

JÄHMEIDEN KAPPALEIDEN STATIIKAN ÄÄRIARVOPERIAATTEET

H. PARLAND

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5
No 3 1972 ss. 286-306; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

SUMMARY

If the stresses S and displacements γ in the joints of a structure composed of ideally rigid members, are subjected to unilateral constraints, these constraints may be visualized by two opposite and orthogonal cones $Y(S)$ and $X(\gamma)$ (Fig. 1). The set of stable loads P acting on the structure, is a convex set, which in the load-space is visualized by the stability cone $H(P)$. Correspondingly, the convex set of load-displacements u defines the cone of instable motion $E(u)$, which is opposite and orthogonal to cone H (Fig. 3). The angle of stability ϑ , i.e. the top angle of cone H , may be defined either kinematically (ϑ_{ϵ}) or statically (ϑ_{σ}). The actual angle of stability ϑ is then determined by two extremum principles, either as the minimum of the angle ϑ_{ϵ} or as the maximum of the angle ϑ_{σ} . From these general principles the known upper and lower bound theorems [1,2] for masonry structures may be derived.

Jähmeiden kappaleiden statiikkaa on nykyisin totuttu pitämään alkeellisena apuneuvona, jonka sovellutusalue rakenteiden mekaniikassa rajoittuu staattisesti määrättyihin rakenteisiin. Kuitenkin tämän teorian turvin on menneinä vuosisatoina pystytetty hyvinkin rohkeita ja moninkertaisesti staattisesti määräämättömiä tiili- ja kivirakenteita. Vasta viime vuosikymmenellä on uudelleen ruvettu kiinnittämään huomiota tähän jähmeiden kappaleiden statiikan unohdukseen jääneeseen merkitykseen [1], [2]. On osoitettu, että plastisuusteorian ääriarvoperiaatteita voidaan soveltaa rajatapauksina muurattuihin rakenteisiin [1]. Tällöin edellytetään, että saumat ovat vetokestämättömät ja ettei niissä esiinny liukumista.

Seuraavassa osoitetaan nojaamatta plastisuusteoriaan, että ääriarvoperiaatteet pätevät yleisemmässäkin tapauksessa, jolloin jähmeistä osista koottu rakenne on yhdistetty liitoksilla, jotka joko eivät kestä vetoa (saumat) tai eivät kestä puristusta (köydet, kalvot).

1. JÄHMEISTÄ KAPPALEISTA KOOTTUJEN RAKENTEIDEN VAKAVUUS

Rakenteeseen vaikuttavat annetut kuormat \hat{P}_i , sekä reaktiot ja osien väliset liitosvoimat \hat{S}_j voidaan käsittää vektorina $\{F\} = \{P, S\}$ jännitysavaruuksessa R_F^m joka on eukliidinen ja jossa vektoreiden $\{A\}$ ja $\{B\}$ skalaaritulo on

$$(A, B) = \sum_i \hat{A}_i \cdot \hat{B}_i \quad (1.1)$$

Voimien vaikutuspisteiden \hat{r}_a siirtymät \hat{u}_a voidaan käsittää vektorina $\{u\}$ siirtymäavaruuksessa joka on isomorfinen avaruuden R_F^m kanssa. Kuormitusvektorit $\{P^S\} = \{P_1^S \dots P_n^S\}$ virittävät R_F^m :n aliavaruuden,

kuormitusavaruuden R_p^n . Jos kuormitusta $\{P^k\}$ vastaava tila $\{P^k, S^k\}$ täyttää tasapainoehdot sanotaan tasapainon vallitsevan avaruuden R_p^n pisteessä P^k . Rakenteen vakavuus kuormituksessa P^k voidaan silloin luokitella seuraavien staattisten kriteerien avulla.

- a) Rakenne on stabiilissa tilassa, jos tasapainoehdot toteutuvat paitsi pisteessä P^k myöskin jokaisessa sen lähiympäristön pisteessä P'^k , jossa $|P'^k - P^k| \geq \epsilon > 0$.
- b) Rakenne on tasapainottomassa tilassa, jos tasapainoehdot eivät toteudu pisteessä P^k .
- c) Rakenne on rajatasapainotilassa, jos tasapaino toteutuu pisteessä P^k , mutta ainakin yksi infinitesimaalinen lisäkuormitus $\{\delta P^k\}$ saattaa rakenteen tasapainottomaan tilaan.

Stabiilisuuden luokittelu voidaan suorittaa myös seuraavien kineettisten kriteerien avulla, jotka perustuvat kuormien P_i potentiaalin ja rakenteen kimmo- ja dissipaatioenergioiden muutoksiin $-\Sigma P \cdot \Delta u$, ΔU ja ΔD :

- a') Rakenne on stabiilissa tilassa, jos jokaiselle riittävän pienelle siirtymätilan lisäykselle $\{\Delta u\}$ on voimassa ehto

$$\Sigma \hat{P} \cdot \Delta \hat{u} < \Delta U + \Delta D \quad (1.1a)$$

- b') Rakenne on tasapainottomassa tilassa (= kiihtyvässä liikkeessä), jos ainakin yhdelle lisäykselle $\{\Delta u\}$ on voimassa ehto

$$\Sigma \hat{P} \cdot \Delta \hat{u} > \Delta U + \Delta D \quad (1.1b)$$

- c') Rakenne on rajatilassa, jos jokaiselle pienelle lisäykselle $\{\Delta u\}$ on täytetty ehto

$$\Sigma \hat{P} \cdot \Delta \hat{u} \leq \Delta U + \Delta D \quad (1.1c)$$

ja on olemassa ainakin yksi lisäys $\{\Delta u_c\}$, jolle on voimassa

$$\Sigma \hat{P} \cdot \Delta \hat{u}_c = \Delta U + \Delta D$$

Jähmeässä, ts. äärettömän jäykässä ja lujassa kappaleessa ei tapahdu

muodonmuutoksia, joten $\Delta U = \Delta D = 0$. Jähmeistä osista kootun rakenteen kineettiset vakavuuskriteerit ovat siten:

a") Stabiili tila. Jokaisessa kinemaattisesti mahdollisessa siirtymätilassa $\{u\}$ on voimassa epäyhtälö

$$\Sigma \hat{P} \cdot \hat{u} < 0 \quad (1.2a'')$$

b") Tasapainoton tila. On olemassa ainakin yksi siirtymätila $\{u\}$, jossa on voimassa epäyhtälö

$$\Sigma \hat{P} \cdot \hat{u} > 0 \quad (1.2b'')$$

c") Rajatila. Jokaisessa mahdollisessa siirtymätilassa on

$$\Sigma \hat{P} \cdot \hat{u} \leq 0$$

ja on olemassa ainakin yksi siirtymätila $\{u_c\}$, jossa yhtäläisyysmerkki on voimassa

$$\Sigma \hat{P} \cdot \hat{u}_c = 0 \quad (1.2c'')$$

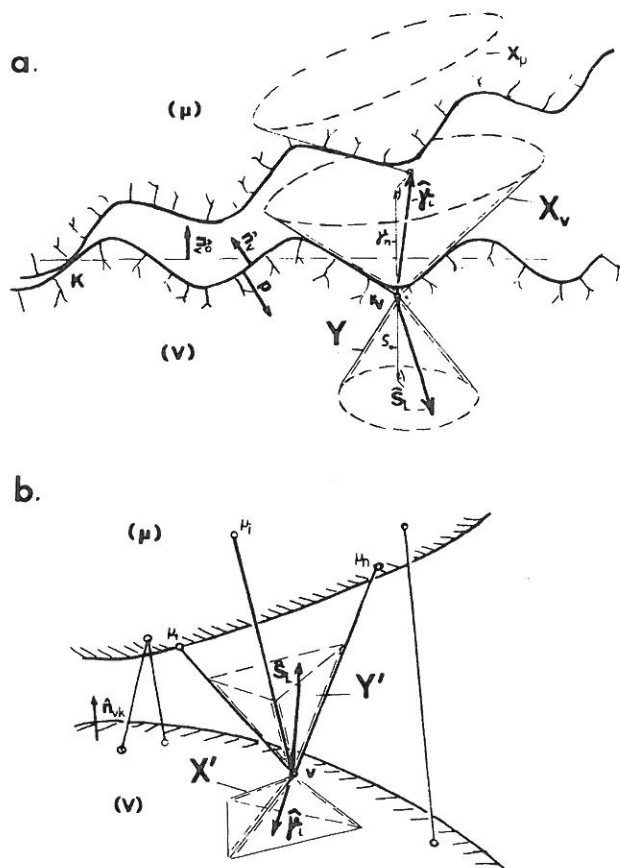
Nämä kriteerit a", b", c" muodostavat yhdessä staattisten kriteerien a, b, c kanssa lineaarisen stabiilisuusteorian perustan.

2. JÄHMEISTÄ OSISTA KOOTUN RAKENTEEN JÄNNITYS- JA SIIRTYMÄTILAT

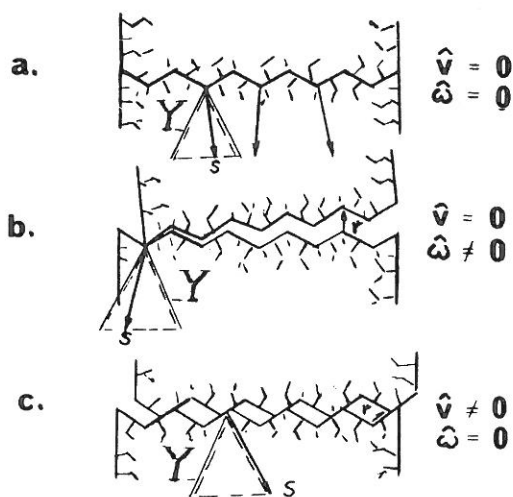
Otaksutaan rakenteessa olevan rakenteellisten nivelten lisäksi nk. toispuolisia liitoksia, joiden vapausasteet riippuvat kuormituksesta. Nämä liitokset siirtävät vain tietyn suuntaisia voimia. Toispuolisia liitoksia ovat (kuva 1):

- a) Vetoakestämättömät saumat, jotka eivät siirrä vetoa. Kosketuksessa olevilla kappaleilla on kuvion mukainen yhteensopiva hammas, jonka kosketuspinnat ovat täysin kitkattomat.
- b) Puristusta kestävämmät liitokset, joissa osakappaleet on yhdistetty venymättömällä köysillä ja kalvoilla.

Tämän tapaisessa rakenteessa voidaan määritellä mahdolliset eli luval-



Kuva 1. a) Sauman siirroskartio X ja voimakartio Y. Kosketus osittainen K:ssä. b) Köysiliitoksen siirrospyramidi X' ja voimapyramidi Y'.



Kuva 2. Vetoakestämättömän sauman dynaaminen kosketus. a) Täydellinen, maksimaalinen. b) Täydellinen, paikallinen (nivel). c) Osittainen (johde).

liset tilat.

A. Luvallinen siirtymätila $\{u_\ell, \gamma_\ell\}$, jossa siirtymät täyttävät seuraavat ehdot:

α) Jokaisen jähmeän osakappaleen v siirtymät $\{u\}$ ovat:

$$\hat{u}_v(r) = \hat{v}_v + \hat{\omega}_v \times \hat{r} \quad (2.1)$$

Sen mukaan on kappalten μ ja v välisen liitoksen siirrosvektori pisteessä \hat{r}_v

$$\hat{\gamma}_{\mu v}(r_v) = \hat{u}_\mu(r_v) - \hat{u}_v(r_v) = \hat{v}_{\mu v} + \hat{\omega}_{\mu v} \times \hat{r}_v \quad (2.2)$$

β) Vetoakestämättömissä saumoissa otaksutaan alkutilanteessa vallitsevan ns. täydellisen kosketuksen (kuva 2a). Kappaleiden läpituonkemattomuuden perusteella on kappaleen μ hammaskartion X_μ kärjen pysyttävä kappaleen v hammaskartion X_v sisällä. Tämä merkitsee, että (kuva 1a)

$$\hat{n}_v^0 \cdot \hat{\gamma}_{\mu v} = \gamma_n \geq 0 \quad (2.3a)$$

$$X(\gamma_{\mu v}) \leq B \quad (2.4)$$

jossa $X(\gamma) = B$ on hammaskartion X_v analyttinen lauseke. Siirroksen tapahduttua voidaan tilanne luokitella seuraavasti (kuva 2):

$$1. \text{ Täydellinen kosketus} \quad \gamma = 0 \quad (2.5)$$

$$2. \text{ Osittainen kosketus} \quad \gamma \neq 0; X(\gamma) = B \quad (2.6)$$

$$3. \text{ Ei kosketusta} \quad \gamma \neq 0; X(\gamma) < B \quad (2.7)$$

γ) Puristusta kestäättömien liitosten kalvojen ja köysien otaksutaan alkutilassa olevan suorina (kuva 1b). Liitoksessa, jossa osa μ pisteissä $r_{\mu 1} \dots r_{\mu n}$ on köysillä liitetty kappaleen v pisteeseen r_v , on kaavojen (2.2 - 3) mukaan

$$\hat{u}_\mu(r_{\mu i}) - \hat{u}_v(r_v) = \hat{\gamma}_{\mu v}(r_v) + \hat{\omega}_\mu (\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_v)$$

Köyden i venymättömyysehto on

$$\Delta \ell_i = \frac{1}{\ell_i} (\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_v) \cdot (\hat{u}_\mu(r_{\mu i}) - \hat{u}_v(r_v)) = \frac{1}{\ell_i} (\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_v) \cdot \hat{\gamma}_{\mu v} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.8)$$

n kaavaa (2.8) määrittelee köysipyramidin X' , jonka sivutasot ovat köysien normaalitasot ja jonka sisäpuolella muodonmuutoksen $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$ on pysyttävä. Tällöin puristusta kestävämmille liitoksille ovat voimassa täysin vastaavat ehdot (2.4)...(2.7), jos X korvataan X' :lla. Kuitenkin ehto (2.3a) on korvattava ehdolla (kuva 1b)

$$\hat{n}_k \cdot \hat{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_n \leq 0 \quad (2.3b)$$

jossa \hat{n}_k on pinnasta ulospäin suunnattu vektori. Kartiopinnat X ja X' ovat kuperat ulospäin. Kinemaattisten ehtojen (2.1)...(2.3) luonteesta seuraa:

1. Jos siirtymätila $\{u, \gamma\}$ on luvalinen ja vakio $a > 0$, on myös tila $\{au, a\gamma\}$ luvalinen. Jos toispuolisessa liitoksessa $\gamma \neq 0$ on $\{-au, -a\gamma\}$ luvaton siirtymätila.
2. Jos $\{u', \gamma'\}$ ja $\{u'', \gamma''\}$ ovat luvalisia tiloja, on myös $\{u'+u'', \gamma'+\gamma''\}$ luvalinen tila.
3. Kaikki luvallisten tilojen $\{u', \gamma'\}$ ja $\{u'', \gamma''\}$ välisellä janelalla olevat tilat $\{\alpha u' + (1-\alpha)u'', \alpha \gamma' + (1-\alpha)\gamma''\}$, jossa $0 \leq \alpha \leq 1$, ovat luvalisia.

Sääntö 3 ilmaisee, että luvallisten siirtymätilojen joukko on konvekksi joukko. Tämä koskee myöskin jokaista joukon $\{u\}$ osajoukkoa, siis myöskin kuormitus siirtymiä u_i . Säännöistä 1, 2 ja 3 seuraa:

4. Luvallisten kuormitus siirtymien joukko $\{u\}$ määrittelee kuormitusavaruudessa luvallisten siirtymien kartion E_ℓ , jonka vaippa on ulospäin kupera.

- B. Luvalinen jännitystila $\{P_\ell, S_\ell\}$ on jokainen tasapainoehdot ja toispuolisten liitosten voimansiirtoehdot täyttävä jännitystila.
- α' Jokaisen osakappaleeseen v vaikuttavat kuormat P_v ja liitosvoimat $S_{v\mu}$ (mukaanluettuna reaktiot) täyttävät tasapainoehdot

$$\Sigma \hat{P}_V + \Sigma \hat{S}_{V\mu} = 0 \quad (2.9)$$

$$\Sigma \hat{r}_V \times \hat{P} + \Sigma \hat{r}_V \times \hat{S}_{V\mu} = 0 \quad (2.9')$$

$$\hat{S}_{V\mu} = - \hat{S}_{\mu V} \quad (2.9'')$$

Toispuolisissa liitoksissa ovat lisäksi voimassa voimansiirtoehdot:

- β' Saumoissa on jokainen jännitysvektori pinnan paikallisen normaalin, \hat{n}_V , suuntainen $\hat{p}_{V\mu} = \sigma \hat{n}_V$, ja yhteen hammaskartioon X_V vaikuttaa voima (kuva 1a)

$$\hat{S}_{V\mu} = \int_{\Delta A} \sigma \hat{n}_V dA$$

Koska sauma välittää vain puristusta on $\sigma < 0$, jolloin jokainen $S_{V\mu}$ on suunnattu keskipinnan sisään (kuva 1a)

$$\hat{n}_V^0 \cdot \hat{S}_{V\mu} = S_n \leq 0 \quad (2.10a)$$

$S_{V\mu}$:n ei voi sijaita kartion X normaalikartion Y ulkopuolella, joten se täyttää ehdon [3]

$$Y(S_{V\mu}) \leq C \quad (2.11)$$

$Y(S)$ voidaan tulkita keskipinnan jähmeän kitkan kartiona. Kartion $Y(r_V)$ dynaaminen kosketus on (kuva 2)

$$\text{täydellinen, jos } S \neq 0; \quad Y(S) < C \quad (2.12a)$$

$$\text{osittainen, jos } S \neq 0; \quad Y(S) = C \quad (2.12b)$$

$$\text{puuttuva, jos } S = 0 \quad (2.12c)$$

Köysiliitoksessa, jossa kappaleen v pisteessä r_V kohtaa m köyttä vaikuttaa voima (kuva 1b)

$$\hat{S}_{V\mu} = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_V)}{l_i} S_i \quad (2.13)$$

jossa $l_i = |r_{\mu i} - r_V|$ ja jokainen $S_i \geq 0$. Tämän johdosta vektori $\hat{S}_{V\mu}$ ei voi olla vektoreiden $(\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_V)$ määrittelemän pyramidin $Y'(X':n \text{ normaalipyramidin})$ ulkopuolella ja sen on täytettävä kaavoja (2.11)...(2.12c) vastaavat ehdot. Ehto (2.10a) on kuitenkin

toispuolisuusehdon $S_i \geq 0$ perusteella korvattava ehdolla

$$\hat{n}_k \cdot \hat{S}_{v\mu} = S_n \geq 0 \quad (2.10b)$$

On huomattava, että sekä kartiot Y että pyramidit Y' ovat ulospäin kuperia.

Jännitysavaruuuden vektori $\{F\} = \{P, S\}$ määrittelee rakenteen jännitystilaa. Kahta jännitystilaa $\{P', S'\}$ ja $\{P'', S''\}$ sanotaan identtisiksi, jos kuormien $P(r_v)$ ja liitosrasitusten resultantit ja momentit ovat yhtäsuuret $\hat{R}'_v = \hat{R}''_v$; $\hat{M}'_v = \hat{M}''_v$, $\hat{R}'_{v\mu} = \hat{R}''_{v\mu}$; $\hat{M}'_{v\mu} = \hat{M}''_{v\mu}$.

Dynaamisista ehdoista (2.7)...(2.13) seuraa:

- 1' Jos jännitystila $\{P, S\}$ on luvalinen ja $a > 0$, on myös jännitystila $\{aP, aS\}$ luvalinen. Jännitystila $\{-aP, -aS\}$ on luvalinen vain, jos toispuolisissa liitoksissa $S = 0$.
- 2' Jos $\{P', S'\}$ ja $\{P'', S''\}$ ovat luvalisia jännitystiloja, on myös $\{P'+P'', S'+S''\}$ luvalinen jännitystila.
- 3' Jos $\{P', S'\}$ ja $\{P'', S''\}$ ovat luvalisia tiloja, on jännitysavaruuuden pisteitä $\{P', S'\}$ ja $\{P'', S''\}$ yhdistävällä janalla olevien pisteiden jännitystila $\{\alpha P' + (1-\alpha)P'', \alpha S' + (1-\alpha)S''\}$, jossa $0 \leq \alpha \leq 1$, luvalinen

Säännöt ilmaisevat, että luvalisten jännitystilojen $\{P_\ell, S_\ell\}$ joukko on konvekssi joukko. Luvalisia jännitystiloja vastaavat kuormitusvektorit $\{P_\ell\}$ täyttävät sääntöjen 1', 2', 3' perusteella ehdon:

- 4' Luvalisten kuormitusten $\{P_\ell\}$ joukko muodostaa kuormitusavaruuudessa luvalisten kuormitusten kartion H_ℓ , jonka vaippa on ulospäin kupera (kuva 3).

Dynaamista kosketusta toispuolisessa liitoksessa sanotaan maksimaaliseksi, jos liitoksessa esiintyvien leikkaussuureiden määrä vastaa liitoksen täydellisintä mahdollista kosketusta koko lii-

3. RAJATASAPAINOTILAN MÄÄRITYS

Stabiili tasapainotila on kappaleiden jähmeyden takia monikäsitteinen, paitsi jos rakenne on staattisesti määrätty. Rajatasapainotila on sen sijaan tietyssä mielessä yksikäsitteinen myös staattisesti määräämättömissä rakenteissa.

Ominaista rajatilalle on, että siinä toteutuu staattisen ehdon c) mukaan luvalinen jännitystila ja kineettisen ehdon c") mukaan määrätty luvalinen siirtymätila. Yhteenkuuluvat liitosrasitukset S ja muodonmuutokset γ täyttävät toispuolisissa liitoksissa lisäksi seuraavat suuntaehdot, jotka perustuvat köysien venymättömyyteen ja kosketusjännitysten lähivaikutukseen.

a) Täydellinen dynaaminen kosketus

$$\text{Jos } S \neq 0; Y(S) < C; \gamma = 0 \quad (3.1a)$$

b) Ei geometristä kosketusta

$$\text{Jos } \gamma \neq 0; X(\gamma) < B; S = 0 \quad (3.1b)$$

c) Osittainen geometrinen ja dynaaminen kosketus

$$\text{Jos } \gamma \neq 0; X(\gamma) = B; S \neq 0; Y(S) = C \quad (3.1c)$$

Jos S' on erään luvalisen jännitystilan liitosrasitus ja γ'' on erään luvalisen siirtymätilan muodonmuutos on ehtojen (2.3)...(2.13) perusteella jokaisessa liitoksessa ($\nu\mu$)

$$\hat{S}'_{\nu\mu} \cdot \hat{\gamma}''_{\mu\nu} \leq 0; \quad \Sigma \hat{S}'_{\nu\mu} \cdot \hat{\gamma}''_{\mu\nu} = \hat{R}'_{\nu\mu} \cdot \hat{v}''_{\mu\nu} + \hat{M}'_{\nu\mu} \cdot \hat{\omega}''_{\mu\nu} \leq 0 \quad (3.2)$$

Toispuolisissa liitoksissa yhtäläisyysmerkki on voimassa vain, jos S' ja γ'' ovat yhteenkuuluvia, siis $S' = S; \gamma'' = \gamma$

$$\hat{S} \cdot \hat{\gamma} = 0; \quad \hat{R}_{\nu\mu} \cdot \hat{v}_{\mu\nu} + \hat{M}_{\nu\mu} \cdot \hat{\omega}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.3)$$

Luvalisen jännitystilan $\{F'\}$ ja luvalisen siirtymätilan $\{u''\}$ skaalaritulo antaa ehtojen A, B nojalla työyhtälön

$$(F', u'') = (P', u'') + (S', u'') = \Sigma \hat{P}' \cdot \hat{u}'' - \Sigma \hat{S}'_{\nu\mu} \cdot \hat{u}''_{\mu\nu} = 0 \quad (3.4)$$

Termit $\hat{S}'_{\nu\mu} \cdot \hat{\gamma}''_{\mu\nu}$ häviävät rakenteellisissa liitoksissa. Toispuolisissa liitoksissa ne ovat ei-positiiviset, joten

$$\Sigma \hat{P}' \cdot \hat{u}'' = \Sigma \hat{S}' \cdot \hat{\gamma}'' \leq 0 \quad (3.5)$$

Rajajännitystilassa, jossa $\{P', S'\}$ ja $\{u'', \gamma''\}$ ovat yhteenkuuluvia, on kaavojen (3.3) perusteella

$$\Sigma \hat{P}'_c \cdot \hat{u}''_c = (P'_c, u''_c) = 0 \quad (3.6)$$

Yhtälö osoittaa, että rajatilan kuormitus $\{P'_c\}$ ja siirtymä $\{u''_c\}$ ovat kuormitusavaruudessa ortogonaalisia.

Lause I. Jos rakennetta kuormittaa annetun peruskuormituksen $\{P_0\}$ lisäksi suunnaltaan, mutta ei suuruudeltaan määrätty lisäkuorma $\{P_\lambda\} = \lambda\{k\}$, toteutuu rajatila enintään kahden yksikäsitteisesti määrätyn mekanismin siirtymätilassa $\{u_{c+}, \gamma_{c+}\}$ ja $\{u_{c-}, \gamma_{c-}\}$, joissa $\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}_{c+} > 0$ ja $\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}_{c-} < 0$ ja joita vastaavat yksikäsitteisesti määrättyt kuormitusintensiteetit λ_{c+} ja λ_{c-} . Rajatasapainotilojen joukkoon ($\{P_c, S_c\}$) ei kuulu maksimaalisen kosketuksen tasapainotiloja $\{P_c, S_m\}$. Rajatasapainotila on yksikäsitteinen jos mekanismilla on äärellinen liikkuvuus.

Todistus. Otaksutaan, että rajatila, jossa $\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u} > 0$, toteutuisi kahdessa siirtymätilassa $\{u'_+, \gamma'_+\}$ ja $\{u''_+, \gamma''_+\}$, joita vastaavat rajakuormat ovat $\{P'\} = \{P^0\} + \lambda'\{k\}$ ja $\{P''\} = \{P^0\} + \lambda''\{k\}$. Kirjoitetaan työyhtälöt kuormatilalle $\{P'' - P', S'' - S'\}$ siirtymätiloissa $\{u'_+, \gamma'_+\}$ ja $\{u''_+, \gamma''_+\}$, jolloin kaavan (3.5) perusteella

$$(\lambda'' - \lambda') \Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}'_+ \leq 0; \quad (\lambda'' - \lambda') \Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}''_+ \geq 0 \quad (3.5')$$

Ehdot (3.5') toteutuvat vain, jos jokainen termi

$$\hat{S}'' \cdot \hat{\gamma}' = \hat{S}' \cdot \hat{\gamma}'' = 0$$

siis S'' ja γ' ja S' ja γ'' ovat yhteenkuuluvia. Tämä merkitsee

$$\lambda''_{c+} = \lambda'_{c+}$$

Lisäksi

- 1) kaikkialla missä $\gamma \neq 0$, $X(\gamma) < B$ on $S' = S'' = 0$
- 2) kaikkialla missä $S' \neq 0$, $Y(S') < C$ on $\gamma'' = \gamma' = 0$
- 3) kaikkialla missä $S' \neq 0$ ja $\gamma' \neq 0$ on $\hat{\gamma}'' = a\hat{\gamma}'$

Tämän perusteella kaikissa saumoissa, joissa on täydellinen dynaaminen kosketus vähintään kahdessa pisteessä tai osittainen kosketus vähintään kolmessa pisteessä on (kaavat (2.1) ja (2.2))

$$v''_{\mu\nu} = av'_{\mu\nu} ; \quad \omega''_{\mu\nu} = a\omega'_{\mu\nu} \quad (a = \text{vakio} > 0)$$

mikä merkitsee, että tilojen $\{u', \gamma'\}$ ja $\{u'', \gamma''\}$ mekanismit ovat identtiset. Mekanismin vapausaste on $w = 1$ ja jos sen liikkuvuus on äärellinen, on rakenteen staattinen määräämättömyysaste rajatilassa $n_s = -w = -1$. Siitä seuraa, että intensiteetti λ ja mekanismin liitosten resultoivat rasitukset voidaan yksikäsitteisesti määrittää. Jos vihdoin rajatilassa $\{P_c, S_c, u_c, \gamma_c\}$ maksimaalisen kosketuksen tasapainotila $\{P_c, S_m\}$ olisi mahdollinen, olisi

$$\Sigma \hat{P}_c \cdot \hat{u}_c = \Sigma \hat{S}_m \cdot \hat{\gamma}_c < 0$$

koska maksimaalisessa kosketuksessa jokainen termi $\hat{S}_m \cdot \hat{\gamma}_c < 0$. Tämä on ristiriidassa työyhtälön (3.6) kanssa.

4. ÄÄRIARVOPERIAATTEET

Kineettisen stabiilisuusehdon a") mukaan stabiilia tasapainoa vastaavat kuormat $\{P_s\}$ täyttävät ehdon

$$\Sigma \hat{P}_s \cdot \hat{u}_\ell < 0 \tag{4.1}$$

jokaisessa luvalisessa siirtymätilassa $\{u_\ell\}$. Kaavasta seuraa, että jos $\{P_s\}$ on stabiili kuorma ja $a > 0$ on vakio, myös $\{aP_s\}$ on stabiili kuorma, mutta $\{-P_s\}$ ja $\{P_c\}$ eivät ole stabiileja ehtojen b" ja c" mukaan. Kuormien $\{P_s\}$ muodostama joukko kuvaa siten kuormitusavarudessa erästä kartiota H_s , jota nimitetään stabiilisuuskartioksi ja jonka sisäpuolella kärjestä lähtevät $\{P_s\}$ -vektorit sijaitsevat.

Tiettyä alkukuormaa $\{P^0\}$ ja suuntaa $\{k\}$ vastaava intervalli $(\lambda_{s+}, \lambda_{s-})$, jossa kuormat $\{P^0\} + \lambda\{k\}$ ovat stabiileja, määrittelee $\{P^0\}$:aa ja $\{k\}$:ta vastaavan stabiilin kulman eli vakavuuskulman θ_s , joka on kartion H_s kärkikulma.

Rakenteen stabiilisuuskartiota eli stabiilia tasapainoa vastaavien kuormitusten $\{P_s\}$ joukko voidaan rajata joko kineettisen rajaehdon c")

$$\Sigma \hat{P} \cdot \hat{U}' = 0 \quad (4.2)$$

tai staattisen kriteerin a) avulla. Kineettinen rajaehto (3.6) voidaan kuormituksessa $\{P^0 + \lambda k\}$ kirjoittaa muotoon

$$\lambda \Sigma \hat{k} \cdot \hat{U}' = -\Sigma \hat{P}^0 \cdot \hat{U}' \quad (4.2')$$

Jos valitaan $\{P^0\}$:ksi stabiili kuorma, on yhtälön (3.2') oikea puoli aina positiivinen, jolloin kaava (4.2') antaa

$$\lambda_{\epsilon} = \frac{|\Sigma P^0 \cdot \hat{U}'|}{\Sigma \hat{k} \cdot \hat{U}'} \quad (4.3)$$

Niiden siirtymätilojen $\{u'_+\}$ joukko, joissa $\Sigma k \cdot u_+ > 0$ määrittelee tällöin positiivisten intensiteettien $\lambda_{\epsilon+}$ joukon ja vastaavasti tilojen $\{u'_-\}$ joukko, joissa $\Sigma \hat{k} \cdot \hat{U}'_- < 0$ määrittelee negatiivisten intensiteettien $\lambda_{\epsilon-}$ joukon.

$$\lambda'_{\epsilon-} = - \left| \frac{\Sigma \hat{P}^0 \cdot \hat{U}'_-}{\Sigma \hat{k} \cdot \hat{U}'_-} \right| ; \quad \lambda'_{\epsilon+} = + \left| \frac{\Sigma \hat{P}^0 \cdot \hat{U}'_+}{\Sigma \hat{k} \cdot \hat{U}'_+} \right| \quad (4.3')$$

Stabiilin alueen laajuuden ja vakavuuskulman θ_{ϵ} määrittelee

$$\Delta \lambda_{\epsilon} = |\lambda_{\epsilon-}| + |\lambda_{\epsilon+}| \quad (4.3'')$$

Staattisen stabiilisuuskriteerin a) mukaan rakenteen vakavuuden välttämätön ehto on, että kuormaa $\{P\}$ vastaa ainakin yksi luvalinen jännitystila $\{P_{\rho}, S_{\rho}\}$. Jos stabiili tila toteutuu pisteessä P^0 ja $\{k\}$ on suuntavektori, voidaan kahden luvalisen kuormitusvektorin

$$\{P'_{\sigma+}\} = \{P^0\} + \lambda'_{\sigma+} \{k\} ; \quad \{P'_{\sigma-}\} = \{P^0\} + \lambda'_{\sigma-} \{k\} \quad (4.4)$$

avulla määritellä staattisesti luvalinen vakavuuskulma ϑ_{σ} .

On huomattava, että stabiilin alueen rajojen määritelmät (4.3) ja (4.4) eivät ole yksikäsitteisiä. Todellinen stabiilisuuskulma voidaan määrittää seuraavien ääriarvoperiaatteiden nojalla.

Lause IIa. Annettua stabiilia alkukuormaa $\{P^0\}$ ja suuntaa $\{k\}$ vastaava todellinen vakavuuskulma ϑ on pienin kinemaattisesti määritellyistä vakavuuskulma ϑ_{ϵ} . Stabiilien intensiteettien λ_s alueen määrittelee pienin avoin väli

$$(\lambda_{\epsilon-}, \lambda_{\epsilon+}) \quad (4.5)$$

(pienimmän vakavuuskulman periaate).

Lause IIb. Annettua stabiilia alkukuormaa $\{P^0\}$ ja suuntaa $\{k\}$ vastaava todellinen vakavuuskulma ϑ on suurin staattisesti määritellyistä vakavuuskulmista ϑ_{σ} ja stabiilien intensiteettien alueen määrittelee suurin luvalisten intensiteettien avoin väli

$$(\lambda_{\sigma-}, \lambda_{\sigma+}) \quad (4.6)$$

(suurimman vakavuuskulman periaate).

Lauseen IIa todistamiseksi muodostetaan siirtymätilan $\{u'\}$ työyhtälö (4.2') ensiksikin kuormatiloissa $\{P^0\} + \lambda'_{\epsilon}\{k\}$ ja toiseksi todellisessa rajakuormatilassa $\{P^0\} + \lambda_c\{k\}$ jota vastaa tasapainotila $\{P^0 + \lambda_c k, S_c\}$. Jos $\text{sign}(\Sigma k \cdot u') = \text{sign} \lambda_{\epsilon} = \text{sign} \lambda_c$ voidaan työyhtälöt kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} |\lambda'_{\epsilon}| |\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}'| - |\Sigma \hat{P}^0 \cdot \hat{u}'| &= 0 \\ |\lambda_c| |\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}'| - |\Sigma \hat{P}^0 \cdot \hat{u}'| &= \Sigma \hat{S}_c \cdot \hat{\gamma}' \leq 0 \end{aligned}$$

Vähennys antaa

$$(|\lambda'_{\epsilon}| - |\lambda_c|) |\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}'| \geq 0$$

Koska kaava on voimassa vain samanmerkkisillä λ'_{ϵ} ja λ_c -arvoilla on

$$|\lambda'_{\epsilon+}| \geq |\lambda_{c+}| \quad |\lambda'_{\epsilon-}| \geq |\lambda_{c-}| \quad (4.7)$$

ja yhtäläisyysmerkit ovat voimassa vain, jos $\{u'\} = a\{u_c\}$. Tarkastamme niiden intensiteettien λ'' joukkoa, jotka vastaavat tasapainotonta tilaa, siis jotka kineettisen ehdon b'') mukaan täyttävät epäyhtälön

$$\lambda'' \Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}' + \Sigma \hat{P}^0 \cdot \hat{u}' > 0$$

ainakin yhdessä luvallisessa siirtymätilassa u' . Epäyhtälö toteutuu tilassa $u' = u_c$ jos

$$\lambda'' < \lambda_{c-} \quad ; \quad \lambda_{c+} < \lambda'' \quad (4.8)$$

Siis tasapainotonta tilaa vastaavat λ :t ovat suljetun välin $|\lambda_{c-}, \lambda_{c+}|$ ulkopuolella. Työlauseke (4.8) häviää vain, jos $\lambda'' = \lambda_c$. $|\lambda_c|$:n minimiominaisuuden perusteella on kineettinen stabiilisuusehto a'')

$$\lambda \Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}' + \Sigma \hat{P}^0 \cdot \hat{u}' < 0 \quad (4.9)$$

silloin voimassa jokaisella avoimen välin $(\lambda_{c+}, \lambda_{c-})$ arvolla λ , jokaisessa luvallisessa tilassa $\{u\}$, josta lause IIa seuraa. Sen perusteella luvalliset kuormitusintensiteetit λ_σ kuuluvat suljettuun väliin $|\lambda_{c-}, \lambda_{c+}|$. Tämä merkitsee

$$|\lambda_{\sigma-}| \leq |\lambda_{c-}| \quad |\lambda_{\sigma+}| \leq \lambda_{c+} \quad (4.10)$$

siis, rajatilan λ_c :t vastaavat itseisarvoltaan suurimpia staattisesti määriteltyjä $|\lambda_\sigma|$ arvoja. Stabiilit intensiteetit λ_s täyttävät sen vuoksi ehdon

$$\lambda'_{\sigma \min} < \lambda_s < \lambda'_{\sigma \max} \quad (4.11)$$

josta lause IIb seuraa. Ääriarvoperiaatteiden mukaan:

Rajakuormien joukko $\{P_c\}$ muodostaa kuormitusavaruudessa luvallisten kuormien $\{P_\ell\}$ kartion H_ℓ vaipan.

Stabiili kuorma $\{P_s\}$ on jokainen vektori $\{P\} \neq \{0\}$, joka pysyy kartion H vaipan sisäpuolella. Kartiot H_s ja H_ℓ ovat identtiset.

Rajatilan siirtymien joukko $\{u_c\}$ muodostaa kuormitusavaruudessa luvallisten siirtymien kartion E_ℓ vaipan, joka rajaa tasapainottomien

tilojen siirtymät.

Kartiot E_ℓ ja H_ℓ ovat toistensa vastakkaiset normaalikartiot.

Tämä osoittaa, että samat ehdot ja geometriset struktuurit, jotka fysikaalisessa avaruudessa kuvaavat paikallisten liitosvoimien ja -siirrostien rajoituksia, toistuvat kuormitusavaruudessa saman muotoisina rakenteen kuormien ja siirtymien rajoitusten kuvaajina.

Koska maksimaalisen kosketuksen, tasapainotilat $\{P_m, S_m\}$ muodostavat stabiilien tilojen $\{P_s, S_s\}$ joukon osajoukon, sanotaan jännitystiloja $\{P_m, S_m\}$ "varmoiksi" jännitystiloiksi. Stabiilin tilan olemassaolo todetaan tämän perusteella seuraavasti:

Sääntö A. Jos annetun kuormituksen $\{P\}$ vaikuttaessa löytyy edes yksi varma jännitystila $\{P, S_m\}$ rakenne on stabiilissa tilassa.

Kivirakenteissa voidaan neljäkäskiviä pitää jähmeinä ja saumoja vetoakestämättöminä. Jos kivirakenne on niin ohutseinäinen, että jännitystila voidaan määritellä puristusviivan tai -pinnan avulla, on puristuspinna varma, jos se pysyy rakenteen sisällä sivuamatta sen ulkopintoja ja saumavoima täyttää ehdot $\hat{n}_v \cdot \hat{S}_{v\mu} < 0$ ja $Y(S) < C$. Jos kitka määräytyy pelkästään liikerajoitusten $X(\gamma) < B$ perusteella ("jähmeä kitka") kuten halkeamissa ja hammastetuissa saumoissa (kuva 3) on stabiilin tasapainon kriteerio:

Sääntö A'. Ohutseinäinen kivirakenne on stabiilissa tilassa, jos kuormitusta vastaa edes yksi "varma" puristuspinna.

Todellisen stabiilin puristusviivan löytäminen on täysin tarpeeton ja lisäksi mahdoton tehtävä. Rakenneseinien jähmeyden takia on jokainen stabiili jännitystila epämääräinen. Rajajännitystilat ovat sen sijaan Lauseen I perusteella mm:ssa kaarissa ja kuorissa määrättyjä. Tämän tapaisten rakenteiden stabiilisuuskriteeri voidaan lausua seuraavan perussäännön mukaisesti:

Sääntö B. Jos annetun kuorman vaikuttaessa rakenteessa voi esiintyä kaksi erilaista luvallista tasapainotilaa, stabiili tila toteutuu.

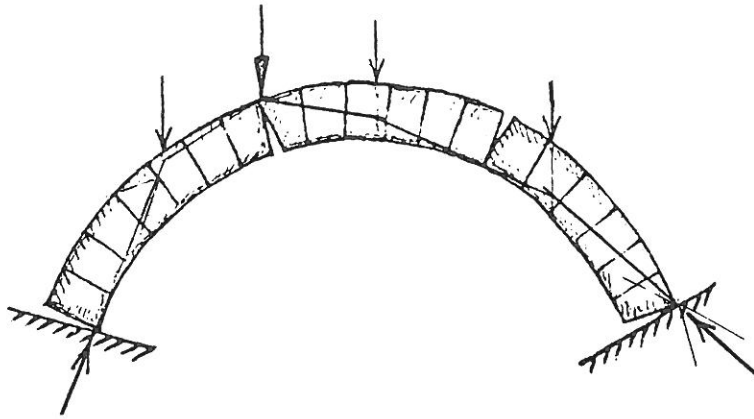
Perussääntö asettaa jähmeistä kappaleista kootut rakenteet aivan toiseen asemaan kuin esim. kimmoiset rakenteet. Viimeksi mainituissahan tasapainotilan mahdollisuus ei suinkaan takaa sitä, että rakenne jo paljon pienemmällä kuormalla olisi menettänyt stabiilisuutensa.

4. MUURATTUJEN RAKENTEIDEN STABIILISUUS

On huomattava, että säännöt A ja B perustuvat "jähmeän kitkan" edellyttämään saumojen voimakartion ja siirroskartion ortogonaalisuuteen, joten ne eivät pidä paikkaansa tavanmukaisen kitkan esiintyessä, jollei kosketuspintojen liukumista ole estetty. Siinä ääritapauksessa, että rakenne on täysin sitkeä, kitka perustuu pintojen kosketuskohtien hitsautumiseen, jolloin saumaraon laajenemista ei liity liukumiseen. Hauraissa rakenteissa seuraa liukumista aina murtumia, joiden vaikutuksesta saumarako laajenee. Oletettu jähmeä kitka [3] edustaa tällöin toista ääritapausta. Kaikissa tapauksissa on liukumisen edellytyksenä, että saumavoiman kaltevuus saavuttaa kitkakulman.

Reaalisen kitkan esiintyessä esim. laastilla saumatuissa rakenteissa ei varman puristuspuolelman olemassaolo sinänsä takaa rakenteen stabiilisuutta, jos lisäksi löytyy luvallinen puristuspuolelman, jonka saumaresultantin kaltevuus saavuttaa kitkakulman.

Luonnollista on, että jos rakenne tehdään riittävän ohutseinäiseksi kaikkien rakenteen sisällä sijaitsevien puristuspuolelman saumavoimat pysyvät kitkakartion sisäpuolella, jolloin saumat rajatilassa toimivat nivelinä (kuva 4).



Kuva 4. Kaaren rajatilan puristusviiva ja mekanismi.

Lause III. Jos ohutseinäisessä muuratussa rakenteessa annettua kuormaa vastaa yksi varma puristusviiva, mutta ei löydy ainoatakaan rakenteen sisällä pysyvää puristusviivaa, jossa saumavoimien kaltevuus saavuttaa tai ylittää kitkakulman, rakenne on stabiili.

On huomattava, että mikäli Lauseen III edellytysten mukaisesti liukuminen on estynyt, kaikki yleisen teorian lauseet sekä rakenteen stabiilisuus- ja siirtymäkartioita koskevat säännöt ovat muuttumattomina voimassa.

Suurimman vakavuuskulman periaatteeseen nojautuvien stabiilisuuskriteerien A' ja III yksinkertaisuus on itse asiassa mahdollistanut menneiden aikojen rohkeiden kivirakenteiden pystytyksen ilman varsinaisia staattisia laskelmia.

Käytetyt merkinnät

A	pinta-ala
\hat{A}_i	vektori fyysikaalisessa avaruudessa jonka vaikutuspiste \hat{r}_i
$\{A\}$	$= \{A_1 \dots A_n\}$ vektori abstraktissa avaruudessa
P, \hat{P}	rakenteeseen vaikuttava tunnettu kuormitus

- $M, \hat{M}_{v\mu} = \Sigma \hat{r}_v \cdot \hat{S}_{v\mu}; \hat{M}_v = \Sigma \hat{r}_v \cdot \hat{P}_v$; kappaleeseen v vaikuttava momentti
 $R, \hat{R}_{v\mu} = \Sigma \hat{S}_{v\mu}; \hat{R}_v = \Sigma \hat{P}_v$; kappaleeseen v vaikuttava resultantti
 $S, \hat{S}_{v\mu}$ liitoksessa $(v\mu)$ kappaleeseen v vaikuttava liitosvoima
 $X(\gamma)$ liitoksen paikallisia liikerajoituksia kuvaava kartio
 $Y(S)$ liitoksen paikallisia voimarajoituksia kuvaava kartio
 $\Xi(u)$ rakenteen liikerajoituksia kuvaava kartio (siirtymäkartio)
 $H(P)$ rakenteen kuormitusrajoituksia kuvaava kartio (stabiilisuus-kartio)
 k, \hat{k} kuormien jakautumaa kuvaava vektori
 $\hat{n}_v, \hat{n}_{vo}, \hat{n}_{vk}$ saumassa $(v\mu)$ kappaleesta v ulospäin suunnatut yksikkövektorit
 \hat{r}, \hat{r}_v paikkavektori, kappaleen v liitospinnan $(v\mu)$ paikkavektori
 u, \hat{u}_i siirtymä, kuormituspisteiden siirtymät
 $\hat{u}_\mu(r_v)$ kappaleeseen μ jäykästi kiinnitetyn pisteen r_v siirtymä
 $\hat{v}_\mu = \hat{u}_\mu(0)$ kappaleen μ translaatio
 $v, \hat{v}_{\mu v} = \hat{v}_\mu - \hat{v}_v$ kappaleiden μ ja v keskinäinen translaatio
 $\gamma, \hat{\gamma}_{\mu v} = \hat{u}_\mu(r_v) - \hat{u}_v(r_v)$ "muodonmuutos" liitoksessa $(v\mu)$
 λ kuormitusintensiteetti
 θ stabiilisuuskulma
 $\hat{\omega}_v$ kappaleen v kiertymä
 $\omega, \hat{\omega}_{\mu v} = \omega_\mu - \omega_v$ kappaleiden μ ja v keskinäinen rotaatio
 $[A]$ suureiden A joukko

Alaindeksit

- ℓ luvallinen tila
 m maksimaalisen kosketuksen tila
 ε kinemaattisesti luvallinen tila

- c rajatila
s stabiilitila
 σ staattisesti luvalinen tila

Kirjallisuutta

- [1] Heyman, J., The Stone Skeleton. Int. J. of Solids and Str. 2 (1966) pp. 249...279
- [2] Massonet, Ch., Save, M., Calcul plastique de constructions. Bruxelles, 1967.
- [3] Parland, H.N., On the Stiffness of Non-monolithic Structures. Helsinki 1968. Valtion teknillinen tutkimuslaitos. Julkaisu 123.
- [4] Heyman, J., The Safety of Masonry Arches. Int. J. Mech. Sci. 11 (1969) s. 363...385.

H. Parland, professori, Tampereen teknillinen korkeakoulu