

NURJAHTANEEN PURISTUSSAUVAN OPTIMOINNISTA

MATTI A. RANTA

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5
No 3 1972 ss. 364-379; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

JOHDANTO

Monissa rakenteissa on keveys ensiarvoisen tärkeää. Nurjahdussauvan paino on mahdollisimman pieni, jos sillä on sellainen kapenemismuoto, että sen tilavuudella on minimi kuorman ollessa annettu. Tätä variaatiolaskennan alaan kuuluvaa tehtävää käsitteli Lagrange ensimmäisenä. Blasius ratkaisi tehtävän poikkileikkaukseltaan ympyrän muotoiselle sauvalle, jonka aineen kimmokertoimen hän oletti vakioksi myös mielivaltaisen suurille puristusjännityksille. Tästä seurasi, että sauvan pinta-ala päihin tultaessa läheni kohti nollaa ([5] s. 745). Professori Laasonen ratkaisi tämän edullisinta muotoa koskevan variaatiotehtävän, kun puristusjännitys ylittää sauvan aineen suhteellisuusrajan käyttäen professori Ylisen esittämää erityisesti nurjahdustapauksiin soveltuvaa muodonmuutosfunktioita ([5] s. 740...745).

Tässä tutkielmassa tehtävää lähestytään hieman toisin. Koska käytännössä puristus ei koskaan ole täysin keskeinen eikä sauvakaan

aivan suora, ei kyseessä ole vakavuusprobleema vaan puristus-taivutusprobleema. Ajatellaan kuitenkin näiden "virheiden" olevan niin pieniä, että ne voidaan jättää huomioonottamatta sen jälkeen, kun sauva on alkanut taipua. Näin ollen päädytään seuraavaan problemaan: On määritettävä puristussauvan edullisin kapenemismuoto, kun sauva on nurjahdusta seuranneessa taipuneessa tilassa.

Koska taipumisesta aiheutuva leikkausjännitys on vähäinen verrattuna puristusjännitykseen, jätetään se huomioonottamatta myötöhdossa. Paksuuden jakautuma on ilmeisesti edullisin silloin, kun puristuksesta ja taivutuksesta johtuvan normaalijännityksen itseisarvon maksimi on vakio pitkin sauvan pituutta.

OTAKSUMAT

Probleemaa tarkasteltaessa tehdään seuraavat otaksumat:

1. Teknisen taivutusopin perushypoteesi (Bernoulli - Navier) ([5] s. 191) on voimassa.
2. Timoshenkon hypoteesi, jonka mukaan sauvan taipumaviivan kaltevuus on taivutusmomentin ja leikkausvoiman vaikutusten summa ([4] tai [5] s. 289) on voimassa.
3. Sauvan poikkileikkauksen muoto on joka kohdassa sama mutta pinta-ala muuttuu.
4. Sauvan päissä on ideaaliset nivelet.
5. Konstitutiiviset yhtälöt ovat jatkuvia ja yksikäsitteisiä.

Näiden olettamusten pohjalta tutkitaan, miten sauvan poikkileikkauksen alan tulee vaihdella, jotta sauvan koveran puolen reunajännitys olisi vakio.

Symmetriasyistä riittää tarkastella sauvan pituuden puoliskoa.

YHTÄLÖT

Akselit η, ζ yhtyvät poikkileikkauspinnan pääjäyhyysakseleihin. ξ -akseli on näitä vastaan kohtisuorassa ja kulkee poikkileikkauspinnan painopisteen c kautta.

Otaksumasta 1. seuraa, että pidettäessä puristusta positiivisena suureena, suhteellinen venymä ϵ (vrt. [1] s. 5) on

$$\epsilon = -\epsilon_0 - \alpha\eta \quad (1)$$

Käyritymälle seuraa tästä lauseke

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{1 - \epsilon_0} \quad (2)$$

Koska leikkausvoiman aiheuttama taipuman lisäys ei muuta käyritysmää, saadaan taivutusmomentista johtuvan kaltevuuden ψ muutoksen avulla käyritymä tunnetusta geometrisesta määritelmästä

$$\frac{1}{r} = \frac{d\psi}{d\xi} \quad (3)$$

Lausekkeista (2) ja (3) voidaan suure α ratkaista

$$\alpha = (1 - \epsilon_0) \frac{d\psi}{d\xi} \quad (4)$$

Koska koveralla reunalla $y = a$ on puristuma suurin, on siellä myös suurin puristusjännitys. Jos nyt asetetaan vaatimus, että tämän jännityksen tulee saada tietty sallittu arvo σ_{sall} , saadaan

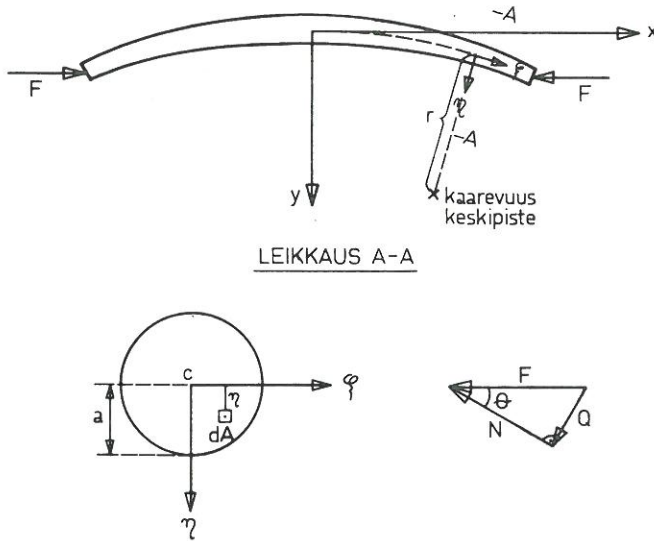
$$-\sigma(-\epsilon_0 - \alpha a) = \sigma_{sall}$$

Otaksuman 5. perusteella voidaan tästä yksikäsitteisesti ratkaista

$$\epsilon_0 + \alpha a = \epsilon_{sall}$$

Suurelle α saadaan siis myös lauseke

$$\alpha = \frac{\epsilon_{sall} - \epsilon_0}{a} \quad (5)$$



Kuva 1.

Kuvasta 1 nähdään vielä seuraavat yhteydet

$$N = F \cos \theta \tag{6}$$

$$Q = F \sin \theta \tag{7}$$

$$M = - F[y(\ell) - y] \tag{8}$$

$$\sin \theta = \frac{dy}{d\xi} \tag{9}$$

Otaksuman 2. mukaan kokonaiskallistuma on

$$\theta = \psi + \beta \tag{10}$$

Tässä ψ on taivutusmomentin osuus ja leikkausvoiman osuus β saadaan

([5] 86s) kaavasta

$$\beta = \frac{\zeta Q}{G_{\sigma} A} \tag{11}$$

jossa ζ on poikkipinnan siirtymäkerroin, esim. ympyräpoikkipinnalla

$\zeta = 32/27 \approx 1,185$, ja G_{σ} on puristusjännityksestä riippuva liukukerroin. Merkitään lyhyesti

$$G_{\sigma} = E g(\sigma_{\sigma}) \tag{12}$$

jossa $\sigma_0 = \sigma(\epsilon_0)$. Professori Ylinen on julkaisussaan [4] johtanut käyttökelpoiset lausekkeet G_σ :n eli $g(\sigma)$:n määrittämiseksi.

Tasapainoehdoista kuvan 1 leikkauksessa A-A seuraa

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A dA \sigma(\epsilon_0 + \alpha\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{(n)}(\epsilon_0)}{n!} \alpha^n \int_A dA \eta^n \\
 -M &= \int_A dA \eta \sigma(\epsilon_0 + \alpha\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{(n)}(\epsilon_0)}{n!} \alpha^n \int_A dA \eta^{n+1}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Oikealla puolella oleviin sarjoihin päädytään kun integrandissa oleva funktio $\sigma = \sigma(\epsilon)$ kehitetään professori Ylisen esittämällä tavalla ([1] s. 6) Taylorin sarjaksi kehityskeskukseksi ϵ_0 ja merkitsemällä $\sigma^{(n)}(\epsilon_0) = \left. \frac{d^n \sigma}{d\epsilon^n} \right|_{\epsilon=\epsilon_0}$

Integraalit, jotka ovat muotoa

$$I_m = \int_A dA \eta^m \tag{13}$$

esittävät tunnetusti poikkileikkauspinnan m :ttä momenttia. Koska oletuksen 3. mukaan sauvan kaikki poikkileikkaukset ovat yhdenmuotoiset, voidaan professori Ylisen määrittelemän profiiliarvon ([5] s. 711) käsitettä yleistäen kirjoittaa

$$k_m = \frac{A^{\frac{m}{2}+1}}{I_m} \tag{14}$$

Koska $I_0 = A$ ja η, ζ akselit ovat poikkileikkauksen painopisteakseleita, jolloin $I_1 = 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
 k_0 &= 1 \\
 k_1 &= \infty
 \end{aligned} \tag{15}$$

Lisäksi, jos ζ -akseli on symmetria-akseli, on $I_{2j+1} = 0$. Tästä seuraa, että symmetrisillä poikkipinnoilla lisäksi

$$k_{2j+1} = \infty \tag{16}$$

Ympyrän muotoiselle poikki-pinnalle saadaan

$$\begin{aligned}
 k_{2j} &= \pi^j (j+1) (2^j j!)^2 / (2j)! \\
 k_{2j+1} &= \infty
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Yhtälöistä (12) saadaan ottamalla huomioon merkinnät (13) ja (14) sekä $\alpha:n$ lauseke (5)

$$\begin{aligned}
 N &= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{(n)}(\epsilon_0)}{n! k_n} (\epsilon_{sall} - \epsilon_0)^n \left(\frac{\sqrt{A}}{a}\right)^n \\
 -M &= A^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{(n)}(\epsilon_0)}{n! k_{n+1}} (\epsilon_{sall} - \epsilon_0)^n \left(\frac{\sqrt{A}}{a}\right)^n
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Yhdenmuotoisuusolettamuksesta 3. seuraa edelleen, että

$$\sqrt{A}/a = h
 \tag{19}$$

on vakio. Ympyräpoikki-pinnalla sen arvo on $\sqrt{\pi}$.

YHTÄLÖIDEN MUUTTAMINEN DIMENSIOTTOMIKSI

Valitaan vertailupinta-ala A_0 seuraavasti

$$A_0 = \frac{F}{\sigma_{sall}}
 \tag{20}$$

Määritellään dimensiottomat suureet

$$s = \xi/l, \quad v = y/l, \quad u = A/A_0, \quad m = M/lF
 \tag{21}$$

Yhtälöistä (18) ja (19) saadaan käyttäen hyväksi kaavoja (6), (8), (10), (11), (15), (19), (20) ja (21)

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos \theta}{u} &= \frac{\sigma(\epsilon_0)}{\sigma_{sall}} + \frac{1}{\sigma_{sall}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma^{(n)}(\epsilon_0) h^n}{n! k_n} (\epsilon_{sall} - \epsilon_0)^n \\
 \frac{-m}{u^{3/2}} &= \frac{1}{\sigma_{sall}} \sqrt{\frac{F}{l^2 \sigma_{sall}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{(n)}(\epsilon_0) h^n}{n! k_{n+1}} (\epsilon_{sall} - \epsilon_0)^n
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\theta = \psi + \frac{\zeta \sigma_{sall}}{E} \frac{\sin \theta}{\text{ug}(\sigma_0)} \quad (23)$$

Suureen ψ määrittämiseksi ratkaistaan $\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ yhtälöistä (4) ja (5) ja muunnetaan se derivaataksi $\frac{d\psi}{ds}$ sekä käytetään merkintöjä (19), (20) ja (21)

