

VANERILAATTOJEN LASKEMINEN SUURTEN TAIPUMIEN TEORIAN MUKAAN

HEIKKI RAUTAKORPI

Rakenteiden Mekaniikka Vol 3 No. 2 1970 ss. 36–45;
Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

Yhteenveto: Artikkelissa sovelletaan suurten taipumien teoriaa vapaasti tuettuihin vanerilaattoihin. Yhtälöiden johtoa ei suoriteta, vaan se sivuutetaan viittaamalla runsaaseen lähdekirjallisuuteen. Ratkaisu suoritetaan differenssimenetelmällä, jossa kiinnitetään erityistä huomiota kuormituksen jakamiseen verkon solmupisteille ja iteroinnin kiihdyttämiseen yhtälöryhmää ratkaistaessa. Esimerkkinä tarkastellaan jännitysten jakaantumista tasaisen kuorman ja keskeisen aluekuorman kuormittamassa neliölaatussa. Lopuksi esitetään käyrästöjä kuivan, neliön muotoisen koivu-vanerilaatan taipuman ja murtokuorman määrittämissä, kun kuormituksena on keskeinen aluekuorma.

1. Johdanto

Kimmoisen kappaleen muodonmuutostilaa käsiteltäessä joudutaan venymien ja kiertymien suhteen tekemään tiettyjä oletuksia. Tällöin päädytään erilaisiin lähtöyhtälöihin riippuen siitä, mikä on näiden absoluuttinen ja suhteellinen suuruus. Siirryttäessä yleisestä teoriasta lineaariseen teoriaan voidaan erottaa seuraavat vaiheet [1]:

- ei rajoituksia,
- venymät ovat pieniä,
- myöskin kiertymät ovat pieniä, mutta ne ovat kuitenkin huomattavasti suurempia kuin venymät,
- venymät ja kiertymät ovat pieniä ja samaa suuruusluokkaa.

Kaksi ensin mainittua tapausta ovat käytännössä harvinaisia ja ne ovat tarpeen vain erikoistapauksissa. Viimeinen kohta johtaa lineaariseen kimmoteoriaan, joten se on käytännön kannalta tärkein. Näiden väliin jäävä c) tapaus tunnetaan laattateoriassa nimellä »suurten taipumien teoria» (large deflection theory). Siinä otetaan huomioon laatan taipumasta aiheutuvat kalvovoimat, joilla voi olla hyvinkin suuri vaikutus laatan taipumaan ja jännitystilaan. Näin on laita mm. vanerilaa-talla, kuten seuraavasta nähdään.

2. Alkuolettamukset

Vanerilaatalla ymmärretään seuraavassa suorakaidelaattaa, jonka muodostaa tavallinen ristivaneri siten, että viilujen syiden suunnat yhtyvät tukien suuntiin. Laatan toiminnasta tehdään seuraavat olettamukset:

- leikkausmuodonmuutokset laatan tasoa vastaan kohtisuorissa tasoissa oletetaan nolliksi, ts. leikkausjäykkyydet $A_{44} = A_{55} = \infty$ [9],
- laatan taipumafunktion derivaatat ovat pieniä, ts. voidaan olettaa $\sin \alpha = \tan \alpha$, $\cos \alpha = 1$, kun α on laatan keskitason kulmanmuutos.

3. Jäykkyysvakiot

Vanerin kimmoisia ominaisuuksia on käsitelty artikkelissa [9]. Jos siinä tehtyjen alkuolettamusten lisäksi poikkisuuntaisten viilujen kimmomoduuli oletetaan nolliksi, saadaan tavallisen hiomattoman vanerin jäykkyysvakioille kaavat

$$A_{11} = \frac{n+1}{2} E_1 t \quad (1)$$

$$A_{12} = \nu_x A_{22} \quad (2)$$

$$A_{22} = \frac{n-1}{2} E_1 t \quad (3)$$

$$A_{33} = G_3 h \quad (4)$$

$$D_{11} = [12(n-1)^2 + (n-1)(n-3)(n-5)] \frac{E_1 t^3}{24} \quad (5)$$

$$D_{12} = \nu_x D_{22} \quad (6)$$

$$D_{22} = (n^2-1)(n-3) \frac{E_1 t^3}{24} \quad (7)$$

$$D_{33} = [6(n-1)^2 + (n-1)(n-2)(n-3)] \frac{G_3 t^3}{12} \quad (8)$$

missä n on viilujen lukumäärä,
 t viilun paksuus,
 $h = nt$ vanerin paksuus,
 E_1 pituussuuntaisen viilun kimmo-
 moduuli,
 G_3 liukumoduuli, kun liukuma ta-
 pahtuu vanerin tasossa,
 ν_x suurempi vanerin suppeuma-
 luvuista.

$$K = \frac{1}{A_{33}} - \frac{2 A_{12}}{A_{11} A_{22}} \quad (12)$$

Yhtälöiden ratkaisemiseen palataan koh-
 dassa 6.

Kun tuntemattomat w ja f on ratkaistu,
 saadaan laatan normaalivoimat, leikkausvoi-
 mat ja momentit yhtälöistä

Vääntöjäykkyys voidaan laskea myös kaa-
 vasta

$$D_{33} = \frac{G_3 h^3}{12} \quad (8a)$$

jonka antama tulos eroaa edellisestä sitä vä-
 hemmän mitä paksummasta vanerista on ky-
 symys.

4. Perusyhtälöt

Suurten taipumien laattateoriaa on käsi-
 teltä runsaasti kirjallisuudessa, joten yhtälöi-
 den johdon suhteen tyydytään vain viittaa-
 maan teoksiin [2] – [6]. Niistä [2] ja [3] kä-
 sittelevät pääasiassa isotrooppista laattaa,
 kun taas teoksissa [4] ja [5] laatta oletetaan
 ortotrooppiseksi. Teoksessa [6] yhtälöiden
 johto suoritetaan vieläkin yleisemmässä muo-
 dossa.

Suurten taipumien teorian perustana on
 kaksi neljännen kertaluvun epälineaarista
 differentiaaliyhtälöä taipuman w ja jänni-
 tysfunktion f suhteen. Edellä esitettyjen
 jäykkyysvakioiden avulla ne voidaan kirjoit-
 taa muotoon

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x,y) +$$

$$+ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{A_{22}} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + K \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{A_{11}} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$\text{missä} \quad H = D_{12} + 2 D_{33} \quad (11)$$

$$N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (13)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (14)$$

$$N_{xy} = - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (15)$$

$$Q_x = - D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - H \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (16)$$

$$Q_y = - D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (17)$$

$$M_x = - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (18)$$

$$M_y = - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$M_{xy} = - 2 D_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (20)$$

Vanerin vastusvakioiden [9] avulla näistä on
 helppo laskea jännitykset laatan poikkileik-
 kausissa.

5. Reunaehdot

Vanerilaatta oletetaan seuraavassa vapaasti
 tuetuksi, joten taipumafunktion reunaehdot
 reunalla $x = 0$ ovat

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (21)$$

Tämän lisäksi on jännitysfunktion f täytet-
 tävä tietyt ehdot, jotka riippuvat kalvovoi-
 mien ja siirtymien suuruudesta laatan reu-

nalla. Niistä oletetaan, että laatta pääsee vapaasti liukumaan tuella, jolloin

$$N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ ja } N_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Näistä ensimmäisen ehdon mukaan jännitys-funktion kuvaaja reunalla on suora ja toisesta ehdosta seuraa, että jännitysfuncti-
on derivaatta $\frac{\partial f}{\partial x}$ on vakio pitkin reunaa. Koska ehtojen täytyy toteutua myös laatan nurkkapisteissä, ne voidaan kirjoittaa muotoon

$$f = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

Jännitysfuncti-
on reunaehdot ovat siis samat kuin taipumafuncti-
on reunaehdot kiinnitetyllä reunalla.

6. Ratkaisun periaate

Yhtälöryhmä (9) – (10) voidaan ratkaista erilaisilla menetelmillä riippuen mm. laatan kuormituksesta ja reunaehdoista. Joustavin menetelmä on differenssimenetelmä, jonka käyttöä on seikkaperäisesti selostettu läh-
teessä [4]. Muista menetelmistä mainittakoon energiomenetelmät [5,7] ja ratkaisu Fourier'n sarjojen avulla [8]. Tässä ratkaisu suoritetaan differenssimenetelmällä.

6.1. Kuormituksen jakaminen differenssiverkon solmupisteille

Jos kuormitus on jakaantunut pienehkölle alueelle, differenssimenetelmä tulee helposti epätarkaksi. Tarkkuutta voidaan jossain määrin parantaa kiinnittämällä tarpeellista huomiota kuormituksen jakamiseen. Jos kuvan 1 a esittämässä tapauksessa laatan jäykkyys oletetaan äärettömän suureksi, jakaantuu pistekuorma P eri nurkkapisteille seuraavasti:

$$P_1 = \frac{h-c}{h} \cdot \frac{k-d}{k} \cdot P \quad (23)$$

$$P_2 = \frac{c}{h} \cdot \frac{k-d}{k} \cdot P \quad (24)$$

$$P_3 = \frac{c}{h} \cdot \frac{d}{k} \cdot P \quad (25)$$

$$P_4 = \frac{h-c}{h} \cdot \frac{d}{k} \cdot P \quad (26)$$

Jos kuormituksen jakaantuminen on kuvan 1 b mukainen tasainen kuorma, saadaan integroinnin jälkeen

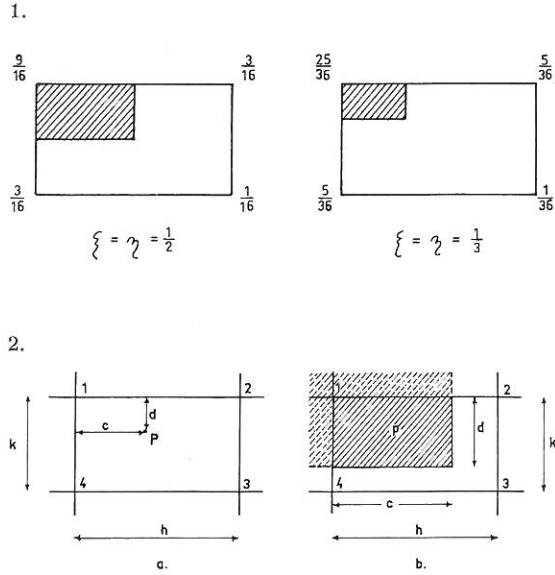
$$p_1 = \xi \eta \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) h k p \quad (27)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \xi^2 \eta \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) h k p \quad (28)$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \xi^2 \eta^2 h k p \quad (29)$$

$$p_4 = \frac{1}{2} \xi \eta^2 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) h k p \quad (30)$$

missä $\xi = \frac{c}{h}$ ja $\eta = \frac{d}{k}$. Pari esimerkkiä kuormituksen jakaantumisesta on esitetty kuvassa 2.



Kuva 1. Kaavojen (23) – (30) merkinnät
Fig. 1. Notations of equations (23) – (30)

Kuva 2. Esimerkkejä kuormituksen jakaantumisesta
Fig. 2. Two examples of load distribution

6.2. Yhtälöryhmän ratkaisu

Differenssimenetelmä perustuu siihen, että differentiaaliyhtälö voidaan korvata likimääräisellä matriisiyhtälöllä. Niinpä yhtälöt (9) ja (10) voidaan kirjoittaa likimääräiseen muotoon

$$\mathbf{W}\mathbf{W}(\mathbf{F}) * \mathbf{W} = \mathbf{P} \quad (31)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{F} * \mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{W}) \quad (32)$$

missä $\mathbf{W}\mathbf{W}$ ja $\mathbf{F}\mathbf{F}$ ovat neliömatriiseja, joiden alkioit riippuvat laatan jäykkyysvakioista (ja argumentiksi merkitystä vektorista), differenssiverkon solmupisteiden taipumista koostuva vektori, \mathbf{W} on jännitysfunktion arvoista koostuva vastaava vektori, \mathbf{F} kuormitusvektori, \mathbf{P} vektori, joka riippuu yksinomaan taipuman arvoista verkon solmupisteissä, \mathbf{R}

Nämä voidaan ratkaista iteroimalla seuraavasti:

$$\mathbf{W}_n = [\mathbf{W}\mathbf{W}(s * \mathbf{F}_{n-2} + (1 - s) * \mathbf{F}_{n-1})]^{-1} * \mathbf{P} \quad (33)$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} * [\mathbf{R}(\mathbf{W}_n)] \quad (34)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Iterointi aloitetaan arvoilla $\mathbf{F}_{-1} = \mathbf{F}_0 = 0$. Vakioille s olisi annettava sellainen arvo, että menetelmä konvergoisi mahdollisimman nopeasti. Tämä riippuu mm. laatan paksuuden suhteesta jännemittaan siten, että jos laatta on paksu, niin s on lähellä nollaa. Laatan ohessa optimaalinen s :n arvo suurenee. Vanerilaattoja laskettaessa päästään parhaaseen tulokseen, kun s vaihtelee välillä $0,1 \dots 0,7$. Tällöin saavutetaan yleensä riittävä tarkkuus $3 \dots 6$ iteraatiokierroksella. Konvergenssin kiihdytyksen merkitystä on syytä erityisesti korostaa, sillä jo lineaarisen yhtälön ratkaiseminen differenssimenetelmällä on suuritöistä ja työ määrä kasvaa moninkertaiseksi yhtälöiden epälineaarisuuden ansiosta.

Differenssimenetelmän yksityiskohtia ei tässä yhteydessä tarkastella, sillä menetelmästä on olemassa runsaasti kirjallisuutta,

josta mainittakoon nimenomaan yhtälöiden (31) ja (32) ratkaisuun keskittyvä lähde [4].

6.3. Tulosten tarkkuudesta

Differenssimenetelmän tarkkuus riippuu ratkaisevasti kuormituspinnan suuruudesta. Niinpä jos kuormituksena on laajalle alueelle jakaantunut tasainen kuorma, päästään helposti 1 % tarkkuuteen sekä taipumien että jännitysten arvoissa. Kuormitusalueen pieneessä tulokset tulevat epätarkemmiksi siten, että kun kuormitusalueen leveyden suhde jännemittaan $\frac{a}{l} = 0,1$, niin virheen ylärajana voidaan pitää 2 % taipumalle ja n. 7 % jännityksille. Virhearviota vaikeuttaa se, ettei suurten taipumien teorian mukaisia tarkkoja tuloksia ole saatavissa, joten virherajoja on pidettävä vain suuntaa antavina.

7. Esimerkki

Otetaan tarkasteltavaksi 9-viuluinen $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$:n neliölaatta 7 % kosteustilassa (huonekosteudessa). Tällöin koivuvanerin kimmovakiot ovat [10]

$$E_1 = 190\,000 \text{ kp/cm}^2$$

$$G_3 = 7\,350 \text{ kp/cm}^2$$

$$\nu_x = 0,06$$

$$\text{viilunpaksuus } t = 0,1365 \text{ cm}$$

$$\text{ja murtolujuudet } \sigma_t = 1\,250 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_r = 60 \text{ kp/cm}^2$$

Laatta on laskettu kohdassa 6 esitetyllä menetelmällä kahdelle kuormitustapaukselle: a) laattaan vaikuttaa tasainen kuorma $p = 4\,000 \text{ kp/m}^2$, b) kuormitus $P = 1\,000 \text{ kp}$ on jakaantunut tasaisesti $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$:n suorikkuudelle laatta keskellä. Kuormitukset on valittu tarkoituksellisesti näin suuriksi, jotta kalvojännitysten vaikutus saataisiin paremmin esille. Laskuissa on käytetty kuvan 3 mukaista differenssiverkkoa, jolloin ohjelman ajoaika Elliott - 503:lla on n. 3 min.

Tärkeimmät tulokset on esitetty graafisesti kuvissa 4-11, joihin on lisäksi merkitty katkoviivoilla lineaarisen laattateorian antamat tulokset. Niistä nähdään, että esimerkkitaapauksissa lineaarinen teoria johtaa aivan väärin tuloksiin. Tarkempaa menetelmää on siis syytä käyttää varsinkin laattojen murtokuormia laskettaessa.

Reunaehdoista todettakoon, että ne ovat kalvojännitysten syntymistä ajatellen varsin epäedulliset. Jos laatan reuna voitaisiin olettaa liikkumattomaksi, kalvojännitysten vaikutus laatan taipumaan ja jännitystilaan olisi vieläkin suurempi. Käytännössä täysin liikkumaton reuna on kuitenkin vaikea saada aikaan.

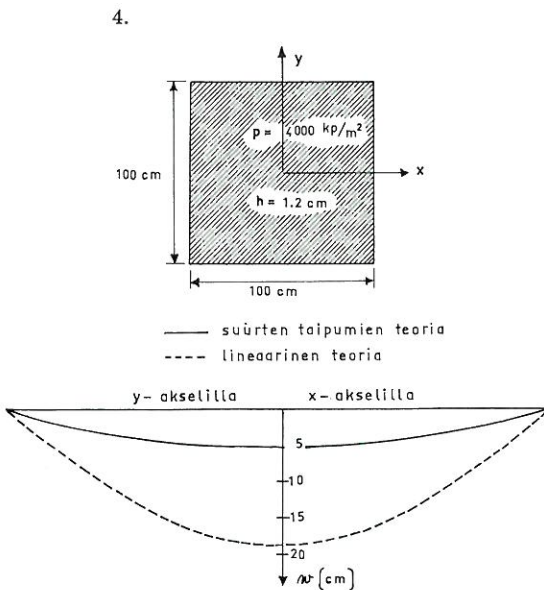
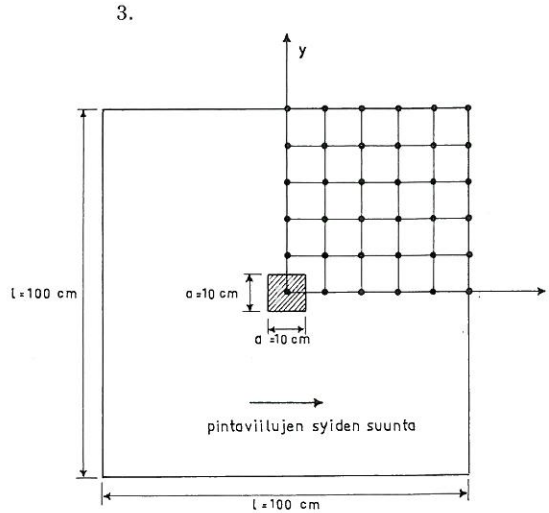
8. Laskettuja tuloksia

Kuvissa 12–16 esitetyt tulokset on laskettu koivuvaneriille 7 % kosteustilassa. Niistä nähdään, miten kalvojännitysten vaikutus suurenee suhteen — laatan paksuus/jännemitta — pienessä. Erityisen mielenkiintoinen on kuvan 16 käyrästä, jonka mukaan jokaisella neliölaattalla on tietty jännemitta, jolla murtokuorma saavuttaa minimin. Jännemitan noustessa tätä arvoa suuremmaksi tulee kalvojännitysten vaikutus niin suureksi, että murtokuorma alkaa nousta. Toisaalta jännemitan lyhetyssä murtokuorma saavuttaa eräässä kohdassa maksimin, jonka jälkeen sen teorian mukaan pitäisi pienetä. Tämä johtuu siitä, että laatta murtuu tällöin leikkausvoiman vaikutuksesta.

9. Loppulause

Edellä on tarkasteltu kalvojännitysten vaikutusta vanerilaattojen toimintaan. Esitys rajoittuu pelkästään teoreettisiin tuloksiin. Näiden tarkistamiseksi on Valtion teknillisen tutkimuslaitoksen sillarakennus- ja staattisessa laboratoriossa suoritettu runsaasti kokeita, joiden tulokset on esitetty lähteessä [10].

Lopuksi on syytä korostaa, että edellä esitetyt tulokset on laskettu nimenomaan vanerilaatoille, eikä niitä voida suoraan soveltaa esim. betoni- tai teräslaattoihin. Tämä johtuu materiaalien erilaisista kimmo- ja lujuusominaisuuksista.



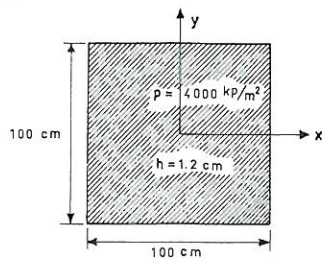
Kuva 3. Laskuissa käytetty differenssiverkko

Fig. 3. The network used in the calculations

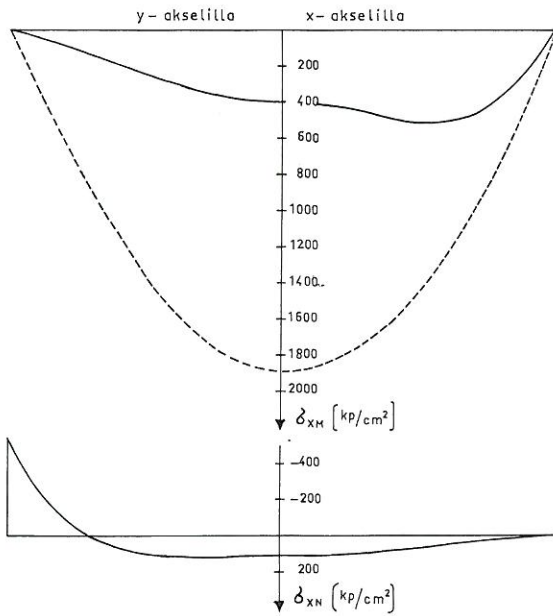
Kuva 4. Kalvojännitysten vaikutus tasaisesti kuormitetun neliölaatan taipumaan

Fig. 4. The effect of membrane stresses to the deflection of a uniformly loaded square plate

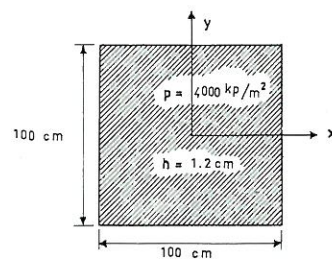
5.



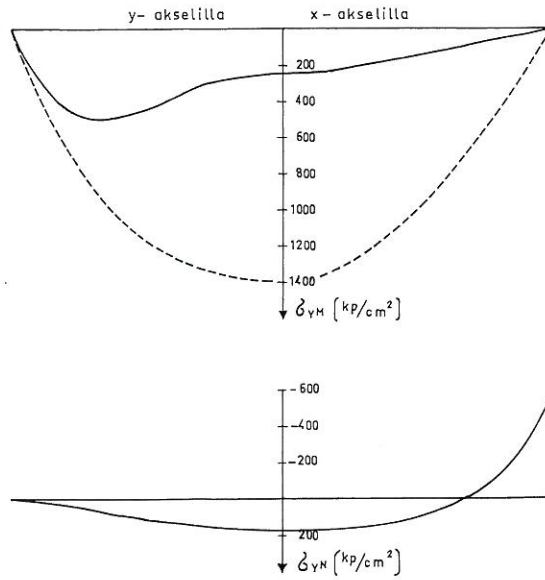
— suurten taipumien teoria
 ---- lineaarinen teoria



6.

