

PERTTI HOLOPAINEN

Yhteenveto

Tässä kirjoitussarjassa (I, II, III) käsitellään köyttä geometrisesti ja fysikaalisesti epälineaarisen rakenteena.

I osassa johdetaan yleiset köysiyhtälöt pistekuormien kuormittamalle köydelle ulkoisten voimien komplementaarienergian stationäärin arvon (ulkoisten siirtymien potentiaalin) π_c periaatteen avulla. Tällöin Engesserin [2] komplementaarienergia \bar{U} (ns. ensimmäisen lajin jännitysenergia) ei sellaisenaan päde, mutta muuten periaate on tässä täysin sama. Köyden ratkaisemiseksi on esitetty komplementaarienergian lausekkeet, joissa rakenteen geometriset muodonmuutokset on otettu huomioon (ns. toisen lajin jännitysenergia). Kun geometriset muodonmuutokset tulevat äärettömän pieniksi, π_c palautuu Engesserin komplementaarienergiaksi \bar{U} .

Köysiyhtälöitä on johdettu köyden sijaitessa sekä 2- että 3-dimensioisessa avaruudessa. Tällöin saadaan epälineaarinen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomia voimasuureita on vastaavasti 2 tai 3 pistekuormien lukumäärästä riippumatta. Vaihtoehtoisesti varioitaviksi suureiksi on otettu lisäksi rakenteen sisäisiä voimia ja muodonmuutoksia, jolloin näitä sitovia ehtoja ei huomioida π_c :n lausekkeessa.

Sen sijaan puhdasta siirtymämenetelmää käytettäessä ($\delta_u \pi = 0$) tultaisiin epälineaariseen yhtälöryhmään, jossa tuntemattomia siirtymäsuureita olisi vastaavasti $2n$ tai $3n$ kappaletta kun n on pistekuormien vaikutuspisteiden lukumäärä. Tätä menetelmää ei tässä käsitellä.

Köyttä kuormittavien voimien suunnat voidaan valita mielivaltaisesti. Edellyttäen, että köyden oma paino ja taivutus- ja vääntöjäykkyys on nolla sekä köyden materiaalin perusyhtälössä, $\epsilon = f(\sigma)$, f on jatkuva ja monotonisesti nouseva funktio, tässä johdetut köysi-yhtälöt esittävät köyden yksikäsitteistä ja tarkkaa ratkaisua.

Ratkaisu on johdettu myös tapaukselle, jossa köyteen vaikuttavat pistekuormat ovat suunnatut avaruuden kiinteisiin pisteisiin ja myös tapaukselle, jossa kuormat asetetaan vaikuttamaan kahdessa vaiheessa.

Lopussa on laskuesimerkki, jossa lähtöarvot ja tulokset on esitetty köyden ja voimien ollessa sekä tasossa että 3-dimensioisessa avaruudessa ja köyteen vaikuttavien pistekuormien ollessa joko vakiosuuntaiset tai avaruuden kiinteisiin pisteisiin suunnatut.

1. YLEISTÄ

Kun kimmainen kappale (kuva 1) on konservatiivisessa voimkentässä (T_{oi}^v, G_{oi}) tasapainotilassa, pätee yleisesti kokonaispotentiaalienergian

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{V_o} \rho_o W dV_o - \int_{V_o} \rho_o G_{oi} u_i dV_o - \int_{A_{o\sigma}} T_{oi}^v u_i dA_o - \\ & - \int_{A_{ou}} (u_i^* - u_i) T_{oi}^v dA_o \end{aligned} \quad (a)$$

stationäärin arvon periaate. Sen mukaan siirtymien jatkuvuusehdot V_o :ssa ja siirtymien reunaehdot S_{ou} :ssa toteuttavien siirtymätilojen

joukkoon sisältyvä siirtymätila, joka toteuttaa myös voimien tasapainoehdot V_o :ssa ja voimien reunaehdot A_{oo} :ssa, toteutuu täsmälleen silloin, kun kokonaispotentiaalienergia π saa stationäärisen arvon. Lyhyesti:

$$\delta_U \pi = 0$$

& siirtymien yhteensopivuusyhtälöt V_o :ssa
(materiaalin muodonmuutosehtälöt)

& siirtymien reunaehdot A_{ou} :ssa

(p_1)

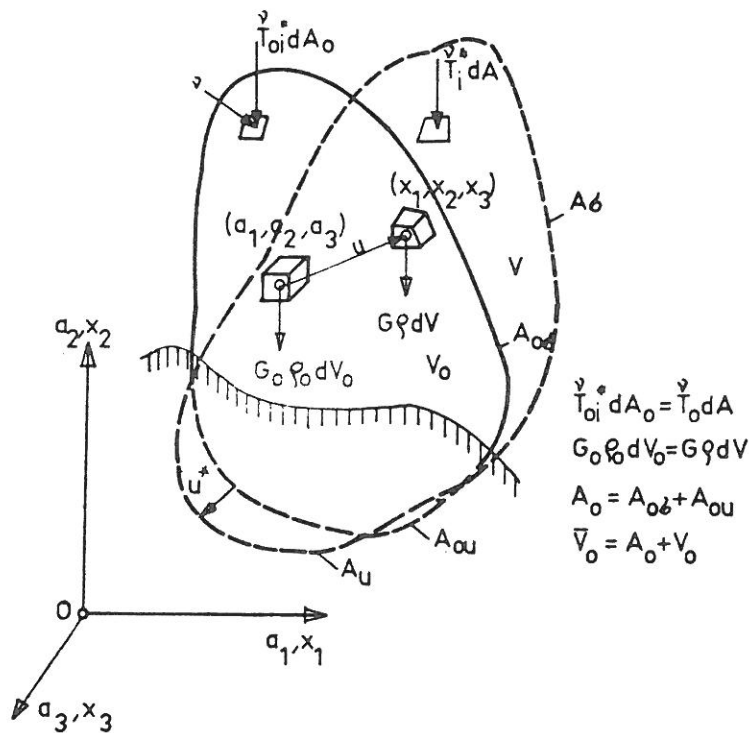
⇨ jännitysten tasapainoyhtälöt V_o :ssa

& jännitysten reunaehdot A_{oo} :ssa

jossa jännitysten tasapainoyhtälö

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left(s_{jl} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \right) + \rho_o G_{oi} = 0$$

saadaan variaatiotehtävän Eulerin differentiaaliyhtälönä V_o :ssa, jonka ratkaisun luonnollisina reunaehtoina ovat annetut voimat



Kuva 1.

$$T_{oi}^v = s_{j\ell} \frac{\partial x_i}{\partial a_\ell}$$

alueessa $A_{o\sigma}$. Varioitavina suureina ovat siirtymät u_i ja alueessa A_{ou} on $\delta u_i = 0$. Kokonaispotentiaalienergia π on tässä sisäisten jännitysten $s_{j\ell}$, annettujen tilavuusvoimien G_{oi} ja annettujen pintavoimien T_{oi}^v potentiaalifunktioiden summa. Siirtymien reunaehtojen toteutuessa alueessa A_{ou} viimeisen termin arvo ja samoin δu_i on nolla, joten tässä yksinomaan siirtymiä varioitaessa kokonaispotentiaalienergian lausekkeeseen on lisätty ainoastaan nollatermi.

Sisäisten jännitysten potentiaalifunktio (muodonmuutosenergia) voidaan Legendre'n muunnoksen avulla lausua muodossa

$$\rho_o W = s_{ij} e_{ij} - \rho_o W_c$$

kun oletetaan että

$$e_{ij} = e_{ij}(s_{11}, s_{12}, \dots, s_{33})$$

Tällöin kokonaispotentiaalienergia voidaan lausua Reissnerin (1953) [2] esittämällä tavalla

$$\begin{aligned} \pi_R = & \int_{V_o} \{s_{k\ell} e_{k\ell} - W_c(s_{ij}) - \rho_o G_{oi} u_i\} dV_o - \int_{A_{o\sigma}} T_{oi}^v u_i dA_o - \\ & - \int_{A_{ou}} (u_i^* - u_i) T_{oi}^v dA_o \end{aligned} \quad (c)$$

Reissnerin variaatioperiaatteen mukaan se siirtymätila, joka toteuttaa jännitysten tasapainoyhtälöt V_o :ssa ja jännitysten reunaehdot $A_{o\sigma}$:ssa ja se jännitystila, joka toteuttaa siirtymien yhteensopivuusyhtälöt (materiaalin perusyhtälöt) V_o :ssa ja siirtymien reunaehdot A_{ou} :ssa, toteutuu täsmälleen silloin kun π_R saa stationäärisen arvon eli lyhyesti

$$\delta_{u,s} \pi_R = 0$$

& siirtymien reunaehdot A_{Ou} :ssa

& jännitysten reunaehdot $A_{O\sigma}$:ssa

⇔ jännitysten tasapainoyhtälöt V_o :ssa

& jännitysten reunaehdot $A_{O\sigma}$:ssa

(p₂)

& siirtymien yhteensopivuusyhtälöt V_o :ssa

(materiaalin muodonmuutosyhtälöt)

& siirtymien reunaehdot A_{Ou} :ssa

Jännitysten tasapainoyhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial a_j} (s_{j\ell} \frac{\partial x_i}{\partial a_\ell}) + \rho_o G_{oi} = 0$$

ja siirtymien yhteensopivuusyhtälöt

$$\frac{\partial W_c}{\partial s_{ij}} - e_{ij} = 0$$

saadaan ko. variaatiotehtävän Eulerin differentiaaliyhtälöinä. Luonnollisina reunaehtoina ovat vastaavasti annetut jännitykset

$$T_{oi}^m = s_{j\ell} \frac{\partial x_i}{\partial a_\ell}$$

alueessa $A_{O\sigma}$ ja annetut siirtymät $u_i^m = u_i$ alueessa A_{Ou} . Varioitavina suureina ovat siis siirtymät u_i ja jännitykset s_{ij} . Alueessa A_{Ou} on $\delta u_i = 0$ ja alueessa $A_{O\sigma}$ on $\delta s_{ij} = 0$.

Venäläinen Zubov on todistanut (1969) materiaalin ollessa kimmoista isotrooppista, että siirtymien gradientit ja komplementaarienergia voidaan lausua yksinomaan jännitysten avulla. Tällöin saadaan puhdas komplementaarienergian teoria, jonka mukaan jännitysten tasapainoyhtälöt V_o :ssa ja jännitysten reunaehdot $A_{O\sigma}$:ssa toteuttavien jännitystilojen joukkoon sisältyvä siirtymätila, joka toteuttaa myös siirtymien jatkuvuusyhtälöt V_o :ssa ja siirtymien reunaehdot A_{Ou} :ssa, toteutuu täsmälleen silloin, kun komplementaarienergia π_c

saa stationäärisen arvon. Lyhyesti:

- $\delta s_{ij} \pi_c$
- & jännitysten tasapainoyhtälöt V_0 :ssa
- & jännitysten reunaehdot $A_{0\sigma}$:ssa
- ↔ siirtymien yhteensopivuusyhtälöt V_0 :ssa (p₃)
(materiaalin muodonmuutosyhtälö)
- & siirtymien reunaehdot $A_{0\sigma}$:ssa

jossa siirtymien yhteensopivuusyhtälöt

$$\frac{\partial W_c}{\partial s_{ij}} = e_{ij}$$

saadaan variaatiotehtävän Eulerin differentiaaliyhtälöinä, joiden ratkaisun luonnollisina reunaehtoina ovat annetut siirtymät $u_i^m = u_i$ alueessa $A_{0\sigma}$. Varioitavia suureita ovat siis jännitykset s_{ij} , ja alueessa $A_{0\sigma}$ on $\delta s_{ij} = 0$.

Edellä esitetyissä funktionaaleissa π , π_R ja π_c jännitykset s_{ij} (Kirchhoff) ja muodonmuutokset e_{ij} (Green) on lausuttu materiaalin kiinteässä 0-tilan koordinaatistossa $\{a_1, a_2, a_3\}$. Deformoitunut kappale annetaan $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinaatistossa, jolloin tulee tuntee koordinaatistojen välinen yhteys. Usein mukavuussyistä valitaan molemmat koordinaatistot $\{a_1, a_2, a_3\}$ ja $\{x_1, x_2, x_3\}$ samaksi suorakulmaiseksi koordinaatistiksi (kuva 1), jolloin Euclideen metriikkatensoori $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Edellä esitetyille funktionaaleille π , π_R ja π_c , joiden stationäärisen arvon olemassaolo on selvä niiden fysikaalisen tulkinnan, kokonaispotentiaalienergian, perusteella, Eulerin differentiaaliyhtälön toteutuminen on välttämätön, mutta myös riittävä ehto ko. funktionaalin stationäärisen arvon olemassaololle. Stabiilissa tasapainotilassa π , π_R ja π_c saavat ääriarvon, jolloin $\delta^2 \pi$, $\delta^2 \pi_R$ tai

$\delta^2 \pi_c$ ovat definiittejä eräässä ympäristössä K. Jos $\delta^2 \pi$, $\delta^2 \pi_R$ tai $\delta^2 \pi_c < 0$ joillakin variaatioiden arvoilla eräässä riittävän pienessä ympäristössä K_ϵ , tasapainotila on labiili.

Erikoisesti rakenteissa suuret muodonmuutokset ovat luonteeltaan geometrisia, kun sen sijaan varsinaiset materiaalin muodonmuutokset (muodonmuutokset materiaalikoordinaatistossa) ovat usein pieniä, $s_{ij} \sim \sigma_{ij}$ ja $e_{ij} \sim \epsilon_{ij}$. Tällöin ei yleensä korosteta materiaalin 0-tilassa olevaa tiheyttä ρ_0 , tilavuutta V_0 ja pinta-alaa A_0 (alaindeksillä 0), mutta integroinnit tulisi suorittaa 0-tilassa olevien mittojen mukaan aina, kun jännitykset ja muodonmuutokset lausutaan 0-tilan koordinaatistossa.

Rakenteille, joiden staattinen määräämättömyysaste on äärellinen (3 m), komplementaarienergia voidaan kirjoittaa

$$\pi_c = -U + \int_{A_\sigma} \Sigma p_j u_j dA + \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^3 X_{tj} (u_{tj}^m - u_{tj}) \quad (c)$$

jossa tilavuusvoimat G_i voidaan useimmiten sisällyttää pintarakenteissa idealisoidulle pinnalle ja sauvarakenteissa sauvojen idealisoiduille akseleille vaikuttaviin pintavoimiin p_j , joiden siirtymät ovat vastaavasti u_j . Voimat X_{tj} ovat tukireaktioita (vrt. kuva 1), rakenteissa staattisesti määräämättömiä suureita, jotka vaikuttavat staattisesti määrättyyn, ns. perusrakenteeseen, ulkoisina voimina. Kun otaksutaan, että muodonmuutosenergia $U = U^{(i)} = U^{(e)}$ ja siirtymät u_j ovat voimien p_j ja X_{tj} funktioita, osittaisintegrointia käyttäen voidaan osoittaa, että π_c on staattisesti määrättyyn perusmuotoon vaikuttavien voimien p_j ja X_{tj} komplementaarienergia, eli siirtymien u_j ja $u_{tj} - u_{tj}^m = \delta u_{tj}$ potentiaali. Tällöin, kun voimat p_j ja X_{tj} ovat pyörteettömiä,

$$u = \text{grad}_p \pi_c$$

ja jotta materiaalin jatkuvuus toteutuisi myös voimien X_{tj} vaikutus-

pisteissä, tulee olla

$$u_{tj}^* - u_{tj} = \delta u_{tj} = 0$$

Tällöin

$$\delta u = \text{grad}_X \pi_c = \bar{0}$$

em. pisteissä, joten π_c saa stationäärisen arvon. Lausekkeista (a) ja (c) todetaan, että numeeriselta arvoltaan $\pi_c = -\pi$.

Perusrakenteelle, joka on määrätty kuten geometrisesti lineaarisessa rakenteessa, lausekkeen (c) määrääminen voimien p_j , X_{tj} avulla on yleensä hankalaa, kun muodonmuutokset ovat suuria. Tämän välttämiseksi rakenne pyritään jakamaan sellaisiin osiin l. elementteihin, jotka ovat geometrisesti lineaarisia, tai mahdollisimman yksinkertaisesti geometrisesti epälineaarisia omassa elementtikohtaisessa koordinaatistossaan. Elementtien i liitoskohdissa vaikuttavat voimat H_{ij} määritetään tasapainoyhtälöistä annettujen voimien p_j ja tuntemattomien voimien X_{tj} avulla osan näistä voimista ollessa itse voimia X_{tj} . π_c :n lausekkeessa (c) muodonmuutosenergia U, joka on riippumaton jäykän kappaleen liikkeistä, on

$$U = \sum_{i=1}^n U_i$$

Muodonmuutosenergia jännitysten avulla lausuttuna on muotoa

$$U_i = f(\sum \sum \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \bar{U}_i(\sigma_{ij}))$$

Isotrooppisesti kimmoisissa materiaaleissa, joissa pääjännitysten ja päävenymien suunnat aina yhtyvät, U_i on pelkästään pääjännitysten avulla

$$U_i = f(\sum s_{ii} \epsilon_{ii} - \bar{U}_i(s_{ii}))$$

Kun määritetään elementin muodonmuutoksista syntyvät nurkkavoimien suuntaiset siirtymät $E_{ij}(H_{ij})$, saadaan

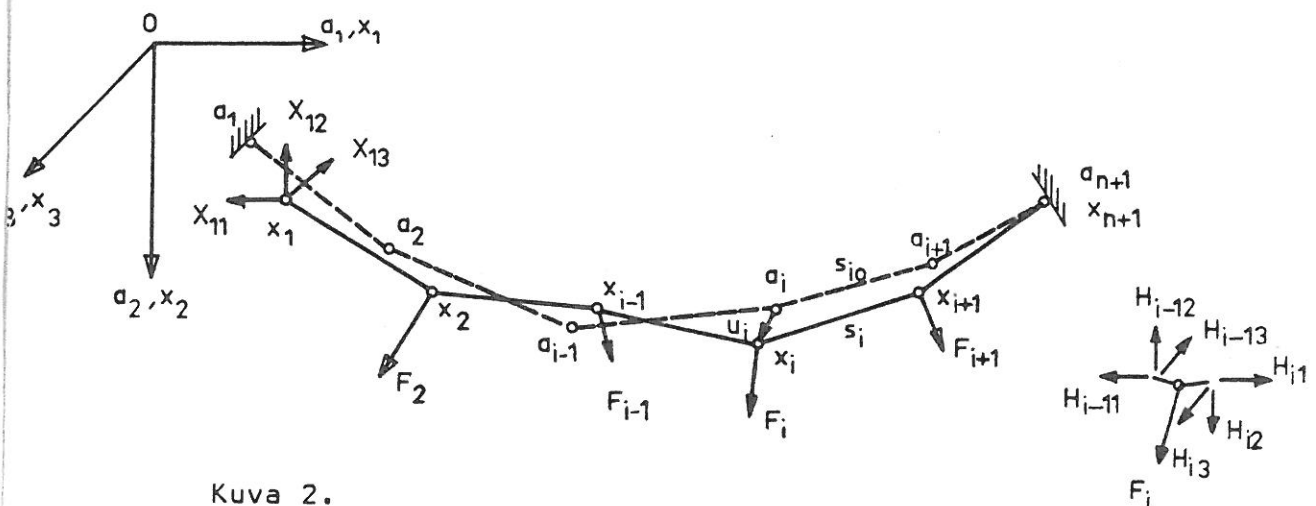
$$U_i = \sum_i (H_{ij} E_{ij} - \bar{U}(H_{ij}))$$

π_c :n lausekkeessa (c) kaksi viimeistä termiä saadaan elementin nurkkavoimien H_{ij} ja vastaavien muodonmuutoksista ϵ_{ij} ja elementin rotaatioista α_{ij} aiheutuvien peruskoordinaatiston $\{a_1, a_2, a_3\}$ muodonmuutosten Δu_{ij} avulla. Tämä matemaattisessa kimmoteoriassa yleisesti-kin todistettu periaate [8 s. 137 - 139 Vorobyev, 1956] esitetään tässä yksityiskohtaisesti köydelle.

2. KÖYDEN KOMPLEMENTAARIENERGIA

Alkuoletukset (kuva 2)

- 1^o Köyden materiaalin perusyhtälö on $\epsilon = f(\sigma)$, jossa f on monotonisesti nouseva ja jatkuva.
- 2^o Köydellä ei ole taivutus- eikä vääntöjäykkyyttä.
- 3^o Köysi on painoton.



Kuva 2.

Merkitään: 0-tilassa $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$
 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$
 $u_i = x_i - a_i$
 $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$
 $\delta u_1 = u_1^* - u_1$

Köydessä voimien reunaehtoina ovat voimat

$$F_{i1}, F_{i2}, F_{i3} \quad i = 2, \dots, n$$

ja siirtymien reunaehtoina

$$u_1^* = u_{n+1}^* = 0$$

Oletusten 2^o ja 3^o perusteella voidaan otaksua köydessä olevan nivel jokaisen pistekuorman vaikutuskohdassa x_i ja köyden olevan suoran pisteiden x_i, x_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$) välillä. Köysi voidaan siten korvata sauvaketjulla $s_i, i = 1, 2, \dots, n$. Oletetaan köysi katkaistuksi jostain mielivaltaisesta pisteestä, mukavuussyistä toisesta päätepisteestään a . Asetetaan leikkauskohtaan voimat X_{11}, X_{12}, X_{13} , jolloin saadaan staattisesti määrätty perusmuoto. Siirtymien u_i ja muodonmuutosten e_i määrittämiseksi sauvaketju jaetaan elementteihin valitsemalla elementiksi yksityinen sauva ja asetetaan liitoskohtiin voimat H_{i1}, H_{i2}, H_{i3} , jotka määritetään tasapainoyhtälöistä

$$H_{ij} = X_{1j} - \sum_{k=1}^i F_{kj} \quad j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Todetaan, että

$$H_{i+1j} - H_{ij} = -F_{ij}$$

Yhtälö on samanmuotoinen kuin kaksitukisen palkin leikkausvoiman yhtälö, mutta tuntemattomat "tukireaktiot" X_{1j} johtuvat osaksi siitä, että voimien F_{ij} vaikutuspistettä x_i ei tunneta. Sauvan s_i päähän vaikuttaa voima $S_i = (H_{i1}, H_{i2}, H_{i3})$, jonka tulee olla yhdensuuntainen sauvan kanssa. Tällöin sauvan s_i suuntaluvut λ_{ij} voimien avulla lausuttuna ovat

$$\lambda_{ij} = \cos \alpha_{ij} = \frac{H_{ij}}{|S_i|} \quad (2)$$

tai

$$\lambda_{i1} : \lambda_{i2} : \lambda_{i3} = H_{i1} : H_{i2} : H_{i3} \quad (3)$$

Suuntakosineja sitoo yhtälö

$$\cos^2 \alpha_{i1} + \cos^2 \alpha_{i2} + \cos^2 \alpha_{i3} = 1 \quad (4)$$

Sauvavoimille saadaan suuntalukujen avulla lauseke

$$\begin{aligned} S_i &= H_{i1} \cos^2 \alpha_{i1} + H_{i2} \cos^2 \alpha_{i2} + H_{i3} \cos^2 \alpha_{i3} \\ &= (H_{i1}^2 + H_{i2}^2 + H_{i3}^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

Sauvan venymä materiaalin perusyhtälön avulla on

$$e_i = e_i(S_i) = \int_0^{s_{i0}} f(S_i/A(S)) ds_i \quad (6)$$

jolloin

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n (S_i e_i - \bar{U}_i) \quad (7)$$

Kun ulkoiset voimat F_{ij} , X_{1j} ja sisäiset voimat H_{ij} ovat lausutut samassa koordinaatistossa $\{a_1, a_2, a_3\}$ on

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 F_{ij} u_{ij} + \sum_{j=1}^3 X_{1j} (u_{1j}^* - u_{1j}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 [-H_{ij} u_{ij} + \\ + H_{ij} (u_{ij} + \Delta u_{ij})] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 H_{ij} \Delta u_{ij} \end{aligned} \quad (8)$$

josta todetaan, että elementin s_{i0} translaatioliikkeen vaikutus häviää. Edellinen on voimassa tarkasti mielivaltaisilla siirtymien u_{ij} ja $u_{1j}^* - u_{1j} = \delta u_{1j}$ arvoilla ja myös silloin, kun staattisesti mahdollinen voimatila ja geometrisesti mahdollinen siirtymätila ovat toisistaan riippumattomia.

Köyden komplementaarienergia π_c (c) on siis sisäisten voimien H_{ij} avulla lausuttuna

$$\pi_c = - \sum_{i=1}^n (S_i e_i - \bar{U}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 H_{ij} \Delta u_{ij} = \sum_{i=1}^n \pi_{ci} \quad (9)$$

jossa peruskoordinaatistossa $\{a_1, a_2, a_3\}$ lausutut muodonmuutokset

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{ij} &= u_{i+1,j} - u_{ij} \\
 &= (x_{i+1,j} - x_{ij}) - (a_{i+1,j} - a_{ij}) \\
 &= (s_{i0} + e_i) \cos \alpha_{ij} - (a_{i+1,j} - a_{ij})
 \end{aligned} \tag{10}$$

voidaan (1), (2), (5) ja (6) huomioiden lausua voimien F_{ij} , X_{ij} avulla. Kuten edellä on todettu, sauvaelementin s_i translaatioliike ei vaikuta π_c :n arvoon. Sauvaelementin i suunnan määräävät yksikäsitteisesti kaksi suuntalukua, esim. $\cos \alpha_{i1}$ ja $\cos \alpha_{i2}$ ja muodonmuutoksen venymä e_i . Ne ovat keskenään riippumattomia ja voidaan lausua yksikäsitteisesti keskenään riippumattomien voimien H_{i1} , H_{i2} ja H_{i3} avulla.

Sauvaelementin s_i suunta voitaisiin määrittää myös napakoordinaattien ϕ ja ψ avulla, jolloin voimien avulla lausuttuna

$$\tan \phi_i = H_{i1} / \sqrt{H_{i2}^2 + H_{i3}^2}, \quad \tan \psi_i = H_{i1} / H_{i2}$$

Määrittämällä suunta koordinaattiakselien välisten kulmien α_{ij} avulla päästään hieman lyhyempään esitykseen ja tietokoneohjelmoinnin kannalta vähän edullisempiin lausekkeisiin.

Yhtälö (8) voidaan osoittaa oikeaksi laskemalla seuraavasti. Lähtien kiinteästä pisteestä a_{n+1} saadaan yhtälön (10) mukaan

$$\begin{aligned}
 u_{nj} &= u_{n+1,j} - \Delta u_{nj} = - \Delta u_{nj} \\
 u_{n-1,j} &= u_{nj} - \Delta u_{n-1,j} = - \Delta u_{nj} - \Delta u_{n-1,j} \\
 &\text{jne.}
 \end{aligned}$$

Tällöin saadaan termeittäin

$$\begin{aligned}
 F_{nj} u_{nj} &= F_{nj} (- \Delta u_{nj}) \\
 F_{n-1,j} u_{n-1,j} &= F_{n-1,j} (- \Delta u_{nj} - \Delta u_{n-1,j}) \\
 &\dots \\
 F_{ij} u_{ij} &= F_{ij} (- \Delta u_{nj} - \Delta u_{n-1,j} - \dots - \Delta u_{ij}) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{2j}u_{2j} &= F_{2j}(-\Delta u_{nj} - \Delta u_{n-1,j} - \dots - \Delta u_{3j} - \Delta u_{2j}) \\
 - X_{1j}(u_{1j} - u_{1j}^*) &= -X_{1j}(-\Delta u_{nj} - \Delta u_{n-1,j} - \dots - \Delta u_{3j} - \\
 &\quad - \Delta u_{2j} - \Delta u_{1j})
 \end{aligned} \tag{11}$$

Valitsemalla Δu_{ij} :t yhteisiksi tekijöiksi ja laskemalla yhtälöt (11) yhteen saadaan

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n F_{ij}u_{ij} + X_{1j}(u_{1j}^* - u_{1j}) &= \sum_1^n (X_{1j} - \sum_{k=1}^i F_{kj}) u_{ij} = \\
 &= \sum_{i=1}^n H_{ij} u_{ij}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Suorittamalla vielä summeeraus koordinaattien $j = 1, 2, 3$ suhteen saadaan yhtälö (8).

Sen sijaan ei päde

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 F_{ij}u_{ij} + X_{1j}(u_{1j}^* - u_{1j}) = \sum_{i=1}^n S_i e_i \tag{13}$$

Jos kuitenkin muodonmuutokset ovat hyvin pieniä, ja sauvavoimat S_i säilyttävät riittävän tarkasti suuntansa muodonmuutosten e_i tapahtuessa, yhtälö (13) esittää tavallista geometrisesti lineaaris-ten rakenteiden virtuaalisen työn yhtälöä siirtymätilan ollessa tässä tapauksessa voimien F_{ij} , X_{1j} aiheuttama. Tällöin yhtälöjen (8), (9) ja (13) perusteella saadaan ulkoisten voimien komplementaari-energiaksi geometrisesti lineaarisessa tapauksessa

$$\pi_c \sim \bar{U} \tag{14}$$

Yhteys (14) pätee yleisestikin geometrisesti lineaarisissa rakenteissa, kun tuet ovat siirtymättömiä. Tällöin π_c :n sijasta varioidaan sisäisten voimien ns. ensimmäisen lajin komplementaarienergiaa \bar{U} , joka saa stationäärisen arvon.

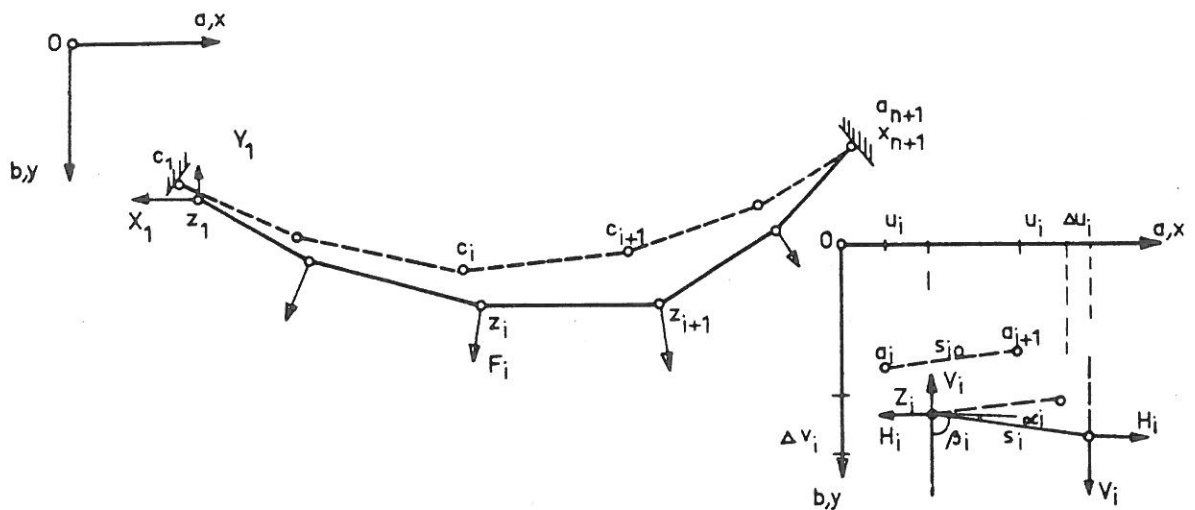
Kun kirjoitetaan ensimmäinen variaatio $\delta\pi_c$ antamalla varioitaville voimille toisistaan riippumattomat variaatiot, saadaan rat-

kaistavaksi siirtymien yhteensopivuusyhtälöitä. Jos varioitavina suureina on sekä voimia että siirtymiä, saadaan siirtymien yhteensopivuusyhtälöitä ja tasapainoyhtälöitä, jotka yhdessä muodostavat ratkaistavan yhtälöryhmän. Käytännössä vaatimus $\delta\pi_c = 0$ toteutetaan usein asettamalla varioitavien suureiden suhteen otetut π_c :n osittaisderivaatat nolliksi.

3. KÖYSI TASOSSA

3.1 Köyttä kuormittavat samassa tasossa olevat pistekuormat

$F_i = (F_{ia}, F_{ib})$. Alkueoletukset ovat kuten kohdassa 2. s. 135.



Kuva 3. Köysi ja köysielementti tasossa.

Merkitään: O-tilassa $c_i = (a_i, b_i)$

F-tilassa $z_i = (x_i, y_i)$

$$w_i = x_i - c_i$$

$$\Delta w_i = w_{i+1} - w_i$$

$$\delta w_i = w_i^* - w_i$$

Siirtymien reunaehdot: $w_1^* = w_{n+1}^* = \bar{0}$

Voimien reunaehdot: $F_i = (F_{ia}, F_{ib}) \quad i = 1, 2, \dots, n+1$
 $(F_1 = F_{n+1} = \bar{0})$

Köyden poikkileikkausala $A_{i0} = A_{i0}(S_{i0}) \sim A_i(S_i)$

Yhtälön (1) mukaan

$$\begin{aligned} H_i &= X_1 - \sum_{k=1}^i F_{ka} \\ V_i &= Y_1 - \sum_{k=1}^i F_{kb} \end{aligned} \quad (15)$$

$S_i = (H_i, V_i)$, jolloin sauvan s_i suuntakosinit ovat

$$\cos \alpha_i = \frac{H_i}{|S_i|}, \quad \cos \beta_i = \frac{V_i}{|S_i|} = \sin \alpha_i \quad (\text{tai } \tan \alpha_i = \frac{V_i}{H_i}) \quad (16)$$

Yhtälön (5) mukaan s_i -koordinaatistossa

$$S_i = H_i \cos \alpha_i + V_i \cos \beta_i = (H_i^2 + V_i^2)^{1/2} \quad (17)$$

Sauvan s_{i0} venymä on yhtälön (6) mukaan s_i -koordinaatistossa

$$e_i = e_i(S_i) = \int_0^{s_{i0}} f_i(S_i/A_{i0}(s)) ds \quad (\text{tai } e_i = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial S_i}) \quad (18)$$

Yhtälön (10) mukaan

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= (s_{i0} + e_i) \cos \alpha_i - (a_{i+1} - a_i) \\ \Delta v_i &= (s_{i0} + e_i) \cos \beta_i - (b_{i+1} - b_i) \end{aligned} \quad (19)$$

Yhtälön (9) mukaan, kun kirjoitetaan U :n lauseke viimeiseksi, saadaan

$$\begin{aligned} \pi_c &= \sum_{i=1}^n \{ H_i [(s_{i0} + e_i) \cos \alpha_i - (a_{i+1} - a_i)] \\ &\quad + V_i [(s_{i0} + e_i) \cos \beta_i - (b_{i+1} - b_i)] \\ &\quad - (S_i e_i - \bar{U}_i) \} \end{aligned} \quad (20)$$

Kun varioitavina suureina ovat $X_1, Y_1, S_i, e_i, \alpha_i$, jolloin näitä sitovia ehtoja ei esiinny π_c :n lausekkeessa (20), saadaan ainoastaan tasapainoyhtälö (15) huomioituna

$$\begin{aligned}
 \delta\pi_c &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial X_1} \delta X_1 [(s_{i0} + e_i) \cos \alpha_i - (a_{i+1} - a_i)] + H_i \cos \alpha_i \delta e_i + \right. \\
 &+ H_i (s_{i0} + e_i) \frac{\partial \cos \alpha_i}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \frac{\partial V_i}{\partial Y_1} \delta Y_1 [(s_{i0} + e_i) \sin \alpha_i - \\
 &- (b_{i+1} - b_i)] + V_i \sin \alpha_i \delta e_i + V_i (s_{i0} + e_i) \frac{\partial \sin \alpha_i}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i - \\
 &- \left. (\delta S_i e_i + S_i \delta e_i - \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial S_i} \delta S_i) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ [(s_{i0} + e_i) \cos \alpha_i - (a_{i+1} - a_i)] \delta X_1 + [(s_{i0} + e_i) \sin \alpha_i - \right. \\
 &- (b_{i+1} - b_i)] \delta Y_1 - (e_i - \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial S_i}) \delta S_i + (H_i \cos \alpha_i + V_i \sin \alpha_i - \\
 &- S_i) \delta e_i + (s_{i0} + e_i) (V_i \cos \alpha_i - H_i \sin \alpha_i) \delta \alpha_i \left. \right\} = 0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

ja kun joukko $\{\delta X_1, \delta Y_1, \delta S_i, \delta e_i, \delta \alpha_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ on vapaa, tästä seuraa

$$\sum_{i=1}^n ((s_{i0} + e_i) \cos \alpha_i - (a_{i+1} - a_i)) = 0 \quad (22a)$$

$$\sum_{i=1}^n ((s_{i0} + e_i) \sin \alpha_i - (b_{i+1} - b_i)) = 0 \quad (22b)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial S_i} - e_i = 0 \Leftrightarrow (18) \right) \quad (23)$$

ja tasapainoyhtälöt (16), (17) (24)

Yhtälöistä (22), (23) ja (24) voidaan ratkaista varioidut suureet X_1, Y_1, e_i ja α_i . Samat yhtälöt (22), (23) ja (24) saataisiin aset-
tamalla

$$\frac{\partial \pi_c}{\partial X_1} = \frac{\partial \pi_c}{\partial Y_1} = \frac{\partial \pi_c}{\partial S_i} = \frac{\partial \pi_c}{\partial e_i} = \frac{\partial \pi_c}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Kun huomioidaan vielä riippuvuudet

$$\sum_{i=1}^n - (a_{i+1} - a_i) = - (a_{n+1} - a_1) \quad (25a)$$

$$\sum_{i=1}^n - (b_{i+1} - b_i) = - (b_{n+1} - b_1) \quad (25b)$$

materiaalin muodonmuutosyhtälö (23) ja tasapainoyhtälöt (24), saadaan köysiyhtälöt (22) muotoon

$$\sum_{i=1}^n (s_{i0} + e_i(X_1, Y_1)) \frac{H_i(X_1)}{S_i(X_1, Y_1)} - (a_{n+1} - a_1) \quad (26a)$$

$$\sum_{i=1}^n (s_{i0} + e_i(X_1, Y_1)) \frac{V_i(Y_1)}{S_i(X_1, Y_1)} - (b_{n+1} - b_1) \quad (26b)$$

Näistä voidaan ratkaista tuntemattomat voimasuureet X_1 ja Y_1 . Tasapainoyhtälö (16) on sauvaelementin s_i ns. momenttitasapainoyhtälö ja se määrää sauvaelementin s_i rotaation α_i voimien H_i, V_i avulla.

Yhtälöt (25) sisältävät yksinkertaistuksen. Ratkaistaessa pistekuormien kuormittamaa täysin taipuisaa köyttä voimamenetelmällä, köyden 0-tilassa voidaan olettaa köyden kiinnityspisteiden välillä köyden (tai sauvaketjun) muodoksi mikä tahansa geometrisesti mahdollinen muoto. Sauvaketjun nivelpisteiden koordinaatit saadaan yhtälöistä

$$x_i = a_1 + \sum_{k=1}^{i-1} (s_{k0} + e_k(X_1, Y_1)) \frac{H_k(X_1)}{S_k(X_1, Y_1)} \quad (27a)$$

$$y_i = b_1 + \sum_{k=1}^{i-1} (s_{k0} + e_k(X_1, Y_1)) \frac{V_k(Y_1)}{S_k(X_1, Y_1)} \quad (27b)$$

Jos köyden materiaalin perusyhtälö on $\epsilon = \frac{1}{E}\sigma$ (Hooken laki) ja poikkileikkausala $A_{i0}(S_i) = A = \text{vakio}$, saadaan köysiyhtälöt (26) muotoon:

$$\sum_{i=1}^n s_{i0} H_i(X_1) \left(\frac{1}{S_i(X_1, Y_1)} + \frac{1}{EA} \right) - (a_{n+1} - a_1) = 0 \quad (28a)$$

$$\sum_{i=1}^n s_{i0} V_i(Y_1) \left(\frac{1}{S_i(X_1, Y_1)} + \frac{1}{EA} \right) - (b_{n+1} - b_1) = 0 \quad (28b)$$

ja nivelpisteiden z_i koordinaatit:

$$x_i = a_1 + \sum_{k=1}^{i-1} s_{ko} H_k(X_1) \left(\frac{1}{S_k(X_1, Y_1)} + \frac{1}{EA} \right) \quad (29a)$$

$$y_i = b_1 + \sum_{k=1}^{i-1} s_{ko} V_k(Y_1) \left(\frac{1}{S_k(X_1, Y_1)} + \frac{1}{EA} \right) \quad (29b)$$

Kun $i = n+1$, yhtälöistä (27) ja (29) tulee vastaavat köysiyhtälöt (26) ja (28).

Kun varioitaviksi suureiksi otetaan yksinomaan staattisesti määräämättömät voimasuureet X_1, Y_1 , tarvitaan kaikki tasapainoyhtälöt (sitovat ehdot), jolloin suureet $S_i, e_i, \alpha_i, \pi_c$:n lausekkeessa (20) lausutaan voimien X_1, Y_1 funktiona yhtälöitä (15), (16), (17) ja (18) käyttäen. Tällöin

$$\begin{aligned} \pi_c = & \sum_{i=1}^n \{ H_i(X_1) [(s_{io} + e_i(X_1, Y_1)) \cos \alpha_i(X_1, Y_1) - (a_{i+1} - a_i)] \\ & + V_i(Y_1) [(s_{io} + e_i(X_1, Y_1)) \sin \alpha_i(X_1, Y_1) - (b_{i+1} - b_i)] \\ & - (S_i(X_1, Y_1) e_i(X_1, Y_1) - \bar{U}_i S_i(X_1, Y_1)) \} \quad (30) \end{aligned}$$

ja kuten edellä, vrt. (21)

$$\begin{aligned} \delta \pi_c = & \sum_{i=1}^n \{ [(s_{io} + e_i(X_1, Y_1)) \cos \alpha_i(X_1, Y_1) - (a_{i+1} - a_i)] \delta X_1 \\ & [(s_{io} + e_i(X_1, Y_1)) \sin \alpha_i(X_1, Y_1) - (b_{i+1} - b_i)] \delta Y_1 \\ & + [H_i(X_1) \cos \alpha_i(X, Y) + V_i(Y_1) \sin \alpha_i(X, Y) - \\ & - S_i(X_1, Y_1) \left(\frac{\partial e_i}{\partial X_1} \delta X_1 + \frac{\partial e_i}{\partial Y_1} \delta Y_1 \right) - [e_i(X_1, Y_1) - \\ & - \frac{\partial \bar{U}}{\partial S_i}] \left(\frac{\partial S_i}{\partial X_1} \delta X_1 + \frac{\partial S_i}{\partial Y_1} \delta Y_1 \right) + (s_{io} + \\ & + e_i(X_1, Y_1)) [V_i(Y_1) \cos \alpha_i(X_1, Y_1) - \\ & - H_i(X_1) \sin \alpha_i(X_1, Y_1)] \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial X_1} \delta X_1 + \frac{\partial \alpha_i}{\partial Y_1} \delta Y_1 \right) = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

ja kun joukko $\{\delta X_1, \delta Y_1\}$ on vapaa, seuraa

$$(s_{i0} + e_i(X_1, Y_1)) \cos \alpha_i(X_1, Y_1) - (a_{i+1} - a_i) = 0 \quad (32a)$$

$$(s_{i0} + e_i(X_1, Y_1)) \sin \alpha_i(X_1, Y_1) - (b_{i+1} - b_i) = 0 \quad (32b)$$

Muut δX_1 :n ja δY_1 :n kertoimina olevat hakasulkulausekkeet ovat identtisesti nollija π_c :n lausekkeeseen sisältyvien sitovien ehtojen (17), (18) ja (16) perusteella.

Luonnollisesti samat yhtälöt (32) saataisiin asettamalla

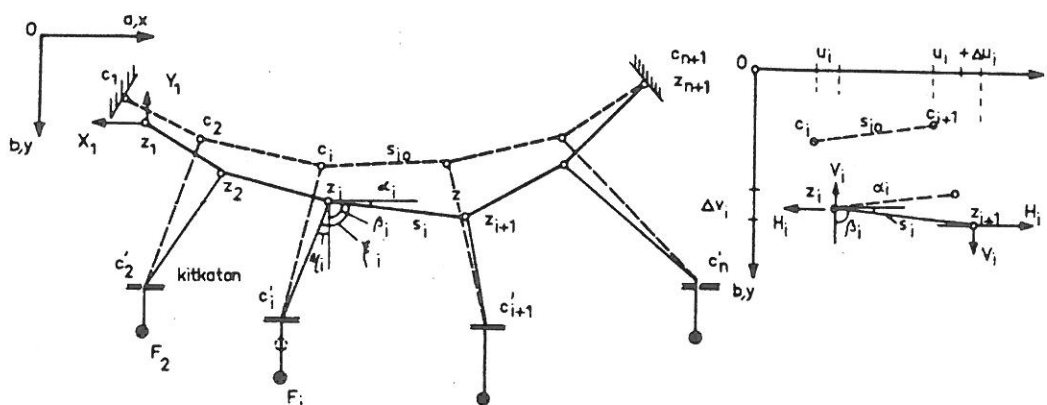
$$\frac{\partial \pi_c(X_1, Y_1)}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial \pi_c(X_1, Y_1)}{\partial Y_1} = 0 \quad (33)$$

Kun huomioidaan yhtälön (25) mukainen sievennys, on saatu suoraan köysiyhtälöt (26), joista tuntemattomat suureet X_1 , Y_1 voidaan ratkaista.

Jos varioitavina suureina olisivat sekä tukireaktiot X_1 , Y_1 ja sisäiset voimat S_i , saataisiin köysiyhtälöt (siirtymien reunaehdot) ja yhtälöt (18), materiaalin muodonmuutosyhtälöt (vrt. (p₃) s. 132).

3.2 Köyttä kuormittavat sen tasossa olevat tason kiinteisiin pisteisiin c_i suunnatut pistekuormat $F_i(z_i)$

Köydelle pätevät s. 135 esitetyt otaksumat.



Kuva 4. Köysi, kiinteisiin pisteisiin suunnatut kuormat $F_i(z_i)$ ja sauvaelementti tasossa.

Merkitään (kuva 4): O-tilassa $c_i = (a_i, b_i)$

$$c'_i = (a'_i, b'_i)$$

F-tilassa $z_i = (x_i, y_i)$

$$w_i = x_i - c_i$$

$$\Delta w_i = w_{i+1} - w_i$$

$$\delta w_i = w_1^* - w_1$$

Siirtymien reunaehdot: $w_1^* = w_{n+1}^* = w_i^* = \bar{0} \quad i = 2, 3, \dots, n$

Voimien reunaehdot: $F_i = F_i(z_i) \quad i = 2, 3, \dots, n$

Köyden poikkileikkauksen ala $A_{i0} = A_{i0}(s_{i0}) \quad A_i(s_i)$

Pidetään köyteen vaikuttavia ulkoisia voimia $F_i(z_i)$, voimakomponentteja $F_i \cos \xi_i$ ja $F_i \cos \eta_i$, aluksi kiinteinä ja valitaan staattisesti määräämättömät suureet X_1 ja Y_1 kuten kohdassa 3.1 (kuva 4).

Tällöin saadaan tasapainoyhtälöt:

$$H_i = X_1 - \sum_{k=1}^i F_k \cos \xi_k \quad (34a)$$

$$V_i = Y_1 - \sum_{k=1}^i F_k \cos \eta_k \quad (34b)$$

$$(F_1 = F_{n+1} = 0)$$

joissa

$$\cos^2 \xi_k + \cos^2 \eta_k = 1; \quad \cos \eta_k = \sqrt{1 - \cos^2 \xi_k} = \sin \xi_k \quad (35)$$

Kun H_i ja V_i yhtälöistä (34) sijoitetaan köysiyhtälöihin (26), ne toteutuvat kaikilla ξ_k :n arvoilla. Jotta voimareunaehdot toteutuisivat myös pisteissä (a'_i, b'_i) , tulee olla

$$\cos \xi_k = \frac{a'_k - x_k}{\sqrt{(a'_k - x_k)^2 + (b'_k - y_k)^2}} \quad (36a)$$

$$\cos \eta_k = \frac{b'_k - y_k}{\sqrt{(a'_k - x_k)^2 + (b'_k - y_k)^2}} \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (36b)$$

Näissä olevat koordinaatit x_k ja y_k saadaan yhtälöistä (27). Kun

nämä lausekkeet sijoitetaan yhtälöön (36), nämä yhtälöön (34) ja edelleen nämä köysiyhtälöihin (26), saadaan tälle tapaukselle lopulliset köysiyhtälöt, joista voidaan ratkaista X ja Y . Sen jälkeen sisäisten voimien jakautuminen saadaan tasapainoyhtälöistä (34) ja sauvaketjun nivelpisteiden koordinaatit yhtälöistä (27). Jos köyden materiaalin perusyhtälö on $\epsilon = \sigma/E$ ja köyden poikkileikkauksen ala $A_i(s_i) = s = \text{vakio}$, $i = 1, 2, \dots, n$, käytetään yhtälöiden (26) ja (27) sijasta yhtälöitä (28) ja (29).

Kun nyt sauvaketjun nivelpisteiden koordinaatit (x_k, y_k) tunnetaan, tunnetaan yhtälön (36) perusteella $\cos \xi_k$ ja $\cos \eta_k$, jolloin voidaan laskea köyteen vaikuttavien voimien F_i komponentit

$$F_{k,x} = F_k \cos \xi_k$$

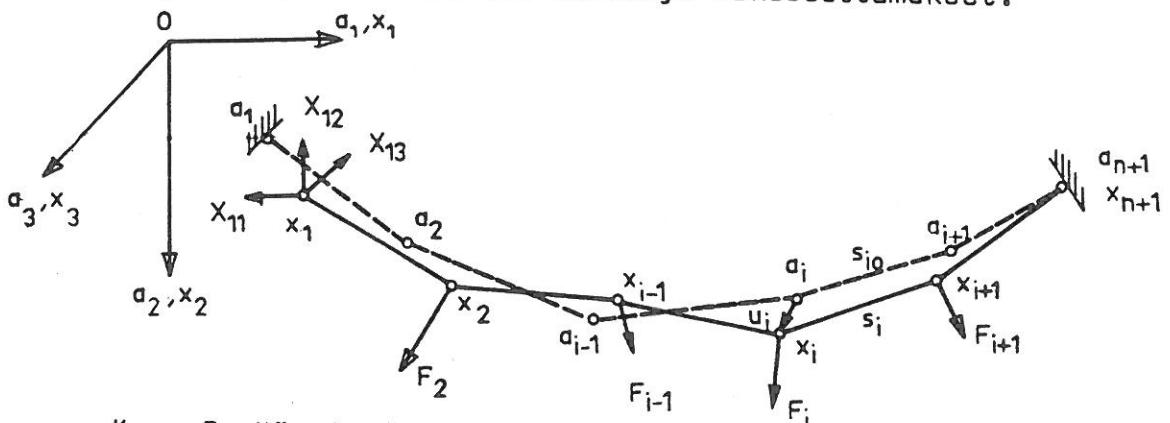
$$F_{k,y} = F_k \cos \eta_k$$

Kun nämä sijoitetaan suoraan köysiyhtälöihin (26) tai (28), saadaan staattisesti määräämättömille suureille X_1, Y_1 samat arvot kuin edellä.

4. KÖYSI 3-DIMENSIIOISESSA AVARUUDESSA

4.1 Köyttä kuormittavat pistekuormat $F_i = (F_{i1}, F_{i2}, F_{i3})$

Köydelle pätevät s. 135 esitetyt alkuolettamukset.



Kuva 5. Köysi 3-dimensioisessa avaruudessa.

Merkitään (kuva 5) 0-tilassa $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$

F-tilassa $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$

$$u_i = x_i - a_i$$

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$$

$$\delta u_i = u_i - u_i^*$$

Siirtymien reunaehdot: $u_1^* = u_{n+1}^* = \bar{0}$ (kiinnityspisteet siirtymättömiä)

Voimien reunaehdot: $F_i = (F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}) \quad i = 1, 2, \dots, n+1$
 $(F_1 = F_{n+1} = 0)$

Köyden poikkileikkauksen ala $A_{i0} = A_{i0}(s_{i0}) \approx A_i(s_i)$

Tämä ei sisällä kohtaan 3.1 verrattuna oleellisesti uutta, joten tarpeelliset yhtälöt esitetään luettelomaisesti.

$$H_{ij} = x_{ij} - \sum_{k=1}^i F_{kj} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3 \quad (37)$$

$$S_i = (H_{i1}, H_{i2}, H_{i3})$$

jolloin

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{H_{ij}}{|S_i|} \Leftrightarrow \cos \alpha_{i1} : \cos \alpha_{i2} : \cos \alpha_{i3} = H_{i1} : H_{i2} : H_{i3} \quad (38)$$

$$S_i = \sum_{j=1}^3 H_{ij} \cos \alpha_{ij} = (\sum H_{ij}^2)^{1/2} \quad (39)$$

$$e_i = e_i(S_i) = \int_0^{s_{i0}} f_i(S_i/A_{i0}(S)) ds \quad (s\text{-koordinaatistossa}) \quad (40a)$$

tai

$$e_i = \frac{\partial \bar{U}}{\partial S_i} \quad (40b)$$

$$\Delta u_{ij} = (s_{i0} + e_i) \cos \alpha_{ij} - (a_{i+1,j} - a_{ij}) \quad (41)$$

$$\pi_c = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 H_{ij} [(s_{i0} + e_i) \cos \alpha_{ij} - (a_{i+1,j} - a_{ij})] - (S_i e_i - \bar{U}_i) \right\} \quad (42)$$

Kun varioitavina suureina ovat

$$\{X_{1j}, S_i, e_i, \alpha_{i1}, \alpha_{i2} \mid i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3\}$$

$$\cos \alpha_{i3} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_{i1} - \cos^2 \alpha_{i2}}$$

näitä sitovia ehtoja ei π_c :n lausekkeessa esiinny ja saadaan

$$\begin{aligned} \delta \pi_c = & \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 \left[(s_{i0} + e_i) \cos \alpha_{ij} - (a_{i+1,j} - a_{ij}) \right] \delta X_{1j} + \right. \\ & + (H_{ij} \cos \alpha_{ij} - S_i) \delta e_i - \left(e_i - \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial S_i} \right) \delta S_i + \\ & + (s_{i0} + e_i) \left(-H_{i1} + H_{i3} \frac{\cos \alpha_{i1}}{\cos \alpha_{i3}} \right) \delta \alpha_{i1} + (s_{i0} + e_i) \left(-H_{i2} + \right. \\ & \left. + H_{i3} \frac{\cos \alpha_{i2}}{\cos \alpha_{i3}} \right) \delta \alpha_{i2} \left. \right\} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

ja kun joukko $\{\delta X_{1j}, \delta S_i, \delta e_i, \delta \alpha_{i1}, \delta \alpha_{i2} \mid i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3\}$ on vapaa, siitä seuraa

$$\sum_{i=1}^n (s_{i0} + e_i) \cos \alpha_{ij} - (a_{i+1,j} - a_{ij}) = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (44)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial S_i} - e_i = 0 \quad (45)$$

$$\text{ja tasapainoyhtälöt (39) ja (38)} \quad (46)$$

Samat yhtälöt (44), (45) ja (46) saataisiin asettamalla

$$\frac{\partial \pi_c}{\partial X_{1j}} = \frac{\partial \pi_c}{\partial S_i} = \frac{\partial \pi_c}{\partial e_i} = \frac{\partial \pi_c}{\partial \alpha_{i1}} = \frac{\partial \pi_c}{\partial \alpha_{i2}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3 \quad (47)$$

Kun

$$\sum_{i=1}^n -(a_{i+1,j} - a_{ij}) = -(a_{n+1,j} - a_{ij}) \quad (48)$$

saadaan köysiyhtälöt (44) sievennetyksi kuten kohdassa 3.1 muotoon

$$\sum_{i=1}^n (s_{i0} + e_i(X_{11}, \dots)) \frac{H_{ij}(X_{1j})}{S_i(X_{11}, \dots)} - (a_{n+1,j} - a_{ij}) = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (49)$$

Ottamalla H_{ij} , S_i ja $e_i(S_i)$ yhtälöistä (38), (39) ja (40a) suureet X_{11} , X_{12} , X_{13} voidaan ratkaista.

Nivelpisteiden koordinaatit saadaan lausekkeista

$$x_{1j} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} (s_{ko} + e_k(X_{11}, \dots)) \frac{H_{kj}(X_j)}{S_i(X_{11}, \dots)} \quad j = 1, 2, 3 \quad (50)$$

Jos köyden materiaalin perusyhtälö on $\epsilon = \sigma/E$, ja poikkileikkausala $A_{i0}(s_{i0}) = A = \text{vakio}$, saadaan köysiyhtälöt (50) muotoon

$$\sum_{i=1}^n s_{i0} H_{ij}(X_j) \left(\frac{1}{S_i(X_{11}, \dots)} + \frac{1}{EA} \right) - (a_{n+1,j} - a_{ij}) = 0 \quad (51)$$

$j = 1, 2, 3$

ja nivelpisteiden x_i koordinaatit ovat

$$x_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} s_{ko} H_{kj}(X_j) \left(\frac{1}{S_k(X_{11}, \dots)} - \frac{1}{EA} \right) \quad j = 1, 2, 3 \quad (52)$$

Kun $i = n+1$, yhtälöistä (50) ja (52) tulee vastaavat köysiyhtälöt (49) ja (51).

Kun varioitaviksi suureiksi otetaan yksinomaan staattisesti määräämättömät voimasuureet X_{11} , X_{12} , X_{13} , tarvitaan kaikki tasapainoyhtälöt (sitovat ehdot), jolloin suureet S_i , e_i ja α_{ij} π_c :n lausekkeessa (42) lausutaan voimien X_{11} , X_{12} , X_{13} funktiona yhtälöitä (39), (40a) ja (38) käyttäen. Täten saadaan

$$\begin{aligned} \pi_c = & \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 H_{ij}(X_{11}, \dots) [(s_{i0} + e_i(X_{11}, \dots)) \cos \alpha_{ij}(X_{11}, \dots) - \right. \\ & - (a_{i+1,j} - a_{ij})] - (S_i(X_{11}, \dots) e_i(X_{11}, \dots) - \\ & \left. - \bar{U}_i(S_i(X_{11}, \dots))) \right\} \quad (53) \end{aligned}$$

ja kuten kohdassa 3.1

$$\begin{aligned} \delta \pi_c = & \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 [(s_{i0} + e_i(X_{11}, \dots)) \cos \alpha_{ij}(X_{11}, \dots) - (a_{i+1,j} - \right. \\ & \left. - a_{ij})] \delta X_{1j} + [H_{ij}(X_{11}, \dots) \cos \alpha_{ij}(X_{11}, \dots) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - S_i(X_{11}, \dots) \left] \frac{\partial e_i}{\partial X_{1j}} \delta X_{1j} - \left[e_i(X_{11}, \dots) - \frac{\partial \bar{U}}{\partial S_i} \right] \frac{\partial S_i}{\partial X_{1j}} \delta X_{1j} \right\} + \\
 & + (s_{i0} + e_i(X_{11}, \dots)) - \left[H_{i1}(X_{11}, \dots) + \right. \\
 & + H_{i3}(X_{11}, \dots) \frac{\cos \alpha_{i1}(X_{11}, \dots)}{\cos \alpha_{i3}(X_{11}, \dots)} \left. \right] \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial X_{1j}} \delta X_{1j} + (s_{i0} + \\
 & + e_i(X_{11}, \dots)) \left[- H_{i2}(X_{11}, \dots) + \right. \\
 & + H_{i3}(X_{11}, \dots) \frac{\cos \alpha_{i2}(X_{11}, \dots)}{\cos \alpha_{i3}(X_{11}, \dots)} \left. \right] \frac{\partial \alpha_{i1}(X_{11}, \dots)}{\partial X_{1j}} \delta X_{1j} \} = 0
 \end{aligned} \tag{54}$$

ja kun joukko $\{\delta X_1, \delta X_2, \delta X_3\}$ on vapaa, seuraa

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^3 (s_{i0} + e_i(X_{11}, \dots)) \cos \alpha_{ij}(X_{11}, \dots) - (a_{i+1,j} - a_{ij}) \\
 & = 0 \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{55}$$

Muut δX_{1j} :n kertoimina olevat hakasulkulausekkeet ovat identtisesti nollija π_c :n lausekkeeseen (53) sisältyvien sitovien ehtojen (38), (39) ja (40a) perusteella.

Luonnollisesti samat yhtälöt (55) saataisiin asettamalla

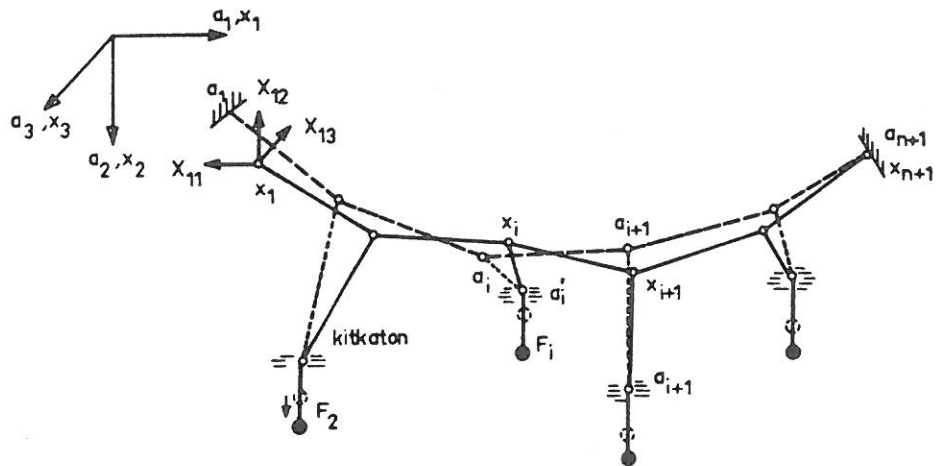
$$\frac{\partial \pi_c(X_{11}, \dots)}{\partial X_{1j}} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \tag{56}$$

Kun huomioidaan yhtälön (48) mukainen sievennys, saadaan suoraan köysiyhtälöt (49), joista tuntemattomat suureet X_{11} , X_{12} , X_{13} voidaan ratkaista.

Jos varioitavina suureina olisivat tukireaktiot X_{11} , X_{12} , X_{13} ja sisäiset voimat S_i , saataisiin köysiyhtälöt (siirtymien reunaehdot) ja yhtälöt (40b) materiaalin muodonmuutosyhtälö, vrt. p₃ s.

4.2 Köyttä kuormittavat avaruuden kiinteisiin pisteisiin a_i' suunnatut pistekuormat $F_i = F_i(x_i)$

Köydelle pätevät s. 135 tehdyt alkuolettamukset.



Kuva 6. Köysi ja kiinteisiin pisteisiin suunnatut kuormat $F_i(x_i)$ 3-dimensioisessa avaruudessa.

Merkitään (kuva 6) O-tilassa $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$

$$a_i' = (a_{i1}', a_{i2}', a_{i3}')$$

F-tilassa $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$

$$u_i = x_i - a_i$$

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$$

$$\delta u = u_1' - u_1$$

Siirtymien reunaehdot: $u_1'' = u_{n+1}'' = u_i'' = \bar{0} \quad i = 2, 3, \dots, n$

(tukipisteet liikkumattomia)

Voimien reunaehdot: $F_i = F_i(z_i) \quad i = 2, 3, \dots, n$

Köyden poikkileikkauksen ala $A_{i0} = A_{i0}(s_{i0}) \approx A_i(S_i)$

Pidetään aluksi köyteen vaikuttavia ulkoisia voimia F_i , voimakomponentteja $F_i \cos \xi_j$, kiinteinä ja valitaan staattisesti määräämättömät suureet x_{11} , x_{12} ja x_{13} kuten kohdassa 4.1 (kuva 6). Tällöin saadaan tasapainoyhtälöt

$$H_{ij} = X_{1j} - \sum_{k=1}^i F_k \cos \xi_{kj} \quad (57)$$

$$F_1 = F_{n+1} = 0$$

joissa

$$\sum_{j=1}^3 \cos^2 \xi_{kj} = 1 \quad (58)$$

Kun H_{ij} yhtälöstä (57) sijoitetaan köysiyhtälöihin (49), ne toteutuvat kaikilla $\cos \xi_{kj}$:n arvoilla. Jotta voimien reunaehdot toteutuisivat myös pisteissä a'_i , $i = 1, 2, \dots, n$, tulee olla

$$\cos \xi_{kj} = \frac{a'_{kj} - x_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 (a'_{kj} - x_{kj})^2}} \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (59)$$

jossa koordinaatit x_{kj} saadaan yhtälöistä (50). Kun nämä lausekkeet sijoitetaan yhtälöön (59), nämä yhtälöön (57) ja edelleen nämä köysiyhtälöihin (49), saadaan tälle tapaukselle lopulliset köysiyhtälöt. Niistä voidaan ratkaista $\{X_1, X_2, X_3\}$ ja sen jälkeen sisäisten voimien jakautumien tasapainoyhtälöistä (57) sekä nivelpisteiden koordinaatit yhtälöistä (50). Jos köyden materiaalin perusyhtälö on $\epsilon = \sigma/E$ ja köyden poikkileikkausala $A_i(s_i) = A = \text{vakio}$, $i = 1, 2, \dots, n$, yhtälöjen (49) ja (50) sijasta käytetään kaavoja (51) ja (52).

5. KÖYDEN KUORMITUS KAHESSA VAIHEESSA

$$\text{Kuormat: } \{F_i^G, F_i^P \mid i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3\}$$

Tätä tapausta käsitellään ainoastaan 3-dimensioisessa avaruudessa, mutta saadut yhtälöt voidaan helposti muuttaa koskemaan 2-dimensioista tapausta. Alkuolettamukset ovat kuten kohdassa 2 s. 135 .

$$\text{Siirtymien reunaehdot: } u_1^{*P} = u_{n+1}^{*P} = 0$$

$$\text{Voimien reunaehdot: } F_i = (F_{i1}, F_{i2}, F_{i3})$$

(vrt. kuva 5)

Merkitään kuormatilasta g syntyviä suureita yläindeksillä g , p -tilasta yläindeksillä p ja $g+p$ -tilasta syntyviä suureita ilman yläindeksiä.

Jos kuormia F_i^g vastaava voimatila tunnetaan, saadaan helposti lasketuksi 0 -tilaa vastaavat sauvaelementtien pituudet s_{i0} ja köyden muoto saa olla mielivaltainen. F_i^p -kuormien aiheuttama muutos g -tilaan saadaan lasketuksi määrittämällä ensin yhtälöstä (38) H_{ij}^p ja sijoittamalla edellä kohdassa 4 oleviin köysiyhtälöihin (51),

$$H_{ij}(X_{11}, \dots) = H_{ij}^g(X_{11}^g, \dots) + H_{ij}^p(X_{11}^p, \dots) \quad (60)$$

Näistä ratkaistaan $g+p$ -tilaa vastaavat voimat X_{11}, X_{12}, X_{13} , jolloin $X_{1j}^p = X_{1j} - X_{1j}^g$. Vastaavasti nivelpisteiden koordinaatit saadaan yhtälöistä (52), jolloin $x_i^p = x_i - x_i^g$. Edellä esitettyssä laskutavassa F_i^g - ja F_i^p -kuormien komplementaarienergia on määrätty samasta 0 -tilassa olevasta muodosta lähtien. Ts. em. kuormat on asetettu vaikuttamaan samanaikaisesti.

Oletetaan, että F^g -kuormat asetetaan ensin 0 -tilassa olevaan rakenteeseen, mikä voi olla esim. köyteen ripustetun rakenteen oma paino ja sen lisäksi esijännityksestä, lämpötilan muutoksesta tms. köyteen aiheutuva kuormitus, ja oletetaan g -tila ratkaistuksi, jolloin siis yhteensopivuusehto so. π_C^g :n ääriarvoehto, $\text{grad}_X \pi_C^g = \bar{0}$, on täytetty. Oletetaan lisäksi, että g -tilassa olevaan rakenteeseen asetetaan vaikuttamaan voimat F_i^p , jolloin niiden aiheuttama lopputila on sama kuin edellä. Kuormitusjärjestys voitaisiin huomioida määrittämällä nyt g -tilasta lähtien siirtymien δu_t^p potentiaali π_C^p ja asettamalla $\text{grad}_X \pi_C^p = \bar{0}$, josta saadaan ratkaistuksi suureet X_{tj}^p . Tällöin saadaan

$$\pi_C = \pi_C^g + \pi_C^p = \pi_C^g + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 (H_{ij}^g + H_{ij}^p) \Delta^p u_{ij} - (U_i - U_i^g) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \pi_c^g + U^g + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 (H_{ij}^g + H_{ij}^p) [(s_i^g + e_i^p) \cos \alpha_{ij} - \right. \\
&\quad \left. - (x_{i+1,j}^g - x_{ij}^g)] - (s_i e_i - \bar{U}_i) \right\} \quad (61)
\end{aligned}$$

jossa

$$\cos \alpha_{ij} = H_{ij} / |S_i| \quad (62)$$

Yhtälön (9) perusteella π_c^g voitaisiin kirjoittaa termeittäin samoin kuin U_i^g . Nämä sisältävät kuitenkin vain tunnettuja g-tilan suureita, joten p-tilan suureita varioitaessa suureilla π_c^g , U_i^g tai $\pi_c^g + U^g = \sum \Sigma H_{ij}^g \Delta u_{ij}^g = \Sigma F_i^g \cdot u_i^g$ ei ole merkitystä.

Asettamalla $\delta \pi_c^p = 0$ saadaan kuten kohdassa 4.1 yhtälöistä (43) tai (54) köysiyhtälöt

$$\sum_{i=1}^n (s_i^g + e_i^p(X_{11}^p, \dots)) \cos \alpha_{ij}(X_{11}, \dots) - (x_{n+1,j}^g - x_{1j}^g) = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (63)$$

ja sauvaketjun nivelpisteiden koordinaatit

$$x_{ij} = x_{1j}^g + \sum_{k=1}^{i-1} (s_k^g + e_k^p(X_{11}^p, \dots)) \frac{H_{kj}(X_j)}{S_k(X_{11}, \dots)} \quad j = 1, 2, 3 \quad (64)$$

Jos köyden materiaalin perusyhtälö on $\epsilon = \sigma/E$ ja köyden poikkileikkausala $A_{i0}(s_{i0}) = A = \text{vakio}$, saadaan köysiyhtälöt (63) muotoon

$$\sum_{i=1}^n \frac{H_{ij}(X_{1j})}{S_i(X_{11}, \dots)} (s_i^g + \frac{s_{i0} S_i(X_{11}^p, \dots)}{EA}) - (x_{n+1,j}^g - x_{1j}^g) = 0 \quad (65)$$

ja nivelpisteiden koordinaateille lausekkeet:

$$x_{ij} = x_{1j}^g + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{H_{kj}(X_{1j})}{S_{ij}(X_{11}, \dots)} (s_k^g + \frac{s_{ko} S_i(X_{11}^p, \dots)}{EA}) \quad (66)$$

Sauvaelementtien pituudet s_{ko} voidaan helposti laskea tunnetun g-tilan ja materiaalin perusyhtälön avulla.

Komplementaarienergian lauseke (61) ei ole numeeriselta arvoltaan sama kuin lauseke (42) tai (53).

6. KÖYDEN LÄMPÖJÄNNITYKSET

Köyden lämpöpiteneminen ei aiheuta varsinaisia lämpöjännityksiä vapaaseen köyteen, sillä lämpöpiteneminen pääsee vapaasti tapahtumaan. Lämpöpiteneemisestä syntyvä jännitystilän muutos aiheutuu pelkästään köyden muodon muuttumisen vaikutuksesta. Se huomioidaan köyden osien (sauvojen) pituuksissa käyttämällä köyden osien pituuksina s_{i0} niiden todellisia pituuksia ko. lämpötilassa t . Arvot s_{i0} saadaan tunnetusti

$$s_{i0} = (1 + \alpha)(t - t_0)s_{i,0}(t_0) \quad (67)$$

jossa α = materiaalin lämpöpiteneiskerroin

t = todellinen lämpötila

$s_{i0}(t_0)$ = köydenosan tunnettu pituus lämpötilassa t_0 .

7. LASKUESIMERKKI

Alkuolettamukset ovat samat kuin kohdassa 2. s. 135. Köyden materiaali noudattaa Hooken lakia. Sen kimmokerroin $E = 21\,000\,000$ Mp/m² ja poikkileikkauksen pinta-ala $A = 0,0150$ m². Koordinaatistot ovat 0-tilassa a_1, a_2, a_3 ja lopputilassa x_1, x_2, x_3 (kuvat 7 - 9). Annetut pistekuormat F_i ovat (päätepisteissä $F_1 = F_{n+1} = 0$):

$$(F_1 = 0 \text{ Mp}), F_2 = 90 \text{ Mp}, F_3 = 60 \text{ Mp}, F_4 = 50 \text{ Mp}, F_5 = 60 \text{ Mp}$$

$$(F_6 = 0 \text{ Mp})$$

Täten köydenosien s_i lukumäärä on 5. Köyden päätepisteet $a_1 = (0,0,0)$ ja $a_5 = (100,0,0)$ ovat kiinteät.

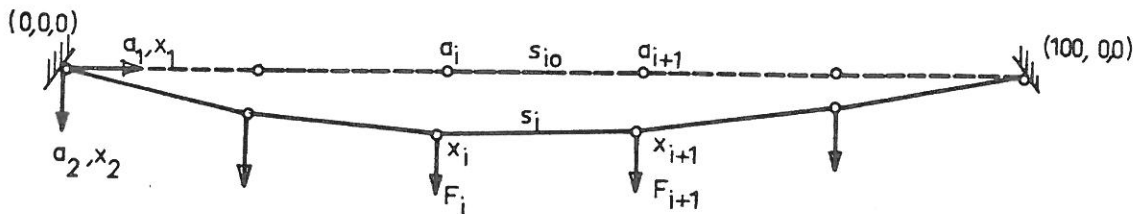
Laskemista varten saadaan (51)stä köysiyhtälöiksi

$$\sum_{i=1}^5 s_{i,0} (X_{1j} - \sum_{k=1}^{i-1} F_{kj}) \left(\frac{1}{\left[\sum_{j=1}^3 (X_{1j} - \sum_{k=1}^{i-1} F_{kj})^2 \right]^{1/2}} + \frac{1}{315\,000} \right) - (a_{5j} - a_{1j}) = 0$$

ja (52):sta nivelposteiden x_i koordinaateiksi

$$x_{ij} = 0 + \sum_{k=1}^{i-1} s_{k,0} (X_{1j} - \sum_{l=1}^{k-1} F_{lj}) \left(\frac{1}{\left[\sum_{j=1}^3 (X_{1j} - \sum_{l=1}^{k-1} F_{lj})^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{315\,000} \right)$$

Lasketaan kuvien 7 - 9 esittämät tapaukset, joissa on vaihdeltu voimien F_i suuntia ja köydenosien s_{i0} pituuksia.

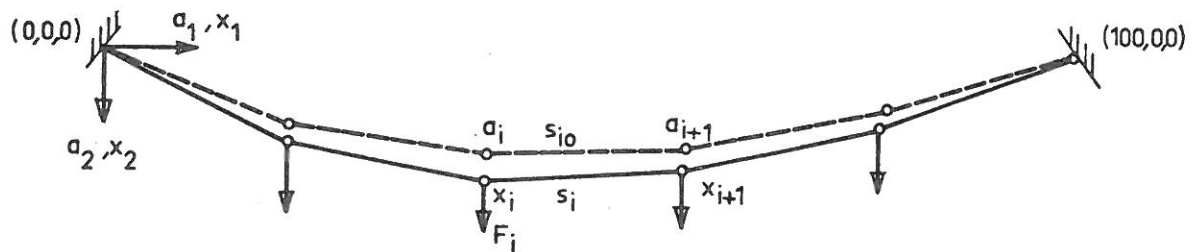


Kuva 7. Tapaus 7.1

Köyden pituus 0-tilassa 100 m (köysi on suora). Voimat F_i ovat pystysuoria. Seuraavassa riveillä 1-3 on annettuja arvoja ja riveillä 4-10 laskettuja arvoja

P. Holopainen: Riippuköyden yleinen teoria I

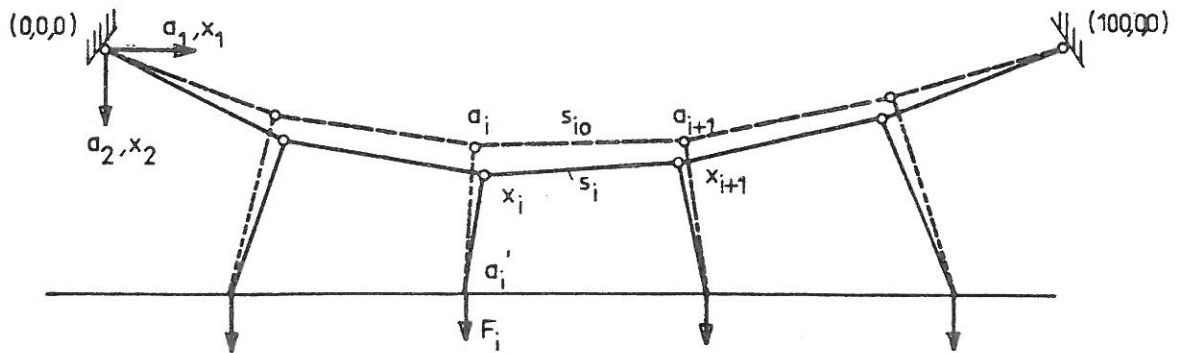
i =	1	2	3	4	5	6
1 $s_{i,0}$ [m]	20	20	20	20	20	
2 F_{i1} [Mp]	0	0	0	0	0	
3 F_{i2} [Mp]	0	90	60	50	60	
4 H_{i1} [Mp]	1078,33	1078,33	1078,33	1078,33	1078,33	
5 H_{i2} [Mp]	140,08	50,08	-9,92	-59,92	-119,92	
6 S_i [Mp]	1087,40	1079,50	1078,38	1080,00	1084,98	
7 σ_{is} [kp/cm ²]	7249,30	7196,64	7189,20	7199,99	7233,22	
8 x_{i1} [m]	0	19,902	39,945	60,016	80,054	100,000
9 x_{i2} [m]	0	2,585	3,516	3,332	2,218	$2,384 \cdot 10^{-6}$
10 s_i [m]	20,0690	20,0685	20,0685	20,0686	20,0689	



Kuva 8. Tapaus 7.2

Köyden pituus 0-tilassa on 102,40 m. Voimat F_i ovat pystysuoria. Seuraavassa riveillä 1-3 on annettuja arvoja ja riveillä 4-10 laskettuja arvoja.

i =	1	2	3	4	5	6
1 $s_{i,0}$ [m]	21	20,2	20	20,2	21	
2 F_{i1} [Mp]	0	0	0	0	0	
3 F_{i2} [Mp]	0	90	60	50	60	
4 H_{i1} [Mp]	393,36	393,36	393,36	393,36	393,36	
5 H_{i2} [Mp]	140,38	50,38	-9,62	-59,62	-119,62	
6 S_i [Mp]	417,66	396,58	393,48	397,85	411,15	
7 σ_{is} [kp/cm ²]	2784,42	2643,84	2623,20	2652,36	2740,98	
8 x_{i1} [m]	0	19,804	39,866	59,885	79,882	100,000
9 x_{i2} [m]	0	7,068	9,638	9,148	6,118	$2,861 \cdot 10^{-6}$
10 s_i [m]	21,028	20,225	20,025	20,226	21,027	



Kuva 9. Tapaus 7.3

Köyden pituus 0-tilassa on 102,4 m. Voimat F_i ovat suunnatut tason x_1x_2 kiinteisiin pisteisiin a_i . Riveillä 1-4 on annettuja arvoja ja riveillä 5-13 laskettuja arvoja.

$i =$	1	2	3	4	5	6
1 $s_{i,0}$ [m]	21	20,2	20	20,2	21	
2 F_i [Mp]	0	90	60	50	60	
3 a_{i1} [m]	0	18	39	61	82	
4 a_{i2} [m]	0	12	12	12	12	
5 H_{i1} [Mp]	360,62	391,52	411,15	393,36	373,05	
6 H_{i2} [Mp]	130,80	46,26	-10,43	-57,16	-113,62	
7 S_i [Mp]	383,61	394,24	411,29	397,49	389,97	
8 σ_{is} [kp/cm ²]	2557,40	2628,27	2741,91	2649,96	2599,77	
9 x_{i1} [m]	0	19,766	39,851	59,871	79,886	100,000
10 x_{i2} [m]	0	7,169	9,542	9,034	6,126	$9,537 \cdot 10^{-6}$
11 s_i [m]	21,026	20,225	20,026	20,226	21,026	
12 F_{i1} [Mp]	0	-30,8944	-19,6363	17,7905	20,3158	
13 F_{i2} [Mp]	0	84,5312	56,6958	46,7279	56,4559	

Tapaus 7.4

Köyden pituus 0-tilassa on 102,4 m. Voimat F_i ovat suunnatut 3-dimensioisen avaruuden kiinteisiin pisteisiin a_i' . Riveillä 1-5 on annettuja arvoja ja riveillä 6-17 laskettuja arvoja.

i =	1	2	3	4	5	6
1 $s_{i,0}$ [m]	21	20,2	20	20,2	21	
2 F_i [Mp]	0	90	60	50	60	
3 a_{i1} [m]	0	18	39	61	82	
4 a_{i2} [m]	0	12	12	12	12	
5 a_{i3} [m]	0	40	-40	40	-40	
6 H_{i1} [Mp]	171,35	176,63	177,62	175,87	171,80	
7 H_{i2} [Mp]	30,20	9,17	-1,84	-11,53	-25,49	
8 H_{i3} [Mp]	41,64	-45,71	13,27	-35,76	22,46	
9 S_i [Mp]	178,90	182,68	178,13	179,84	175,12	
10 σ_{is} [kp/cm ²]	1192,68	1217,88	1187,50	1198,95	1167,49	
11 x_{i1} [m]	0	20,125	39,667	59,622	79,387	100,000
12 x_{i2} [m]	0	3,547	4,561	4,354	3,058	-4,768·10 ⁻¹
13 x_{i3} [m]	0	4,891	-0,166	1,324	-2,694	4,768·10 ⁻¹
14 s_i [m]	21,0119	20,2117	20,0113	20,2115	21,0117	
15 F_{i1} [Mp]	0	-5,2859	-0,9877	1,7468	4,0767	
16 F_{i2} [Mp]	0	21,0305	11,0126	9,6907	13,9532	
17 F_{i3} [Mp]	0	87,3488	-58,9724	49,0208	-58,2124	

Tapausten 7.1 ja 7.2 perusteella todetaan, että köyden 0-tilassa olevan minimipituuden 100 m kasvaessa 2,4 prosentilla köyden x_1 -akselin suuntainen horisontaalivoima H_1 on pienentynyt n. 72,5 % ja köyden jännitykset n. 61-63 % (tapaus 7.1). Vastaavasti köyden suurin nuolikorkeus on kasvanut 3,52 metristä 9,64 metriin ($\sim \lambda/10$) Tapausten 7.2 ja 7.3 perusteella todetaan, että suuntaamalla voimia

F_i säteittäisesti alaspäin saadaan tasoitettua köyden jännitystilaa. Tapausten 7.3 ja 7.4 perusteella nähdään, että suuntaamalla voimat myös x_1x_2 -tasosta ulospäin köyden jännitykset pienenevät huomattavasti.

Edellä oleva esimerkki on laskettu Helsingin teknillisen korkeakoulun osituskäyttötietokoneella Hewlett Packard 2000 A.

Käytetyt merkinnät

A	pinta-ala yleensä
A_{00}	pinta, jossa pintavoimat on annettu 0-tilassa
A_{0u}	pinta, jossa siirtymät on annettu 0-tilassa
E	kimmokerroin
F	pistevoima
G	tilavuusvoima
H_{ij}	sauvavoiman S_i j:s komponentti $x_1x_2x_3$ -avaruudessa
H_i	sauvavoiman S_i vaakakomponentti xy-tasossa
S_i	sauvavoima
T	pintavoima
$\frac{v}{T^+}$	annettu pintavoima
U	muodonmuutosenergia
$U^{(i)}, U^{(e)}$	kappaleen sisäinen ja ulkoinen muodonmuutosenergia
\bar{U}	komplementaarienergia
V_i	sauvavoiman S_i pystykomponentti xy-tasossa
W_0	muodonmuutosenergiafunktio
W_c	komplementaarienergiafunktio
X_{tj}	staattisesti määräämättömän suureen X_t j:s komponentti $x_1x_2x_3$ -avaruudessa
X_1	staattisesti määräämättömän suureen vaakakomponentti xy-tasossa

- Y_1 staattisesti määräämättömän suureen pystykomponentti xy-tasossa
- a_1, a_2, a_3 suorakulmaiset koordinaatit 0-tilassa
- $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$
- a, b suorakulmaiset koordinaatit 0-tilassa
- $c_i = (a_i, b_i)$
- e_i venymä
- e_{ij} Greenin muodonmuutostensorin komponentti
- f funktio
- g oma paino
- i, j, k, l indeksejä, lausekkeissa (a) ja (b) summeerausindeksejä
- n köydenosien lukumäärä
- o alaindeksi, joka tarkoittaa ko. suuretta 0-tilassa
- p rakenteen pintakuorman intensiteetti
- s_{ij} Kirchhoffin jännitystensorin komponentti
- s_{i0} sauvaelementin i pituus 0-tilassa
- s_i^g sauvaelementin i pituus g-tilassa
- s_i sauvaelementin i pituus lopputilassa (g+p)
- u_1, u_2, u_3 siirtymien komponentit
- u, v siirtymien komponentit
- x_1, x_2, x_3 ortogonaaliset koordinaatit deformatuneessa tilassa
- $x = (x_1, x_2, x_3)$
- x, y ortogonaaliset koordinaatit deformatuneessa tilassa
- $z = (x, y)$
- π kokonaispotentiaalienergia
- π_R Reissnerin funktionaali
- π_c komplementaarienergia
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ suuntakulmat
- α, β suuntakulmat
- ϵ_{ij} muodonmuutostensorin komponentti
- ϵ pituusyksikön venymä

ξ_1, ξ_2, ξ_3	suuntakulmat
ξ, η	suuntakulmat
ρ_0, ρ	materiaalin tiheys 0-tilassa ja deformatiivisessa tilassa
σ_{ij}	jännitystensorin komponentti
σ	jännitys

Kirjallisuutta

- [1] Castigliano, C.A.P., Théorie de l'Équilibre des Systèmes Élastiques et ses Applications 1879. (Käännös: Andruos, E.S., The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and its Applications. Dover Publications Inc, 1966.)
- [2] Engesser, Fr., Ueber statisch unbestimmte Träger bei beliebigen Formänderungs-Gesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Jahrgang 1889 Heft 8, ss. 734-744.
- [3] Fung, Y.C., Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall, Inc. 1965.
- [4] Jennings, A., The Energy Theorems and Their Applications. Journal of Engineering Mathematics, Vol. 1, Number 4. 1967.
- [5] Levinson, M., The Complementary Energy Theorem in Finite Elasticity. Journal of Applied Mechanics. Vol. 32, Series E, Number 4, December 1965.
- [6] Libove, C., Complementary Energy Method for Finite Deformations. Journal of the Engineering Mechanics Division, Dec. 1964.
- [7] Michalos, J. and Birnstiel, C., Movements of a Cable due to Changes in Loading. Journal of the Structural Mechanics Division ASCE, Vol. 86, No ST 12, Part 1, 1960.
- [8] Novozhilov, V.V., Theory of Elasticity. Pergamon Press, 1961.
- [9] Oran, C., Complementary Energy Concept for Large Deformations. Journal of the Structural Mechanics Division ASCE, Vol. 93, No ST 1, 1967.
- [10] Zubov, L.M., The Stationary Principle of Complementary Work in nonlinear Theory of Elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 34, Number 2, 1970.

Pertti Holopainen, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi