

## ORTOTROOPPISEN LAATAN LASKEMINEN DIFFERENSSIMENETELMÄLLÄ

STIG NYLUND

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5  
No 1 1972 ss. 20-49; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

### 1. Yleistä

Suurin osa taivutetun laatan ratkaisemista käsittelevistä tietokoneohjelmista perustuvat differenssimenetelmään. Se soveltuu suhteellisen hyvin laskentamenetelmäksi silloin, kun on kysymys sillanrakennuksessa ja talonrakennuksessa esiintyvistä teräsbetonilaatoista. Menetelmän tarkkuus riippuu kuitenkin suuresti differenssiverkon tiheydestä ja se antaa parhaimmat tulokset jatkuville kuormille. Pistekuormien ja muiden paikallisten kuormien vaikutus saadaan mukaan ainoastaan laajemmalla alueella. Differenssimenetelmän käyttöä voidaan perustella sillä, että menetelmä on yksinkertainen verrattuna esim. kehittyneempään elementtimenetelmään, ja se vaatii vähemmän tietokonekapasiteettia. Tämä seikka oli varsinkin aikaisemmin käytettävissä olevien pienempien tietokoneiden takia vartenotettava tekijä.

Valitsemalla yksinkertainen elementti voidaan osoittaa, että elementtimenetelmä yksinkertaisimmassa muodossa vastaa differenssimenetelmää. Viimemainittua voidaan siten pitää elementtimenetelmän erikoistapauksena, kun on kysymys taivutetun laatan laskemisesta.

Seuraavassa esitetään Teknillinen laskenta Oy:n pilarilaattaohjelman laadinnan yhteydessä johdettuja ortotrooppisen laatan reunaehtoyhtälöitä suorakulmaiselle differenssiruudukolle. Ohjelma on pääasiassa tarkoitettu talonrakennuksessa esiintyvien ortotrooppisten laattojen laskemiseen. Ensiksi esitetään kuitenkin ortotrooppisen laatan laattayhtälön johtaminen.

## 2. Laattayhtälö

Laattayhtälön johtamisessa lähdetään liikkeelle seuraavista Kirchoffin laattateorian otaksumista.

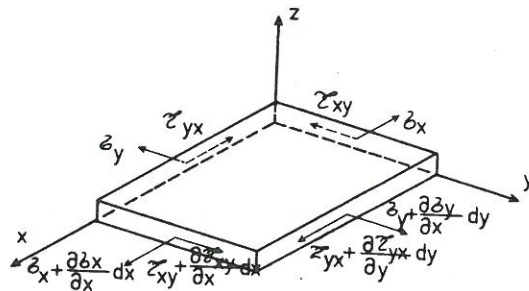
- Laatan aine on homogeenista ja noudattaa Hooken lakia.
- Laatan paksuus on vakio ja pieni laatan muihin mittoihin verrattuna.
- Pisteet jotka sijaitsevat laatan keskipinnan normaalilla pysyvät taipumapinnan normaalilla myös taivutuksen jälkeen.
- Laatan tasoa vastaan kohtisuorat normaalijännitykset jätetään huomiotta.
- Laatan taipumat ovat pieniä laatan paksuuteen verrattuna.
- Laatan keskitasossa ei tapahdu venymiä eikä puristumia.
- Laatan omapainon oletetaan olevan osa ulkoisista kuormista.
- Ulkoiset voimat vaikuttavat kohtisuorasti laatan keskitasoa vastaan.

Kun tarkastetaan ohutta laatta-alkiota (kuva 2.1), voidaan edellä esitettyjen otaksumien perusteella jättää z-akselin suuntaiset jännityskomponentit huomiotta. Tällöin saadaan puhdas tasojännitystila, jossa esiintyy ainoastaan xy-tason suuntaisia jännityksiä. Alkion jännityskomponenttien tasapainoehdot ovat

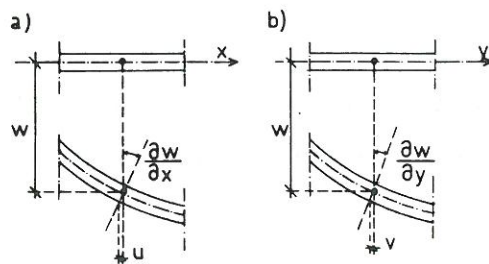
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



Kuva 2.1 Laatta-alkion jännityskomponentit



Kuva 2.2 Siirtymien u, v ja w muodostuminen.

Tasojännitystilän mukaiset muodonmuutoskomponentit ovat tunnetusti:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Kimmoisen aineen jännitys-muodonmuutosriippuvuus voidaan Hooken lain mukaan ilmaista kimmokerrointen avulla. Tarkastettaessa yleisen an-

isotrooppisen laatta-alkion jännitys-muodonmuutostilaa tarvitaan kuusi kimmomodulia  $E_{ik} = E_{ki}$ . Tällöin:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_{11}\epsilon_x + E_{12}\epsilon_y + E_{14}\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= E_{21}\epsilon_x + E_{22}\epsilon_y + E_{24}\gamma_{xy} \\ \tau_{xy} &= E_{41}\epsilon_x + E_{42}\epsilon_y + E_{44}\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Seuraavassa tarkastetaan laatan mielivaltaisen pisteen siirtymäkomponentteja  $u$  ja  $v$  ja laatan taipuman  $w$  välistä riippuvuutta (kuva 2.2). Kun piste sijaitsee etäisyydellä  $z$  laatan keskipinnasta, voidaan kirjoittaa seuraavat riippuvuudet

$$\begin{aligned}\tan \frac{\partial w}{\partial x} &\approx \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{u}{z}, & u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tan \frac{\partial w}{\partial y} &\approx \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{v}{z}, & v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Kun nämä sijoitetaan lausekkeisiin (2.3), saadaan muodonmuutoskomponenttien ja laatan taipuman väliset riippuvuudet

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\quad (2.6)$$

Kun nämä edelleen sijoitetaan anisotrooppisen laatta-alkion yhtälöihin (2.4), saadaan

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -E_{11}z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_{12}z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2E_{14}z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \sigma_y &= -E_{21}z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_{22}z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2E_{24}z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \tau_{xy} &= -E_{41}z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_{42}z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2E_{44}z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Laatta-alkion jännitysten ja laatan taipumien välisten riippuvuuksien jälkeen siirrytään tarkastamaan laatta-alkiota, jonka paksuus on sama kuin laatan paksuus  $h$  (kuva 2.3). Tähän vaikuttavat taivutusmomentti, vääntömomentti ja leikkausvoima. Taivutusmomentti aiheuttaa laatta-alkioon teknisen taivutusopin mukaisen suoraviivaisen nor-

maalijännitysjakautuman. Vääntömomentti muodostuu keskipinnasta molempiin suuntiin lineaarisesti kasvavista leikkausjännityksistä ja leikkausvoima aiheuttaa z-akselin suuntaisia leikkausjännityksiä, jotka voidaan määrittää käyttämällä kolmatta tasapainoehtoa. Alkion pintakuormituksen tulee olla tasapainossa muodostuneiden leikkausvoimien kanssa. z-akselin suuntaisten leikkausvoimien jakautuminen poikkileikkauksessa on teknisen taivutusopin mukaisesti parabolinen. Voimasuureiden lausekkeet saadaan integroimalla jännitysten lausekkeet (2.7) laatta-alkion poikkileikkauksen yli.

