

TRAPETSIPOIKKILEIKKAUKSISEN SAUVAN VÄÄNTÖ

ALPO RANTA-MAUNUS

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 3 No.1 1970 ss. 24–29;
Rakenteiden Mekaniikan Seura, Helsinki

1. Yleistä

Vääntötehtävälle löydetään De Saint Venantin teorian [2], [3] mukainen tarkka ratkaisu yleensä vain, jos vääntön kohteeksi joutuvan sauvan poikkileikkaus on riittävän yksinkertainen ja säännöllinen. Puolisuunnikkaan muotoiset trapetsipoikkipinnat ovat jollian hankalia tarkan ratkaisun löytämiselle. Siispä trapetsipoikkipinnan vääntösuureiden laskemiseksi on käytettävä hyväksi jotain likimääräismenetelmää. Huomattava osa ratkaisumenetelmistä perustuu variaatiolaskentaan. Matemaattisesti nämä tarkoittavat jonkin differentiaaliyhtälön ratkaisun palauttamista tietyn funktionaalien minimin hakemiseksi. Ehkä tunnetuin tällainen variaatiomenetelmä on Ritzin menetelmä, joka fysikaalisesti voidaan tulkita energiamenetelmäksi [1], [3, s. 616]. Ritzin menetelmän funktionaalianalyttinen tausta on esitetty esimerkiksi teoksessa [1, § 14].

Yleensä Ritzin menetelmän ratkaisu muodostetaan reunaehdot täyttävistä funktioista siten, että muodonmuutosenergian minimin sääntö tulee täytetyksi. Trapetsipoikkipinnan reunalla häviävät funktiot eivät kuitenkaan ole yksinkertaisia. Tämän takia päädyttiin menetelmään, joka ei vaadi käytetyiltä funktioilta mitään reunaehtoja. Sen sijaan niiden on kunkin täytettävä tietty differentiaaliyhtälö. Tällaisen menetelmän on esittänyt E. Trefftz ja sen kulku on kuvattu kohdassa 3.1. Koska Trefftzin menetelmä ei ole sidottu mihinkään reunaehtoihin, siis vääntötehtävän sauvan poikkileikkauksen muotoon, sitä käyttämällä voidaan ainakin periaatteessa ratkaista mielivaltaisen poikkipinnan vääntötehtävä.

2. De Saint Venantin vääntöteoria

De Saint Venantin vääntöteoriaa on esitetty useimmissa lujuusopin oppikirjoissa. Sen mukaisesti suoran, poikkileikkaukseltaan yhdesti yhtenäisen sauvan vääntöä kuvaa jännitysfunktio θ , joka on reuna-arvotettävän

$$\begin{aligned}\nabla^2\theta &= -2G\theta \\ \theta|_R &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

ratkaisu, missä G = aineen liukumoduuli,
 θ = vääntymä pituusyksikköä kohti,
 $\theta|_R$ tarkoittaa θ :n arvoa poikkileikkauksen reunalla.

Sen jälkeen, kun on löydetty ehdot (1) toteuttava jännitysfunktio θ , tästä tarvittavat vääntösuureet saadaan seuraavasti. Leikkausjännitys poikkileikkauksen ulkoreunassa

$$\tau = \left| \frac{\partial\theta}{\partial n} \right| \quad (2)$$

eli jännitysfunktion derivaatta poikkileikkauksen reunan normaalin suuntaan. Prandlin esittämän kalvoanalogian mukaan [3, s. 619] vääntömomentti voidaan lausua:

$$M_t = 2 \int_A \theta da \quad (3)$$

Jos otetaan käyttöön käsite vääntöjäyhyysmomentti I_t , joka määritellään

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \quad (4)$$

saadaan edelleen

$$\theta = \frac{2}{GI_t} \int_A \theta da \text{ eli } I_t = \frac{2}{G\theta} \int_A \theta da \quad (5)$$

Vääntövastus W_t määritellään

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (6)$$

(2):n mukaan

$$\tau_{max} = \left| \frac{\partial\theta}{\partial n} \right|_{max}$$

joten ottamalla huomioon määritelmät (3) ja (5) saadaan

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2 \int_A \theta da} \left| \frac{\partial\theta}{\partial n} \right|_{max} = \frac{M_t}{G\theta I_t} \left| \frac{\partial\theta}{\partial n} \right|_{max} \quad (7)$$

Näin vääntövastukselle on saatu lauseke

$$W_t = \frac{G\theta I_t}{\left[\frac{\partial \theta}{\partial n} \right]_{max}} \quad (8)$$

johon perustuen kohdan 4 sovellutuksissa vääntövastukset lasketaan.

3. Vääntötehtävän likimääräisratkaisu

3.1. Trefftzin menetelmä

Kohdassa 2 esitettiin vääntötehtävän ratkaisu, jossa ei kiinnitetty huomiota jännitys-funktion määrittämiseen. Koska ehdon (1) täyttävää tarkkaa ratkaisua on vaikea löytää, ellei sauvan poikkipinta ole aivan yksinkertainen, seuraavassa käytetään jo edellä mainittua Trefftzin menetelmää [1, §§ 55, 57, 58, 65] reuna-arvotekävän (1) ratkaisemiseksi mielivaltaiselle poikkipinnalle.

Ottamalla käyttöön funktio u siten, että

$$\sigma = 2G\theta u \quad (9)$$

probleman (1) muuttuu muotoon

$$-\nabla^2 u = 1, \quad u|_R = 0 \quad (10)$$

Jaetaan funktio u kahteen osaan $u = p + f$ seuraavasti

$$\begin{cases} -\nabla^2 p = 0 \\ -\nabla^2 f = 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$p|_R = -f|_R$$

Funktioksi f voimme valita jonkin yksinkertaisen, ehdon $-\nabla^2 f = 1$ täyttävän funktion, esimerkiksi

$$f = -\frac{x^2}{2} \quad (12)$$

Ratkaistava reuna-arvotekävä on nyt saatettu muotoon

$$-\nabla^2 p = 0, \quad p|_R = \frac{x^2}{2} \quad (13)$$

Funktioanalyysissä osoitetaan seuraavan lauseen pätevyys: Olkoon L riittävän säännöllinen, reunaehdot täyttävien funktioiden joukossa positiivisesti definiitti operaattori. Tällöin funktio

$$F(y) = (Ly, y) - 2(y, f) \quad (14)^1$$

saavuttaa miniarvonsa juuri sillä funktiolla y_0 , joka toteuttaa reuna-arvotekävän

$$Ly = f, \quad y|_R = 0$$

Siis homogeeniset reunaehdot täyttävän tehtävän $Ly = f$ ratkaisu voidaan palauttaa funktioanalain (14) minimin etsimiseen. Suhteellisen mutkikkaitten laskutoimitusten jälkeen saadaan myös epähomogeenisia reuna-arvoja vastaava minimoitava funktioanalain, joka ratkaistavan tehtävän (13) tapauksessa saa muodon

$$A(p) = \int_A (\nabla p)^2 da \quad (15)$$

Trefftzin mukaan oletetaan, että $\{\varphi_k\}$ on lineaarisesti riippumaton joukko harmonisia funktioita. Lisäksi oletetaan, että joukko $\{\varphi_k\}$ on seuraavassa mielessä täydellinen: jokaiselle harmoniselle funktiolle φ on mahdollista löytää luonnollinen luku n sekä kertoimet $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ siten, että

$$A(\varphi - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k) =$$

$$\int_A \left\{ \nabla \left(\varphi - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) \right\}^2 da < \varepsilon \quad (16)$$

valittiinpa positiivinen vakio ε miten pieni tahansa. Etsitään siis funktioanalain (15) minimin antavaa ratkaisua muodossa

$$p_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

Kertoimet α_k määritetään ehdosta, että niiden tulee minimoida funktioanalain

$$A(p - p_n)$$

missä p on etsitty ratkaisufunktio. Minimien löytämiseksi merkitään

$$\frac{\partial A(p - p_n)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

mistä funktioanalain A määritelmää (16) käyttäen saadaan

$$\int_A \nabla(p_n - p) \cdot \nabla \varphi_k \cdot da = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

¹ Merkintä (x, y) tarkoittaa sisätuloa: $(x, y) = \int_A xy \, da$.

Käyttämällä Greenin kaavaa pintaintegraali (17) saatetaan muotoon

$$-\int_A (p_n - p) \cdot \nabla^2 \varphi_k da + \int_R (p_n - p) \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds = 0$$

Koska funktiot φ_k ovat harmonisia, pintaintegraaliosa häviää ja saadaan yhtälö

$$\int_R p_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds = \int_R p \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

(13):n mukaan täytyy alueen reunalla päteä $p = x^2/2$. Sijoittamalla tämä sekä p_n summa-modossa yhtälöön (18) kertoimien a_j ratkaisemiseksi saadaan lopullinen yhtälöryhmä

$$\sum_{j=1}^n a_j \int_R \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds = \int_R \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds, \quad (19)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Tarkastelemalla edellä minimoitua funktionaalia $A(p - p_n)$ huomataan, ettei tämä muutu, jos p saa vakiolisäyksen. Siis kyseisen funktionaalin minimoinnista saatu yhtälöryhmä (19) antaa likimääräisratkaisun p_n vakiota vaille määrättyinä, jonka arvo saadaan reunaehdosta

$$p_n + \text{vakio} = x^2/2$$

alueen reunaviivalla. Täten probleemalle (10) on saatu ratkaisu

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i - \frac{x^2}{2} + \text{vakio} \quad (20)$$

3.2. Väätösuureiden laskeminen

Seuraavassa käytetty funktio u (20) on siten määritelty, että se häviää poikkileikkauksen reunalla. Koska $\theta = 2G\theta u$, väätöjäyhyysmomentille (5) ja väätövastukselle saadaan (8) yksinkertaisemmat lausekkeet:

$$I_t = 4 \int_A u da \quad (21)$$

$$W_t = \frac{2 \int_A u da}{\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{max}} \quad (22)$$

Koska jännitysfunktio u on edellä yksikäsitteisesti määrätty, saadaan väätövakiot lasketuksi mielivaltaiselle yhdesti yhtenäiselle poikkipinnalle.

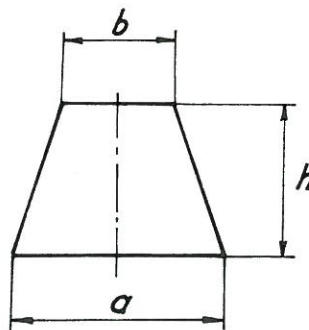
Trapetsipoikkipinnan väätövakioiden numeerisessa määrittämisessä käytettiin funktioiden φ_i joukkona sekä harmonisia polynomeja, että muotoa

$$\exp(\pm kx) \cdot \sin ky, \quad \exp(\pm kx) \cdot \cos ky, \quad (23)$$

$$\exp(\pm ky) \cdot \sin kx, \quad \exp(\pm ky) \cdot \cos kx$$

olevia harmonisia funktioita. Polynomisarjalla saatiin hyviä tuloksia neliöpoikkipinnan väätövastuksen laskemisessa, kun neliön keskipiste oli origossa. Samaten polynomisarja antoi hyvin tarkasti oikean arvon tasasivuisen kolmion väätövastukselle, kun kolmion jokin kärkipiste oli sijoitettu origoon. Sen sijaan alle kymmenen harmonista polynomia eivät antaneet järkevää tuntuisia tuloksia poikkipinnoilla, jotka poikkesivat huomattavasti edellä kuvatuista tapauksista. Muotoa (23) olevat funktiot antoivat sen sijaan hyviä tuloksia kummassakin rajatapauksessa: kolmio ja neliö. Tämän mukaan voidaan odottaa, että myös puolisuunnikkaan muotoisille poikkipinnoille saadaan hyviä väätövastuksen arvoja käyttämällä sopivaa funktioista (23) koottua sarjaa.

Sijoitetaan trapetsipoikkipinta kuvan 1 mukaisesti xy -koordinaatistoon. Tällöin y -akseli on aina poikkipinnan symmetria-akseli, joten tarvitsee käyttää vain x :n parillisia funktioita. Eräitten kokeilujen jälkeen päädyttiin φ_i -funktioiden joukkoon (24), jota käyttäen taulukossa 1 annetut tulokset pääasiassa on laskettu. Kappaleessa 4 selitettävästä syystä *::llä merkityt tulokset on laskettu käyttäen



Kuva 1.

funktioita (24), kun niistä on poistettu *llä merkityt funktiot. Kuvan 1 mukaiselle profiilille on valittu vakioleveys $a = 1$.

Painokertoimien a_i laskemiseksi on ratkaistava yhtälöryhmä (19). Tässä sekä kerroinmatriisin että vakiovektorin alkiaina esiintyvät viivaintegraalit lasketaan numeerisesti Simpsonin kaavaa käyttäen. Tällöin on jokainen poikkileikkauksen sivu jaettu 16:een yhtä suureen osaan. Jakopisteissä lasketaan numeerisesti tarvittavat funktioiden arvot ja derivaatat normaalin suuntaan.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cos \pi x \cdot \exp(\pi y) \\ \varphi_2 &= \cos \pi x \cdot \exp(-\pi y) \\ \varphi_3 &= \cos h(\pi x/2) \cdot \sin(\pi y/2) \\ \varphi_4 &= \cos h(\pi x/2) \cdot \cos(\pi y/2)^* \\ \varphi_5 &= \cos h(\pi x) \cdot \sin \pi y \\ \varphi_6 &= \cos h(\pi x) \cdot \cos \pi y \\ \varphi_7 &= \cos h(2\pi x) \cdot \sin 2\pi y \\ \varphi_8 &= \cos h(2\pi x) \cdot \cos 2\pi y^* \\ \varphi_9 &= \cos h(3\pi x) \cdot \sin 3\pi y^*. \end{aligned} \quad (24)$$

Trapetsipoikkipinnan vääntötehtävän ratkaisemiseksi kaavojen (21) ja (22) mukaisesti on laadittu Algol-ohjelma. Tämä muodostaa annettujen poikkileikkauksen nurkkapisteen koordinaattien ja harmoonisten funktioiden (24) avulla yhtälöryhmän (19) ja ratkaisee sen. Näin on saatu jännitysfunktioj

$$u = -\frac{1}{2}x^2 + \sum_i a_i \varphi_i + \text{vakio}$$

josta saadaan kaavojen (21) ja (22) mukaan vääntöjäyhyysmomentin ja vääntövastuksen arvot.

4. Numeeriset tulokset

Seuraavassa taulukossa on esitetty saadut tulokset trapetsipoikkipinnan vääntövastuksen ja vääntöjäyhyysmomentin arvoiksi parametrien h/a ja b/a eri arvoilla. Reunasarakkeissa ovat ääritapauksina saadut arvot kolmioille ja suorakulmioille.

Saatujen tulosten luotettavuutta voidaan arvioida lähinnä vertaamalla tunnettuja tarkkoja vääntövastuksen arvoja nyt laskettuihin rajatapauksen arvoihin. Taulukon ulkopuolella on laskettu vertailuarvoksi tasasivuisen kolmion vääntövastus, joksi laadittu tietokoneohjelma antoi 0,4 %:n tarkkuudella oikean tuloksen $W_t = 0,05 \cdot a^3$. Suorakulmioilla esiin-

