

# RAKENTEIDEN VAPAAT VÄRÄHTELYT

ERKKI PENNALA

*Rakenteiden Mekaniikka* Vol. 2 No. 4 1969 ss. 168—173; Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

**Yhteenveto:** Artikkelissa käsitellään jatkuvien palkkien ja kehien vapaita taivutusvärähtelyjä vaimentamattomissa tapauksissa. Joustokertoimien menetelmä, joustomatriisien määrittäminen rakenteelle voimamenetelmällä ja värähtelyjärjestelmän karakteristisen polynomin ominaisarvojen ja niihin liittyvien ominaisvektoreiden määrittäminen käydään läpi matriisimuotoisena esityksenä.

Sovellutuksena on laskettu nivel- ja jäykkäkantaisten kehien symmetristen ja antisymmetristen värähtelyjen ominaiskulmanopeudet, kun rakenteen massa on ajateltu keskittyväksi yhdeksään massapisteeseen.

## 1. Johdanto

Tutkittaessa jatkuvien palkkien (akseleiden) ja kehien vapaita harmoonisia taivutusvärähtelyjä ulkoisten massakeskittymien liittyessä niihin joudutaan käytännössä usein jättämään rakenteen oma massa huomiotta, etteivät laskelmat tulisi liian työläiksi määrittäessä rakenteen ominaistuuksia. Jos rakenteeseen liittyvät massakeskittymät ja rakenteen oma massa ovat samaa suuruusluokkaa, edellä mainittua yksinkertaistusta ei voida suorittaa.

Sovellettaessa ns. joustokertoimien menetelmää värähtelevän massapistejärjestelmän differentiaaliyhtälöitä kirjoitettaessa rakenteen oma massa voidaan ottaa huomioon halutulla tarkkuudella. Menetelmässä tarvittavat joustokertoimet ovat jatkuville palkeille saatavissa useimmiten käsikirjoista, mutta jo kehien kyseessä ollessa ne on määritettävä erikseen.

Tässä esitettävän rakenteiden taajuusanalyysin pyrkimyksenä on määrittää rakenteen pienimmät ominaistuuksudet ja niihin liittyvät värähdysmuodot.  $N$  vapausasteisen rakenteen ( $n$  on suuri) värähtelyä esittävän systeemin korkeammilla ominaistuuksilla ja niihin liittyvillä värähdysmuodoilla ei ole käytännössä merkitystä.

Edellä mainitun oletuksen, että ulkoiset massat ovat samaa luokkaa kuin rakenteen oma massa, lisäksi oletetaan massapisteitä yhdistävien sauvojen olevan painottomia ja lineaarisesti kimmoisia sekä väräh-

dysamplitudien olevan niin pieniä, että muodonmuutokset pysyvät kimmoisella alueella. Massapisteidien rotaatioiden vaikutus jätetään myös tarkastelun ulkopuolelle.

Tarkastelu suoritetaan vain vaimentamattomille tapauksille, vaikkakin vapaat värähtelyt käytännössä vaimenevat erilaisten vaimennustekijöiden vaikutuksesta. Laskelmien laajuuden vuoksi joudutaan käytännössä turvautumaan tietokoneen apuun, minkä vuoksi esityksessä käytetään matriisimerkin-  
töjä ohjelmoinnin helpottamiseksi.

## 2. Joustokertoimien menetelmä

Rakenteessa olevien, siihen kiinteästi liittyvien ulkoisten massakeskittymien lisäksi otetaan rakenteen oma massa tarkasteluun mukaan ajattelemalla se keskittyneeksi tiettyihin pisteisiin, joiden lukumäärä riippuu siitä, miten tarkasti rakenteen jatkuva massa halutaan ottaa huomioon. Valituille massapisteeille ja niiden siirtymille on joustokertoimien menetelmän mukaisesti kirjoitettavissa

$$\begin{aligned} -q_1 &= m_1 a_{11} \ddot{q}_1 + m_2 a_{12} \ddot{q}_2 + \dots + m_n a_{1n} \ddot{q}_n \\ -q_2 &= m_1 a_{21} \ddot{q}_1 + m_2 a_{22} \ddot{q}_2 \dots + m_n a_{2n} \ddot{q}_n \\ &\dots \dots \dots \\ -q_n &= m_1 a_{n1} \ddot{q}_1 + m_2 a_{n2} \ddot{q}_2 \dots \dots + m_n a_{nn} \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (1a)$$

eli matriisimuotoisena yhtälönä

$$-q = \mathbf{a} \mathbf{m} \ddot{q} \quad (1b)$$

missä  $q$  ja  $\ddot{q}$  ovat vektoreita, joiden komponentteina ovat kunkin pisteen siirtymät ja niiden toiset derivaatat ajan suhteen sekä  $\mathbf{a}$  rakenteen joustomatriisi ja  $\mathbf{m}$  lävistäjämatriisi, jonka lävistäjällä ovat tarkasteltavien pisteiden massat.

Tulos (1b) on kirjoitettavissa klassiseen konservatiivista systeemiä esittävään muotoon, jossa on vain staattinen kytkentä

$$\mathbf{m} \ddot{q} + \mathbf{k} q = 0 \quad (1c)$$

missä  $\mathbf{k} = \mathbf{a}^{-1}$ .  $\mathbf{k}$ :ta kutsutaan rakenteen jäykkymatriisiksi.

Sijoittamalla kaavaan (1 c)  $q_j = A_j \sin(\omega t + \phi)$  saadaan

$$[\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{I}] A = 0 \quad (2)$$

Tuloksen (2) esittämän yhtälöryhmän karakteristisen determinantin

$$|\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{I}| = 0 \quad (3)$$

ominaisarvot voidaan määrittää esim. matriisi-iterointimenetelmällä.

### 3. Joustomatriisin määrittäminen voimamenetelmällä

#### 3.1 Yleistä

Joustomatriisin  $\mathbf{a}$  elementti, joustokerroin,  $a_{ij}$  ilmoittaa muodonmuutoksen suuruuden pisteessä  $i$  yksikkövoiman vaikuttaessa pisteessä  $j$ . Joustomatriisin määrittämistä voidaan pitää yhteyttä

$$\delta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F} \quad (4)$$

mikä ilmaisee ulkoisten voimien ja niiden vaikutuspisteissä tapahtuvien voimien suuntaisten muodonmuutosten välisen yhteyden. Yksinkertaisissa tapauksissa  $a_{ij}$ :t on määrittävissä käsikirjojen avulla suhteellisen nopeasti ja vähäisellä työmäärällä. Jos  $n$  kasvaa suureksi ja rakenne on lisäksi useampia kertoja staattisesti määräämätön,  $\mathbf{a}$ :n komponenttien määrittäminen yksitellen tulee työlääksi ja jopa mahdottomaksi suorittaa käsikirjojen ja valmiiden taulukoiden avulla.

Rakenteiden analysointimenetelmistä voimamenetelmä tarjoaa suhteellisen yksinkertaisen ja systemaattisen tavan rakenteen joustomatriisin määrittämiseksi. Tarvittavien matriisilaskutoimitusten suorittaminen käsin laskemalla on tässäkin tapauksessa suuritöistä, mutta sillä ei ole merkitystä, koska nykyisin tietokoneet ovat jo kaikkien ulottuvilla.

Laskettaessa  $\mathbf{a}$  tietokoneella tarjoutuu lisäksi tilaisuus määrittää karakteristisen polynomin ominaisarvot välittömästi  $\mathbf{a}$ :n laskemisen jälkeen käyttäen hyväksi esim. matriisi-iterointimenetelmää.

#### 3.2 Voimamenetelmä

Tarkastellaan seuraavassa  $m$  kertaa staattisesti määräämätöntä rakennetta, johon vaikuttaa  $n$  ulkoista voimaa (pistevoimia tai momentteja). Rakenne ajatellaan staattisesti määräytyksi, jolloin määräämättömiä suureita käsitellään staattisesti määrättyyn perusrakenteeseen vaikuttavina voimina. Rakenne ajatellaan paloitelluksi elementeiksi, joihin kuhunkin vaikuttavat sisäiset voimat. Jako elementteihin suoritetaan siten, että ulkoiset voimat vaikuttavat aina elementtien päihin ja lisäksi siten, että kullekin elementille on kirjoitettavissa joustomatriisi.

On selvää, että staattisesti määräytyksi ajattelussa perusrakenteessa kukin elementtiin vaikuttava sisäinen voima on lausuttavissa ulkoisten voimien ja staattisesti määräämättömien suureiden avulla seuraavasti

$$P_i = b_{i,1} F_1 + b_{i,2} F_2 + \dots + b_{i,n} F_n + b_{i,n+1} X_{n+1} + \dots + b_{i,n+m} X_{n+m} \quad (5a)$$

eli matriisimuodossa esitettynä käyttäen hyväksi ositettuja matriiseja

$$P = [\mathbf{b}_0 | \mathbf{b}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

Osamatriisien  $\mathbf{b}_0$  ja  $\mathbf{b}_1$  määrittäminen tapahtuu käytännössä yksinkertaisimmin antamalla kunkin voiman  $F_1 \dots F_n$  ja  $X_{n+1} \dots X_{n+m}$  vaikuttaa kerrallaan yksikön suuruisena staattisesti määrättyyn perusrakenteeseen muiden ollessa nollia. Laskemalla tällöin sisäiset voimat saadaan ositetun matriisin  $[\mathbf{b}_0 | \mathbf{b}_1]$  yksikön suuruista voimaa vastaava pystyriivi.

Oletetaan, että rakenteen  $\mathbf{a}$ :s elementti on kuvan 1 mukainen kaksitukinen palkki, johon vaikuttaa päihin momentit  $P_i$  ja  $P_{i+1}$ . Tällöin on elementin muodonmuutokset (päiden kiertymäkulmat) lausuttavissa

