulla, jolloin nopeuskomponentit u ja v ajatellaan kehitetyiksi seuraavanlaisiksi sarjoiksi

$$u = \sum_1^\infty \phi_n(r)\, P_n(\cos\theta) \tag{6}$$

$$v = \sum_1^\infty \psi_n(r)\, \frac{\partial}{\partial\theta} P_n(\cos\theta) \tag{7}$$

joissa ϕ_n ja ψ_n ovat toistaiseksi tuntemattomia funktioita. Yhtälöistä (5), (6), (7) saadaan eräiden välivaiheiden jälkeen

$$\psi_n(r) = \frac{1}{n(n+1)}(2\phi_n(r) + r\phi_n'(r)) \tag{8}$$

Eliminoimalla p yhtälöistä (3) ja (4) ja ottamalla huomioon (8) saadaan melko monimutkaisten laskutoimitusten jälkeen ϕ:lle 4. kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$r^4\phi_n'''' + 8r^3\phi_n''' + 2r^2(6 - n(n + 1))\phi_n'' - 4rn(n + 1)\phi_n' +$$
$$+ n(n + 1)(n(n + 1) - 2)\phi_n = 0 \qquad (9)$$

Tämän ratkaisu saadaan suljetussa muodossa

$$\phi_n(r) = A_n r^{-n-2} + B_n r^{-n} + C_n r^{n-1} + D_n r^{n+1} \qquad (10)$$

jossa A_n, B_n, C_n, D_n ovat integroimisvakioita. Jos vakiot saadaan määritetyiksi, tunnetaan ϕ_n ja ψ_n ja siten myös u ja v. Vakiot määrätään reunaehdoista, joita varten on ensin laskettava jännitykset u:n ja v:n avulla

$$\sigma_r = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \qquad (11)$$

$$\sigma_\theta = -p + 2\mu(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}) \qquad (12)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}) \qquad (13)$$

Näihin kaavoihin on sijoitettava u ja v lausuttuna tunnettujen ϕ_n:ien ja ψ_n:ien avulla.

Reunaehtoina käytetään

Maankuoren pinnalla $\sigma_r = f(\theta)$ ja $\tau_{r\theta} = 0$

Kerroksien i ja i+1 välisessä rajapinnassa pätee

$$\sigma_{r,i} = \sigma_{r,i+1}, \quad \tau_{r\theta,i} = \tau_{r\theta,i+1}, \quad u_i = u_{i+1}, \quad v_i = v_{i+1}$$

Alimmassa kerroksessa lisäksi u = v = 0 kun r = 0.

Näin saaduista reunaehtoyhtälöistä määrätään kullakin n:n arvolla integroimisvakiot A, B, C, D jokaiselle kerrokselle. Tämän jälkeen ovatkin nopeudet ja jännitykset täysin tunnetut.

Tehtävää varten laadittava tietokoneohjelma on vielä kehittelyasteella, joten lopulliset tulokset saadaan vasta myöhemmin.

Kirjallisuutta

[1] Kaitera, P., Mechanism behind sea-floor spreading. Geophysica 12:1, Helsinki 1971.

[2] Kutvonen, H., Calculating movements and stresses in the earth's crust using a two-dimensional, high viscosity fluid flow model. Geophysica 12:1, Helsinki 1971.

[3] Niskanen, E., On the deformation of the earth's crust under the weight of a glacial ice-load and related phenomena. III Geologia-Geographica 7, Helsinki 1943.

[4] Niskanen, E., On the viscosity of the earth's interior and crust. III Geologia-Geographica 15, Helsinki 1948.

[5] Pekeris, C., Thermal convection in the interior of the earth. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement Vol. 3, No. 8, 1935.

Pekka Riisiö, dipl.ins., Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi

Erkki Niskanen, professori, Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi