ERÄS AKSIAALISYMMETRISTEN KUORIEN JOUKKO, JONKA TAIVUTUSTEORIA RATKEAA ALKEISFUNKTIOIDEN AVULLA

MATTI OLLILA

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 3 No. 3—4 1970 ss. 72—74;
Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

Johdanto

Kuorirakenteista ehkä yleisin ja yksinkertaisin on kiertosymmetrisesti kuormitettu pyörähdyskuori, varsinkin tasapaksu ympyräsylinteri, jonka taivutusteoria johtaa analogiaan kimmoisella alustalla olevan tasajäykän palkin kanssa. Samoin pallokuoren taivutusjännitystarkastelu johtaa vastaaviin alkeisfunktioihin.

Useimmat muut kuorityypit eivät ole ratkaistavissa suljetussa muodossa tai ne ratkeavat vain monimutkaisten sarjafunktioiden avulla (vrt. esim. tasapaksu kartiokuori).

Kärkeenpäin lineaarisesti ohenevan kartiokuoren taivutusteorian tarkastelun yhteydessä ilmeni kokonainen kuoriparvi, jonka ratkaisu suljetussa muodossa on verrattain yksinkertainen. Nämä kuoret käsittävät varsin laajan muotovalikoiman eriasteisia pyörähdyspintoja, joille johdettuja tuloksia voitaneen käyttää hyväksi myös näistä vähän poikkeavien kuorien reunahäiriöiden likimääräisessä tarkastelussa.

Rotaatiokuoren yleinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\bar{E}I_z\,\frac{dz^2}{d^2u}\right] + \frac{EF_z}{r_z^{\,2}}\,u = p_z b_z \qquad (1)$$

missä

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$I_z = \frac{1}{12}\,b_z t_z^{\,3} \qquad (2)$$

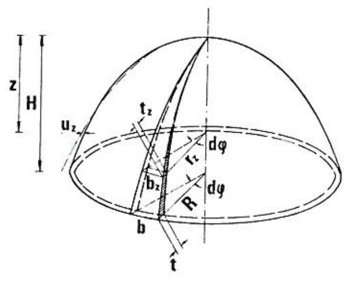
$$F_z = b_z t_z$$

Käsiteltävä kuorityyppi

$$\frac{t_z}{t} = \left(\frac{z}{H}\right)^{\alpha} = \zeta^{\alpha}\,(\alpha \geq 0)$$ [$\alpha < 0$ mielekäs vain lyhyille kuoren osille koska $t_0 = \infty$]

$$\frac{r_z}{R} = \frac{b_z}{b} = \left(\frac{z}{H}\right)^{\beta} = \zeta^{\beta} \qquad (4)$$

1



Homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuksi otaksutaan

$$u = \left(\frac{z}{H}\right)^{k} = \zeta^{k} \qquad (5)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{k(k-1)}{H^2}\,\zeta^{k-2}$$

Sijoittamalla em. arvot saadaan

$$\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{bt^3}{12}\,\frac{k(k-1)}{H^2}\,\frac{1}{H^2}\,\frac{d^2}{d\zeta^2}\,(\zeta^{3\alpha+\beta+k-2}) + \frac{Ebt}{R^2}\,\zeta^{\alpha-\beta+k} = 0 \qquad (6)$$

Siis

$$k(k-1)(k+3\alpha+\beta-2)(k+3\alpha+\beta-3)\,\zeta^{3\alpha+\beta+k-4} + \frac{12H^4(1-\nu^2)}{R^2t^2}\,\zeta^{\alpha-\beta+k} = 0 \qquad (7)$$

Ehto 1 $\alpha + \beta = 2$ (8)

määrittelee kuoren ja **ehto 2**

$$k(k-1)(k+2\alpha)(k+2\alpha-1) + \frac{12H^4(1-\nu^2)}{R^2t^2} = 0 \qquad (9)$$

määrittelee arvon "k".

Arvon "k" ratkaisu

$$x = k + \alpha - \tfrac{1}{2} \qquad (10)$$

$$\gamma^4 = \frac{12\,H^4\,(1-\nu^2)}{R^2 t^2} \qquad (11)$$

Yhtälö (9) saa täten muodon

$$[x^2-(\alpha-\tfrac{1}{2})^2]\,[x^2-(\alpha+\tfrac{1}{2})^2]+\gamma^4=0 \qquad (12)$$

josta seuraa edelleen (13)

$$x^2=\alpha^2+\tfrac{1}{4}\pm i\sqrt{\gamma^4-\alpha^2}=(\pm\,\omega\pm i\,\Phi)^2$$

Ratkaisemalla ω ja φ saadaan

$$\omega=\gamma\sqrt{\sqrt{1+\frac{(\alpha^2+\frac{1}{4})^2-4\,\alpha^2}{4\,\gamma^4}}+\frac{\alpha^2+\frac{1}{4}}{2\,\gamma^2}} \qquad (14)$$

$$\Phi=\gamma\sqrt{\sqrt{1+\frac{(\alpha^2+\frac{1}{4})^2-4\,\alpha^2}{4\,\gamma^4}}-\frac{\alpha^2+\frac{1}{4}}{2\,\gamma^2}}$$

Kaavojen (10) ja (13) perusteella on

$$k_{1,\,2,\,3,\,4}=-(\alpha-\tfrac{1}{2})\pm\omega\pm i\Phi\;[\,|\,\alpha\,|<\gamma^2] \qquad (15)$$

Homogeenisen siirtymäyhtälön yleinen ratkaisu

$$u=\zeta^{\,\omega-\alpha+\frac{1}{2}}\,[A\sin(\Phi\,log\,\zeta)+B\cos(\Phi\,log\,\zeta)]+ \qquad (16)$$
$$+\,\zeta^{-\omega-\alpha+\frac{1}{2}}\,[\text{Ç}\sin(\Phi\,log\,\zeta)+D\cos(\Phi\,log\,\zeta)]$$

Pitkä kuori

$u(0)\neq\infty$, siis $C=D=0$, koska $\omega>\gamma>\alpha-\frac{1}{2}$

Siirtymäfunktion analyysi

$$\begin{aligned}
S &= \sin(\Phi\,log\,\zeta)\\
\text{Ç} &= \cos(\Phi\,log\,\zeta) \qquad (17)\\
\varkappa &= \omega-\alpha+\tfrac{1}{2}\\
u_1 &= \zeta^{\varkappa}S\\
H\,u_1' &= \zeta^{\,\varkappa-1}\,(\varkappa\,S+\Phi\,\text{Ç})\\
H^2u_1'' &= \zeta^{\,\varkappa-2}\,[(\varkappa^2-\varkappa-\Phi^2)\,S+(2\,\varkappa\,\Phi-\Phi)\,\text{Ç}] \qquad (18)\\
H^3u_1''' &= \zeta^{\,\varkappa-3}\,[(\varkappa-1)\,(\varkappa-2-3\,\Phi^2)\,S+(3\,\varkappa^2\,\Phi-6\,\varkappa\,\Phi+2\,\Phi-\Phi^3)\text{Ç}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \zeta^{\,\varkappa}\,\text{Ç}\\
H\,u_2' &= \zeta^{\,\varkappa-1}\,(\varkappa\,\text{Ç}-\Phi\,S) \qquad (19)\\
H^2u_2'' &= \zeta^{\,\varkappa-2}\,[(\varkappa^2-\varkappa-\Phi^2)\,\text{Ç}-(2\,\varkappa\,\Phi-\Phi)\,S]\\
H^3u_2''' &= \zeta^{\varkappa-3}\,[(\varkappa-1)\,(\varkappa-2-3\,\Phi^2)\,\text{Ç}-(3\,\varkappa^2\,\Phi-6\,\varkappa\,\Phi+2\,\Phi-\Phi^3)\,S]
\end{aligned}$$

Pitkä kuori ($z_0\lesssim 0.5\,H$)

$u'''(0)\neq\infty$ siis $\varkappa-3>0$, siis $\omega>\gamma>\alpha+\dfrac{5}{2}$

$$\left.\begin{aligned}
S&=0,\,\text{kun}\;\zeta=exp\left(-\frac{2n}{\Phi}\pi\right)\\
\text{Ç}&=0,\,\text{kun}\;\zeta=exp\left(-\frac{2n+1}{\Phi}\pi\right)
\end{aligned}\right\}\; n=0,1,2,\ldots$$

Arvon "γ" kasvaessa lyhenee häiriöalue nopeasti ja tällöin verrattain lyhytkin katkaistu kuori toimii täysipitkän kuoren tavoin. Samalla $\omega\to\Phi\to\gamma$

Leikkausvoima q tasolla $z=H$

$$u=\zeta^{\varkappa}\,[A\sin(\Phi\,log\,\zeta)+B\cos(\Phi\,log\,\zeta)]$$

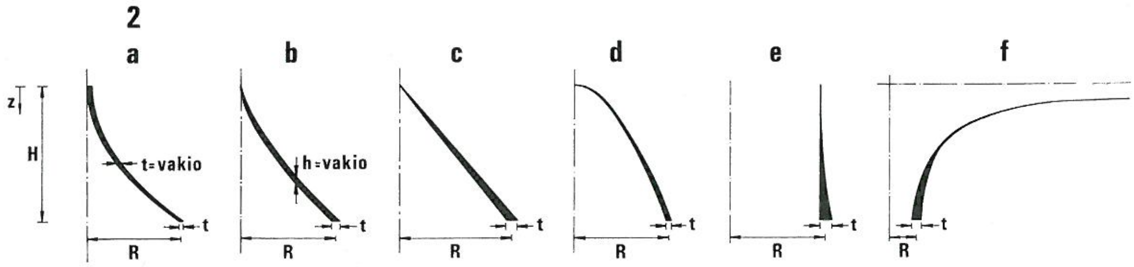
vrt. (16)

$$\left.\begin{aligned}
&u''(1)=0,\ \text{siis}\ A\,(2\,\varkappa\Phi-\Phi)+B\,(\varkappa^2-\varkappa-\Phi^2)=0 \quad \bar{E}I_1u'''(1)=-\,qb,\\
&\text{siis}\ A\,(3\,\varkappa^2\,\Phi-6\,\varkappa\Phi+2\,\Phi-\Phi^3)+\\
&\quad+B\,(\varkappa-1)\,(\varkappa-2+3\,\Phi^2)\\
&=-\,\frac{12\,q\,(1-\nu^2)}{\mathrm{E}}\left(\frac{H}{t}\right)^3 \qquad (20)
\end{aligned}\right\}\mathrm{A,B}$$

Momentti μ tasolla $z=H$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{E}I_1u''(1)=-\,\mu b,\ \text{siis}\ A\,(2\,\varkappa\Phi-\Phi)+\mathrm{B}\,(\varkappa^2-\varkappa-\Phi^2)=\\
&=-\,\frac{12\,\mu\,(1-\nu^2)}{EH}\left(\frac{H}{t}\right)^3 \qquad (21)\\
&u'''(1)=0,\ \text{siis}\ A\,(3\,\varkappa^2\Phi-6\,\varkappa\,\Phi+2\,\Phi-\Phi^3)\\
&\quad+B\,(\varkappa-1)\,(\varkappa-2+3\,\Phi^2)=0
\end{aligned}\right\}\mathrm{A,B}$$

Yhdistämällä näihin tuloksiin kalvojännitystilan mukaiset liikkeet voidaan kuoriryhmän taivutusjännitystila pitää ratkaistuna.



Erikoistapaukset

a) $\alpha = 0$; $\beta = 2$

Abskissa-akselin ympäri pyörähtänyt paraabeli. $t =$ vakio

b) $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \dfrac{3}{2}$
$h =$ vakio

c) $\alpha = 1$; $\beta = 1$

Lineaarisesti paksuudeltaan muuttuva kartio

d) $\alpha = \dfrac{3}{2}$; $\beta = \frac{1}{2}$

Paraboloidi

e) $\alpha = 2$; $\beta = 0$

Paksuudeltaan paraboolisesti muuttuva lieriö

f) $\alpha = 3$; $\beta = -1$

Asymptoottinsa ympäri pyörähtänyt hyperbeli.

Kirjallisuutta

Ylinen, Kimmo ja lujuusoppi I—II.
Fischer, Theorie und Praxis der Schalenkonstruktionen.
Girkmann, Flächentragwerke.
Born, Praktische Schalenstatik.
Hetenyi, Beams on Elastic Foundation.