tyivät suurimmat poikkeamat tarkoista arvoista, kun $h/a = 1$ ja $h/a = 3$. Kummassakin tapauksessa saatiin noin 4,5 % liian pieni arvo vääntövastukselle. Yleisimmin esiintyvä poikkeama oikeista suorakaidepoikkipinnan vääntövastuksen arvoista on ± 2 %. Virhearviota varsinaisten trapetsipoikkipintojen W_t -arvoille on erittäin vaikea esittää. Jonkinlainen arvio tulosten käyttökelpoisuudesta voidaan saada vertaamalla toisiinsa kuutta ja yhdeksää harmonista funktiota hyväksi käyttäen saatuja tuloksia. Nämä vertailut suoritettiin suhteen h/a arvoilla 1,25 ja 1,5. Näissä 18 tapauksessa esiintynyt suurin poikkeama oli 4 % ja poikkeamien itseisarvojen keskiarvo oli 2 %. Vastaavissa suorakaide tapauksissa sijoittuu tarkka ratkaisu näin laskettujen kahden arvon väliin. Tämä ei tietenkään riitä todistamaan, että samoin tapahtuisi edes useimmilla lasketuilla trapetsipoikkipinnoilla. Kuitenkin nähdään, että näissä tapauksissa ratkaisu lähestyy tavallaan alternoivasti oikeaa. Satunnaiset pyöristysvirheet ovat jo merkittäviä yhdeksän funktion tapauksessa, kuten myöhemmin tullaan huomaamaan.

Vääntöjäyhyysmomentin arvot tunnetuille vertailuprofiileille ovat keskimäärin huomattavasti tarkempia kuin vääntövastuksen arvot. Sekä tasasivuille kolmiopoikkipinnalle, että niille suorakulmioille, joiden $h/a \geq 1$, saadut I_t :n arvot ovat 1 %:n tarkkuudella oikeita. Sen sijaan profiilin madaltuessa tulokset huononevat siten, että suurin suorakulmiopoikkipinnoilla esiintyvä virhe on lähes 10 %. Osaltaan tästä johtuu, että liitteen 1 tulokset on annettu pienemmällä suhteellisella tarkkuudella pienillä suhteen h/a arvoilla, ja suuremmalla h/a :n kasvaessa.

Yhdeksän harmonisen funktion joukko (24) antoi yleensä käyttökelpoisen tuntuisia, edellä kuvailtuja tuloksia. Sen sijaan, kun $h/a = 1$ ja $b/a = 0,7 \dots 1$, laskuproseduuri antoi satunnaisluvuilta tuntuvia arvoja. Virheen alkuperän tutkimiseksi laskettiin vastaavat W_t :n arvot 2 % korkeammille, mutta muuten samanlaisille profiileille. Saadut tulokset poikkesivat kukin vähintään 50 % alkuperäisten, siis vain 2 % matalampien poikkipintojen vääntövastuksista. Tällaiset virheet voivat syntyä numeerisista pyöristysvirheistä esimerkiksi ratkaistaessa yhtälöryhmää eliminointimenettelyllä. Koska kaikissa näissä virheellisissä tapauksissa funktio φ_4 (24):ssä tuli

kovin dominoivaksi, jätettiin tämä sekä kaksi viimeistä funktioista (24), joiden painokertoimet olivat pieniä, pois ja laskettiin uudet arvot tapauksessa $h/a = 1$ sekä edellä mainitut vertailuarvot, kun suhde h/a on 1,25 ja 1,5. Taulukon tuloksissa 1 *-merkityt arvot on saatu juuri tällä tavalla ja ne ovat syrjäyttäneet vastaavat yhdeksällä funktiolla lasketut tulokset fysikaalisesti uskottavampina.

S. G. Mikhlin [1] on esittänyt suorakulmio-
poikkipinnoille laskettuja derivaatan $\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{max}$ arvoja käyttäen vain kahta ensimmäistä funktioista (24) ja yhdistänyt nämäkin symmetrian takia yhdeksi funktioksi

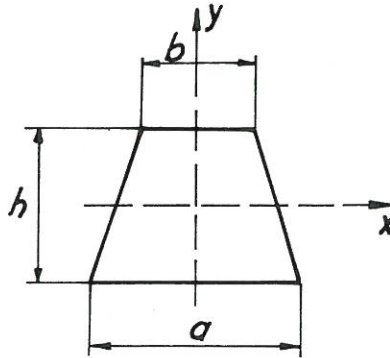
$$\varphi = \cos \pi x \cdot \cos h(\pi y)$$

Teoksessa esitetyt tulokset ovat hämmästyttävän tarkkoja: useimmat derivaatan arvot ovat kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella oikeita. Tähän verrattuna voi olla pettynyt yhdeksän funktion avulla saatujen vääntövastuksen arvojen tarkkuuteen 1–5 %. Ensimmäiseksi kiinnittyy huomio siihen, ettei Mikhlin ole laskenut W_t :n arvoja vaan on pysähtynyt derivaattoihin. Siis on verrattava

derivaattojen $\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{max}$ arvoja vastaaviin oikei-

siin arvoihin suorakaidepoikkipinnoilla. Tämäkin vertailu osoittaa tulosten huononevan lisääessä funktioita kahdesta kuuteen ja

edelleen yhdeksään. Siis pyöristysvirheiden osuus vaikuttaa ratkaisevasti tulosten tarkkuuteen. Suorakulmiotapauksessa saadaankin vain harvoja funktioita käyttäen tarkkaan samat tulokset, kuin Mikhlin oli saanut. Tästä voidaan päätellä, ettei pyöristysvirhe synny numeerisesta integroinnista tai derivoinnista, vaan se johtuu ilmeisesti yhtälöryhmän ratkaisun epätarkkuudesta. Tämän takia tarkempiin tuloksiin pyrittäessä olisi kiinnitettävä erikoista huomiota yhtälöryhmän ratkaisumenetelmän numeeriseen tarkkuuteen. Tavallisia eliminointiproseduureja käytettäessä saattaisi kaksinkertaisen sananpituuden käyttö antaa teoreettisestikin tyydyttävän tarkkoja tuloksia.



Taulukko 1

Trapetsi-poikkipinnan vääntövuksen ja vääntöjähyysmomentin numeeriset arvot

$$W_t = r \cdot a^3 \cdot 10^{-3}$$

$$I_t = s \cdot a^4 \cdot 10^{-3}$$

b/a		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
h/a												
0.4	$r =$	13	16	19	22	25	27	29	33	37	38	42
	$s =$	3,7	4,8	6,1	7,4	8,8	10	11	13	15	15	17
0.6	$r =$	28	33	38	44	48	57	63	68	77	79	84
	$s =$	10	13	15	19	21	27	31	35	40	43	46
0.8	$r =$	44	52	59	67	81	91	102	111	125	130	139
	$s =$	18	23	28	34	43	49	57	65	76	82	90
1.0	$r =$	62	70	82*	94*	108*	121*	136*	152*	172*	184*	199*
	$s =$	29	34	43*	53*	65*	76*	88*	100*	116*	128*	142*
1.25	$r =$	84	97	114	132	150	169	188	210	229	257	285
	$s =$	44	53	64	78	93	110	128	149	167	191	214
1.5	$r =$	113	121	141	162	182	211	236	263	293	323	354
	$s =$	63	70	85	103	121	146	171	213	230	262	295
2.0	$r =$	141	170	195	223	258	291	331	375	420	457	502
	$s =$	88	110	131	157	189	221	260	304	356	404	461
3.0	$r =$	230	276	313	357	406	467	532	601	669	728	795
	$s =$	163	199	231	271	318	378	444	518	603	692	795

* – arvot laskettu käyttäen kuuden harmonisen funktion joukkoa.

Kirjallisuutta

1. *Mikhlin, S. G.*, Variational methods in mathematical physics.
2. *Kollbrunner Basler*, Torsion.
3. *Ylinen, A.*, Kimmo- ja lujuusoppi II.

Ranta-Maunus, Alpo, tekn.yo., Teknillinen Korkeakoulu, Otaniemi