ÜBER DIE IRREVERSIBLE KRIECHVERFORMUNG DES BETONS

V.A. KORONNYI

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5 No. 2 1972 ss. 94-105, Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

Zusammenfassung

Die gefundene Gleichung beschreibt gut die Verformung des Betons sowohl unter Belastung als auch unter Entlastung und bei wiederholten Belastungen und Entlastungen. Die angegebene Methodik zieht die Alterung des Betons vor der ersten Belastung nicht in Betracht. Man kann jedoch die von der Alterung des Betons vor der Belastung hervorgerufene Änderung der rheologischen Koeffizienten mit Leichtigkeit berücksichtigen, indem man annimmt, dass die Koeffizienten H, E, n und vom Alter des Betons vor der ersten Belastung abhängige Funktionen sind. Für praktische Berechnungen kämen diese Funktionen in Tabellenform mitgeteilt werden.

1. EINLEITUNG

Zur Beschreibung des Verhaltens der verschiedenen Stoffe unter Last im Laufe der Zeit bedient man sich der rheologischen Modelle. Das zeitabhängige Verhalten des Betons unter Belastung schildert man zumeist mit Hilfe des in Bild 1 gezeigten Modells. Die Gleichung der Verformung des Modells ist [3]:

$$nH\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma + n\dot{\sigma} \qquad (1)$$

mit $\dot{\varepsilon}$ Verformungsgeschwindigkeit

$\dot{\sigma}$ Geschwindigkeit der Spannungsänderung

$n = \eta/(E_1+E_2)$, Zeit der Spannungsrelaxation

$H = E_1$, Modul der momentanen Elastizität

$E = E_1E_2/(E_1+E_2)$, Modul der dauernden Elastizität.

Die Koeffizienten n, H und E sind Konstanten.

Beim Verwenden der Gleichung (1) werden die folgenden Annahmen getroffen:

1. Der Beton wird als isotroper Stoff betrachtet;
2. Zwischen der Spannung und der momentanen Verformung besteht eine lineare Beziehung;
3. Zwischen der Spannung und der Kriechverformung besteht ebenfalls lineare Abhängigkeit;
4. Die Grösse der Verformung hängt nicht von dem Zeichen der Spannung, sondern nur von der absoluten Grösse der wirkenden Spannung ab;
5. Für die Kriechverformung ist das Superpositionsprinzip gültig, d.h. die gesamte Kriechverformung unter einer Wechselspannung ist als Summe der von den betreffenden Spannungsinkrementen hervorgerufenen Verformungen erhältlich. Dabei hängt die von einem gegebenen Zuwachs der Spannung hervorgerufene Verformung von der Grösse und der Wirkungsdauer nur dieses Zuwachses, nicht aber von der Einwirkung anderer Vermehrungen ab.

Die Begründung der Berechtigung dieser Annahmen wurde in den Arbeiten [1], [6] gebracht.

Die Gleichung (1) erlaubt, die momentane und dauernde Verformung und die Spannungsrelaxation zu beschreiben. Aber die Gleichung (1) ergibt bei Lastwegnahme völlig rückgängige Verformung. Wie die Erfahrung zeigt, ist die Kriechverformung des Betons nur teilweise reversibel. Deshalb führt die Gleichung (1) zu grossen Fehlern, wann die Last zurückgeht. In der Fachliteratur ist Bestätigung dieser Folgerung zu finden. Beispielsweise, wurde in [5] gezeigt, dass der Beton als linear viskoelastischer Körper durch eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten nicht beschrieben werden kann.

Die Eigenschaften des Betons verändern sich im Laufe langer Zeitspannen. Im einfachsten Fall kann man die Änderung der Eigenschaften des Stoffs im Verlauf der Zeit durch Ersetzen im Modell (Bild 1) der Elemente mit konstanten Eigenschaften durch solche, deren Eigenschaften sich mit der Zeit wandeln, in Betracht ziehen. In erster Annäherung kann man sich auf den Fall beschränken, in dem sich nur die Eigenschaften des viskosen Elements verändern, während die Eigenschaften der übrigen Elemente konstant sind. Ein solches Modell ist in Bild gezeigt.

Die Abhängigkeit $\eta(t)$ wird geeigneterweise in folgender Form dargestellt:

$$\eta(t) = \eta e^{\alpha t} \qquad (2)$$

mit η, α experimentell zubestimmende Konstanten und t Zeit.

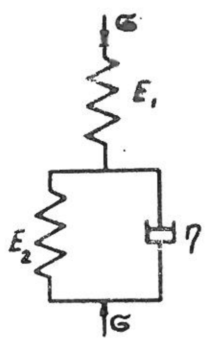

Bild 1. Dreielement-Modell mit konstanten Eigenschaften.

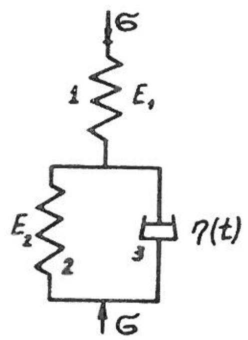

Bild 2. Dreielement-Modell mit variabler Viskosität.

2. GLEICHUNG FÜR DIE VERFORMUNG

Für das vorgeschlagene Modell sind die folgenden Zusammenhänge zutreffend:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{3}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \tag{4}$$

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3 \tag{5}$$

mit ε Verformung des gesamten Modells

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ Verformung des 1., 2., 3. Elements des Modells

σ wirkende Spannung

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Spannung im 1., 2., 3. Element des Modells.

Die 1. und 2. Elemente sind elastische Federn. Für sie ist das Hookesche Gesetz gültig, d.h.:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon_1 \quad ; \quad \sigma_2 = E_2\varepsilon_2 \tag{6}$$

Für das viskose Element (Element 3) gilt **die** Beziehung:

$$\sigma_3 = \eta e^{\alpha t}\,\dot{\varepsilon}_3 = \eta e^{\alpha t}\,\dot{\varepsilon}_2 \tag{7}$$

Setzt man in Gleichung (5) die Ausdrücke (6) und (7) ein und berücksichtigt man, dass $\varepsilon_2 = \varepsilon - \sigma/E_1$ und $\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}/E_1$, so erhält man nach einfachen Umformungen:

$$\frac{\eta}{E_1 + E_2} e^{\alpha t} E_1\dot{\varepsilon} + \frac{E_1E_2}{E_1 + E_2}\varepsilon = \sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} e^{\alpha t}\dot{\sigma} \tag{8}$$

Mit Beachtung dessen, dass

$$\frac{\eta}{E_1 + E_2} = n, \quad E_1 = H, \quad \frac{E_1E_2}{E_1 + E_2} = E$$

kann man die Gleichung für die Verformung wie folgt schreiben:

$$nHe^{\alpha t}\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma + ne^{\alpha t}\dot{\sigma} \tag{9}$$

Die Gleichung (9) lässt sich umschreiben:

$$n(t)H\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma + n(t)\dot{\sigma} \tag{10}$$

mit $n(t) = ne^{\alpha t}$. Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten. Die variablen Koeffizienten sind schon zuvor in den Arbeiten [2], [3] benutzt, um die tatsächlichen Eigenschaften der Stoffe zu berücksichtigen. Die Arbeit [3] enthällt jedoch keine Vorschläge betreffs der konkreten Gestalt der Funktionen n(t), H(t), E(t), während wiederum die in [2] erhaltene Lösung auf eine hypergeometrische Reihe zurückgeführt wird, woraus sich sehr umfangreiche Berechnungen ergeben.

Für die Gleichung (9) treffen weiterhin die für die Gleichung (1) eingeführten Annahmen zu.

3. VERFORMUNG DES BETONS UNTER KONSTANTER SPANNUNG

Wenn man Beton momentan im Zeitpunkt t_1, bis zur Spannung σ belastet, die anschliessend konstant bleibt, so ist $\dot{\sigma} = 0$ und die Gleichung (9) geht über in:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{nH} e^{-\alpha t} \varepsilon = \frac{1}{nH} e^{-\alpha t} \sigma \tag{11}$$

Die Gleichung (11) ist eine übliche Differentialgleichung der ersten Ordnung. Ihre Lösung ist:

$$\varepsilon(t) = e^{-\int_{t_1}^{t} \frac{E}{nH} e^{-\alpha t} dt} \left[\int_{t_1}^{t} \frac{1}{nH} e^{-\alpha t} \sigma e^{\int_{t_1}^{t} \frac{E}{nH} e^{-\alpha t} dt} dt + C \right]$$

oder

$$\varepsilon(t) = e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})} \left\{ \frac{\sigma}{E} \left[e^{-\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})} - 1 \right] + C \right\} \tag{12}$$

Die Konstante C wird aus den Grenzbedingungen bestimmt. Zum Zeitpunkt der Belastung entsteht nur eine augenblickliche elastische Verformung, und zwar ist diese:

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma}{H}$$

Aus der Gleichung (12) erhält man mit $t = t_1$:

$$\varepsilon(t_1) = C = \frac{\sigma}{H} \tag{13}$$

Setzt man die erhaltene Funktion C in Gleichung (12) ein, so findet man den die Verformung des Betons unter konstanter Spannung wiedergebenden Ausdruck:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right)e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})} \tag{14}$$

Wählt man als Beginn der Zeitrechnung den Augenblick der ersten Belastung $t_1 = 0$, so hat man:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right)e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t} - 1)} \tag{15}$$

Bei $t = \infty$ beträgt die Verformung:

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right)e^{-\frac{E}{\alpha nH}} \tag{15a}$$

4. ENTLASTUNG

Die Entlastung kann als zum Zeitpunkt der Entlastung eintretende zusätzliche Belastung des Betons mit einer Spannung von entgegengesetzten Zeichen betrachtet werden. Der Beton sei zum Zeitpunkt $t = 0$ bis zur Spannung σ belastet. Hierbei gibt der Ausdruck (15) die Verformung an. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ wird dem Beton die zusätzliche Spannung $-\sigma$ auferlegt, d.h. es erfolgt Entlastung. Die

Spannung $-\sigma$ bewirkt die folgende Verformung:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\sigma}{E} - \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right) e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})} \tag{16}$$

Die gesamte Verformung ist zum Zeitpunkt $t > t_1$ gleich der Summe der Ausdrücke (15) und (16):

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right) e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t} - 1)} \left[1 - e^{-\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_1} - 1)}\right] \tag{17}$$

Die volle bleibende Verformung wird aus (17) mit $t \rightarrow \infty$ gefunden:

$$\varepsilon_{b\ell} = \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right) e^{-\frac{E}{\alpha nH}} \left[1 - e^{-\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_1} - 1)}\right] \tag{18}$$

Wir wollen den Ausdruck (18) untersuchen. Bei $t_1 = 0$, also wenn die Entlastung unmittelbar auf die Belastung folgt und nur elastische Verformung entsteht, ist nach (18) die bleibende Verformung $\varepsilon_{b\ell} = 0$, mit experimentellen Ermittlungen übereinstimmend. Mit $t_1 = \infty$ ist:

$$\varepsilon_{b\ell} = \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right) \left[e^{-\frac{E}{\alpha nH}} - 1\right] \tag{18a}$$

Durch Vergleichen der Ausdrücke (15a) und (18a) sieht man, dass

$$\varepsilon(\infty) - \varepsilon_{b\ell} = \frac{\sigma}{H}$$

d.h. nur die elastische Verformung ist bei Entlastung in unendlich hohem Alter reversibel. Die Kriechverformung ist in diesem Fall vollends nicht reversibel.

5. SPANNUNGSRELAXATION

Der Beton mag zum Zeitpunkt t_1 bis zur Spannung σ_0 belastet sein und bis zu dieser Zeit entstehe die Verformung ε, die anschliessend konstant sein wird. In diesem Fall ist $\dot{\varepsilon} = 0$ und die Gleichung (9) geht über in

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{n} e^{-\alpha t} \sigma = \frac{E}{n} e^{-\alpha t} \varepsilon \tag{19}$$

Die Lösung der Gleichung (19) ist:

$$\sigma = e^{\frac{1}{\alpha n}(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})} \left\{ E\varepsilon \left[e^{-\frac{1}{\alpha n}(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})} - 1 \right] + C \right\} \tag{20}$$

Die Konstante C wird an Hand der Bedingung aufgefunden, dass bei $t = t_1$ die Spannung $\sigma = \sigma_0$ ist. Nach (20) ist $C = \sigma_0$. Nach Einsetzen von C in Gleichung (20) ergibt sich für die Spannungsrelaxation der Ausdruck:

$$\sigma(t) = E\varepsilon + (\sigma - E\varepsilon) e^{\frac{1}{\alpha n}(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})} \tag{21}$$

6. METHODIK ZUR BESTIMMUNG DER IN GLEICHUNG (9) ERSCHEINENDEN RHEOLOGISCHEN KOEFFIZIENTEN

Die Gleichung (9) enthält vier unbekannte Koeffizienten: H, E, n und α. Der Modul der momentanen Elastizität H wird mittels üblicher Methodik bei kurzzeitiger Belastung als Tangentenmodul der Verformungkurve im Ursprung der $\sigma - \varepsilon$ Koordinaten bestimmt. Die übrigen Koeffizienten lassen sich aus dem Kriechversuch mit konstanter Last und bei der Entlastung bestimmen. Den Versuchsdaten entnimmt man unter Einfluss einer konstanten Last zum Zeitpunkt t_1 entstandende Verformung ε_1 und die nach der Entlastung zu den Zeitpunkten t_2 und t_3 übriggebliebenen Verformungen ε_2 und ε_3. Die Verformungen ε_1, ε_2, ε_3 haben folgende Ausdrücke:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right)e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_1} - 1)} \tag{22}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right)e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_2} - 1)}\left[1 - e^{-\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_o} - 1)}\right] \tag{23}$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{\sigma}{H} - \frac{\sigma}{E}\right)e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_3} - 1)}\left[1 - e^{-\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_o} - 1)}\right] \tag{24}$$

worin t_o der Entlastungszeitpunkt ist. In diesen Gleichungen sind die unbekannten Grössen E, n, α. Die Gleichungen (22), (23), (24) bilden ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Dividieren des Ausdrucks (23) durch (24) erbigt:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_3})}$$

oder

$$\frac{E}{\alpha nH} = \frac{\ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}{e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_3}}$$

Wählt man den Zeitpunkt t_2 so, dass $t_2 = t_3 + t_1$ ist, dann hat man:

$$\frac{E}{\alpha nH} = \frac{\ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}{e^{-\alpha t_3}(e^{-\alpha t_1} - 1)} \tag{25}$$

Nach (22) ist:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\varepsilon_1 - \frac{\sigma}{H}\, e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_1} - 1)}}{1 - e^{\frac{E}{\alpha nH}(e^{-\alpha t_1} - 1)}} \tag{26}$$

Setzt man den Ausdruck (25) in (26) ein, so findet man nach einfachen Umformungen:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\varepsilon_1 - \frac{\sigma}{H}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)e^{\alpha t_3}}{1 - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)e^{\alpha t_3}} \tag{27}$$

Einsetzen der Ausdrücke (25) und (27) in Gleichung (24) führt zu folgendem Zusammenhang:

$$\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{\sigma}{H} - \varepsilon_1\right)\left[\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{\frac{1 - e^{\alpha t_3}}{e^{-\alpha t_1} - 1}} - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{\frac{1 - e^{\alpha(t_3 - t_0)}}{e^{-\alpha t_1} - 1}}\right] + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{e^{\alpha t_3}} = 1 \qquad (28)$$

Die Gleichung (28) ist eine tranzendente Gleichung mit einer Unbekannten α. α kann iterativ durch folgende Annäherungen gefunden werden. Nachdem man α kennt, wird aus dem Ausdruck (27) E und aus (25) n bestimmt.

7. VERGLEICH DER NACH DEN ANGEGEBENEN FORMENLN BERECHNETEN VERFORMUNGEN MIT EXPERIMENTELLEN ERMITTLUNGEN

Nach der vorschlagenden Methode wurden die Ergebnisse der Versuche in der Arbeit [4] überarbeitet. Die experimentell gefundenen Beträge der Verformungen des Betons verschiedener Zusammensetzungen wurden mit den nach den Gleichungen (9) und (1) berechneten Verformungen verglichen. In Bild 3 sind die Kurven der Verformungen des Betons mit Granitzuschlagstoff zu sehen. Der Beton wurde mit konstanter Last bis zur Spannung $\sigma = 98$ kg/cm² im Verlauf von 509 Tagen belastet und anschliessend entlastet. Die rheologischen Koeffizienten für diesen Beton waren wie folgt:

a) Bei Berechnung nach Gleichung (9): $H = 2{,}46 \cdot 10^5$ kp/cm²; $E = 0{,}571 \cdot 10^5$ kp/cm²; $n = 36{,}657$ t; $\alpha = 0{,}005\ t^{-1}$;

b) Bei Berechnung nach Gleichung (1): $H = 2{,}46 \cdot 10^5$ kp/cm²; $E = 0{,}748 \cdot 10^5$ kp/cm²; $n = 32{,}11$ t.

Bei Entlastung hält sich die Abweichung der nach Gleichung (9) berechneten Verformungen von den experimentell gefundenen Werten

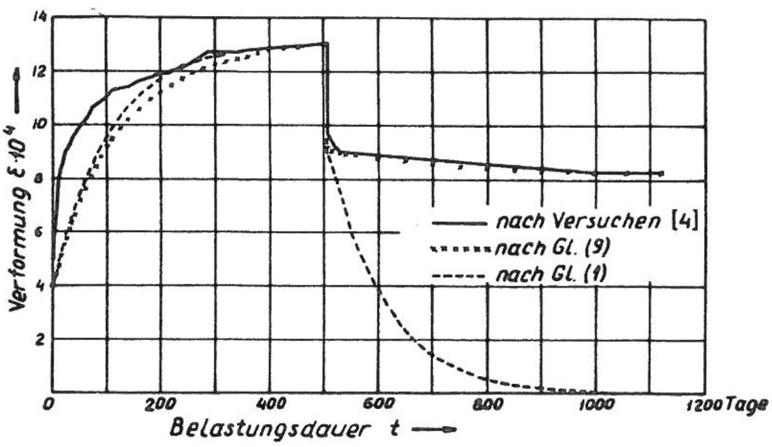

Bild 3. Die experimentellen und berechneten Verformungen unter Belastung und Entlastung.

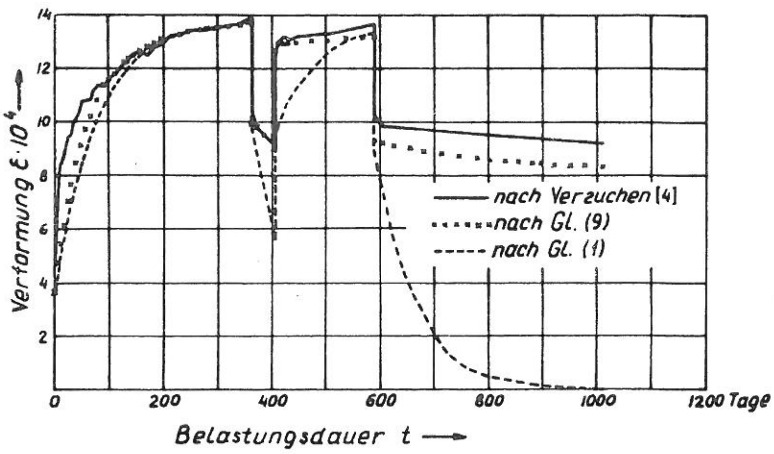

Bild 4. Die experimentellen und berechneten Verformungen unter zweimaliger Belastung und Entlastung.

innerhalb von 6,5 %.

Bild 4 zeigt die Kurven der Verformungen des Betons mit Rheinkieszuschlagstoff. Dieser Beton wurde zweimal belastet und entlastet: während 361 Tagen betrug die Spannung im Beton σ = 98 kg/cm^2, die darauffolgenden 42 Tage war die Last ausgeschaltet. Der Beton wurde dann abermals bis zur Spannung σ = 98 kg/cm^2 belastet und nach 186 Tagen aufs neue entlastet. Die rheologischen Koeffizienten für diesen Beton waren:

a) Bei Berechnung nach Gleichung (9): $H = 2{,}65 \cdot 10^5$ kp/cm²; $E = 0{,}686 \cdot 10^5$ kp/cm²; $n = 14{,}318$ t; $\alpha = 0{,}00548\ t^{-1}$;

b) Bei Berechnung nach Gleichung (1): $H = 2{,}65 \cdot 10^5$ kp/cm²; $E = 0{,}709 \cdot 10^5$ kp/cm²; $n = 20{,}734$ t.

Die Abweichung der nach der angegebenen Methodik berechneten Verformungen von den experimentellen Werten war bei der 2. Belastung nicht mehr als 4,5 % und bei der 2. Entlastung nicht mehr als 10,5 %. Die Gleichung (1) ergibt sehr hohe Fehler sowohl bei Entlastung als auch bei der 2. Belastung.

Schrifttum

[1] Arutyunyan, N.K., Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures. Pergamon Press 1966.

[2] Medvedev, S.N. und Koronnyi, V.A., Utschet i ismenenija reologitscheskich koeffizientov w ramkach teorii uprugoi nasledstwennosti. Issledovanija po mechanike stroitelnych materialov i konstrukcij, Riga. vyp. 1, 1967. (Berücksictigen der Änderung der rheologischen Koeffizienten in der Theorie der elastischen Erblichkeit.)

[3] Rschanizyn, A.R., Teorija polsutschesti. Moskva: Stroijizdat 1968. (Die Kriechtheorie.)

[4] Rüsch, H., Kordina, K., und Hilsdorf, H., Der Einfluss des mineralogischen Charakters der Zuschläge auf das Kriechen von Beton. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1962. H. 146.

[5] Schade, D., Einige eindimensionale Ansätze zur Berechnung des Kriechens und der Relaxation von Betontragwerken. Beton- und Stahlbetonbau, 1972, H. 3.

[6] Ulickij, I.I., Tschan Tschun-jao, und Golyschev, A.B., Rastschet zelesobetonnych konstrukcij s utschetom dlitelnych processov. Kiev: Gosstrojizdat 1960. (Berechnung der Stahlbetonkonstruktionen mit Beachtung der dauernden Prozesse.)

Vladimir Koronnyi, Kand. der techn. Wissensch., Riga, UdSSR.