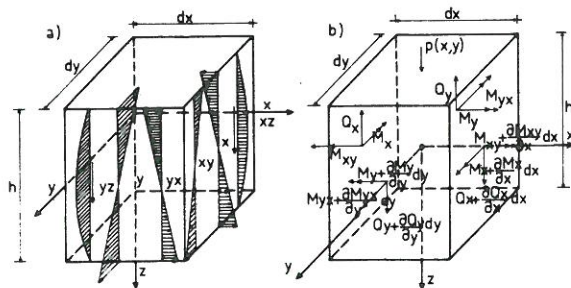
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = \left( -\rho_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\rho_{14} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.8)$$

$$M_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz = \left( -\rho_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\rho_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.9)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz = -M_{yx} = \left( \rho_{41} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_{42} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\rho_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.10)$$

$$\rho_{ik} = \frac{h^3}{12} E_{ik} \quad (2.11)$$

Näissä  $\rho_{ik}$  kuvaa anisotrooppisen laatan jäykkyyksiä. Kun laatta-alkion keskipiste valitaan koordinaatiston origoksi, leikkausvoimien



Kuva 2.3 Laatta-alkioon vaikuttavat jännitykset ja niiden resultantit.

$Q_x$  ja  $Q_y$  lausekkeet saadaan muodostamalla momenttitasapainoehdot  $x$ - ja  $y$ -akselin suhteen.

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \left( -\rho_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (\rho_{12} + 2\rho_{44} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3\rho_{41} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \rho_{42} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}) \right) \quad (2.12)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \left( -\rho_{41} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (\rho_{21} + 2\rho_{44} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3\rho_{24} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \rho_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}) \right) \quad (2.13)$$

Täten on onnistuttu määrittämään kaikki staattiset suureet taipuman  $w(x,y)$  funktiona. Varsinainen laattayhtälö saadaan muodostamalla voimien tasapainoyhtälö  $z$ -akselin suhteen

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x,y) = 0 \quad (2.14)$$

Kun yhtälöön (2.14) sijoitetaan leikkausvoimien lausekkeet (2.12) ja (2.13), saadaan anisotrooppisen laatan laattayhtälön lopullinen muoto

$$\begin{aligned} & -\rho_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4\rho_{14} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - 2(\rho_{12} + 2\rho_{44}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4\rho_{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - \\ & -\rho_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p(x,y) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Anisotrooppisen laatan laattayhtälöstä siirrytään ortotrooppisen laatan laattayhtälöön, josta päästään isotrooppisen laatan yhtälöön. Ortotrooppisen laatan jännitys-muodonmuutosriippuvuudet eivät ole niin monimutkaisia kuin anisotrooppisessa tapauksessa. Edellisen kuusi kimmokerrointa voidaan redusoida kolmeksi  $E_x$ ,  $E_y$  ja  $G$ .

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}, & E_{22} &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}, & E_{12} &= \frac{\nu E_y}{1 - \nu_x \nu_y}, \\ E_{21} &= \frac{\nu E_x}{1 - \nu_x \nu_y}, & E_{44} &= G, & E_{14} &= E_{41} = E_{24} = E_{42} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$E_x$  ja  $E_y$  ovat laatan kimmokertoimet x- ja y-suunnissa, G on liukumoduuli ja  $\nu_x$  ja  $\nu_y$  ovat Poissonin vakiot. Sijoittamalla yllä mainitut lausekkeet (2.16) anisotrooppisen laatan voimasuureiden yhtälöihin (2.8) - (2.13) saadaan ortotrooppisen laatan voimasuureet taipuman  $w(x,y)$  funktiona. Bettin säännön mukaan  $E_y \nu_x = E_x \nu_y$ , ja

$$M_x = -\rho_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.17)$$

$$M_y = -\rho_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.18)$$

$$M_{xy} = 2\gamma_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.19)$$

$$Q_x = -\left( \rho_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2\gamma_{xy} + \nu_y \rho_x) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.20)$$

$$Q_y = -\left( \rho_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2\gamma_{xy} + \nu_x \rho_y) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.21)$$

Näissä yhtälöissä esiintyvät taivutusjäykkyydet  $\rho_x$  ja  $\rho_y$  sekä vääntöjäykkyys  $\gamma_{xy}$  ovat:

$$\rho_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad \rho_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad \gamma_{xy} = \frac{Gh^3}{12} \quad (2.22)$$

Lausekkeesta (2.15) saadaan ortotrooppisen laatan laattanyhtälö.

$$\rho_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - p(x,y) = 0 \quad (2.23)$$

$$H = \frac{1}{2}(\nu_y \rho_x + \nu_x \rho_y + 4\gamma_{xy}) \quad (2.24)$$

Isotrooppisen laatan voimasuureiden lausekkeet (2.25) ja laattayhtälön lauseke (2.26) saadaan ortotrooppisen laatan vastaavista lausekkeista (2.17) - (2.21) ja (2.23) sijoittamalla  $E_x = E_y$ ,  $\nu_x = \nu_y$  ja  $G = E_x/2(1 + \nu_x)$ .

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\rho_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -\rho_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= (1 - \nu_x) \rho_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -\rho_x \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
 Q_y &= -\rho_x \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
 \rho_x \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - p(x, y) &= 0 \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Myöhemmin johdettavia reunaehtoyhtälöjä ajatellen kirjoitetaan yllä mainitut ortotrooppisen laatan voimasuureiden lausekkeet (2.17) - (2.19) ja laattayhtälön lauseke (2.23) seuraavaan isotrooppisen laatan vastaavia lausekkeitä muistuttavaan muotoon. Leikkausvoimalausekkeiden (2.20) ja (2.21) sijasta kirjoitetaan vastaavat nk. korvikeleikkausvoimien  $V_x = Q_x - \partial M_{xy} / \partial y$  ja  $V_y = Q_y + \partial M_{yx} / \partial x$  lausekkeet.

$$M_x = -\rho_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.27)$$

$$M_y = -\rho_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \rho \quad (2.28)$$

$$M_{xy} = \rho_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \gamma \quad (2.29)$$

$$V_x = -\rho_x \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + H_x \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.30)$$

$$V_y = -\rho_x \left( \rho \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + H_y \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.31)$$

$$\rho_x \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - p(x, y) = 0 \quad (2.32)$$

$$\rho = E_y / E_x \quad (2.33)$$

$$\gamma = \frac{2G}{E_x} (1 - \nu_x \nu_y) \quad (2.34)$$

$$H_x = \frac{4G}{E_x} (1 - \nu_x \nu_y) + \nu_y \quad (2.35)$$

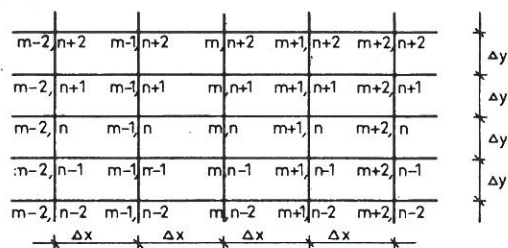
$$H_y = \frac{4G}{E_x} (1 - \nu_x \nu_y) + \nu_x \rho \quad (2.36)$$

$$H_{xy} = \frac{1}{2} \rho_x \left( \frac{4G}{E_x} (1 - \nu_x \nu_y) + \nu_x + \nu_y \rho \right) \quad (2.37)$$

Näistä differentiaaliyhtälöistä siirrytään seuraavassa vastaaviin differenssilausekkeisiin.

### 3. Differenssiyhtälöt

Varsinaiset differenssiyhtälöt muodostetaan käyttämällä osittaisdifferentiaalien differenssilausekkeita. Nämä saavat mielivaltaisessa pisteessä (m,n) seuraavat muodot (kuva 3.1)



Kuva 3.1 Differenssiruuudukko pisteen (m,n) ympärillä.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2(\Delta x)} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}}{2(\Delta x)^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}}{(\Delta x)^4} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{m,n+1} - w_{m,n-1}}{2(\Delta y)} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m,n-2}}{2(\Delta y)^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}}{(\Delta y)^4} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} -}{2(\Delta x)^2(\Delta y)} - \\ &- \frac{w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)^2(\Delta y)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} -}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} - \\ &- \frac{w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{4w_{m,n} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} + 2w_{m,n-1} +}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2} + \\ &+ \frac{w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Näissä yhtälöissä  $w_{m,n}$  tarkoittaa laatan taipuman arvoa pisteessä  $(m,n)$  ja  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  differenssiruudun sivujen pituuksia x- ja y-akselin suunnassa. Kun differenssiyhtälöt (3.1) - (3.11) sijoitetaan yhtälöihin (2.27) - (2.32), saadaan ortotrooppisen laatan voimasuureiden ja korvikeleikkausvoimien differenssilausekkeet ja laattayhtälön differenssilauseke pisteessä  $(m,n)$ . Seuraavassa esitetään ainoastaan em. differenssilausekkeet (3.12) - (3.16) ja laattayhtälön

differenssilauseke (3.17).

$$M_x = -(\Delta x)^2 (\alpha^2 (w_{m+1,n} + w_{m-1,n}) - (2\alpha^2 + 2v_y)w_{m,n} + v_y (w_{m,n+1} + w_{m,n-1})) \quad (3.12)$$

$$M_y = -(\Delta y)^2 (\beta^2 (w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) - (2\beta^2 + 2v_x)w_{m,n} + v_x (w_{m+1,n} + w_{m-1,n})) \quad (3.13)$$

$$M_{xy} = -\frac{(\Delta x)(\Delta y)}{4} (w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n-1} - w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1}) \gamma \quad (3.14)$$

$$V_x = -\frac{(\Delta x)}{2} (\alpha^2 (w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}) + H_x (w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1})) \quad (3.15)$$

$$V_y = -\frac{(\Delta y)}{2} (\beta^2 \rho (w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m,n-2}) + H_y (w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1})) \quad (3.16)$$

$$(6\alpha^2 + 6\beta^2 \rho + 8H_{xy})w_{m,n} - (4\alpha^2 + 4H_{xy})(w_{m+1,n} + w_{m-1,n}) - (4\beta^2 \rho + 4H_{xy})(w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) + 2H_{xy}(w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}) + \alpha^2 (w_{m+2,n} + w_{m-2,n}) + \beta^2 \rho (w_{m,n+2} + w_{m,n-2}) - p(x,y) = 0 \quad (3.17)$$

$$\alpha = \frac{(\Delta y)}{(\Delta x)}, \quad \beta = \frac{(\Delta x)}{(\Delta y)} \quad (3.18)$$

Yhtälöjä johdettaessa differentiaaliyhtälöt on kerrottu tekijällä  $\rho_x (\Delta x)^2 (\Delta y)^2$ , joten laatan jäykkyys  $\rho_x$  on saatu supistetuksi pois.

Laatan jäykkyydellä ei siis ole vaikutusta momenttien ja leikkausvoimien arvoihin. Ortotrooppisen laatan erilaiset jäykkyudet  $x$ - ja  $y$ -akselin suunnissa otetaan huomioon kertoimella  $\rho$ , joka ilmaisee näiden jäykkyyksien suhteen. Lisäksi ortotrooppisuus otetaan huomioon Poissonin vakioilla  $\nu_x$  ja  $\nu_y$  sekä vääntöjäykkyydellä  $G$ . Myöhemmin johdettavia reunapisteiden differenssiyhtälöitä silmällä pitäen kirjoitetaan ortotrooppisen laatan pisteen  $(m,n)$  differenssiyhtälö (3.17) muotoon (3.19). Kertoimia (3.20) - (3.25) voidaan kutsua yleisen differenssiyhtälön kertoimiksi. Näitä käytetään myöhemmin johdettavien reunapisteiden differenssiyhtälöiden lausekkeissa.

$$\begin{aligned}
 & a_{m,n} w_{m,n} + a_{m+1,n} (w_{m+1,n} + w_{m-1,n}) + a_{m,n+1} (w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) + \\
 & + a_{m+1,n+1} (w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}) + \\
 & + a_{m+2,n} (w_{m+2,n} + w_{m-2,n}) + a_{m,n+2} (w_{m,n+2} + w_{m,n-2}) - \\
 & - p(x,y) = 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$a_{m,n} = 6\alpha^2 + 6\beta^2\rho + 8H_{xy} \tag{3.20}$$

$$a_{m+1,n} = -4\alpha^2 - 4H_{xy} = a_{m-1,n} \tag{3.21}$$

$$a_{m,n+1} = -4\beta^2\rho - 4H_{xy} = a_{m,n-1} \tag{3.22}$$

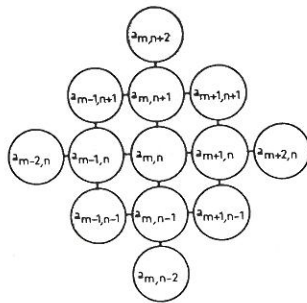
$$a_{m+1,n+1} = 2H_{xy} = a_{m-1,n+1} = a_{m-1,n-1} = a_{m+1,n-1} \tag{3.23}$$

$$a_{m+2,n} = \alpha^2 = a_{m-2,n} \tag{3.24}$$

$$a_{m,n+2} = \beta^2 = a_{m,n-2} \tag{3.25}$$

Laattayhtälön differenssiyhtälö pisteessä  $(m,n)$  peittää kaavan (3.19) mukaan 13 pistettä (kuva 3.2). Laatan reunalla osa kaavion

pisteistä joutuu sen ulkopuolelle. Ulkopuolelle jäävien pisteiden taipumat määritetään reunaehtojen avulla sisäpisteiden taipumien funktiona ja supistetaan laatan ratkaisumatriisista pois. Seuraavassa luvussa esitetään reunapisteiden differenssiyhtälöt kun laatan ulkopuolella olevat pisteet on supistettu pois.

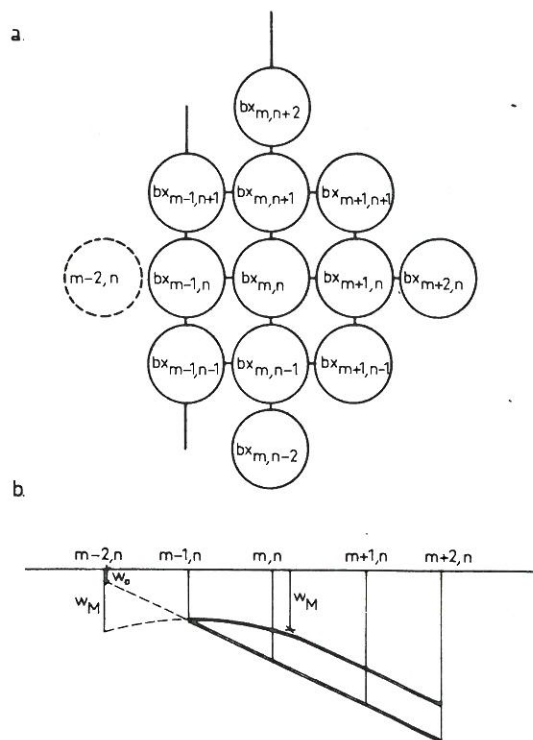


Kuva 3.2 Yleisen differenssiyhtälön peittämät pisteet.

#### 4. Laatan reunapisteiden differenssiyhtälöt

Laatan differenssiruudukon jokaisessa pisteessä tulee muodostettavaksi differenssiyhtälö. Pisteissä, jotka ovat tuetut pilareihin tai seiniin, taipumat ovat nolliä. Vaikka näissä pisteissä ei tarvita taipuman määrittämiseksi yhtälöä, on edullista valita tukireaktio tuntemattomaksi, jolloin saadaan differenssiruudukon nurkkapisteitä vastaava ratkaisumatriisi. Kimmoinen tuki voidaan ottaa huomioon siten, että taipuma on jäykköysvakio kertaa tukireaktio. Tällöin ratkaisumatriisista saadaan suoraan tukireaktiot ja tukireaktioista taipumat kertomalla jäykköysvakiolla. Seuraavassa tarkastellaan laatan reunaehtoja laatan kiinnityksen kannalta. Tällöin saadaan reunapisteille omat differenssiyhtälöt, joista laatan ulko-

puolella olevien pisteiden taipumat on supistettu pois. Nämä reuna-  
ehtoyhtälöt pätevät riippumatta siitä ovatko reunapisteeet tuettuja  
vai ei. Tällöin pisteet voidaan tukea ja käyttää tuntemattomina tu-  
kireaktioita aivan samalla tavalla kuin laatan muissa pisteissä.  
Käsitellään ensimmäisenä laatan reunalinjasta seuraavan pisterivin  
differenssiyhtälöä. Kuvan 4.1 kaaviosta ilmenee, että reunaehto-  
jen avulla yksi piste tulee supistettavaksi pois yleisestä differenssi-  
yhtälöstä. Tarkastellaan täysin kiinnitettyä reunaa, jolloin kulman-  
muutos  $\partial w / \partial x = 0$  ( $\partial w / \partial y = 0$ ) ja täysin vapaata reunaa, jolloin  
 $M_x = 0$  ( $M_y = 0$ ).



Kuva 4.1 Reunasta seuraavan pisterivin differenssiyhtälön kaavio ja reunaehdon geometrinen merkitys.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w_{m-2,n} - w_{m,n} = 0 \quad (4.1)$$

$$\alpha^2(w_{m-2,n} + w_{m,n}) - (2\alpha^2 + 2v_y)w_{m-1,n} + v_y(w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1}) = 0$$

$$w_{m-2,n} = w_{m,n} \quad (4.2)$$

$$w_{m-2,n} = -w_{m,n} + 2(1 + v_y\beta^2)w_{m-1,n} - v_y\beta^2(w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1}) \quad (4.3)$$

Kuva 4.1b esittää yhtälöjen geometrista merkitystä. Yhtälön (4.2) mukainen taipuma on kuvassa merkitty  $w_M$ :llä ja yhtälön (4.3) esittämä taipuma on merkitty  $w_0$ :lla. Otetaan käyttöön parametri  $u$ , jolloin yhtälöt (4.2) ja (4.3) voidaan yhdistää yhdeksi yhtälöksi (4.5). Kun  $u = 0$ , yhtälöstä (4.5) saadaan yhtälö (4.2) ja kun  $u = 1$ , saadaan yhtälö (4.3). Luku  $1-u$  kuvaa täten reunan kiinnitystapaa ja tämä luku on valittu tietokone-laskennassa lähtöarvoksi.

$$w_{m-2,n} = w_M - u(w_M - w_0) = (1-u)w_M + uw_0 \quad (4.4)$$

$$w_{m-2,n} = -(2u-1)w_{m,n} + 2u(1+v_y\beta^2)w_{m-1,n} - uv_y\beta^2(w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1}) \quad (4.5)$$

Kun yhtälö (4.5) sijoitetaan yleiseen differenssiyhtälöön (3.19), saadaan reunasta seuraavan pisterivin differenssiyhtälö (4.6) ja kertoimet  $b_x$ .

$$b_{x_{m-1,n+1}}(w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1}) + b_{x_{m+1,n+1}}(w_{m+1,n+1} + w_{m+1,n-1}) + b_{x_{m-1,n}}w_{m-1,n} + b_{x_{m,n+2}}(w_{m,n+2} + w_{m,n-2}) + b_{x_{m,n+1}}(w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) + b_{x_{m,n}}w_{m,n} + b_{x_{m+1,n}}w_{m+1,n} +$$

$$+ b_{m+2,n} w_{m+2,n} - p(x,y) = 0 \quad (4.6)$$

$$b_{m-1,n+1} = a_{m+1,n+1} - u v_y \beta^2 a_{m+2,n} = b_{m-1,n-1} \quad (4.7)$$

$$b_{m+1,n+1} = a_{m+1,n+1} = b_{m+1,n-1} \quad (4.8)$$

$$b_{m-1,n} = a_{m+1,n} + 2u(1 + v_y \beta^2) a_{m+2,n} \quad (4.9)$$

$$b_{m,n+2} = a_{m,n+2} \quad (4.10)$$

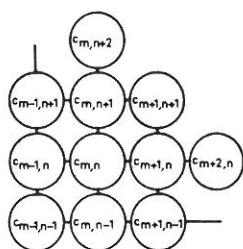
$$b_{m,n+1} = a_{m,n+1} \quad (4.11)$$

$$b_{m,n} = a_{m,n} - (2u - 1) a_{m+2,n} \quad (4.12)$$

$$b_{m+1,n} = a_{m+1,n} \quad (4.13)$$

$$b_{m+2,n} = a_{m+2,n} \quad (4.14)$$

Laatan toisella reunalla x-suunnassa käännetään kuvan 4.1a kaavio reunan mukaiseksi, jolloin differenssiyhtälö saadaan edellisestä. Differenssiyhtälöt y-suunnassa saadaan kääntämällä kaavio laatan reunojen mukaiseksi. Tällöin  $v_y$  tulee korvattavaksi  $v_x$ :llä ja  $\beta$   $\alpha$ :lla. Seuraavassa tarkastellaan laatan reunan viereisten pisterivien muodostamaa nurkkapistettä. Koska yhtälön johtaminen on täysin edellä esitetyn mukainen, kirjoitetaan ainoastaan lopputulokset (kuva 4.2).



Kuva 4.2 Reunaviivan viereisten pisterivien muodostaman nurkkapisteen differenssiyhtälökaavio.

$$\begin{aligned}
 & c_{m-1,n+1} w_{m-1,n+1} + c_{m-1,n} w_{m-1,n} + c_{m-1,n-1} w_{m-1,n-1} + \\
 & + c_{m,n+2} w_{m,n+2} + c_{m,n+1} w_{m,n+1} + c_{m,n} w_{m,n} + c_{m,n-1} w_{m,n-1} + \\
 & + c_{m+1,n+1} w_{m+1,n+1} + c_{m+1,n} w_{m+1,n} + c_{m+1,n-1} w_{m+1,n-1} + \\
 & + c_{m+2,n} w_{m+2,n} - p(x,y) = 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$c_{m-1,n+1} = a_{m+1,n+1} - u_x v_y \beta^2 a_{m+2,n} \tag{4.16}$$

$$c_{m-1,n} = a_{m+1,n} + 2u_x (1 - v_y \beta^2) a_{m+2,n} \tag{4.17}$$

$$c_{m-1,n-1} = a_{m+1,n+1} - u_x v_y \beta^2 a_{m+2,n} - u_y v_x \alpha^2 a_{m,n+2} \tag{4.18}$$

$$c_{m,n+2} = a_{m,n+2} \tag{4.19}$$

$$c_{m,n+1} = a_{m,n+1} \tag{4.20}$$

$$c_{m,n} = a_{m,n} - (2u_x - 1) a_{m+2,n} - (2u_y - 1) a_{m,n+2} \tag{4.21}$$

$$c_{m,n-1} = a_{m,n+1} + 2u_y (1 + v_x \alpha^2) a_{m,n+2} \tag{4.22}$$

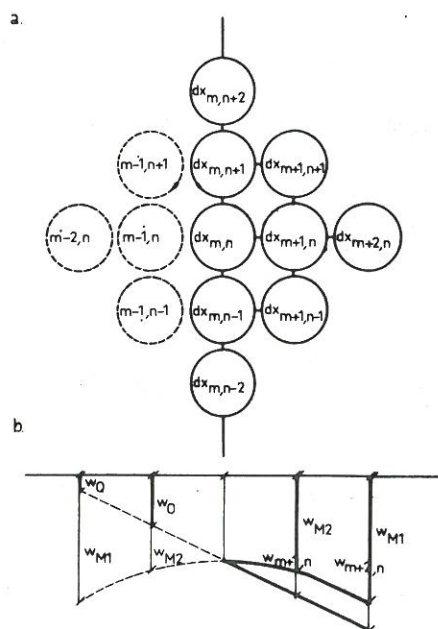
$$c_{m+1,n+1} = a_{m+1,n+1} \tag{4.23}$$

$$c_{m+1,n} = a_{m+1,n} \tag{4.24}$$

$$c_{m+1,n-1} = a_{m+1,n+1} - u_y v_x \alpha^2 a_{m,n+2} \tag{4.25}$$

$$c_{m+2,n} = a_{m+2,n} \tag{4.26}$$

Laatan muiden nurkkien vastaavat differenssiyhtälöt saadaan edellisistä kääntämällä kuvassa 4.2 esitetty kaavio nurkan mukaiseksi. Seuraavaksi siirrytään käsittelemään yleisen reunapisteen differenssiyhtälöä (kuva 4.3).



Kuva 4.3 Reunapisteen differenssiyhtälön kaavio ja reuna-  
ehtojen geometrinen tulkinta.

Reunapisteiden differenssiyhtälöiden johtamisessa oletetaan edellisestä poiketen, että reuna on vapaa. Mikäli reunapiste on tuettu, taipuma on siinä pisteessä  $= 0$  ja differenssiyhtälöä ei tarvita taipuman määrittämiseksi. Reunapisteiden tukireaktioita ei tällöin saada suoraan ratkaisumatriisista, vaan ne joudutaan laskemaan erikseen lopputuloksista. Esitettyssä tietokonelaskennassa on käytetty seuraavia reunaehtoja. Täysin kiinnitetyn reunan tapauksessa on lähdetty otaksumasta, että laatan ulkopuolella olevien pisteiden taipumat ovat yhtä suuria kuin laatan reunapisteiden taipumat ( $w_{M1}$ ,  $w_{M2}$ ). Täysin vapaan reunan tapauksessa määritetään taipuma  $w_0$  asettamalla  $M_x = 0$  ( $M_y = 0$ ) ja taipuma  $w_Q$  asettamalla  $V_x = 0$  ( $V_y = 0$ ).

Jälkimmäinen ehto on täytetty silloin, kun x-suunnassa (y-suunnassa) taipumat ovat samalla suoralla, jolla voi olla mielivaltaisen kaltevuuskulma. Esim. kuvassa 4.3b taipumat  $w_Q$ ,  $w_0$ ,  $w_{m+1,n}$  ja  $w_{m+2,n}$  ovat samalla suoralla.

1. Täysin kiinnitetty reuna  $\partial w / \partial x = 0$  ( $\partial w / \partial y = 0$ )

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{w_{m-1,n} - w_{m+1,n}}{2(\Delta x)} = 0, \quad \begin{aligned} w_{m-1,n+1} &= w_{m+1,n+1} \\ w_{m-1,n} &= w_{m+1,n} \\ w_{m-1,n-1} &= w_{m+1,n-1} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$(\Delta x) = 2(\Delta x), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{w_{m-2,n} - w_{m+2,n}}{4(\Delta x)} = 0, \quad w_{m-2,n} = w_{m+2,n} \quad (4.28)$$

2. Täysin vapaa reuna  $M_x = 0$ ,  $V_x = 0$  ( $M_y = 0$ ,  $V_y = 0$ )

$$\begin{aligned} M_x = 0, \quad w_{m-1,n+1} &= -w_{m+1,n+1} + 2(1 + \nu_y \beta^2)w_{m,n+1} - \\ &\quad - \nu_y \beta^2(w_{m,n+2} + w_{m,n}) \\ w_{m-1,n} &= -w_{m+1,n} + 2(1 + \nu_y \beta^2)w_{m,n} - \\ &\quad - \nu_y \beta^2(w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} w_{m-1,n-1} &= -w_{m+1,n-1} + 2(1 + \nu_y \beta^2)w_{m,n-1} - \\ &\quad - \nu_y \beta^2(w_{m,n} + w_{m,n-2}) \\ Q_x = 0, \quad w_{m-2,n} &= w_{m+2,n} - \beta^2 H_x w_{m-1,n+1} + 2(1 + \\ &\quad + \beta^2 H_x)w_{m-1,n} - \beta^2 H_x w_{m-1,n-1} + \\ &\quad + \beta^2 H_x w_{m+1,n+1} - 2(1 + \beta^2 H_x)w_{m+1,n} + \\ &\quad + \beta^2 H_x w_{m+1,n-1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nämä reunaehdot yhdistetään samoin kuin aikaisemmat käyttäen parametriä  $u$ . Koska tietokonelaskennassa  $u$ :n arvon on haluttu antaa muuttua pitkin reunaa, käytetään yhtälöissä pisteen  $(m, n+1)$  arvon  $u_1$  ja pisteen  $(m, n-1)$  arvon  $u_2$  keskiarvoa  $1/2(u_1 + u_2)$ .

$$\begin{aligned} w_{m-1, n+1} = & - (2u_1 - 1)w_{m+1, n+1} + 2u_1(1 + v_y\beta^2)w_{m, n+1} - \\ & - u_1v_y\beta^2(w_{m, n+2} + w_{m, n}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} w_{m-1, n} = & - (u_1 + u_2 - 1)w_{m+1, n+1} + (u_1 + u_2)(1 + v_y\beta^2)w_{m, n} - \\ & - 1/2(u_1 + u_2)v_y\beta^2(w_{m, n+1} + w_{m, n-1}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} w_{m-1, n-1} = & - (2u_2 - 1)w_{m+1, n-1} + 2u_2(1 + v_y\beta^2)w_{m, n-1} - \\ & - u_2v_y\beta^2(w_{m, n} + w_{m, n-2}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} w_{m-2, n} = & w_{m+2, n} - 1/2(u_1 + u_2)\beta^2H_x w_{m-1, n+1} + (u_1 + u_2)(1 + \\ & + \beta^2H_x)w_{m-1, n} - 1/2(u_1 + u_2)\beta^2H_x w_{m-1, n-1} + 1/2(u_1 + \\ & + u_2)\beta^2H_x w_{m+1, n+1} - (u_1 + u_2)(1 + \beta^2H_x)w_{m+1, n} + \\ & + 1/2(u_1 + u_2)\beta^2H_x w_{m+1, n-1} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Kun nämä reunaehtoyhtälöt (4.31) - (4.34) sijoitetaan yleiseen differenssiyhtälöön, saadaan yleisen reunapisteen differenssiyhtälön (4.35) kertoimet  $dx$ .

$$\begin{aligned} dx_{m, n+2}w_{m, n+2} + dx_{m, n+1}w_{m, n+1} + dx_{m+1, n+1}w_{m+1, n+1} + dx_{m, n}w_{m, n} + \\ + dx_{m+1, n}w_{m+1, n} + dx_{m+2, n}w_{m+2, n} + dx_{m, n-1}w_{m, n-1} + \\ + dx_{m+1, n-1}w_{m+1, n-1} + dx_{m, n-2}w_{m, n-2} - p(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$dx_{m,n+2} = a_{m,n+2} - u_1 v_y \beta^2 a_{m+1,n+1} + 1/2 u_1 (u_1 + u_2) \beta^4 v_y H_x a_{m+2,n} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} dx_{m,n+1} = & a_{m,n+1} + 2u_1 (1 + v_y \beta^2) a_{m+1,n+1} - 1/2 (u_1 + \\ & + u_2) v_y \beta^2 a_{m+1,n} - (u_1 (u_1 + u_2) (1 + v_y \beta^2 H_x + 1/2 (u_1 + \\ & + u_2)^2 (1 + \beta^2 H_x) v_y \beta^2) a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} dx_{m+1,n+1} = & (1 - (2u_1 - 1)) a_{m+1,n+1} + (1/2 (2u_1 - 1) (u_1 + \\ & + u_2) \beta^2 H_x + 1/2 (u_1 + u_2) \beta^2 H_x) a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} dx_{m,n} = & a_{m,n} + (u_1 + u_2) (1 + v_y \beta^2) a_{m+1,n} - (u_1 v_y \beta^2 + \\ & + u_2 v_y \beta^2) a_{m+1,n+1} + (1/2 u_1 (u_1 + u_2) v_y \beta^4 H_x + \\ & + 1/2 u_2 (u_1 + u_2) v_y \beta^4 H_x + (u_1 + u_2)^2 (1 + v_y \beta^2) (1 + \\ & + \beta^2 H_x)) a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$dx_{m+1,n} = (2 - (u_1 + u_2)) a_{m+1,n} - (u_1 + u_2)^2 (1 + \beta^2 H_x) a_{m+2,n} \quad (4.40)$$

$$dx_{m+2,n} = 2a_{m+2,n} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} dx_{m,n-1} = & a_{m,n+1} + 2u_2 (1 + v_y \beta^2) a_{m+1,n+1} - 1/2 (u_1 + \\ & + u_2) v_y \beta^2 a_{m+1,n} - (u_2 (u_1 + u_2) (1 + v_y \beta^2) \beta^2 H_x + \\ & + 1/2 (u_1 + u_2)^2 (1 + \beta^2 H_x) v_y \beta^2) a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} dx_{m+1,n-1} = & (1 - (2u_2 - 1)) a_{m+1,n+1} + (1/2 (2u_2 - 1) (u_1 + \\ & + u_2) \beta^2 H_x + 1/2 (u_1 + u_2) \beta^2 H_x) a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} dx_{m,n-2} = & a_{m,n+2} - u_2 v_y \beta^2 a_{m+1,n+1} + 1/2 u_2 (u_1 + \\ & + u_2) \beta^4 v_y H_x a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.44)$$

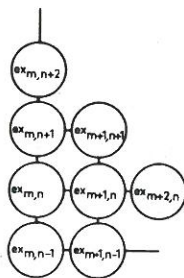
Laatan toisella x-akselin suuntaisella reunalla saadaan differenssiyhtälöt kääntämällä kuvan 4.3 kaavio reunan mukaiseksi. Differenssiyhtälöt y-akselin suuntaisilla reunoilla saadaan myös edellisestä kun  $v_y$  korvataan  $v_x$ :llä,  $\beta$   $\alpha$ :lla ja  $H_x$   $H_y/\rho$ :lla. Näitä sijoituksia ei tässä esitetä, vaan siirrytään käsittelemään nurkasta seuraavan reunapisteen differenssiyhtälöä (kuva 4.4). Koska yhtälöjen johtaminen on edellä esitetyn mukainen, kirjoitetaan ainoastaan lopputulokset.

$$\begin{aligned} & ex_{m,n+2}w_{m,n+2} + ex_{m,n+1}w_{m,n+1} + ex_{m+1,n+1}w_{m+1,n+1} + ex_{m,n}w_{m,n} + \\ & + ex_{m+1,n}w_{m+1,n} + ex_{m+2,n}w_{m+2,n} + ex_{m,n-1}w_{m,n-1} + \\ & + ex_{m+1,n-1}w_{m+1,n-1} - p(x,y) = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$ex_{m,n+2} = a_{m,n+2} - u_1 v_y \beta^2 a_{m+1,n+1} + u_1^2 \beta^4 v_y H_x a_{m+2,n} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} ex_{m,n+1} = & a_{m,n+1} - u_1 v_y \beta^2 a_{m+1,n} + 2u_1 (1 + v_y \beta^2) a_{m+1,n+1} - \\ & - (2u_1^2 (1 + v_y \beta^2) \beta^2 H_x + 2u_1^2 (1 + \beta^2 H_x) v_y \beta^2) a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} ex_{m+1,n+1} = & (1 - (2u_1 - 1)) a_{m+1,n+1} + (u_1 (2u_1 - 1) \beta^2 H_x + \\ & + u_1 \beta^2 H_x) a_{m+2,n} \end{aligned} \quad (4.48)$$



Kuva 4.4 Nurkasta seuraavan reunapisteen differenssiyhtälökaavio.

$$\begin{aligned}
 ex_{m,n} &= a_{m,n} + 2u_1(1 + v_y\beta^2)a_{m+1,n} + (-u_1v_y\beta^2 + g(2u_2 - \\
 &- 1)u_1v_y\beta^2 - gu_1^2v_y\beta^2)a_{m+1,n+1} + (u_1^2v_y\beta^4H_x + 4u_1^2(1 + \\
 &+ v_y\beta^2)(1 + \beta^2H_x) - gu_1^2v_y\beta^4H_x(2u_2 - 1) + \\
 &+ gu_1^2v_y\beta^4H_x)a_{m+2,n} \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ex_{m+1,n} &= (1 - (2u_1 - 1))a_{m+1,n} - (2u_1(1 + \beta^2H_x) + 2u_1(2u_1 - \\
 &- 1)(1 + \beta^2H_x))a_{m+2,n} \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

$$ex_{m+2,n} = 2a_{m+2,n} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
 ex_{m,n-1} &= a_{m,n+1} - u_1v_y\beta^2a_{m+1,n} - g(2u_1u_2v_y\beta^2(1 + v_x\alpha^2) - \\
 &- 2u_1(1 + v_y\beta^2))a_{m+1,n+1} + (-2u_1^2v_y\beta^2(1 + \beta^2H_x) + \\
 &+ g(2u_1u_2v_x\alpha^2(1 + v_y\beta^2) - 2u_2(1 + v_x\alpha^2))a_{m,n+2} \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ex_{m+1,n-1} &= a_{m+1,n+1} + g(u_1u_2v_xv_y\alpha^2\beta^2 - (2u_1 - 1))a_{m+1,n+1} + \\
 &+ (u_1\beta^2H_x - gu_1^2u_2v_xv_y\beta^2H_x + g(2u_1 - 1)u_1\beta^2H_x)a_{m+2,n} + \\
 &+ g((2u_1 - 1)u_2v_x\alpha^2 - u_2v_x\alpha^2)a_{m,n+2} \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

$$g = \frac{1}{1 - u_1u_2v_xv_y} \quad (4.54)$$

Näissä yhtälöissä kuvan 4.4 kaavion pisteen (m,n) u-arvoa on merkitty  $u_1$ :llä ja pisteen (m+1,n-1) u-arvoa  $u_2$ :lla. Näistä yhtälöistä saadaan muut vastaavat nurkkapistet samoin kuin edellisissä reunapisteen differenssiyhtälöissä.

Siirrytään käsittelemään reunan nurkkapistettä (kuva 4.5). Tässä tarvitaan edellä esitettyjen reunaehtoien lisäksi reunaehto

$$M_{xy} = 0.$$

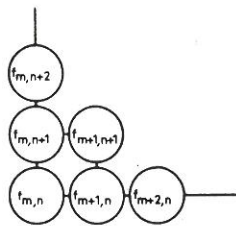
$$M_{xy} = 0, \quad w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n-1} - w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} = 0 \quad (4.55)$$

Sijoittamalla reunaehtoyhtälöt (4.31) - (4.34) ja (4.55) yleiseen differenssiyhtälöön, saadaan laatan reunojen nurkkapisteen differenssiyhtälö (4.56) ja kertoimet f.

$$f_{m,n+2}w_{m,n+2} + f_{m,n+1}w_{m,n+1} + f_{m+1,n+1}w_{m+1,n+1} + f_{m,n}w_{m,n} + f_{m+1,n}w_{m+1,n} + f_{m+2,n}w_{m+2,n} - p(x,y) = 0 \quad (4.56)$$

$$f_{m,n+2} = 2a_{m,n+2} - (u_1v_y\beta^2 + u_1^2v_y\beta^2)a_{m+1,n+1} + (u_1^2v_y\beta^4H_x + u_1^3v_y\beta^4H_x)a_{m+2,n} + (u_1^2u_2v_yH_y/\rho - u_1u_2v_yH_y/\rho)a_{m,n+2} \quad (4.57)$$

$$f_{m,n+1} = a_{m,n+1} + g(u_1u_2v_xv_y - (2u_2 - 1))a_{m,n+1} + g((2u_2 - 1)u_1v_y\beta^2 - u_1v_y\beta^2)a_{m+1,n} + (2u_1(1 + v_y\beta^2) + 2u_1^2(1 + v_y\beta^2))a_{m+1,n+1} + (2gu_1(1 + \beta^2H_x)(2u_2 - 1)u_1v_y\beta^2 - 2gu_1(1 + \beta^2H_x)u_1v_y\beta^2 - 2u_1^2\beta^2H_x(1 + v_y\beta^2) - 2u_1^3\beta^2H_x(1 + v_y\beta^2))a_{m+2,n} + (2gu_2(1 + \alpha^2H_y/\rho)u_1u_2v_xv_y - 2gu_2(1 + \alpha^2H_y/\rho)(2u_2 - 1) - 2u_2(1 + \alpha^2H_y/\rho) - 2u_1^2u_2\alpha^2H_y/\rho(1 + v_y\beta^2) + 2u_1u_2\alpha^2H_y/\rho(1 + v_y\beta^2))a_{m,n+2} \quad (4.58)$$



Kuva 4.5 Laatan nurkkapisteen differenssiyhtälökaavio.

$$\begin{aligned}
 f_{m+1,n+1} = & a_{m+1,n+1} + ((u_1 + u_2 - 1) - (2u_1 - 1) - u_1(2u_1 - \\
 & - 1) - (2u_2 - 1) - u_2(2u_2 - 1))a_{m+1,n+1} + (u_1\beta^2H_x - \\
 & - u_1\beta^2H_x(u_1 + u_2 - 1) + (2u_1 - 1)u_1\beta^2H_x + (2u_1 - \\
 & - 1)u_1^2\beta^2H_x - (2u_2 - 1)u_1\beta^2H_x + (2u_2 - 1)u_1u_2\beta^2H_x)a_{m+2,n} + \\
 & + (u_2\alpha^2H_y/\rho - u_2\alpha^2H_y/\rho(u_1 + u_2 - 1) - (2u_1 - 1)u_2\alpha^2H_y/\rho + \\
 & + (2u_1 - 1)u_1u_2\alpha^2H_y/\rho + (2u_2 - 1)u_2\alpha^2H_y/\rho + (2u_2 - \\
 & - 1)u_2^2\alpha^2H_y/\rho)a_{m,n+2} \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{m,n} = & a_{m,n} - (2gu_1u_2v_y\beta^2(1 + v_x\alpha^2) - 2gu_1(1 + v_y\beta^2))a_{m+1,n} - \\
 & - (2gu_1u_2v_x\alpha^2(1 + v_y\beta^2) - 2gu_2(1 + v_x\alpha^2))a_{m,n+1} - \\
 & - (u_1v_y\beta^2 + u_1^2v_y\beta^2 + u_2v_x\alpha^2 + u_2^2v_x\alpha^2)a_{m+1,n+1} + \\
 & + (2gu_1(1 + \beta^2H_x)2u_1(1 + v_y\beta^2) - 2u_1g(1 + \\
 & + \beta^2H_x)2u_1u_2v_y\beta^2(1 + v_x\alpha^2) + u_1u_2^2v_xH_x - u_1u_2v_xH_x + \\
 & + u_1^3v_y\beta^4H_x + u_1^2v_y\beta^4H_x)a_{m+2,n} + (2gu_2(1 + \alpha^2H_y/\rho)2u_2(1 + \\
 & + v_x\alpha^2) - 2gu_2(1 + \alpha^2H_y/\rho)2u_1u_2v_x\alpha^2(1 + v_y\beta^2) + \\
 & + u_2^3v_x\alpha^4H_y/\rho + u_2^2v_x\alpha^4H_y/\rho + u_1^2u_2v_yH_y/\rho - \\
 & - u_1u_2v_yH_y/\rho)a_{m,n+2} \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{m+1,n} = & a_{m+1,n} + g(u_1u_2v_xv_y - (2u_1 - 1))a_{m+1,n} + g((2u_1 - \\
 & - 1)u_2v_x\alpha^2 - u_2v_x\alpha^2)a_{m,n+1} + (2u_2(1 + v_x\alpha^2) + 2u_2^2(1 + \\
 & + v_x\alpha^2))a_{m+1,n+1} + (2gu_1(1 + \beta^2H_x)u_1u_2v_xv_y - g2u_1(1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta^2 H_x)(2u_1 - 1) + 2u_1 u_2 \beta^2 H_x (1 + v_x \alpha^2) - 2u_1 (1 + \\
 & + \beta^2 H_x) - 2u_1 u_2^2 \beta^2 H_x (1 + v_x \alpha^2) a_{m+2,n} + (2gu_2 (1 + \\
 & + \alpha^2 H_y / \rho) (2u_1 - 1) u_2 v_x \alpha^2) a_{m+2,n} + (2gu_2 (1 + \\
 & + \alpha^2 H_y / \rho) (2u_1 - 1) u_2 v_x \alpha^2 - 2gu_2 (1 + \alpha^2 H_y / \rho) u_2 v_x \alpha^2 - \\
 & - 2u_2^2 \alpha^2 H_y / \rho (1 + v_x \alpha^2) - 2u_2^3 \alpha^2 H_y / \rho (1 + v_x \alpha^2)) a_{m,n+2} \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{m+2,n} = & 2a_{m+2,n} - (u_2 v_x \alpha^2 + u_2^2 v_x \alpha^2) a_{m+1,n+1} + (u_1 u_2^2 v_x H_x - \\
 & - u_1 u_2 v_x H_x) a_{m+2,n} + (u_2^2 v_x \alpha^4 H_y / \rho + u_2^3 v_x \alpha^4 H_y / \rho) a_{m,n+2} \\
 & \quad \quad \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Talonrakennuksessa esiintyy harvemmin selviä suorakaiteenmuotoisia teräsbetonilaattoja, vaan niissä saattaa olla suuria aukkoja porrashuoneita ym. varten. Tietokoneohjelman laadinnassa on haluttu ottaa huomioon myös nämä. Tällöin edellisten reunaehtoyhtälöjen lisäksi on muodostettu rei'än nurkan vaatimat differenssiyhtälöt. Ensin kirjoitetaan rei'än reunalla olevan nurkasta seuraavan pisteen differenssiyhtälö (kuva 4.6). Tämän pisteen differenssiyhtälön kertoimien johtamisessa käytetään samoja reunaehtoyhtälöitä kuin laatan ulko-reunalla. Tässä tapauksessa on kuitenkin pidetty  $u$ -arvoa vakiona rei'än kullakin reunalla. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}
 & h_{x_{m,n+2}} w_{m,n+2} + h_{x_{m-1,n+1}} w_{m-1,n+1} + h_{x_{m,n+1}} w_{m,n+1} + \\
 & + h_{x_{m-2,n}} w_{m-2,n} + h_{x_{m-1,n}} w_{m-1,n} + h_{x_{m,n}} w_{m,n} + \\
 & + h_{x_{m-1,n-1}} w_{m-1,n-1} + h_{x_{m,n-1}} w_{m,n-1} + h_{x_{m+1,n-1}} w_{m+1,n-1} + \\
 & + h_{x_{m,n-2}} w_{m,n-2} - p(x,y) = 0 \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

$$h_{m,n+2}^x = a_{m,n+2} - uv_y \beta^2 a_{m+1,n+1} + u^2 v_y \beta^4 H_x a_{m+2,n} \quad (4.64)$$

$$h_{m-1,n+1}^x = a_{m+1,n+1} - (2u - 1)a_{m+1,n+1} + (u\beta^2 H_x + (2u - 1)u\beta^2 H_x) a_{m+2,n} \quad (4.65)$$

$$h_{m,n+1}^x = a_{m,n+1} - uv_y \beta^2 a_{m+1,n} + 2u(1 + v_y \beta^2) a_{m+1,n+1} - (2u^2 v_y \beta^2 (1 + \beta^2 H_x) + 2u^2 \beta^2 H_x (1 + v_y \beta^2)) a_{m+2,n} \quad (4.66)$$

$$h_{m-2,n}^x = 2a_{m+2,n} \quad (4.67)$$

$$h_{m-1,n}^x = a_{m+1,n} - (2u - 1)a_{m+1,n} - (2u(1 + \beta^2 H_x) + 2u(2u - 1)(1 + \beta^2 H_x)) a_{m+2,n} \quad (4.68)$$

$$h_{m,n}^x = a_{m,n} + 2u(1 + v_y \beta^2) a_{m+1,n} - uv_y \beta^2 a_{m+1,n+1} + (4u^2(1 + v_y \beta^2)(1 + \beta^2 H_x) + u^2 v_y \beta^4 H_x) a_{m+2,n} \quad (4.69)$$

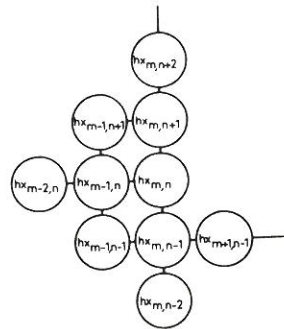
$$h_{m-1,n-1}^x = a_{m+1,n+1} + u\beta^2 H_x a_{m+2,n} \quad (4.70)$$

$$h_{m,n-1}^x = a_{m,n+1} - uv_y \beta^2 a_{m+1,n} - 2u^2 v_y \beta^2 (1 + \beta^2 H_x) a_{m+2,n} \quad (4.71)$$

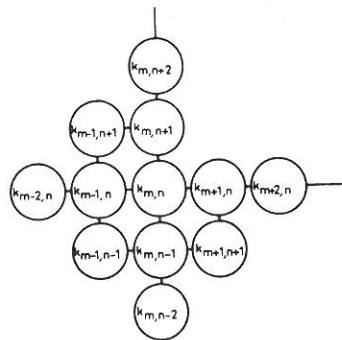
$$h_{m+1,n-1}^x = a_{m+1,n+1} - u\beta^2 H_x a_{m+2,n} \quad (4.72)$$

$$h_{m,n-2}^x = a_{m,n+2} \quad (4.73)$$

Kuvassa 4.6 esitettyä kaaviota voidaan käyttää myös rei'än muissa nurkissa asettamalla se nurkan mukaiseksi. Mikäli piste sijaitsee y-akselia vastaan kohtisuoralla reunalla, tulee yhtälöihin sijoitettavaksi  $\beta$ :n tilalle  $\alpha$ ,  $v_y$ :n tilalle  $v_x$  ja  $H_x$ :n tilalle  $H_y/\rho$ , kuten edellisissä vastaavissa yhtälöissä. Viimeisenä reunaehtoyhtälönä esitetään rei'än nurkkapisteen differenssiyhtälö (kuva 4.7). Tässä tapauksessa tulee ainoastaan yksi piste supistettavaksi pois



Kuva 4.6 Rei'än nurkasta seuraavan reunapisteen differenssiyhtälökaavio.



Kuva 4.7 Rei'än nurkkapisteen differenssiyhtälökaavio.

yleisestä differenssiyhtälöstä.  $u$ -arvona käytetään molempien reunojen  $u$ -arvojen keskiarvoa.

$$\begin{aligned}
 & k_{m,n+2}w_{m,n+2} + k_{m-1,n+1}w_{m-1,n+1} + k_{m,n+1}w_{m,n+1} + k_{m-2,n}w_{m-2,n} + \\
 & + k_{m-1,n}w_{m-1,n} + k_{m,n}w_{m,n} + k_{m+1,n}w_{m+1,n} + k_{m+2,n}w_{m+2,n} + \\
 & + k_{m-1,n-1}w_{m-1,n-1} + k_{m,n-1}w_{m,n-1} + k_{m+1,n-1}w_{m+1,n-1} +
 \end{aligned}$$

$$+ k_{m,n-2} w_{m,n-2} - p(x,y) = 0 \quad (4.74)$$

$$k_{m,n+2} = a_{m,n+2} - 1/2 v_y \beta^2 u_2 a_{m+1,n+1} \quad (4.75)$$

$$k_{m-1,n+1} = a_{m+1,n+1} - 1/2 (2u_2 - 1) a_{m+1,n+1} \quad (4.76)$$

$$k_{m,n+1} = a_{m,n+1} + u_2 (1 + v_y \beta^2) a_{m+1,n+1} \quad (4.77)$$

$$k_{m-2,n} = a_{m+2,n} \quad (4.78)$$

$$k_{m-1,n} = a_{m+1,n} \quad (4.79)$$

$$k_{m,n} = a_{m,n} - 1/2 v_x \alpha^2 u_1 a_{m+1,n+1} - 1/2 v_y \beta^2 u_2 a_{m+1,n+1} \quad (4.80)$$

$$k_{m+1,n} = a_{m+1,n} + u_1 (1 + v_x \alpha^2) a_{m+1,n+1} \quad (4.81)$$

$$k_{m+2,n} = a_{m+2,n} - 1/2 v_x \alpha^2 u_1 a_{m+1,n+1} \quad (4.82)$$

$$k_{m-1,n-1} = a_{m+1,n+1} \quad (4.83)$$

$$k_{m,n-1} = a_{m,n+1} \quad (4.84)$$

$$k_{m+1,n-1} = a_{m+1,n+1} - 1/2 (2u_1 - 1) a_{m+1,n+1} \quad (4.85)$$

$$k_{m,n-2} = a_{m,n-2} \quad (4.86)$$

Kuvan 4.7 esittämän kaavion kertoimia voidaan käyttää myös muissa rei'än nurkkapisteissä asettamalla kaavio nurkan mukaiseksi.

Edellä on esitetty ne Teknillinen laskenta Oy:n pilarilaattaohjelman differenssiyhtälöistä, jotka muodoltaan eroavat toisistaan. Muut yhtälöt saadaan edellä esitetyistä alaindeksejä ja muutamia vakioita vaihtamalla.

Laskelmien suorittamista tietokoneella käsitellään Rakenteiden Mekaniikan seuraavassa numerossa (Vol. 5 No. 2) julkaistavassa dipl.ins. Risto Sajaniemen kirjoituksessa "Ortotrooppisen laatan

laskelmien suorittaminen pilarilaattaohjelmalla".

Kirjallisuutta

- [1] E-M. Salonen, A Rectangular Plate Bending Element the Use of which is Equivalent to the Use of the Finite Difference Method International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 1. 1969.
- [2] E-M. Salonen, Correlation Studies of the Finite Element, Finite Difference and the Framework Methods in the Bending and Stretching of Plates. Helsinki 1970.
- [3] E-M. Salonen, A Gridwork Method for Plates in Bending. Acta Polytechnica Scandinavia, Civil Engineering and Building Construction Series No. 59. Helsinki 1969.
- [4] E-M. Salonen, Correlation Between the Finite Element and Finite Difference Methods in the Analysis of Stretched Plates. Suomen teknillinen korkeakoulu, tieteellisiä tutkimuksia, Helsinki 1968.
- [5] P.V. Jensen, Analyses of Skew Slabs. Univ. Illinois Bull. 332 1941.
- [6] K. Beyer, Die Statik im Stahlbetonbau. Springer 1956.
- [7] C. Dunham, Advanced Reinforced Concrete. New York 1964.
- [8] Balas - Hanuska, Influence Surfaces of Skew Plates. Bratislava 1964.
- [9] L. Hallbjörn, Snedvinkliga brobaneplattor av armerad betong upplagda på pelare. Institutionen för brobyggnad, Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm 1968.
- [10] Barres - Massonet, Analysis of Beam Grids and Orthotropic Plates. London 1968.
- [11] Naruoka - Ohmura, On the Analysis of a Skew Girder Bridge by the Theory of Orthotropic Parallelogram Plates. Zurich 1959.