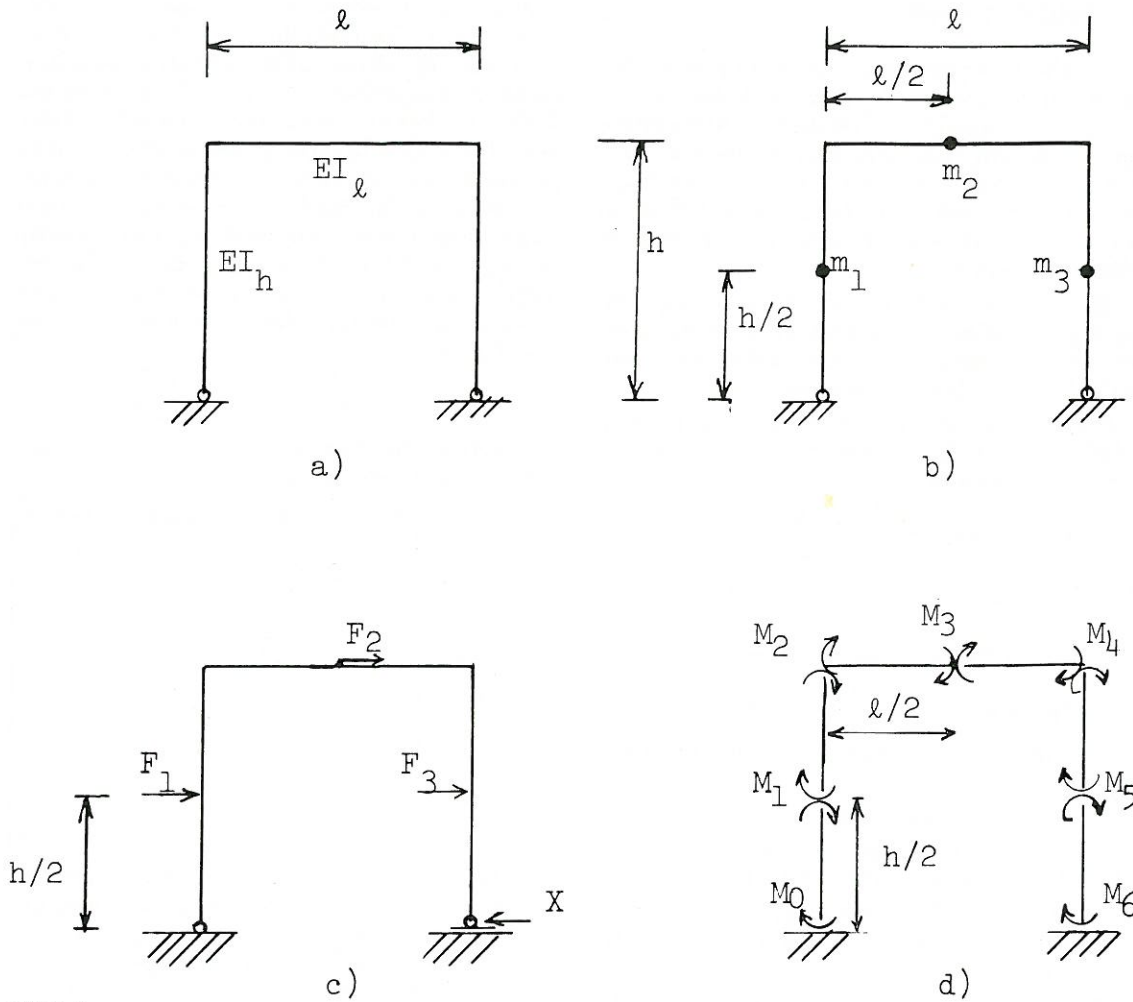
$$\begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= a_a \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{bmatrix}$$

missä  $a_a$  on elementin  $a$  joustomatriisi.







Kuva 2

Lausekkeesta (16b) saadaan

$$\mathbf{a} = \frac{h^3}{EI} \begin{bmatrix} 0,11224 & 0,15625 & 0,09610 \\ 0,15625 & 0,2500 & 0,15625 \\ 0,09610 & 0,15625 & 0,11224 \end{bmatrix}$$

Massamatriisi tässä yksinkertaistetussa tapauksessa on

$$\mathbf{m} = \rho h A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Merkitsemällä  $\lambda = \frac{1}{\omega^2 \rho} \frac{EI}{Ah^4}$  ja soveltamalla edellä mainittua iterointimenetelmää saadaan

$$\lambda_1 = 0,671^2, \lambda_2 = 0,127^2 \text{ ja } \lambda_3 = 0,084^2$$

mistä

$$\omega_1 = \frac{1,489}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \omega_2 = \frac{7,875}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

$$\text{ja } \omega_3 = \frac{11,81}{h^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Ensimmäiseen ominisarvoon liittyvä ominaisvektori on

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5536 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oheisessa taulukossa I on annettu nivel- ja jäykkäkantaisten kehien symmetristen ja antisymmetristen värähtelyjen ominaiskulmanopeuksien kertoimet  $k$ . Laskelmissa on otettu mukaan vain kehän omapaino jaetuna yhdeksään (9) massapisteeseen siten, että kolmasosa kunkin osapalkin massasta on ajateltu keskittyneeksi palkin keskipisteeseen ja muut kolmasosat etäisyydelle  $1/6$  palkin päistä.