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{h}{\sqrt{\lambda^2 \sigma_{sall}^2 + F}} \frac{\varepsilon_{sall} - \varepsilon_0}{(1 - \varepsilon_0) \sqrt{u}} \quad (24)$$

Yhtälöistä (7) ja (8) saadaan vielä ottaen huomioon (21)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \sin \theta \\ -m &= v(1/2) - v \end{aligned} \quad (25)$$

KONSTITUTIIVISET YHTÄLÖT

Professori Ylinen on julkaisuissaan [3] ja [4] kehittänyt puristukseen erittäin sopivia konstitutiivisia yhtälöitä ja esittää ne myös kirjoissaan [5].

Yhtälö $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ esitetään näissä käänteisfunktioina $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$. Lähteen [5] I osassa on sivulla 82 kaava (160)

$$\frac{E\varepsilon}{\sigma_{ty}} = c \frac{\sigma}{\sigma_{ty}} - (1 - c) \ln\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{ty}}\right) \quad (26)$$

ja sivulla 81 kaava (158)

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \frac{1 - \frac{\sigma}{\sigma_{ty}}}{1 - c \frac{\sigma}{\sigma_{ty}}} \quad (27)$$

Kaavasta (27) saadaan $(\sigma_{ty} - c\sigma)\sigma^{(1)} = E(\sigma_{ty} - \sigma)$. Derivoidaan tämä sitten n kertaa ε suhteen ja ratkaistaan

$$\sigma^{(n+1)} = \frac{E/\sigma_{ty}}{1 - c(\sigma/\sigma_{ty})} \left\{ -\sigma^{(n)} + \frac{c}{E} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sigma^{(k)} \sigma^{(n-k+1)} \right\} \quad (28)$$

Kaavojen (27) ja (28) avulla saadaan rekursiivisesti määrätetyksi kaikki derivaatat $\sigma^{(n)} = d^n \sigma / d\varepsilon^n$ pisteessä $(\varepsilon_0, \sigma_0)$. Kaavassa (28) oleva summalauseke voidaan vielä termejä ryhmittelemällä saattaa toiseen muotoon

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sigma^{(k)} \sigma^{(n-k+1)} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{k} \sigma^{(k)} \sigma^{(n-k+1)} + \left(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) \binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left(\sigma^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right)^2 \quad (29)$$

Näissä $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ on binomikerroin ja $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ on suurin kokonaisluku $\leq \frac{n}{2}$. Lähteen [5] II osan sivulla 750 kaavat (g):stä (k):hon antavat, kun $g(\sigma) = G_\sigma / E$

$$g(\sigma) = \frac{E_{\text{sec}}/E}{2(1+\nu)}$$

$$\nu = \nu_p - (\nu_p - \nu_e) E_{\text{sec}}/E \quad (30)$$

$$\frac{E_{\text{sec}}}{E} = \frac{\sigma/\sigma_{ty}}{c \frac{\sigma}{\sigma_{ty}} - (1-c) \ln(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{ty}})}$$

Kaavoissa $E = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\sigma=0}$ on Hooken lain mukainen kimmokerroin. Parametrien c arvot annetaan lähteen [5] taulukossa 4 sivulla 82. Useilla isotrooppisilla aineilla $\nu_p = 0,5$ ja $\nu_e = 0,3$.

REUNAEDDOT

Sauvan keskellä, jossa $s = 0$, saadaan (ks. kuva 1) reunaehdot

$$\theta = \psi = \beta = 0$$

$$\nu = \frac{dv}{ds} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{du}{ds} = 0 \text{ ja } \frac{d\varepsilon_0}{ds} = 0$$

Sauvan päässä, jossa $s = 1/2$, saadaan olettamuksesta 4. ehto $M = 0$.

Siitä seuraa $\frac{d\psi}{ds} = 0$ ja edelleen

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \epsilon_{sall} \\ u &= \cos \theta \end{aligned} \quad (32)$$

Sauvan päät lähestyvät toisiaan matkan δ , joka saadaan kaavasta

$$\int_0^{1/2} [1 - (1 - \epsilon_0) \cos \theta] ds = \frac{\delta}{2l} \quad (33)$$

NUMEERINEN RATKAISU

Sovellutuksena tarkastellaan sauvoja, joiden poikkipinta on ympyrän muotoinen. Aikaisemmin on jo mainittu, että ympyräpoikkipinnan siirtymäkerroin $\zeta = 1,185$ ja vakio $h = \sqrt{\pi}$. Yleistetyt profiiliarvot saadaan kaavoista (17).

Yhtälöt (22) saavat nyt muodon

$$\frac{\sigma(\epsilon_0)}{\sigma_{sall}} = \frac{\cos \theta}{u} - \frac{1}{\sigma_{sall}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^{(2i)}(\epsilon_0)}{2^{2i} (i+1)! i!} (\epsilon_{sall} - \epsilon_0)^{2i} \quad (34)$$

$$\frac{-m}{u^{3/2}} = \frac{1}{\sigma_{sall}} \sqrt{\frac{F}{\pi l^2 \sigma_{sall}}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^{(2i-1)}(\epsilon_0)}{2^{2i-1} (i+1)! (i-1)!} (\epsilon_{sall} - \epsilon_0)^{2i-1}$$

Kaavoista (25) seuraa

$$v = \int_0^s \sin \theta ds \quad (35)$$

$$-m = v(1/2) - v$$

Kaltevuuden laskemiseksi kirjoitetaan yhtälöt (23) ja (24) muotoon

$$\theta = \frac{\psi - \frac{\zeta \sigma_{sall}}{E} \frac{\theta - \sin \theta}{u g(\sigma_0)}}{1 - \frac{\zeta \sigma_{sall}}{E} \frac{1}{u g(\sigma_0)}} \quad (36)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi l^2 \sigma_{sall}}{F}} \int_0^s \frac{\epsilon_{sall} - \epsilon_0}{(1 - \epsilon_0) \sqrt{u}} ds \quad (36)$$

Tarvittavat konstitutiiviset yhtälöt sisältyvät kaavoihin (26)...(30). Kaavat (34) ja (36) antavat aiheen valita seuraavat konstruktioparametrit

$$a = \sqrt{\frac{\pi l^2 \sigma_{sall}}{F}} \quad (\text{kuormitusparametri})$$

$$n = \sigma_{ty} / \sigma_{sall} \quad (\text{varmuusluku}) \quad (37)$$

On syytä huomata, että parametri a ei ole sama kuin professori Laasonen käyttämä ([5] s. 742 kaavat (0)).

Tekniikan ylioppilas Tapio Nora on sovelletun matematiikan erikoistytönä TKK:ssa kehittänyt yhtälöiden ratkaisemiseen sopivan laskualgoritmin ja laatinut sen perusteella tietokoneohjelman. Kaikki numeeriset tulokset perustuvat tähän erikoistytöhön. Olen hänelle kiitollinen saamastani avusta.

Korkein sarjoissa mukaan otettu derivaatta on ollut $\sigma^{(4)}(\epsilon_0)$. Tuloksissa on yleensä tyydytty kahteen desimaaliin. Koska kaikkien tuloksiin vaikuttavien suureiden (konstruktioparametrien a ja n lisäksi on vielä materiaaliparametrit E , σ_{ty} ja c) vapaan muuntelun salliminen johtaisi hyvin suureen määrään taulukoita, on tehtävää pyritty rajoittamaan. Tästä syystä on varmuusluvuksi tyssäykseen nähdyn valittu $n = 1,1$.

Materiaaleiksi on valittu:

- suomalainen mänty ja kuusi (taulukot I ja II)
- elektronimetalli ja duralumiini (taulukot III ja IV)
- teräkset St 37, St 48 ja St 52 (taulukot V, VI ja VII), joiden materiaaliparametrien arvot on kerätty lähteistä [3] ja [5].