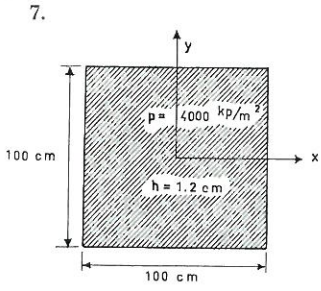


— suurten taipumien teoria
 ---- lineaarinen teoria

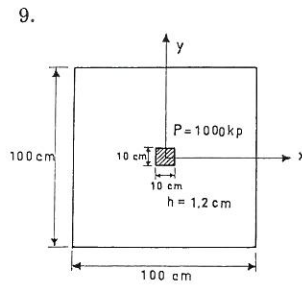
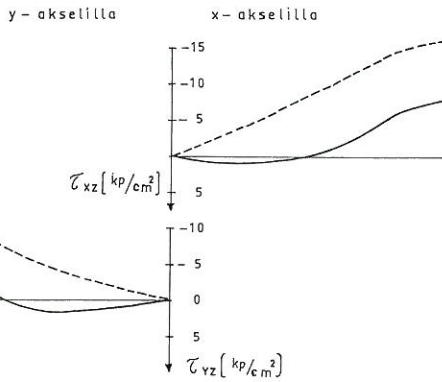


Kuvat 5–6. Kalvojännitysten vaikutus tasaisesti kuormitetun neliölaatan taivutusjännityksiin

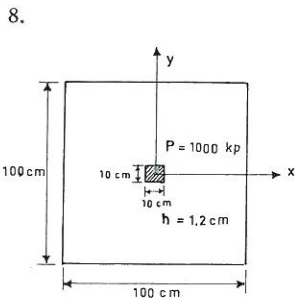
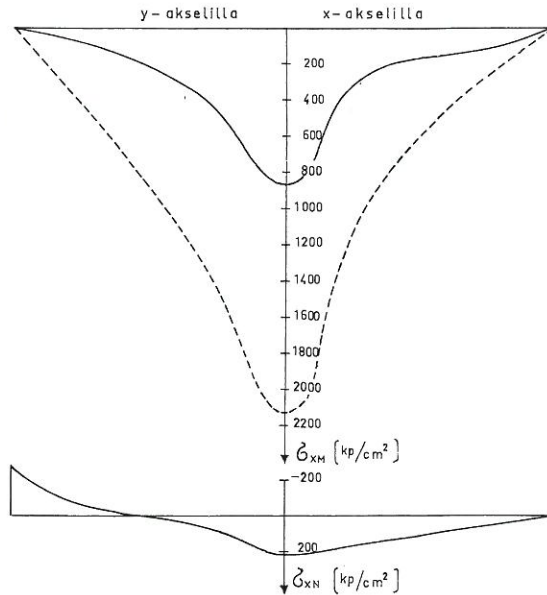
Figures 5–6. The effect of membrane stresses to the bending stresses of a uniformly loaded square plate



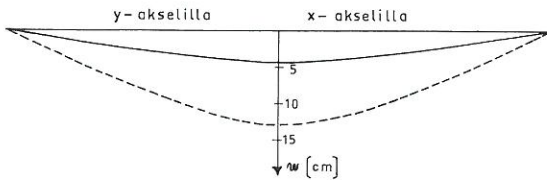
— suurten taipumien teoria
 ---- lineaarinen teoria



— suurten taipumien teoria
 ---- lineaarinen teoria



— suurten taipumien teoria
 ---- lineaarinen teoria



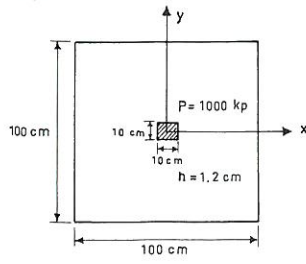
Kuva 7. Kalvojännitysten vaikutus tasaisesti kuormitetun neliölaatan leikkausjännityksiin

Fig. 7. The effect of membrane stresses to the shear stresses of a uniformly loaded square plate

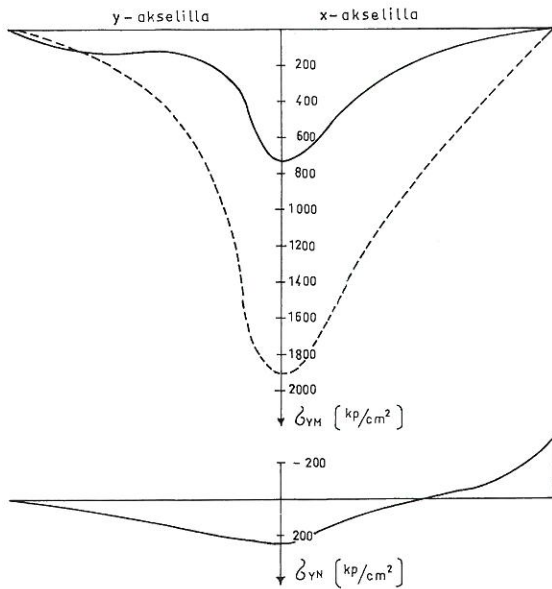
Kuva 8. Kalvojännitysten vaikutus keskeltä kuormitetun neliölaatan taipumaan

Fig. 8. The effect of membrane stresses to the deflection of a square plate with a central load

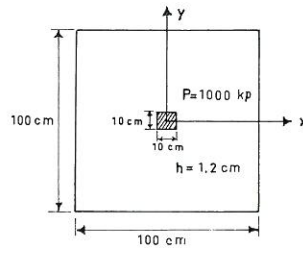
10.



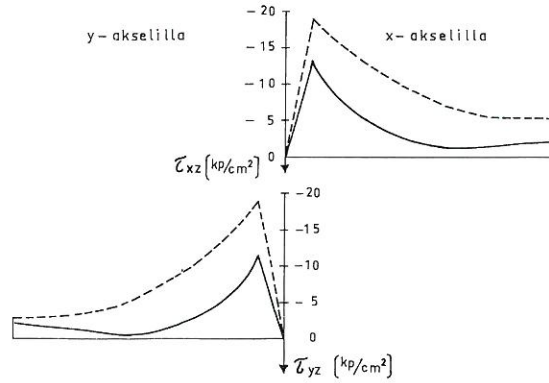
— suurten taipumien teoria
 ---- lineaarinen teoria



11.



— suurten taipumien teoria
 ---- lineaarinen teoria



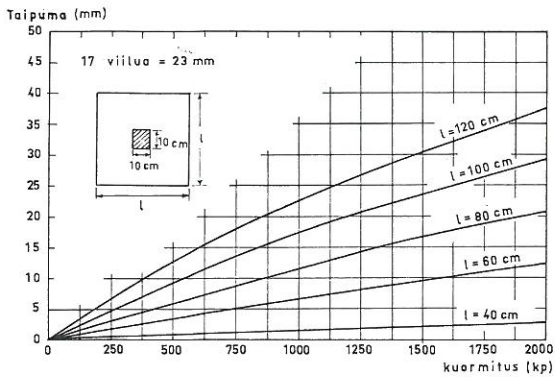
Kuvat 9–10. Kalvojännitysten vaikutus keskeltä kuormitetun neliölaatan taivutusjännityksiin

Figures 9–10. The effect of membrane stresses to the bending stresses of a square plate with a central load

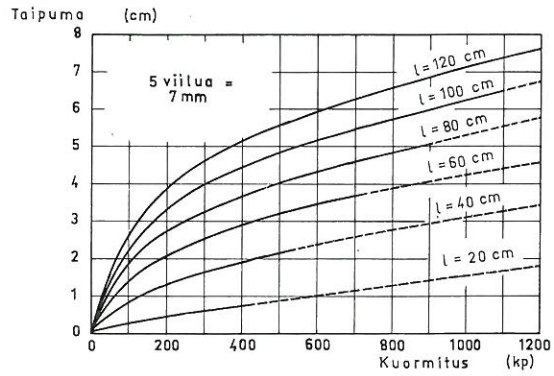
Kuva 11. Kalvojännitysten vaikutus keskeltä kuormitetun neliölaatan leikkausjännityksiin

Fig. 11. The effect of membrane stresses to the shear stresses of a square plate with a central load

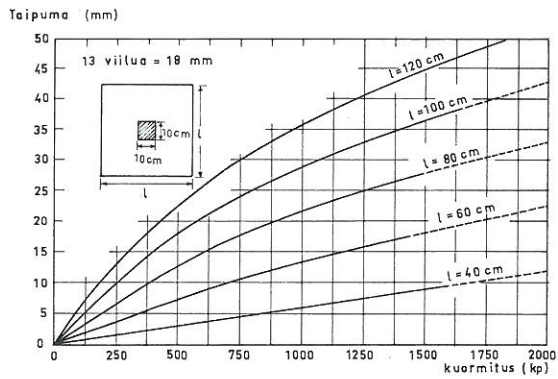
12.



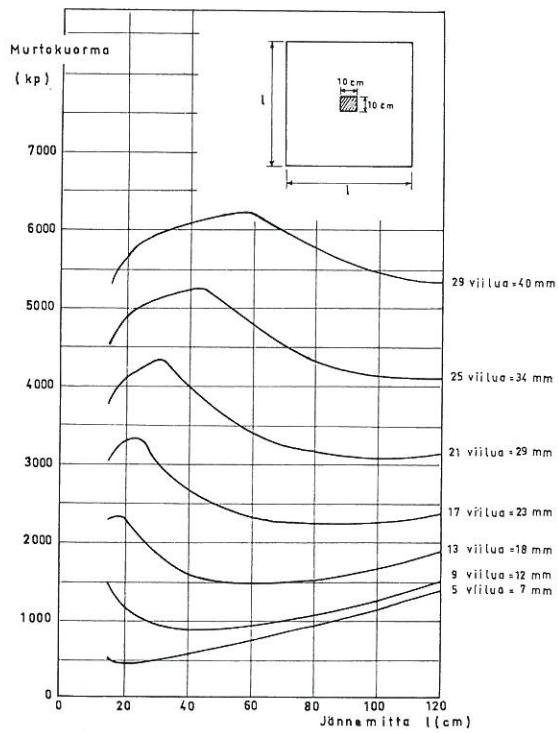
15.



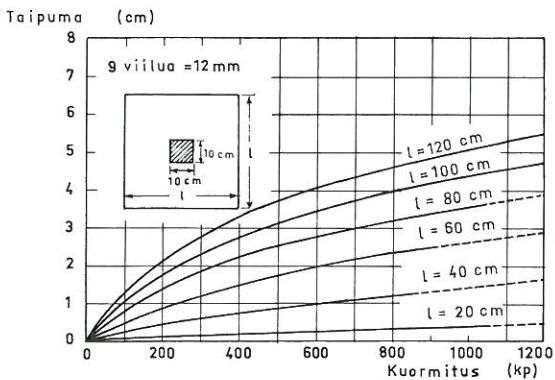
13.



16.



14.



Käytettyjä merkintöjä

A_{ij}, D_{ij}	jäykkyyssvakiot
E_1	kimmomoduuli viilun syiden suuntaan
FF	jäykkyyssvakioista riippuva neliömatriisi
F	jännitysfunktiovektori
G_3	liukumoduuli laatan tasossa
H, K	kaavojen (11) ja (12) mukaisia apusuureita
M_x, M_y, M_{xy}	momentit
N_x, N_y	normaalivoimat
N_{xy}, Q_x, Q_y	leikkausvoimat
P	kuormitusvektori
P	kuormitusvektori
R = R(W)	apuvektori
WW	jäykkyyssvakioista ja vektorista F riippuva neliömatriisi
W	taipumavektori
c, d, h, k	kuvan 1 mukaisia merkintöjä
f	jännitysfunktio
h	vanerin paksuus
n	viilujen lukumäärä, positiivinen kokonaisluku
$p = p(x, y)$	kuormitus
s	iteraation konvergenssiä säätelevä kerroin
t	viilun paksuus
w	taipuma
$\eta = \frac{d}{k}$	
ν_x	vanerin suppeumakerroin
$\xi = \frac{c}{h}$	
σ	normaalijännitys
σ_t	taivutuslujuus
τ_{xz}, τ_{yz}	leikkausjännitykset
τ_r	leikkauslujuus (rolling shear)

Alaviitat

- 11' x pintaviilujen syiden suuntaan
 22' y kohtisuoraan pintaviilujen syiden suuntaan
 33 liittyy laatan suuntaiseen leikkausjännitykseen sen tasoa vastaan kohtisuorassa tasossa
 M aiheutuu momentista
 N aiheutuu normaaliivoimasta

Kirjallisuutta

1. *Novozhilov, V. V.*, Theory of elasticity. Lontoo 1961, ss. 1–62.
2. *Timoshenko, S.*, Theory of plates and shells. 2 ed. Tokio 1959, ss. 364–428.
3. *Wolmir, A. S.*, Biegsame Platten und Schalen. Moskova 1962, ss. 1–131.
4. *Adotte, G. D.*, Second order theory in orthotropic plates. Diss. The University of Connecticut, 1966, 133 s.
5. *Vogel, U.*, Der Biege- und Membranspannungszustand der rechteckigen orthotropen Platte mit grosser Durchbiegung unter gleichmässig verteilter Vollast bei Navierschen Randbedingungen, näherungsweise behandelt mit Hilfe der Energie-Methode. Diss. Technische Hochschule Stuttgart, 1961. 142 s.
6. *Ambartsumian, S. A.*, Teoria anizotropnih plastin. Moskova 1967, ss. 1–95.
7. *Tamate, O. & Abé, H.*, Partially loaded rectangular plates with large deflection. Proceedings of the thirteenth Japan National Congress for Applied Mechanics. Tokio 1963, ss. 29–36.
8. *Alwan, A. M.*, Bending of sandwich plates with large deflections. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. Vol. 93 (1967): EM3, ss. 83–93.
9. *Rautakorpi, H.*, Vanerin rakennevakioista. Rakenteiden Mekaniikka. Vol. 2 (1969): 3, ss. 111–117.
10. *Rautakorpi, H.*, Investigations of transversely loaded plywood plates. Part I. Simply-supported square plates with a concentrated load at the centre of the plate. Helsinki 1969. [Valtion teknillinen tutkimuslaitos. Tiedotus. Sarja III – Rakennus 140].

Heikki Rautakorpi, dipl.ins., VTT:n sillanrakennus- ja staattinen laboratorio, Otaniemi.

Kuvat 12–15. Neliönmuotoisten koivuvanerilaattojen taipumia 7 % kosteustilassa kuormituksen ja jännemitan funktiona

Figures 12–15. Deflections of square plates made from Finnish birch plywood (moisture content 7 %)

Kuva 16. Neliönmuotoisten koivuvanerilaattojen murto-kuormia 7 % kosteustilassa laatan paksuuden ja jännemitan funktiona

Fig. 16. Ultimate loads of square plates made from Finnish birch plywood (moisture content 7 %)