$b_0$  = muunnosmatriisi, joka muuntaa ulkoiset voimat sisäisiksi voimiksi perusrakenteessa  
 $b_I$  = muunnosmatriisi, joka muuntaa staattisesti määräämättömät suureet sisäisiksi voimiksi perusrakenteessa  
 $\alpha_a$  = elementin a joustomatriisi  
 $a$  = matriisi, jonka lävistäjällä on elementtien joustomatriisit  
 $\delta_e$  = vektori, jonka komponentteina ovat elementtien muodonmuutokset  
 $\delta$  = vektori, jonka komponentteina ovat muodonmuutokset ulkoisten voimien kohdalla ja suunnissa

## KÄYTETYT MERKINNÄT

Vaikutuskertoimien menetelmä

$a$  = joustomatriisi  
 $k$  = jäykkyyssmatriisi  
 $m$  = massamatriisi  
 $q$  = siirtymävektori  
 $\dot{q}$  = kiihtyvyyssvektori  
 $A_j$  = j:nneen pisteen värähtelyn amplitudi

Voimamenetelmä

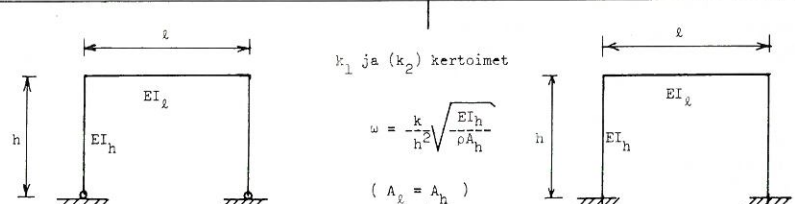
$F$  = ulkoinen voimavektori  
 $P$  = sisäinen voimavektori  
 $X$  = staattisesti määräämättömien voimien vektori  
 $W$  = Muodonmuutustyö  
 $a_{ij}$  = osamatriisi (ks. yht. (12))

## KIRJALLISUUTTA

1. Rubinstein, M. F., Matrix Computer Analysis of Structures, Prentice-Hall, 1966.
2. Wang, P-C., Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1966.
3. Seto, W. W., Theory and Problems of Mechanical Vibrations, Schauman Publishing Co., New York, 1964.
4. Niskanen, Erkki, Lujuusoppi Vb, Värähtelyoppia, TKY moniste 270, Otaniemi, 1969.

Erkki Pennala, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi

Taulukko I



$k_1$  ja  $(k_2)$  kertoimet  

$$\omega = \frac{k}{h^2} \sqrt{\frac{EI_h}{\rho A_h}}$$
 $(A_l = A_h)$

$\frac{EI_l}{EI_h}$ $l/h$	Symmetriset värähtelyt			Antisymmetriset värähtelyt			Symmetriset värähtelyt			Antisymmetriset värähtelyt		
	0,8	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2
0,8	2,142 (10,64)	2,197 (10,95)	2,236 (11,23)	1,551 (11,23)	1,597 (11,58)	1,631 (11,81)	5,108 (14,86)	5,181 (15,43)	5,236 (15,84)	3,433 (17,05)	3,508 (17,35)	3,563 (17,62)
1,0	2,078 (9,504)	2,142 (9,801)	2,187 (10,17)	1,417 (11,10)	1,466 (11,33)	1,503 (11,53)	5,021 (12,07)	5,106 (12,67)	5,170 (13,17)	3,138 (16,79)	3,217 (17,05)	3,276 (17,30)
1,2	2,020 (7,997)	2,090 (8,385)	2,141 (8,720)	1,300 (10,93)	1,353 (11,14)	1,393 (11,33)	4,937 (9,296)	5,036 (9,844)	5,108 (10,32)	2,893 (16,59)	2,974 (16,83)	3,036 (17,05)
1,4	1,965 (6,513)	2,040 (6,875)	2,091 (7,220)	1,202 (10,81)	1,257 (10,99)	1,298 (11,17)	4,858 (7,214)	4,961 (7,686)	5,040 (8,085)	2,690 (16,45)	2,771 (16,66)	2,834 (16,87)