Taulukoissa I...VII esitetään poikkipinnan pinta-alan muuttu-

mista esittävä dimensioton suure $u(s, a, n = 1, 1, E, \sigma_{ty}, y, c) = A/A_0$ (kaavat (20) ja (21)) eri materiaaleille kuormitusparametrin a funktiona sauvan eri leikkauksissa. Sauvan keskellä $s = 0$ ja päässä $s = 0,5$.

Taulukoista ilmenee, että parametrin a vaikutus on varsin lineaarinen, niin että a :n taulukkoarvojen suhteen voidaan interpoloida.

Taulukossa VII esitetään neljällä desimaalilla sauvan keskellä syntyvä taipuman maksimiarvo $v = y/l$ parametrin a funktiona eri materiaaleille. Koko sauvan pituus on l .

Yhtä pienemmät u arvot sauvan päässä johtuvat siitä, että leikkausjännityksen vaikutus redusoi tuun jännitykseen on jätetty huomioonottamatta ja että sauvan päässä saadaan täten $u = \cos \theta$, kun $s = 0,5$. Leikkausjännityksen vaikutus β kaltevuuteen oli niin pieni, että se ei tullut esiin numeroarvoissa.

Taulukko I. Mänty. $E = 110\,000 \text{ kpcm}^{-2}$, $\sigma_{ty} = 450 \text{ kpcm}^{-2}$, $c = 0,770$

s \ a	1000	500	200	100	50	30	20
0,0	45,73	22,95	9,22	4,63	2,36	1,50	1,14
0,1	44,58	22,37	9,00	4,53	2,32	1,48	1,13
0,2	41,04	20,64	8,32	4,21	2,19	1,43	1,12
0,3	34,65	17,48	7,10	3,65	1,95	1,33	1,09
0,4	24,19	12,30	5,11	2,73	1,59	1,20	1,05
0,45	16,21	8,36	3,61	2,05	1,34	1,11	1,03
0,475	10,69	5,63	2,59	1,61	1,19	1,06	1,01
0,5	0,91	0,96	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00

Taulukko II. Kuusi. $E = 129\,000 \text{ kpcm}^{-2}$, $\sigma_{ty} = 470 \text{ kpcm}^{-2}$, $c = 0,930$

s \ a	1000	500	200	100	50	30
0,0	42,29	21,15	8,42	4,18	2,07	1,26
0,1	41,24	20,63	8,22	4,09	2,03	1,25
0,2	37,98	19,02	7,61	3,80	1,92	1,22
0,3	32,09	16,12	6,50	3,30	1,73	1,17
0,4	22,44	11,36	4,69	2,48	1,44	1,09
0,45	15,06	7,73	3,32	1,89	1,24	1,05
0,475	9,96	5,23	2,40	1,51	1,13	1,03
0,5	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00

Taulukko III. Elektronimetalli. $E = 460\,000 \text{ kpcm}^{-2}$, $\sigma_{ty} = 1000 \text{ kpcm}^{-2}$
 $c = 0,857$

s \ a	1000	500	200	100	50	30
0,0	33,01	16,51	6,59	3,29	1,68	1,13
0,1	32,20	16,10	6,44	3,22	1,66	1,12
0,2	29,66	14,86	5,97	3,01	1,58	1,11
0,3	25,10	12,61	5,12	2,64	1,46	1,08
0,4	17,60	8,93	3,74	2,04	1,27	1,04
0,45	11,86	6,13	2,70	1,61	1,15	1,02
0,475	7,89	4,20	2,01	1,34	1,08	1,01
0,5	0,97	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00

Taulukko IV. Duralumiini. $E = 738\ 000\ \text{kpcm}^{-2}$, $\sigma_{ty} = 3800\ \text{kpcm}^{-2}$,
 $c = 0,923$.

s \ a	1000	500	200	100	50	30	20
0,0	50,23	25,17	10,04	4,99	2,48	1,49	1,08
0,1	48,97	24,55	9,81	4,88	2,43	1,47	1,07
0,2	45,07	22,62	9,06	4,53	2,28	1,42	1,06
0,3	38,04	19,15	7,72	3,91	2,03	1,32	1,05
0,4	26,53	13,46	5,54	2,90	1,63	1,19	1,03
0,45	17,76	9,12	3,88	2,16	1,36	1,10	1,01
0,475	11,69	6,12	2,76	1,67	1,20	1,05	1,007
0,5	0,91	0,96	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00

Taulukko V. St 37. $E = 2\ 100\ 000\ \text{kpcm}^{-2}$, $\sigma_{ty} = 2400\ \text{kpcm}^{-2}$, $c = 0,949$

s \ a	1000	500	200	100	50
0,0	23,66	11,78	4,66	2,29	1,16
0,1	23,08	11,50	4,55	2,25	1,15
0,2	21,28	10,62	4,23	2,12	1,13
0,3	18,03	9,04	3,65	1,89	1,10
0,4	12,69	6,45	2,73	1,54	1,05
0,45	8,62	4,48	2,05	1,30	1,03
0,475	5,80	3,14	1,60	1,16	1,01
0,5	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00

Taulukko VI. St 48. $E = 2\ 100\ 000\ \text{kpcm}^{-2}$, $\sigma_{ty} = 3280\ \text{kpcm}^{-2}$,
 $c = 0,986$.

s \ a	1000	500	200	100	50
0,0	27,56	13,72	5,41	2,64	1,27
0,1	26,89	13,39	5,29	2,59	1,26
0,2	24,78	12,36	4,91	2,43	1,22
0,3	20,98	10,50	4,22	2,15	1,17
0,4	14,74	7,47	3,12	1,71	1,09
0,45	9,98	5,16	2,30	1,41	1,05
0,475	6,68	3,58	1,76	1,22	1,02
0,5	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00

Taulukko VII. St 52. $E = 2\,150\,000\text{ kpcm}^{-2}$, $\sigma_{ty} = 3850\text{ kpcm}^{-2}$,
 $c = 0,965$

s \ a	1000	500	200	100	50
0,0	29,92	14,92	5,90	2,90	1,42
0,1	29,19	14,55	5,77	2,84	1,40
0,2	26,70	13,43	5,35	2,66	1,35
0,3	22,76	11,41	4,59	2,34	1,27
0,4	15,98	8,09	3,37	1,84	1,15
0,45	10,80	5,57	2,46	1,48	1,08
0,475	7,21	3,84	1,86	1,27	1,04
0,5	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00

Taulukko VIII. Taipuman maksimi-arvo ($v = y/l$)

a	1000	500	200	100	50	30	20
mänty	0,0951	0,0661	0,0393	0,0247	0,0132	0,0064	0,0022
kuusi	0,0733	0,0506	0,0295	0,0178	0,0084	0,0027	
elektroni	0,0540	0,0370	0,0211	0,0123	0,0052	0,0013	
duralum.	0,0959	0,0667	0,0395	0,0246	0,0129	0,0056	0,0011
St 37	0,0294	0,0198	0,0106	0,0052	0,0009		
St 48	0,0355	0,0240	0,0131	0,0068	0,0015		
St 52	0,0414	0,0282	0,0156	0,0085	0,0026		

ESIMERKKI

On mitoitettava teräksestä St 37 valmistettava 1 m pitkä poikkileikkaukseltaan ympyrän muotoinen puristustuki, joka kestää voiman 2500 kp. Varmuus tyssäykseen nähden on 1,1. Tällöin

$$\begin{aligned}
 F &= 2500\text{ kp} & \sigma_{ty} &= 2400\text{ kpcm}^{-2} \\
 l &= 1\text{ m} & \sigma_{sall} &= 2181,82\text{ kpcm}^{-2} \\
 n &= 1,1 & A_0 &= 1,15\text{ cm}^2 \\
 a &= 165,58
 \end{aligned}$$

Poikkipinta-alan jakautuma u lasketaan interpoloiden taulukosta V.

Seuraavasta taulukosta 1 käy ilmi, miten u , poikkipinta-ala A ja halkaisija d jakautuvat pitkin sauvaa. Taulukon VIII avulla saadaan suurimmaksi taipumaksi noin 0,87 cm.

Lasketaan sama esimerkki vielä lähteessä [5] s. 740...745 esitetyn Laasosen ratkaisun avulla. Tällöin

$$n = 1 \qquad c = 0,9$$

$$A_0 = \frac{F}{\sigma_{ty}} = 1,04 \text{ cm}$$

$$a = \frac{k_2 n \sigma_{ty}}{\pi E} \left(\frac{\pi \ell^2 \sigma_{sall}}{F} \right) \approx 0,005 \quad (165,58)^2 \approx 137,87$$

Interpoloimalla lähteen [5] taulukon 46a avulla on saatu $u:n$, $A:n$ ja $d:n$ arvot, jotka ovat esitettyinä taulukon 1 oikeanpuoleisessa osassa.

Näitä kahdella eri tavalla saatuja tuloksia ei suoraan voida verrata keskenään, vaikka $A:n$ ja $d:n$ arvot ovat likimäärin samat, sillä parametrit c ja n ovat eri suuret. Jos otaksutaan, että redusoinnissa c -arvojen eroavuus voidaan jättää huomioonottamatta ja että Laasosen teorian mukaiset A -arvot tulee kertoa suhteella 1,1, havaitaan tämän teorian antavan keskeltä kapeamman ja päistä hieman paksumman sauvan kuin Laasosen teoria. Näiden A -arvojen ero on suurimmillaan suuruusluokkaa 10 %. Ottaen huomioon vertailun karkeuden voidaan molempia menetelmiä pitää likimain saman tuloksen antavina.

Tässä esitetty teoria. n = 1,1 ja c = 0,949				Laasosen teoria. n = 1 ja c = 0,9			
s	u	A = uA ₀ cm ²	$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$ cm	u	A cm ²	d cm	1,1A cm ²
0,0	3,84	4,40	2,37	4,15	4,32	2,35	4,75
0,1	3,76	4,31	2,34	4,05	4,22	2,32	4,64
0,2	3,50	4,01	2,26	3,73	3,88	2,22	4,27
0,3	3,04	3,49	2,11	3,15	3,29	2,05	3,62
0,4	2,32	2,66	1,84	2,24	2,33	1,72	2,56
0,45	1,79	2,05	1,62	1,59	1,65	1,45	1,82
0,475	1,45	1,66	1,45				
0,5	1,00	1,15	1,21	1,00	1,04	1,15	1,14

Taulukko 1. Poikkipinta-alan ja halkaisijan jakautuma esimerkkitaupauksessa tässä esitetyn teorian ja professori Laasosen teorian perusteella määritettynä.

Kirjallisuutta

- [1] Ylinen, A., Erweiterung der Bernoullischen Biegungstheorie auf den unelastischen Bereich. Suomalaisen tiedeakatemia toimituksia, Sarja A, Nid. LVII. No. 7. Helsinki 1941.
- [2] Ylinen, A., Über die Knickbiegefestigkeit eines exzentrisch belasteten ursprünglich gekrümmten Stabes. Suomalaisen tiedeakatemia toimituksia. Sarja A, Nid. LVII. No. 14. Helsinki 1941.
- [3] Ylinen, A., Eräs aksiaalisen jännitystilän muodonmuutosfunktio ja sitä vastaava nurjahduskaava. Tekn. Aikakauslehti 38 (1948).
- [4] Ylinen, A., The effect of shearing force on the buckling load beyond the limit of proportionality. Acta Techn. Hung. 50 (1965) pp. 403...414.
- [5] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi, osat I ja II (2. painos, 1965 ja 1969). WSOY. Helsinki.

Matti A. Ranta, professori, Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi