

AJAN MUKANA TAPAHTUVIEN MUODONMUUTOSTEN HUOMIOONOTTAMINEN TERÄSLIITTOPALKIN MITOITUKSESSA

EINO NIEMELÄ

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 4
No. 2 1971 ss. 80-102; Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

Yhteenveto

Liittopalkin teräsosaan kiinteästi liittyvän betonirakenteen kimmoiset ominaisuudet eivät säily samanlaisina, vaan muuttuvat ajan ja osittain myös kuormituksen funktiona. Ajan kuluessa betonirakenne lisäksi kutistuu. Muutosten vaikutuksien huomioonottaminen ns. "tarkkoja laskumenetelmiä" käyttäen on varsin työlästä. Tätä varten on seuraavassa esitetty eräitä likiarvokaavoja sekä suoritettu niiden virhetarkastelu. Likiarvokaavoja käyttäen on mahdollista tavallisten pöytälaskimien avulla saada luotettavia tuloksia kohtuullisessa ajassa. Likiarvot ovat käyttökelpoisia koko sillä alueella, millä käytännön rakenteet esiintyvät; täten myös silloin, kun betoniosa on erittäin vahva.

1. YLEISTÄ

Liittopalkki on rakenne, jossa teräsprofiili vahvistetaan sen kanssa yhdessä toimivalla betonisella puristuslaatalla. Teräksen ominaisuudet pysyvät käytäntöön riittävällä tarkkuudella samanlaisina, mutta betonin ominaisuudet muuttuvat ajan kuluessa. Sen vuoksi laskelmissa on otettava huomioon betonin kimmoisten ominaisuuksien lisäksi sen hiipuminen ja kutistuminen. Laskelmia suoritettaessa on otettava huomioon myös se, että betonin ominai-

suudet voivat äkillisesti muuttua pysyvästi.

Edellä esitetystä huolimatta liittopalkki on säilyttänyt paikkansa hyvin erityisesti siltakonstruktioissa. Tämän voi todeta sen menestymisestä monissa sillansuunnittelukilpailuissa.

Kotimaisessa kirjallisuudessa ei kuitenkaan esiinny kirjoituksia liittopalkkirakenteiden mitoittamisessa sovellettavista menetelmistä. Tästä johtuen niiden esittäminen on tarpeen. Seuraavassa kiinnitetään erityistä huomiota ajan mukana muuttuvien jännitysten jakautuman tarkasteluun.

2.1 Keskisen normaalivoiman vaikutus

Palkkiin vaikuttava keskinen normaalivoima N_o voidaan jakaa kahteen osaan

$$N_o = N_t + N_b$$

Palkin painopisteakselilla vaikuttava normaalivoima jakautuu poikkeileikkauksen eri osille siinä suhteessa kuin kimmokertoimillaan kerrotut betonin ja teräksen pinta-alat suhtautuvat pinta-alojen summaan. Merkitsemällä

$$m = K_b/K_t$$

saadaan

$$N_b = \frac{N_o m}{m+1}, \quad N_t = \frac{N_o}{m+1}, \quad \sigma_b = \frac{N_b}{A_b}, \quad \sigma_t = \frac{N_t}{A_t}$$

2.2 Puhdas taivutus

2.2.1 Yleinen teoria

Liittopalkin normaalijännitykset voidaan määrittää eri aineista koostetun palkin teorian mukaan. Nyt esillä olevassa tapauksessa on kaksi ainetta:

- betoni: A_b, E_b
- teräs: $A_t, E_t = nE_b$

Liittopalkin poikkileikkauksen 0-viiva, kun poikkileikkaukseen ei vaikuta normaalivoimaa, saadaan ehdosta, jonka mukaan tasapainon vallitessa kaikkien sisäisten voimien summan tulee olla nolla;

$$\int_{A_b} \sigma_b dA_b + \int_{A_t} \sigma_t dA_t = 0 \quad (1)$$

Jos 0-viivan käyrästys säde on ρ , suhteellinen venymä etäisyydellä y siitä on (kuva 1)

$$\epsilon(y) = \frac{\Delta dx}{dx} = - \frac{(d\omega)y}{dx} = \frac{y}{\rho} \quad (2)$$

$$\sigma_b = \frac{y}{\rho} E_b, \quad \sigma_t = \frac{y}{\rho} E_t \quad (3)$$

Koska

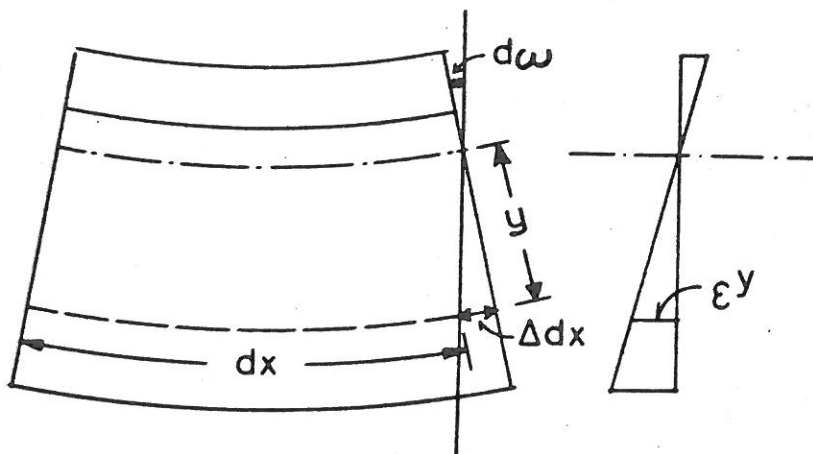
$$E_t = nE_b \quad (4)$$

saadaan

$$n\sigma_b = \frac{y}{\rho} E_t, \quad \sigma_t = \frac{y}{\rho} E_t \quad (5)$$

ja sijoittamalla yhtälöön (1) saadaan

$$\frac{E_t}{\rho} \left(\frac{1}{n} \int_{A_b} y dA_b + \int_{A_t} y dA_t \right) = 0 \quad (6)$$



Kuva 1

Sulkulauseke sisältää betoni- ja teräspinta-alojen redusoidun staattisen momentin painopiste akselin suhteen, sillä lausekkeessa on otettu huomioon osapinnat erisuuruusilla kimmokertoimilla kerrottuna.

Koska sisäisen momentin tulee pitää ulkoinen tasapainossa, pätee

$$M_o = \int_{A_b} y \sigma_b dA_b + \int_{A_t} y \sigma_t dA_t \quad (7)$$

Yhtälön (5) mukaan saadaan

$$\int_{A_b} y \sigma_b dA_b = \frac{E_t}{\rho} \frac{1}{n} \int_{A_b} y^2 dA_b$$

$$\int_{A_t} y \sigma_t dA_t = \frac{E_t}{\rho} \int_{A_t} y^2 dA_t$$

Sijoittamalla nämä arvot yhtälöön (7) saadaan

$$M_o = \frac{E_t}{\rho} \left(\frac{1}{n} \int_{A_b} y^2 dA_b + \int_{A_t} y^2 dA_t \right) = \frac{E_t}{\rho} I_r \quad (8)$$

Sulkulauseke on liittopalkin redusoitu jäyhyysmomentti, jossa osapinnat on otettu huomioon kimmokertoimiensa suhteessa. Reunajännitykset ovat silloin

$$\sigma_b = \frac{M_o}{n I_r} y, \quad \sigma_t = \frac{M_o}{I_r} y$$

2.2.2 Liittopalkin taivutusjännitysten määrittäminen ilman yhteisen O-viivan ratkaisemista

Jännitysten määrittämiseksi tutkitaan palkin sisäisiä voimia ja momenteja ulkoisen momentin M_o vaikuttaessa. M_o voidaan jakaa osiin M_{bo} , M_{to} , N_{bo} ja N_{to} .

Tasapainoehdot ovat

$$N_{to} = N_{bo} (= N_o)$$

$$M_o = M_{to} + M_{bo} + N_{to} a \quad (9)$$

Kun betoni ja muototeräs liittyvät kiinteästi toisiinsa, pätee (kuva 2)

$$\epsilon_{bo} + \epsilon_{to} = \gamma_o a \quad (10)$$

$$\gamma_{to} = \gamma_{bo} = \gamma_o$$

Kun merkitään $\gamma_{to} = M_{to}/E_t I_t$ ja $\gamma_{bo} = M_{bo}/E_b I_b$, saadaan

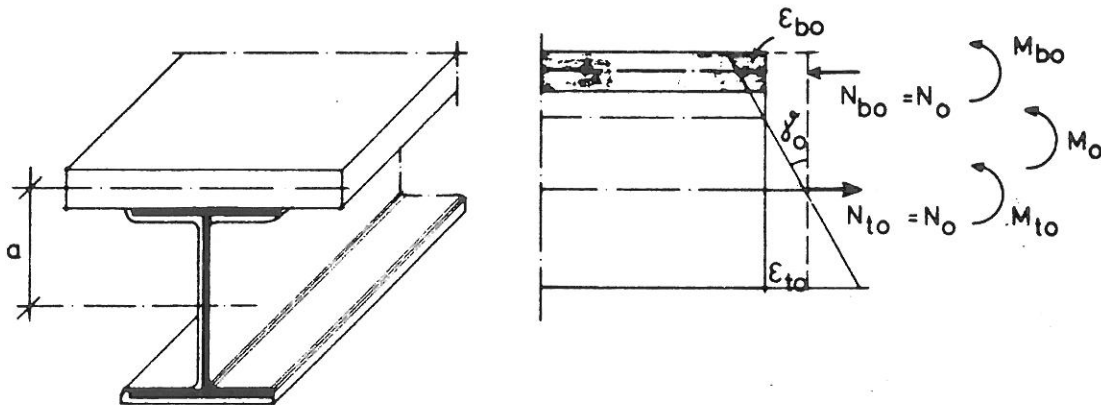
$$M_{bo} = \frac{E_b I_b}{E_t I_t} M_{to}, \quad M_{to} = M_{bo} \frac{E_t I_t}{E_b I_b} \quad (11)$$

Siirtymäehdosta (10) saadaan

$$N_{to} = \frac{E_t A_t E_b A_b}{E_t A_t + E_b A_b} \cdot \frac{M_{to}}{E_t I_t} a \quad (12)$$

Tasapainoehtojen ja edellä esitettyjen yhtälöjen perusteella voidaan kirjoittaa

$$M_o = M_{bo} + M_{bo} \frac{E_t I_t}{E_b I_b} + \frac{E_t I_t}{E_b I_b} \cdot \frac{a^2}{E_t I_t} \cdot \frac{A_t E_t A_b E_b}{E_t A_t + E_b A_b} M_{bo}$$



Kuva 2.

Sivuilla 100 ja 101 olevia merkintöjä käyttäen saadaan

$$K = \frac{K_t K_b}{K_t + K_b} = \frac{m K_t^2}{K_t (m + 1)} = \frac{m K_t}{m + 1}$$

$$S = S_b + S_t + a^2 K = S_t (v + 1) + \frac{P}{m + 1}$$

$$R = S(m + 1) = S_t (v + 1)(m + 1) + P$$

$$M_o = \frac{(S_b + S_t + a^2 \frac{K_t K_b}{K_t + K_b}) M_{bo}}{S_b}$$

$$M_{bo} = \frac{S_b}{S_b + S_t + a^2 \frac{K_t K_b}{K_t + K_b}} M_o$$

$$M_{bo} = \frac{S_b}{S_t (v + 1) + \frac{P}{m + 1}} M_o = M_o \frac{(m + 1) S_b}{R} \quad (13)$$

$$M_{to} = M_o \frac{(m + 1) S_t}{R} \quad (14)$$

Kun M_{to} :n lauseke sijoitetaan N_{to} :n lausekkeeseen (13) saadaan edellä esitettyjä merkintöjä käyttäen

$$N_{to} = \frac{m K_t}{m + 1} \frac{a}{S_t} \frac{(m + 1) S_t}{R} M_o = \frac{P}{a R} M_o \quad (15)$$

Liittopalkin reunajännitykset saadaan nyt lausekkeista

$$\sigma_{bo} = \frac{-N_o}{A_b} - \frac{M_{bo}}{2I_b} h_b$$

$$\sigma_{bu} = \frac{-N_o}{A_b} + \frac{M_{bo}}{2I_b} h_b = \frac{1}{n} \sigma_{to} \quad (16)$$

$$\sigma_{tu} = \frac{+N_o}{A_t} + \frac{M_{to} h_t}{2I_t} \quad (17)$$

sijoittamalla näihin M_{to} :n, M_{bo} :n ja N_{to} :n arvot edeltä.

3. KUTISTUMISEN AIHEUTTAMAN NORMAALIVOIMAN JA MOMENTTIEN
LASKEMINEN

Normaaleissa olosuhteissa portland-sementistä valmistettujen betonirakenteiden kutistuma on puolet loppuarvostaan silloin, kun betonin ikä on 28 vrk. Betoniin sijoitetut teräkset estävät kutistumisilmiön kehitystä. Niinpä teräsbetonin kutistuma on pienempi kuin teräksettömän. Samoin liittopalkin teräsprofiili estää kutistuman kasvun täyteen määräänsä. Tällöin tapahtuvaa teräsprofiilin kuormittumista. Syntyviä jännityksiä tarkastellaan seuraavassa.

Liittopalkkiin vaikuttava ulkoinen momentti voidaan jakaa osiin

$$M = M_t + M_b + Na, \quad N = N_b = N_t$$

Kun ulkoista momenttia ($M = 0$) ei ole, saadaan

$$N_t = - \frac{M_t + M_b}{a}$$

Tätä tietoa käytetään hyväksi määritettäessä betonin kutistumisen aiheuttaman sisäisen momentin jakautumista normaalivoimaan ja osamomentteihin teräkselle ja betonille.

Betonin kutistuessa muototeräkseen syntyy jännitys

$$\sigma = \epsilon_s E_t$$

sen painopisteessä vaikuttavasta puristavasta voimasta

$$A_t \sigma = \epsilon_s E_t A_t$$

Tämän voiman synnyttämä momentti poikkileikkauksen painopisteen suhteen on

$$M = \epsilon_s E_t A_t y_t \quad (18)$$

Syntynyt sisäinen momentti jakautuu poikkileikkauksen eri osille osien redusoitujen jäyhyysmomenttien suhteessa

$$M_t = \epsilon_s E_t A_t y_t \frac{E_t I_t}{E_t I_t + E_t A_t y_t^2 + E_b I_b + E_b A_b y_b^2}$$

$$M_b = \epsilon_s E_t A_t y_t \frac{E_b I_b}{E_t I_t + E_t A_t y_t^2 + E_b I_b + E_b A_b y_b^2}$$

Eri osapintojen painopisteiden etäisyydet painopisteakse-
lista ovat

$$y_t = \frac{E_b A_b}{E_b A_b + E_t A_t} a$$

$$y_b = \frac{E_t A_t}{E_b A_b + E_t A_t} a$$

Käyttämällä edellä olevia merkintöjä saadaan

$$M_t = \epsilon_s \frac{amK_t S_t}{R} \quad (19)$$

$$M_b = \epsilon_s \frac{amvK_t S_t}{R} \quad (20)$$

$$N = - \epsilon_s \frac{mK_t S_t (v + 1)}{R} \quad (21)$$

Näiden lausekkeiden avulla betoniosan kutistuman vaikutus liittopalkissa voidaan määrittää.

4. PYSYVIEN MUODONMUUTOKSIEN HUOMIOON OTTAMINEN

4.1 Yleistä

Kuormitetun betonin muodonmuutos, joka ei noudata Hookenlakia kaikilta osiltaan, voidaan jakaa seuraaviin osiin:

E. Niemelä: Ajan mukana tapahtuvien muodonmuutosten ...

1. Kimmoinen muodonmuutos
2. Hidastunut kimmoinen muodonmuutos
3. Poikittainen laajeneminen
4. Betonin juokseminen
5. Betonin painuma ja sisäisen rakenteen murtuminen 1. plastinen muodonmuutos

Kimmoisella muodonmuutoksella tarkoitetaan sitä osaa, joka syntyy välittömästi kuorman alkaessa vaikuttaa ja joka palautuu samoin välittömästi kuorman tultua poistetuksi.

Hidastunut kimmoinen muodonmuutos, betonin juokseminen, painuma ja alkava sisäisen rakenteen murtuma ovat vaikeasti toisistaan erotettavissa, ja käytetään niistä yhteistä nimitystä hiipuminen. Betonin juoksemisesta ja sisäisen rakenteen alkavasta murtumasta käytetään yhteistä nimitystä viskoplastinen muodonmuutos.

Hidastuneella kimmolisella muodonmuutoksella tarkoitetaan hitaasti syntyvää muodonmuutoksen osaa, joka palautuu samoin hitaasti kuorman poistamisen jälkeen.

Kimmainen ja hidastunut kimmoinen muodonmuutos ovat verrannolliset vaikuttavaan voimaan. Kuitenkin hidastunut kimmoinen muodonmuutos on jossain määrin kuorman vaikutusajasta riippuva [10].

Betonin muodonmuutoksien teoreettisissa tutkimuksissa ja suoritetuissa kokeissa hiipumista on yleisimmin käsitelty kokonaisuutena. Hidastunut kimmoinen muodonmuutos on sisällytetty yleisimmin hiipumaan.

Wagnerin [10] referoimissa kokeissa tämän betonin muodonmuutoksen komponentin onkin todettu vaihtelevan kuormituksen vaikuttamisajasta riippuen siten, että hidastunut kimmoinen muodonmuutos pienenee kuormituksen vaikuttamisajan pidetessä sekä määrältään

että suhteessa hiipumaan. Wagnerin mukaan 2 - 22 vrk. vaikuttaneen kuormituksen synnyttämästä muodonmuutoksesta hidastuneen kimmoisen muodonmuutoksen osuus on 50 - 26 % hiipumasta ja kuormituksen vaikutusajan ollessa 11 k - 7 vuotta tämän osuus on 12 - 3 %.

Poikittaisella laajenemisella tarkoitetaan kohtisuoraan puristavan voiman vaikuttamissuuntaan tapahtuvaa muodonmuutosta. Tämän muodonmuutoksen suuruus ilmaistaan Poissonin luvun avulla suhteessa kimmoiseen, voiman suuntaiseen muodonmuutokseen. Poikittainen laajeneminen sisältää paitsi kimmoisia muodonmuutoksia myös juoksemista. Se ei tule kysymykseen esillä olevassa tarkastelussa.

Betonin juokseminen eli viskoosi muodonmuutos on aina ajasta riippuva.

Plastisella muodonmuutoksella on tarkoitettu kielenkäytösämme kaikkia niitä muodonmuutoksia, jotka syntyvät betonissa kuorman vaikutuksesta eivätkä palaudu.

Betonin sisäisen rakenteen murtuma on yksi plastisen muodonmuutoksen komponentti. Plastisen muodonmuutoksen toinen komponentti on painuma. Näiden ja vaikuttavan voiman välillä ei ole olemassa riippuvuutta kuormitusajasta, mutta pitkäaikainen kuormitus edistää mm. rakennemurtumain syntymistä [4], [5], [7].

4.2 Hiipuman vaikutus liittopalkkiin

4.2.1 Likiarvoinen menetelmä

Hiipuma on liittopalkin eri osissa eri suuri. Yleensä teräksen hiipuminen on niin vähäistä, että sitä ei oteta laskelmissa huomioon. Betonin hiipumisen voidaan taasen otaksua tapahtuvan jotakin jatkuvaa funktiota seuraten.

Laskelmien yksinkertaistamiseksi tässä yhteydessä voidaan käyttää tällöin hyödyksi ns. hiipumakimmokerrointa, jonka avulla

suoritetut laskelmat antavat jännitystilän määrityksessä karkeita likiarvoja. Monien tutkimusten mukaan hiipuma onkin suoraan verrannollinen jännityksen suuruuteen käyttöjännitysten vallitessa.

Tällöin kokonaisvenymä

$$\epsilon_{\text{kok}} = \epsilon + \alpha = \epsilon + \epsilon_{\phi} = \epsilon(1 + \phi) = \frac{\sigma}{E_b} (1 + \phi)$$

Kun merkitään hiipumaluvusta riippuvaa kimmokerrointa E_{ϕ} , voidaan kirjoittaa

$$E_{t\phi} = \frac{E_t}{(1 + \phi_t)} \quad (22)$$

(jos $\phi_t = 0$, $E_{t\phi} = E_t$)

$$E_{b\phi} = \frac{E_b}{(1 + \phi_b)} \quad (23)$$

Jännitysten laskeminen tapahtuu samoin kuin lyhytaikaisen kuorman vaikuttaessa sijoittamalla yllä esitetyt kimmokertoimet vastaavien kerrointen tilalle. Käytettäessä hiipumakimmokerrointa sen avulla on määritettävä kaikki poikkileikkauksen redusoidut suureet.

Siltoina käytettävien liittopalkkirakenteiden liikkuva kuormitus on yleensä lyhytaikainen. Tämänkin kuormituksen jakautumiseen vaikuttaa betonin omasta painosta aiheutunut hiipuminen, koska se on muuttanut pysyvästi rakenteen materiaalivakioita.

Hiipumakimmokerroin tulee siis aina kyseeseen, kun on otettava huomioon kuormituksen vaikutus. Edellä olevan mukaisia hiipumakimmokertoimia ovat suosittaneet käytettäväiksi mm. Fritz [3] ja Hoischen [6]. Selvittämättä on kuitenkin kysymys, onko hiipumakimmokerroin erilainen pysyvälle ja liikkuvalla kuormituksella.

4.2.2 Hiipumisen ajallisen kehityksen huomioon ottaminen

4.2.2.1 Yleistä

Liittopalkin mitoituksessa olisi myös mahdollista käyttää teräksen ja betonin hiipumalukujen suhdetta, mutta tämä suhdeluku ei pysy vakiona [1], [8], [9]. Hiipumasuhteen käyttö johtaisi tällöin erittäin komplisoituihin yhtälöihin.

4.2.2.2 Yhtälöiden muodostaminen

Jo aikaisemmin on esitetty tapa palkkiin lyhytaikaisesti vaikuttavan momentin jakamisesta osiin

$$M_o = M_{bo} + M_{to} + N_{bo}a, \quad N_{bo} = N_{to}$$

N_{bo} ja N_{to} sekä M_{bo} ja M_{to} on ratkaistu edellä. Kun betoni hiipuu ja kutistuu, siinä syntyy ajasta riippuva kevennysmomentti M_{bt} ja veto-voima N_{bt} . Samaan aikaan muototeräksen momentti lisääntyy määrällä M_{tt} ja siihen syntyy puristusvoima N_{tt} [1], [2]. Hiipumatilaa vastaavat sisäiset voimat on merkitty indeksillä ϕ .

Hiipumatilassa on ratkaistava voimat $N_{b\phi}$ tai $N_{t\phi}$ ja momentti $M_{b\phi}$ tai $M_{t\phi}$, jotka saadaan olettamalla, että ulkoinen kuormitus pysyy vakiona alla olevista tasapainoehdoista.

$$N_{b\phi} + N_{bt} = N_o$$

$$M_{b\phi} + M_{bt} = M_{bo}$$

Menettely on muutoin seuraava. Palkista irroitetaan yksikön pituinen osa, ja poikkileikkauspintoihin pannaan jännitykset vaikuttamaan ulkoisina voimina. Ajatellaan palkin eri osien välinen staattinen yhteistoiminta siten mahdottomaksi, että aikaosana betoni voi vapaasti hiipua. Staattinen yhteistoiminta palautetaan aikaosasen kulluttua, jolloin muototeräksessä on syntynyt muodonmuutoksia sen pai-

no pisteakselilla vaikuttavista voimista ja momentista siten, että yhteistoiminta on jälleen täydellinen. Yhtälöiden johtaminen voidaan suorittaa periaatteessa samoin kuin kutistumisilmiön vaikutusta käsiteltäessä on tehty. Tämän mukaisesti on hiipumistehtävää käsitellyt Sattlerin [9] mukaan Sontag, joka yhtälöitä muodostaessaan on jättänyt huomiotta betonille tulevan momenttiosasen $M_{b\phi}$ pienenä $N_{b\phi}$ a:han verrattuna, jolloin betonilaatan ollessa vahva syntyy huomattava virhe. Sattlerin mukaan Fröhlich [9] on jättänyt huomiotta tekijän $\frac{1}{n} I_b$ suhteessa koko poikkileikkauksen hietausmomenttiin pienenä suureena, jolloin virhe syntyy samoissa olosuhteissa kuin Sontagilla. Liittopalkkirakenteita ja niiden hiipumaa ovat käsitelleet lisäksi Buseman, Esslinger, Fritz [3] ja Müller [8]. Saadut tulokset ovat täysin samankaltaisia; kysymys on vain erosta merkinnöissä ja suoritettavan laskutoimituksen yksinkertaisuudessa ja käyttökelpoisuudessa. Seuraavassa käytetään Müllerin tavoin Fritzin esittämiä merkintöjä.

Kun hiipumatilaa vastaava voima $N_{b\phi}$ vaikuttaa rakenneyhteydestä vapautettuun betoniosaan, hiipumadifferentiaalia vastaava venymä on

$$\epsilon = \frac{N_{b\phi}}{K_b} d\phi$$

Kun staattinen yhteistoiminta jälleen palautuu, on samoin kuin edellä kutistumaa käsiteltäessä

$$dN_{b\phi} = -\epsilon K \frac{S_b + S_t}{S} = -N_{b\phi} \frac{K}{K_b} \frac{S_b + S_t}{S} d\phi$$

ja samanaikaisesti

$$dM_{b\phi} = \epsilon \frac{a^2 K S_b}{aS} = N_{b\phi} a \frac{K}{K_b} \frac{S_b}{S} d\phi$$

Tarkastellaan hiipumaa vain $M_{b\phi}$:n vaikuttaessa. Pituusyksikkö pyrkii silloin kiertymään kulman

$$\gamma = \frac{M_{b\phi}}{S_b} d\phi$$

Ajatellaan betoni siten kiinnitetyksi, että muodonmuutosta ei voi tapahtua. Syntyvä kiinnitysmomentti on tällöin

$$d_1 M_{b\phi} = -\gamma S_b = -M_{b\phi} d\phi$$

Betoni vapautetaan niin, että koko poikkileikkaukseen vaikuttaa negatiivinen kiinnitysmomentti

$$d_2 M_{b\phi} = M_{b\phi} d\phi \frac{S_b}{S}$$

$$dN_{b\phi} = M_{b\phi} \frac{1}{a} \frac{a^2 K}{S} d\phi$$

$$dM_{b\phi} = -M_{b\phi} \left(1 - \frac{S_b}{S}\right) d\phi = -M_{b\phi} \frac{S_t + a^2 K}{S} d\phi$$

$$dN_{b\phi} = M_{b\phi} \frac{1}{a} \frac{a^2 K}{S} d\phi$$

Kun yhdistetään erikseen tapahtuviksi ajatellut hiipumisilmiöt, saadaan

$$dN_{b\phi} = -N_{b\phi} \frac{K}{K_b} \frac{S_b + S_t}{S} d\phi + M_{b\phi} \frac{aK}{S} d\phi$$

$$dM_{b\phi} = N_{b\phi} a \frac{K}{K_b} \frac{S_b}{S} d\phi - M_{b\phi} \frac{S_t + a^2 K}{S} d\phi$$

Jakamalla $d\phi$:llä saadaan edelleen

$$\frac{dN_{b\phi}}{d\phi} = -N_{b\phi} \frac{K}{K_b} \frac{S_b + S_t}{S} + M_{b\phi} \frac{aK}{S}$$

$$\frac{dM_{b\phi}}{d\phi} = N_{b\phi} a \frac{K}{K_b} \frac{S_b}{S} - M_{b\phi} \frac{S_t + a^2 K}{S}$$

Edellä olevia merkintöjä käyttäen saadaan lausekkeet

$$\frac{dN_{b\phi}}{d\phi} = -N_{b\phi} \frac{S_t (v + 1)}{R} + M_{b\phi} \frac{amK_t}{R}$$

$$\frac{dM_{b\phi}}{d\phi} = N_{b\phi} \frac{avS_t}{R} - M_{b\phi} \frac{S_t (m + 1) + p}{R}$$

$N_{b\phi}$:tä ja $M_{b\phi}$:tä koskevan differentiaaliyhtälöryhmän yleinen ratkaisu saadaan palauttamalla yhtälöryhmä toisen asteen lineaariseksi ja homogeeniseksi yhtälöksi derivoimalla yhtälö ϕ :n suhteen. Ratkaisemalla yhtälö saadaan juurille arvot

$$r_1, r_2 = \frac{-S_t(v+m+2) - p \pm \sqrt{[S_t(m-v) + p]^2 + 4vpS_t}}{2R} \quad (24)$$

Kun C_1 ja C_2 , D_1 ja D_2 ovat mielivaltaisia vakioita

$$N_{b\phi} = C_1 e^{r_1 \phi} + C_2 e^{r_2 \phi}, \quad M_{b\phi} = D_1 e^{r_1 \phi} + D_2 e^{r_2 \phi}$$

4.2.2.3 Liittopalkkiin vaikuttaa vakiosuuruinen momentti M_0 hetkettä $t = 0$ hetkeen t_1

Kun $t = 0$, niin $\phi = 0$ ja $e^{r_1 \phi} = 1$. Kun lyhytaikainen kuormitus vaikuttaa

$$N_{b0} = \frac{M_0 p}{aR}, \quad M_{b0} = \frac{v(m+1)S_t M_0}{R}$$

Edellä on saatu

$$N_{b\phi} = C_1 e^{r_1 \phi} + C_2 e^{r_2 \phi}$$

josta derivoimalla saadaan edelleen

$$\frac{dN_{b\phi}}{d\phi} = r_1 C_1 e^{r_1 \phi} + r_2 C_2 e^{r_2 \phi}$$

Sijoittamalla $N_{b\phi}$:n ja $dN_{b\phi}/d\phi$:n arvot $M_{b\phi}$:n lausekkeeseen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} M_{b\phi} &= \frac{1}{amK_t} \left[R \frac{dN_{b\phi}}{d\phi} + S_t(v+1)N_{b\phi} \right] \\ &= \frac{1}{amK_1} \left[(Rr_1 + S_tv + S_t)C_1 e^{r_1 \phi} + (Rr_2 + S_tv + S_t)C_2 e^{r_2 \phi} \right] \end{aligned}$$

Alkuehtojen perusteella saadaan yhtälöryhmä

$$N_{b\phi} = C_1 + C_2 = \frac{M_o p}{aR}$$

$$M_{b\phi} = \frac{1}{amK_t} [(Rr_1 + S_t v + S_t)C_1 + (Rr_2 + S_t v + S_t)C_2]$$

$$= \frac{v(m+1)M_o S_t}{R}$$

joista voidaan ratkaista vakiot C_1 ja C_2 . Sijoittamalla kaavoihin niiden arvot saadaan sieventämisen jälkeen $N_{b\phi}$:lle ja $M_{b\phi}$:lle lausekkeet

$$N_{b\phi} = \frac{N_o}{r_1 - r_2} \left\{ \left[\frac{S_t(mv-1)}{R} - r_2 \right] e^{r_1 \phi} + \left[r_1 - \frac{S_t(mv-1)}{R} \right] e^{r_2 \phi} \right\} \quad (25)$$

$$M_{b\phi} = \frac{M_{bo}}{r_2 - r_1} \left\{ \left[\frac{\frac{mp}{m+1} + S_t(m+1)}{R} + r_2 \right] e^{r_1 \phi} - \left[\frac{\frac{mp}{m+1} + S_t(m+1)}{R} + r_1 \right] e^{r_2 \phi} \right\} \quad (26)$$

4.2.2.4 Likiarvoja $N_{b\phi}$:lle ja $M_{b\phi}$:lle

Kun differentiaaliyhtälön juurien r_1, r_2 (24) lausekkeissa jätetään juurimerkin alla huomiotta termi $4vpS_t$ ja lisätään termin $S_t(m-v)$ sulkulausekkeeseen $2v$, juuret saavat muodon

$$r_1 = \frac{-S_t(m+v+2) - p + S_t(m+v) + p}{2R} = -\frac{S_t}{R} \quad (27)$$

$$r_2 = \frac{-S_t(m+v+2) - p - S_t(m+v) - p}{2R} = -\frac{S_t(m+v+1) + p}{R} \quad (28)$$

Tarkastetaan syntynyttä suhteellista virhettä.

a) Juuren r_1 virhetarkastelu

Juuren r_1 tarkka arvo \bar{r}_1 on muotoa

$$\frac{A + \sqrt{B}}{2R}$$

Juuren r_1 likiarvo \underline{r}_1 on muotoa

$$\frac{A + \sqrt{C}}{2R} = -\frac{S_t}{R}$$

joissa lausekkeissa

$$\sqrt{B} = \sqrt{C - 4S_t^2mv}, \quad \sqrt{C} = S_t(m + v) + p$$

Tarkan arvon ja likiarvon erotus on

$$\bar{r}_1 - \underline{r}_1 = - \frac{4S_t^2mv}{2R(\sqrt{B} + \sqrt{C})}$$

jonka avulla saadaan suhteellinen virhe

$$\frac{\bar{r}_1 - \underline{r}_1}{\underline{r}_1} = \frac{2S_tmv}{\sqrt{B} + \sqrt{C}}$$

koska $\sqrt{C} = S_t(m+v) + p < \sqrt{B} + \sqrt{C}$, saadaan

$$\left| \frac{\bar{r}_1 - \underline{r}_1}{r_1} \right| < \frac{2S_tmv}{S_t(m+v) + p} = \frac{2mv}{m + v + \frac{p}{S_t}}$$

Toisaalta $\sqrt{B} + \sqrt{C} < 2\sqrt{C}$, joten

$$\left| \frac{\bar{r}_1 - \underline{r}_1}{r_1} \right| > \frac{2S_tmv}{2[S_t(m+v) + p]} = \frac{mv}{m + v + \frac{p}{S_t}}$$

Suhteellinen virhe on siis näiden rajojen sisällä. Tarkastellaan suhteellisen virheen muuttumista v :n funktiona, kun m on vakio

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{mv}{m+v+\frac{p}{S_t}} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{mv}{m+v+\frac{p}{S_t}} = m$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{2mv}{m+v+\frac{p}{S_t}} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2mv}{m+v+\frac{p}{S_t}} = 2m$$

Aivan samoin voidaan todeta suhteellisen virheen muuttuminen m :n funktiona. Tällöin m :n kasvaessa $0 \rightarrow \infty$ virhe kasvaa $0 \rightarrow 2v$. Vastaavasti voidaan havaita, että kun $v \rightarrow 0$ ja $m \rightarrow 0$, suhteellinen virhe $\rightarrow 0$.

b) Juuren r_2 virhetarkastelu

Juuren r_2 tarkka arvo \bar{r}_2 on muotoa

$$\frac{A - \sqrt{B}}{2R}$$

Juuren r_2 likiarvo \underline{r}_2 on muotoa

$$\frac{A - \sqrt{C}}{2R}$$

$$\sqrt{B} = \sqrt{C - 4S_t^2mv}$$

$$\sqrt{C} = S_t(m+v) + p$$

$$\underline{r}_2 = - \frac{S_t(m+v+1) + p}{R}$$

$$\bar{r}_2 - \underline{r}_2 = \frac{2S_t^2mv}{R(\sqrt{B} + \sqrt{C})}$$

Suhteellinen virhe on silloin

$$\frac{\bar{r}_2 - \underline{r}_2}{\underline{r}_2} = \frac{-2S_t^2mv}{(\sqrt{B} + \sqrt{C})[S_t(m+v+1) + p]}$$

Koska $\sqrt{C} = S_t(m+v) + p < \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ja $S_t(m+v) + p < S_t(m+v+1) + p$, pätee

$$\left| \frac{\bar{r}_2 - \underline{r}_2}{Rr_2} \right| < \frac{2mv}{(m + v + \frac{p}{S_t})^2}$$

Tarkastellaan suhteellisen virheen muuttumista, kun v kasvaa $0 \rightarrow \infty$.

Tällöin voidaan todeta, että

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_2 - \underline{r}_2}{\underline{r}_2} = 0$$

Edellä voitiin todeta, että r_2 :n likiarvo koko lukualueella on erittäin tarkka ja että r_1 :n likiarvo silloin, kun $v \rightarrow 0$ on varsin hyvä. Useimmiten käytännön tapauksissa v on pieni, jolloin likiarvotulokset eivät sanottavasti poikkea tarkoista arvoista.

Sijoitetaan saadut juurien r_1 ja r_2 likiarvot $N_{b\phi}$:n tarkan arvon lausekkeeseen (25), jolloin saadaan

$$N_{b\phi} = N_0 \frac{[S_t(mv+m+v) + p]e^{r_1\phi} - S_t m v e^{r_2\phi}}{S_t(m+v) + p} \quad (29)$$

Jos hakasulkulausekkeessa jätetään huomiotta termi mv samalla, kun

tehtyä virhettä kompensoidaan lisäämällä osoittajaan termi $2S_t m v e^{r_2 \phi}$, saadaan

$$N_{b\phi} = N_o \left[e^{r_1 \phi} + \frac{S_t m v e^{r_2 \phi}}{S_t (m+v) + p} \right] \quad (30)$$

Vastaavasti saadaan $M_{b\phi}$:lle likiarvo sijoittamalla juurien likiarvot lausekkeeseen (26)

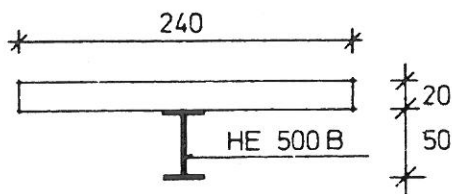
$$M_{b\phi} = \frac{M_{bo} \left(\frac{p}{m+1} + S_t v \right) e^{r_1 \phi} + \left(\frac{mp}{m+1} + S_t m \right) e^{r_2 \phi}}{S_t (m+v) + p} \quad (31)$$

Kun r_2 on itseisarvoltaan suurempi kuin r_1 ja sen merkki on aina negatiivinen, voidaan termi, jossa $e^{r_2 \phi}$ on kertoimena, jättää vähäisenä huomiotta. Tehdyn virheen kompensoimiseksi jätetään nimittäjästä pois termi $S_t (m+v)$. Tällöin $M_{b\phi}$:lle saadaan likiarvo

$$M_{b\phi} = M_{bo} \frac{\left(\frac{p}{m+1} + S_t v \right) e^{r_1 \phi}}{p} \quad (32)$$

Laskuesimerkki

Edellä esitetyn menettelyn soveltamiseksi suoritetaan laskelmat käyttäen kuvan 3 mukaista poikkileikkausta. Laskelmat ovat verrattain suuritöisiä. Esimerkki antaa kuitenkin kuvan siitä, kuinka välttämätöntä betonin erityyppisten muodonmuutosten huomioonottaminen on laskelmien suorituksessa.



Kuva 3.

Alkuarvot:

$$\begin{aligned} M_0 &= 50 \text{ Mpm} & E_b &= 0,31 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \\ E_t &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 & A_t &= 238,6 \text{ cm}^2 \\ I_t &= 107176 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Lasketaan aluksi suureet

$$\begin{aligned} S_t &= 225069 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 & S_b &= 49600 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \\ K_t &= 901,06 \text{ kp} & K_b &= 1488 \cdot 10^6 \text{ kp} \\ m &= 296970 & v &= 0,220376 \\ K &= 374,839 \cdot 10^6 \text{ kp} & S &= 733847 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \\ p &= 1822800 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 & R &= 2913155 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Käyttäen kaavoja (13), (14) ja (15) saadaan

$$\begin{aligned} M_{b0} &= 337945 \text{ kpcm} & M_{t0} &= 1533490 \text{ kpcm} \\ N_{t0} &= 89388 \text{ kp} \end{aligned}$$

Reunajännitykset ovat kaavojen (16) ja (17) mukaan

$$\sigma_{b0} = -39,7 \text{ kp/cm}^2 \quad \sigma_{tu} = 732,3 \text{ kp/cm}^2$$

Kutistumisen vaikutus

$$\epsilon_s = 0,0002$$

Kaavoista (19), (20) ja (21) saadaan

$$\begin{aligned} M_t &= 804730 \text{ kpcm} & M_b &= 177340 \text{ kpcm} \\ N &= -28060 \text{ kp} \end{aligned}$$

joista edelleen voidaan laskea jännitykset

$$\sigma_{b0} = -9,2 \text{ kp/cm}^2 \quad \sigma_{t0} = +70,1 \text{ kp/cm}^2$$

Hiipuman vaikutus

a) tarkoista kaavoista (25) ja (26) saadaan, kun $\phi = 3$

$$\begin{aligned} r_1 &= -0,08177 & r_2 &= -0,94493 \\ N_{b\phi} &= 74072 \text{ kp} & M_{b\phi} &= 68060 \text{ kpcm} \\ M_{t\phi} &= M_0 - aN_{b\phi} - M_{b\phi} = 2339420 \text{ kpcm} \end{aligned}$$

reunajännitykset

$$\sigma_{b0} = -19,7 \text{ kp/cm}^2 \quad \sigma_{tu} = 856,4 \text{ kp/cm}^2$$

b) likiarvokaavoista (27) ja (28) saadaan

$$r_1 = - 0,07726$$

$$r_2 = - 0,94843$$

ja kaavoista (29) ja (31)

$$M_{b\phi} = 69154 \text{ kpcm}$$

$$N_{b\phi} = 74714 \text{ kp}$$

$$M_{t\phi} = 2315856 \text{ kpcm}$$

Vastaavat reunajännitykset ovat

$$\sigma_{bo} = - 19,9 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{tu} = 853,3 \text{ kp/cm}^2$$

Kaavoista (30) ja (32) saadaan

$$N_{b\phi} = 71202 \text{ kp}$$

$$M_{b\phi} = 74818 \text{ kpcm}$$

$$M_{t\phi} = 2433112 \text{ kpcm}$$

ja vastaavat jännitykset ovat

$$\sigma_{bo} = - 19,9 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{tu} = 866,0 \text{ kp/cm}^2$$

Tulosten erot ovat merkityksettömiä, vaikka valitussa esimerkissä suure v oli käytännössä tavallisina pidettäviä arvoja suurempi.

Käytetyt merkinnät

A	pinta-ala
a	osapintojen painopisteiden keskinäinen väli
E	kimmokerroin
I_t, I_b	jäyhyysmomentti
I_r	redusoitu jäyhyysmomentti
K_b	$A_b E_b$
K_t	$A_t E_t$
K	$K_t K_b / (K_t + K_b) = m K_t / (m+1)$
M_o	momentti
M_{bo}	betonille tuleva taivutusmomentti
M_{to}	teräkselle tuleva taivutusmomentti
m	K_b / K_t

N	normaalivoima
n	E_t/E_b
p	a^2mK_t
R	$S(m+1) = S_t(N+1)(m+1) + p$
r_1, r_2	differentiaaliyhtälön juuret
S_b	$E_b I_b$
S_t	$E_t I_t$
S	$S_b + S_t + a^2K$
v	S_b/S_t
y	etäisyys poikkileikkauksen painopisteakselista
y_t	teräksen painopisteen etäisyys poikkileikkauksen painopisteakselista
y_b	betonin painopisteen etäisyys poikkileikkauksen painopisteakselista
α_∞	hiipuman loppuarvo
γ	kiertymä
ϵ	suhteellinen venymä
ϵ_s	suhteellinen kutistuma
ρ	painopisteakselin käyristyssäde
σ	normaalijännitys
ϕ	hiipumista osoittava alaindeksi

Kirjallisuutta

- [1] Brendel, G., Einfluss des Betonschwindens und -kriechens auf die Normalspannungen in den Querschnitten statisch bestimmter Verbundkonstruktionen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden I (1951/1952) Heft 2.
- [2] Brendel, G., Stahlbetonbau. 3. Aufl. 1957.
- [3] Fritz, B., Vereinfachtes Berechnungsverfahren für Stahlträger

- mit einer Betondruckplatte bei Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens. Die Bautechnik, Heft 2. 1950.
- [4] Gaede, K., Knicken von Stahlbetonstäben unter Kurz- und Langzeitbelastung. DAS Heft 129. 1958.
 - [5] Hansen, T., Creep of Concrete. 1959.
 - [6] Hoischen, A., Die praktische Berechnung von Verbundträgern. 1955.
 - [7] Hällström - Granholm - Wästlund, Betong I-II. 1958 - 1959.
 - [8] Müller, E., Beiträge zur Ermittlung der kriechabhängigen Spannungen von Verbundträgern. Bautechnik Heft 5. 1955.
 - [9] Sattler, Theorie der Verbundkonstruktionen. 1959.
 - [10] Wagner, O., Das Kriechen unbewehrten Betons. 1958.
 - [11] Esijännitettyjen betonirakenteiden normit teknillisine ohjeineen.

Eino Niemelä, tekn.tri, Suunnittelu-Oy E. Niemelä, Helsinki