LAATTATEHTÄVIEN NUMEERINEN KÄSITTELY POTENTIAALIENERGIAN MINIMIN PERIAATETTA KÄYTETTÄESSÄ

PEKKA LEHTINEN

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 3 No. 3—4 1970 ss. 85—88;
Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

Yhteenveto: Laatan taipumafunktiolle voidaan ratkaista lauseke potentiaalienergian minimin periaatetta käyttäen. Täten saatu likimääräisratkaisu on yleensä käytännön tapauksiin riittävän tarkka. Esimerkkitapauksena on selvitetty suunnikkaan muotoisen kaikilta sivuiltaan vapaasti tuetun isotrooppisen tasapaksun laatan ratkaiseminen. Käyttäen taipumafunktion kehitelmässä koordinaattifunktioina kaksoissinifunktioita on yksinkertaisesti voitu ottaa huomioon pistevoimat. Mielivaltaiselle kuormitukselle voidaan muodostaa kaksoissinikehitelmä pienimmän neliösumman menetelmällä käyttäen apuna esim. lineaarisen regressioanalyysin ohjelmaa. Täten esitetty kuormitus on käsitelty ja tulokset ovat olleet tyydyttäviä.

Potentiaalienergian minimin periaatetta voidaan käyttää laattojen likimääräiseen ratkaisemiseen. Matematiikassa siitä käytetään nimitystä Ritzin menetelmä. Laatan taipumafunktiota $w(x, y)$ haetaan sopivasti valittujen ns. koordinaattifunktioiden f_k lineaarikombinaationa muodossa

$$w(x, y) = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \ldots + a_n f_n(x, y).$$

Taipumafunktion kehitelmään valittujen koordinaattifunktioiden f_k kertoimia a_k pidetään vapaina parametreina ja laatan potentiaalienergian lauseke minimoidaan näiden suhteen. Tarkkuuden saavuttamiseksi on edullista valita koordinaattifunktiot niin, että ne toteuttavat mahdollisimman hyvin kaikki reunaehdot ja pystyvät kuvaamaan laatan taipumapintaa.

Kun potentiaalienergian lauseke derivoidaan vapaiden parametrien suhteen ja derivaatat merkitään nolliksi, joudutaan ratkaisemaan lineaarinen yhtälöryhmä kehitelmän kertoimien saamiseksi. Yhtälöryhmän oikean puolen vektorin komponentit ovat kuormituksesta riippuvia integraaleja, ja kerroinmatriisin alkio a_{ik} saadaan yleisesti suoraan kulloinkin tarkastellun laatan potentiaalienergian lausekkeesta suorittamalla siinä ns. polarisointi, ts. korvaamalla $\nabla^4 w$, $w^2{}_{xy}$ ja $2w_{xx}w_{yy}$ vastaavasti lausekkeilla $\nabla^2 f_i$ $\nabla^2 f_k$, $f_{ixy}f_{kxy}$ ja $f_{ixx}f_{kyy} + f_{kxx}f_{iyy}$. Kerroinmatriisista tulee symmetrinen. Jos tarkkuuden saavuttamiseksi on valittu suuri määrä koordinaattifunktioita, yhtälöryhmä täytyy ratkaista tietokoneella. Samalla kannattaa laskea koneella myös kerroinmatriisin alkiot lausekkeistaan sekä oikean puolen vektorin komponentit. Käytettäessä riittävän täydellistä koordinaattifunktioiden jonoa saadaan kehittelmällä mielivaltaisen tarkasti taipuman arvot, kun vain otetaan kyllin monta funktiota f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Käytännössä joudutaan tällöin ratkaisemaan esim. 50 x 50 yhtälöryhmiä tai suurempiakin. Kannattaa käyttää sellaista yhtälöryhmän ratkaisuohjelmaa, jossa iteroimalla tarkennetaan eliminoinnin antamaa ratkaisua, niin että kehitelmän kertoimet saadaan yhtälöryhmän ratkaisuna halutulla tarkkuudella. Tällöin taipumafunktion kehitelmällä lasketuissa taipuman arvoissa tulee olemaan ainoastaan menetelmän likimääräisyydestä johtuvaa virhettä. Dekompositiomenetelmään perustuva yhtälöryhmän ratkaisuohjelma on tehokas, sillä sitä käytettäessä tarvitsee yhtä laattaa, ts. yhtä kerroinmatriisia, kohti suorittaa eliminointityö vain kerran. Samaa laattaa erilaisilla kuormitustapauksilla, ts. erilaisilla yhtälöryhmän oikean puolen vektoreilla, laskettaessa säästetään huomattavasti koneaikaa, koska eliminointia ei tarvitse suorittaa moneen kertaan.

Yhtälöryhmän oikean puolen vektorin komponentit ovat lausekkeita, jotka lasketaan laatan pinnan yli ulotettuina integraaleina. Integroitavana funktiona on k:nnessa komponentissa kuormitusfunktion $q(x,y)$ ja k:nnen koordinaattifunktion f_k tulo. Tasaisen kuorman ($q(x,y)$ = vakio) tapauksessa nämä integraalit ovat helposti laskettavissa. Jos kuormana on pistevoima, niin tämän voiman suuruinen kuorma ajatellaan levitetyksi tasaisesti vaikutuspisteensä ympärillä olevalle pienelle »ε-ympäristölle», suoritetaan integrointi ja haetaan saadun lausekkeen raja-arvo, kun »ε-ympäristöä» pienennetään rajatta. Ko. pieni ympäristö voidaan valita sen muotoiseksi, että integrointi on helpoimmin suoritettavissa. Jos sitten kuormitus on jotain muuta kuin tasainen kuorma tai pistevoimaa, sen esittämiseksi voidaan muodostaa kehitelmä esim. pienimmän neliösumman menetelmällä. Oikean puolen vektorin komponenttien pintaintegraalit voitaisiin tietysti laskea numeerisesti, mutta kuormituskehitelmän käyttö on kuitenkin yksinkertaisempaa, jos valitut koordinaattifunktiot ovat keskenään ortogonaalisia siinä mielessä, että

$$\iint_a f_i \cdot f_k \cdot da = \delta_{ik}$$

ja kuormituksen ja taipumafunktion kehitelmät muodostetaan käyttäen samoja koordinaattifunktioita.

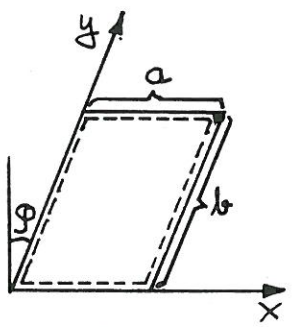
Kuormituskehitelmä pienimmän neliösumman menetelmällä saadaan vaikkapa käyttämällä lineaarisen regressioanalyysin ohjelmaa, jollainen lienee jokaisessa laskentakeskuksessa valmiina. Otaksutaan, että koordinaattifunktiot ovat selittäviä muuttujia ja kuormitusfunktio on selitettävä muuttuja. Pieni apuohjelma voi olla tarpeen näiden kuviteltujen havaintojen, ts. koordinaattifunktioiden arvojen, laskemiseksi regressioanalyysin ohjelmaa varten. Selitettävästä muuttujasta tehdyt havainnot ovat juuri kuormituksen arvot pisteissä, joissa se on mitattu. Lineaarisen regressioanalyysin ohjelmiin liittyy yleensä mahdollisuus painottaa eri havaintoja eri lailla. Onkin mielekästä painottaa selitettävän muuttujan, ts. kuormituksen, laatan keskustassa olevia arvoja enemmän kuin reunoilla olevia, koska niiden vaikutus taipumaan on vastaavasti suurempi. Regressioanalyysiohjelman antamaan kehitelmään kuuluva vakiotermi voidaan ymmärtää tasaiseksi kuormaksi. Jos samalla laatalla on kuormituksena pistevoimia, niin laatan ratkaisuohjelmasta kannattaa tehdä sellainen, että näiden kolmen erilaisen kuormituksen aiheuttamat taipumat superponoidaan.

Laatan potentiaalienergian lauseke riippuu reunaehdoista, ts. tukemistavasta, joten käytännössä joudutaan eri laatoille ohjelmoimaan erikseen se osa, jossa lasketaan yhtälöryhmän kerroinmatriisin alkiot.

Esimerkkinä on ratkaistu suunnikkaan muotoinen kaikilta sivuiltaan vapaasti tuettu isotrooppinen tasapaksu laatta, jonka kuormitus koostuu tasaisesta kuormasta, pistevoimista ja kehitelmällä esitettävästä ns. mielivaltaisesta kuormituksesta. On oletettu, että ohuiden laattojen teorian normaalit yksinkertaistavat otaksumat pitävät paikkansa. Kuvan 1. mukainen suunnikaskoordinaatisto (x,y) on ollut käytössä. Taipumafunktiolle on haettu kehitelmää

$$w(x,y) = a_1 f_1\,(x,y) + a_2 f_2\,(x,y) + \ldots + a_n f_n\,(x,y);$$

missä koordinaattifunktioina $f_k(x,y)$ on käytetty kaksoissinifunktioita $f_k(x,y) = \sin t\pi x/a \cdot \sin u\pi y/b$ Funktiot f_k on kehitelmää varten pantu jonoon siten, että k:n kasvaessa vastaavien kertoimien t ja u summa kasvaa monotonisesti, ts. f_k:t vastaavat kerroinpareja t, u seuraavasti



Kuva 1.

k	1	2	3	4	5	6	7 ...
(t, u)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(1,4) ...

Tämä järjestys on osoittautunut edulliseksi, sillä $w(x,y)$:n kehitelmän kertoimet a_i, $i = 1,2, \ldots, n$ tulevat tällöin pienemään melko tasaisesti. Ko. laatan potentiaalienergian lauseke on

$$W = \frac{K}{2} \iint_a [(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu)(w^2_{xy} \tag{1}$$

$$- w_{xx} w_{yy})] \, da - \iint_a q \, w da$$

Kun W:n lausekkeeseen (1) sijoitetaan $w(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x,y)$ ja merkitään osittaisderivaatat a_k:itten suhteen nolliksi ja näin saatujen yhtälöiden molemmat puolet vielä jaetaan $K/2$:lla, saadaan lineaarinen yhtälöryhmä, josta a_k:t voidaan ratkaista. Kerroinmatriisin alkiolle a_{ik} saadaan lauseke

$$a_{ik} = \iint_a [\nabla^2 f_i \, \nabla^2 f_k + (1-\nu)(2 f_{ixy} f_{kxy} \tag{2}$$

$$- f_{ixx} f_{kyy} - f_{iyy} f_{kxx})] da$$

ja oikean puolen vektorin komponentille b_k

$$b_k = \frac{1}{K} \iint_a q(x,y) \cdot f_k(x,y) da. \tag{3}$$

Kun sijoitetaan

$f_i(x,y) = \sin p\pi x/a \cdot \sin r\pi y/b$

$f_k(x,y) = \sin t\pi x/a \cdot \sin u\pi y/b$

yhtälöön (2) ja merkitään lyhyesti (ks. kuva 1.)

$c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$,

a ja b suunnikaslaatan sivujen pituudet,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ kun } i \neq j \\ 1, \text{ kun } i = j \end{cases} \text{ja } \delta'_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ kun } i \neq j \\ 0, \text{ kun } i = j \end{cases}$$

saadaan

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{9} d_j I_j \tag{4}$$

missä

$$I_1 = \frac{1}{4} p^4 \pi^4 \delta_{pt} \delta_{ru}$$

$$I_2 = (-p^2 tu \, \pi^2) \cdot \frac{2r}{r^2 - u^2} \cdot \frac{2p}{p^2 - t^2} \delta'_{pt} \delta'_{ru}$$

$$I_3 = I_5 = I_7 = \frac{1}{4} p^2 r^2 \pi^4 \delta_{pt} \delta_{ru}$$

$$I_4 = (-prt^2 \pi^2) \cdot \frac{2u}{u^2 - r^2} \frac{2t}{t^2 - p^2} \delta'_{pt} \delta'_{ru}$$

$$I_6 = (-pru^2 \pi^2) \cdot \frac{2u}{u^2 - r^2} \frac{2t}{t^2 - p^2} \delta'_{pt} \delta'_{ru}$$

$$I_8 = (-r^2 tu \, \pi^2) \cdot \frac{2r}{r^2 - u^2} \frac{2p}{p^2 - t^2} \delta'_{pt} \delta'_{ru}$$

$$I_9 = \frac{1}{4} r^4 \pi^4 \delta_{pt} \delta_{ru}$$

$$d_1 = \frac{b}{a^3 c^3}, \; d_2 = d_4 = -\frac{2s}{a^2 c^3}, \; d_3 = d_7 = \left(\frac{s^2}{c^2} + \nu\right) \frac{1}{abc}$$

$$d_5 = \left(2 \frac{s^2}{c^2} + 1 - \nu\right) \cdot \frac{2}{abc}, \; d_6 = d_8 = -\frac{2s}{b^2 c^3}, \; d_9 = \frac{a}{b^3 c^3}$$

Lausekkeen (3) mukaan laskemalla saadaan tasaisen kuorman q tapauksessa

$$b_k = \frac{abcq}{K\pi^2} \cdot \frac{1-(-1)^u}{u} \cdot \frac{1-(-1)^t}{t} \tag{5}$$

Jos laatalla on kuormituksena pistevoima F, F:n suuruinen kuorma kuvitellaan levitetyksi tasaisesti vaikutuspisteensä (x_0, y_0) suunnikkaan muotoiseen pieneen ympäristöön. Tämän »ε-ympäristön» sivujen pituuksia voidaan merkitä ε_1:llä ja ε_2:lla. Lasketaan sitten integraali (3) tämän pinta-alaltaan $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cos \varphi$:n suuruisen alueen yli ja haetaan saadun lausekkeen raja-arvo. Saadaan

$$b_k = \frac{F}{K} \cdot \sin t\pi \frac{x_0}{a} \cdot \sin u\pi \frac{y_0}{b} \tag{6}$$

Jos laatalla on muutakin kuormitusta kuin tasaista kuormaa ja pistevoimia, pienimmän neliösumman menetelmällä voidaan esim. lineaarisen regressioanalyysin ohjelman avulla muodostaa kuormituskehitelmä

$$q(x,y) = s_0 + s_1 f_1(x,y) + s_2 f_2(x,y) + \ldots + s_m f_m(x,y)$$

missä $f_k(x,y)$:t ovat samoja kaksoissinifunktioita, joita taipumafunktion $w(x,y)$ kehitelmässäkin käytettiin. Vakiotermi s_0 otetaan huomioon tasaisena kuormana. Kun $q(x,y)$:n kehitelmä sijoitetaan (3):en ja integroidaan, saadaan

$$b_k = \frac{abc}{4K} \cdot s_k \qquad (7)$$

Ohjelmapakkausta sovellettiin laskemalla suunnikaslaatan taipumia ja momentteja erilaisilla sivujen pituuksien suhteen ja kaltevuuskulman φ arvoilla, kun kuormitus koostui tasaisesta kuormasta, pistevoimasta ja kaksoissinikehitelmällä esitetystä kuormituksesta. Taipumafunktion kehitelmässä käytettiin 55 termiä. Suorakulmaisella laatalla, jolla siis kaltevuuskulma $\varphi = 0$, toteuttavat kaksoissinifunktiot kaikki reunaehdot tarkasti. Kun $\varphi \neq 0$, kaksoissinifunktiot eivät toteuta tarkasti sitä ehtoa, että momentti vapaasti tuetulla reunalla on nolla. Keskipisteen taipuman arvoissa virhe kasvoikin huomattavasti, kun φ kasvoi. Virhe oli n. 1 % kaltevuuskulman arvolla 10^0, ja laatalla jonka sivujen pituuksien suhde oli 1,5 ja kaltevuuskulma $\varphi = 30^0$ saatiin tasaisen kuormituksen tapauksessa keskipisteen taipuman arvo n. 5 %:n tarkkuudella.

Kirjallisuutta

Lehtinen, Pekka, Suunnikkaan muotoisen laatan ratkaiseminen Ritzin menetelmällä erilaisissa kuormitustapauksissa. Matematiikan erikoistyö, TKK, 1970.

Pekka Lehtinen, tekn.yo.