

# VANERIN RAKENNEVAKIOISTA

HEIKKI RAUTAKORPI

*Rakenteiden Mekaniikka* Vol. 2 No. 3 1969 ss. 111—117; Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

**Yhteenveto:** Artikkelissa käsitellään vaneria kerroksellisen pintarakenteena, jonka yksityiset kerrokset oletetaan homogeenisiksi, ortotrooppisiksi laatoiksi. Liimauksen vaikutuksesta nämä toimivat yhdessä muodostaen rakenteen, jonka staattisille suureille voidaan johtaa lausekkeet viilujen lukumäärän, paksuuden ja kimmoisten ominaisuuksien funktiona. Artikkelissa esitetään kaavat vanerin jäykköysvakioille ja vastusvakioille sekä tarkastellaan koordinaatiston kierron vaikutusta jäykköysvakioihin. Käytännön sovellutusten kannalta tyydytään vain viittaamaan lähteeseen [5], missä on käsitelty koivuvanerin kimmo- ja lujuusominaisuuksia esitetyn kerroksellisen rakennemallin pohjalta.

## Kirjallisuutta

- DIN 4094. 1960. Baugrund; Ramm- und Drucksondiergeräte; Abmessungen und Arbeitsweise. Berlin.
- Kahl, H., Derzeitiger Stand des Spitzendruck-Sondierverfahrens. Fortschr. und Forschungen im Bauwesen, Ser. D., No. 25, Teil II, Grundbau. Stuttgart 1955.
- Kahl, H. und Muhs, H., Über die Untersuchung des Baugrundes mit einer Spitzendrucksonde. Bau-technik, Nr. 4. Berlin 1952.
- Melzer, K. J., Sondenuntersuchungen in Sand. Mitteilungen aus dem Institut für Verkehrswasserbau und Bodenmechanik der Technischen Hochschule Aachen, H. 43. Aachen 1968.
- Meyerhoff, G., Penetration Tests and Bearing Capacity of Cohesionless Soils. Soil Mech. and Found. Div. Newsletter. Amer. Soc. Civ. Engng., Vol. 82. Ann Arbor 1956.
- Menzenbach, E., Die Anwendbarkeit von Sonden zur Prüfung der Festigkeitseigenschaften des Baugrundes. Köln-Opladen 1959.
- Ohde, J., Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund. Der Bauingenieur, H. 33/34. Berlin 1939.
- Schubert, K., Beitrag zur brauchbaren Bestimmung von Kennwerten für sandigen Baugrund durch Rammsondierung (Diss.) TH Dresden 1955.
- Sparmann, H., Die leichte Rammsonde. Deutsche Bauakademie Schriftenreihe Verkehrs- und Tiefbau. Berlin 1963.
- SGY 1968. Kairausopas I. Painokairaus. Pisto- ja lyöntikairaus. Heijarikairaus. Helsinki.
- Kalle-Heikki Korhonen, professori, VTT:n geoteknillinen laboratorio, Otaniemi
- Markku Tamminen, dipl.ins., VTT:n geoteknillinen laboratorio, Otaniemi

## 1. Johdanto

Vaneri on yleisnimitys, jolla ymmärretään puuviiluista kokoonliimattua rakennetta. Tässä esityksessä rajoitutaan kuitenkin vain tavallisimpaan vanerityyppiin, ns. ristivaneriin. Sen rakenteeseen palataan tarkemmin kohdassa 4.

Vaneria on usein pidetty homogeenisena aineena, jonka ominaisuudet ovat erilaiset pintaviilujen syiden suuntaan ja kohtisuoraan pintaviilujen syiden suuntaa vastaan. Tämä oletamus on tietenkin likimääräinen ja soveltuu huonosti tapauksiin, joissa käsitellään tavallista useampia vanerin paksuuksia. Tällöin on helpompaa lähteä siitä ajatuksesta, että vaneri sinänsä on tietty laattamainen rakenne, jonka rakennevakiot voidaan johtaa lähtien yksityisen viilun kimmoisista ominaisuuksista. Seuraavassa tarkastellaan tällaisen kerroksellisen rakenteen toimintaa lineaarisen kimmoteorian pohjalta.

## 2. Ortotrooppisen laatan jäykköysmatriisit

Tarkastellaan ortotrooppista laattaa, jonka keskitaso yhtyy suorakulmaisen koordinaatiston  $xy$ -tasoon ja  $x$ - ja  $y$ -akselit ovat ortotrooppisen aineen pääakselien (ns. ortotropia-akselien) suuntaiset. Hooken lain mukaan laatan mielivaltaisen alkion jännitystila voidaan silloin esittää matriisiyhtälöillä

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{44} & 0 \\ 0 & e_{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2)$$

joissa merkinnät  $e_{ij}$  tarkoittavat ortotrooppisen aineen kimmovakioita. Oletetaan, että nämä ovat  $z$ :n funktioita, mutta laatta on kimmoisilta ominaisuuksiltaan symmetrinen

keskitason suhteen. Jos laatta on kuormitettu vain  $xy$ -tasossa vaikuttavilla voimilla, muodonmuutokset  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\gamma_{xy}$  ovat riippumattomia  $z$ -koordinaatista. Integroimalla yhtälö (1) puolittain laatan paksuuden yli se saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{jossa } N_x = -\frac{h}{2} \int \sigma_x dz, \text{ jne.} \quad (4)$$

$$A_{ij} = -\frac{h}{2} \int e_{ij} dz \quad (5)$$

$h$  = laatan paksuus.

Jos laattaa vaikuttaa esim. pelkkä taivutusmomentti  $M_x$ , niin  $x$ -akselia vastaan kohtisuorat leikkaukset pysyvät tasoina muodonmuutoksen tapahtuessa ja laatan käyritys saadaan yhtälöstä

$$\kappa_x = \frac{\varepsilon_x}{z} \quad (6)$$

Jos siis yhtälö (1) kerrotaan  $z$ :lla ja integroidaan puolittain, se saa muodon

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{jossa } M_x = -\frac{h}{2} \int \sigma_x z dz, \text{ jne.} \quad (8)$$

$$D_{ij} = -\frac{h}{2} \int e_{ij} z^2 dz \quad (9)$$

Samoin voidaan esittää laatan tasoa vastaan kohtisuoraan vaikuttavien leikkausvoimien riippuvuus niitä vastaavista liukumista yhtälöllä

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{zx} \end{bmatrix} \quad (10)$$

jossa merkinnät  $\bar{\gamma}_{yx}$  ja  $\bar{\gamma}_{zx}$  tarkoittavat laatan pintojen keskinäisiä liukumia. Tätä yhtälöä ei kuitenkaan saada integroimalla, vaan se voidaan käsittää primäärisesti leikkausjäykkyyksien määrittely-yhtälöksi. Yhtälöiden (3), (7) ja (10) kerroinmatriiseja sanotaan ortotrooppisen laatan jäykkyyssmatriiseiksi ja niiden alkioita  $A_{ij}$  ja  $D_{ij}$  laatan jäykkyyssvakioiksi. Niiden lausekkeet riippuvat laatan rakenteesta. Vanerilaatalle ne esitetään kohdassa 5.

### 3. Koordinaatiston kierron vaikutus jäykkyyssmatriiseihin

Suoritettaessa kuvan 1 mukainen koordinaatiston kierto muuttuvat myös jäykkyyssmatriisit. Uudet jäykkyyssvakiot voidaan johtaa tasojännitystilän ja -muodonmuutostilan perusyhtälöistä ([1, s. 11], [2]), mutta johto jätetään tässä yhteydessä suorittamatta.

Lopputulos saadaan varsin käyttökelpoiseen muotoon esittämällä se matriisioperaationa seuraavasti. Korvataan yhtälöt (1), (2), (3), (7) ja (10) yleisellä yhtälöllä

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{A}] \times [\boldsymbol{\varepsilon}] \quad (11)$$

joka saakoon uudessa koordinaatistossa muodon

$$[\mathbf{N}\varphi] = [\mathbf{A}\varphi] \times [\boldsymbol{\varepsilon}_\varphi] \quad (12)$$

Silloin saadaan uusi jäykkyyssmatriisi yhtälöstä

$$[\mathbf{A}\varphi] = [\mathbf{K}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{K}] \quad (13)$$

jossa operointimatriisi  $[\mathbf{K}]$  on yhtälöissä (1), (3) ja (7)

$$\begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -\sin\varphi \cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi \cos\varphi \\ \sin^2\varphi & -\sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{bmatrix}$$

ja yhtälöissä (2) ja (10)

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Käytännössä usein esiintyvänä tapauksena mainittakoon koordinaatiston kierto  $\varphi = 45^\circ$ . Silloin muuttuu esim. yhtälön (3) kerroinmatriisi muotoon

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} A_{11} + 2A_{12} + A_{22} + 4A_{33} & \\ A_{11} + 2A_{12} + A_{22} - 4A_{33} & \\ & A_{22} - A_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} + 2A_{12} + A_{22} - 4A_{33} & A_{22} - A_{11} \\ A_{11} + 2A_{12} + A_{22} + 4A_{33} & A_{22} - A_{11} \\ A_{22} - A_{11} & A_{11} - 2A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}$$

ja yhtälön (10) kerroinmatriisi saa muodon

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{44} + A_{55} & A_{55} - A_{44} \\ A_{55} - A_{44} & A_{44} + A_{55} \end{bmatrix}$$

#### 4. Vanerin geometrinen malli ja alkuolettamukset

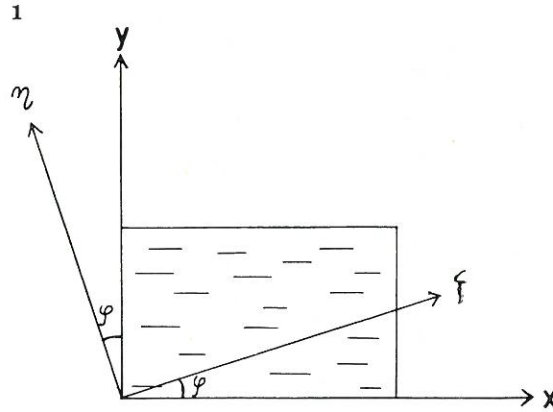
Vanerin rakenteen suhteen oletetaan seuraavaa:

- vaneri on tehty ristikkäisistä viiluista siten, että viereisten viilujen syiden suunnat muodostavat keskenään  $90^\circ$  kulman
- viilut ovat keskenään samanlaisia pintaviiluja lukuunottamatta
- vaneri on keskitasonsa suhteen symmetrinen.

Näin määritellyssä vanerissa viilujen lukumäärä on pariton, pintaviilut ovat keskenään saman paksuiset ja niiden syiden suunta on sama. Melkein kaikkien nykyisten vanerilaatujemme voidaan katsoa täyttävän nämä vaatimukset.

Vanerin kimmoteoreettisessa tarkastelussa joudutaan tekemään muutamia yksinkertaistuksia, jotta päästäisiin konkreettisiin tuloksiin. Lisäksi todetaan eräiden tekijöiden vaikutus niin pieneksi, että ne voidaan jättää huomiotta. Näin päädytään seuraaviin alkuolettamuksiin:

- a) Hooken laki on voimassa
- b) jännitykset ja muodonmuutokset kohtisuoraan laatan tasoa vastaan jätetään huomiotta



Kuva 1. Koordinaatiston kierto

Fig. 1. Rotation of the co-ordinate axes

- c)  $\nu_1 \nu_2 = 0$ , kun  $\nu_1$  ja  $\nu_2$  ovat vaneriviilun suppeumaluvut
- d) poikittaisviilujen kimmomoduuli oletetaan leikkausjäykkyyksiä johdettaessa nolllaksi
- e) pituussuuntaisten viilujen liukumoduuli  $= \infty$  leikkausjäykkyyden vaikuttaessa laatan tasossa
- f) viereiset viilut eivät pääse liukumaan toistensa suhteen
- g) yksityiset viilut oletetaan kalvoiksi ts. niillä ei ole taivutusjäykkyyttä.

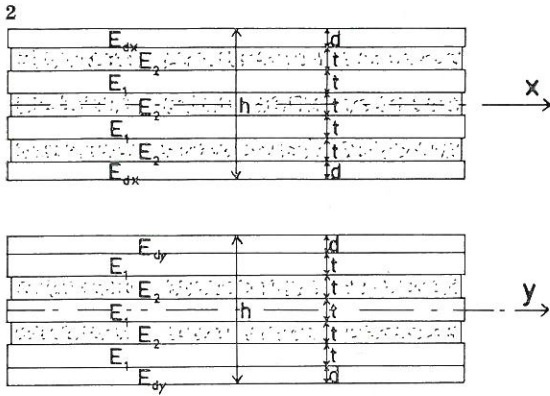
#### 5. Vanerin jäykkyykvakiot

Edellä esitetyn mukaan vanerin jäykkyykvakioille on helppo johtaa lausekkeet viilujen lukumäärän, paksuuden ja kimmoisten ominaisuuksien funktiona. Kaavan (5) mukaan saadaan välittömästi

$$A_{11} = \left[ 4 \frac{E_{dx}}{E_1} \frac{d}{t} + \frac{E_2}{E_1} (n-1) + (n-3) \right] \frac{E_1 t}{2} \quad (14)$$

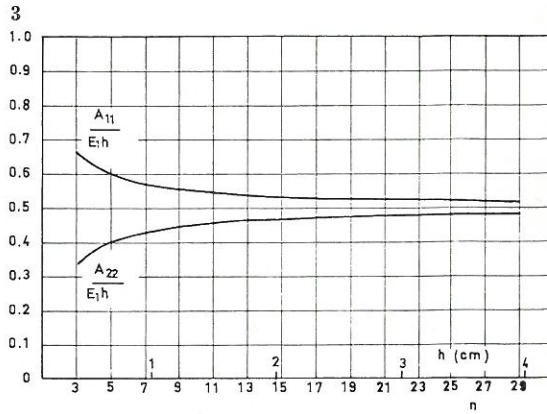
$$A_{22} = \left[ 4 \frac{E_{dy}}{E_1} \frac{d}{t} + (n-1) + \frac{E_2}{E_1} (n-3) \right] \frac{E_1 t}{2} \quad (15)$$

missä  $n$  = viilujen lukumäärä. Muut merkinnät selviävät kuvasta 2.



Kuva 2. Vanerin rakenne

Fig. 2. The structure of plywood



Kuva 3. Vanerin vetojäykkyyksien riippuvuus viilujen lukumäärästä

Fig. 3. The tension stiffnesses of plywood as a function of the number of veneers

Vakiot  $A_{12}$  ja  $A_{33}$  saadaan edellisistä vaihtamalla kimmovakiot. Jos  $\nu_2$  on viilun suppeumaluvuista pienempi ja  $\nu_{dy}$  on vastaava pintakerroksen suppeumaluku, saadaan

$$A_{12} = A_{21} = \left[ 2\nu_{dy} \frac{E_{dx}}{E_1} \frac{d}{t} + \nu_2 (n-2) \right] E_1 t \quad (16)$$

Liikumoduuleista  $G_3$  ja  $G_d$  saadaan leikkausjäykkyyden lauseke

$$A_{33} = \left[ 2 \frac{G_d}{G_3} \frac{d}{t} + (n-2) \right] G_3 t \quad (17)$$

Taivutusjäykkyydet ja vääntöjäykkyys voidaan laskea kaavaa (9) vastaavalla summa-kaavalla

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ijk} z_k^2 t_k \quad (18)$$

Tällöin  $n$ -viiluisen vanerin  $D$ -arvot saadaan neliösummien muotoon, jotka kaavojen

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \quad (19)$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{k(k-1)(k+1)}{6} \quad (20)$$

avulla voidaan panna lopulliseen muotoon

$$D_{11} = \left[ 12ac^2 + \frac{E_2}{E_1} (n^2-1)(n-3) + (n-1)(n-3)(n-5) \right] \frac{E_1 t^3}{24} \quad (21)$$

$$D_{22} = \left[ 12bc^2 + (n^2-1)(n-3) + \frac{E_2}{E_1} (n-1)(n-3)(n-5) \right] \frac{E_1 t^3}{24} \quad (22)$$

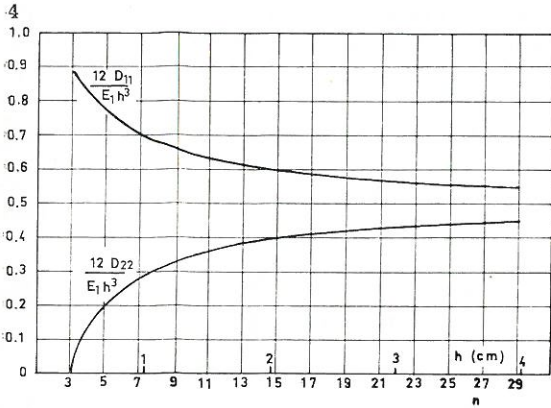
$$D_{12} = D_{21} = \left[ 6\nu_{dy}ac^2 + \nu_2 (n-1)(n-2)(n-3) \right] \frac{E_1 t^3}{12} \quad (23)$$

$$D_{33} = \left[ 6 \frac{G_d}{G_3} \frac{d}{t} c^2 + (n-1)(n-2)(n-3) \right] \frac{G_3 t^3}{12} \quad (24)$$

$$\text{missä} \quad a = \frac{E_{dx}}{E_1} \frac{d}{t} \quad (25)$$

$$b = \frac{E_{dy}}{E_1} \frac{d}{t} \quad (26)$$

$$c = (n-2 + \frac{d}{t}) \quad (27)$$



Kuva 4. Vanerin taivutusjäykkyyksien riippuvuus viilujen lukumäärästä

Fig. 4. The bending stiffnesses of plywood as a function of the number of veneers

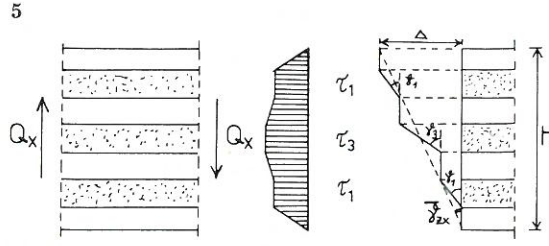
Tavallisen hiomattoman vanerin tärkeimmät jäykkyyksivakiot on esitetty dimensioitommassa muodossa kuvissa 3 ja 4. Niissä on yksinkertaisuuden vuoksi oletettu, että  $E_{dx} = E_1$  ja  $E_{dy} = E_2 = 0$ . Vaaka-akselilla on viilujen lukumäärä  $n$  ja sitä vastaava koivu-vanerin paksuus  $h$ . Kuvista nähdään, että varsinkin taivutettu vanerilaatta on vahvasti ortotrooppinen, ts. taivutusjäykkyydet pintaviilujen syiden suuntaan ja kohtisuoraan pintaviilujen syiden suuntaa vastaan eroavat huomattavasti toisistaan.

Vanerilaatan laskemisessa on suuri merkitys myös leikkausjäykkyyksillä  $A_{44}$  ja  $A_{55}$ , sillä varsinkin paksuja laattoja laskettaessa leikkausmuodonmuutokset on syytä ottaa huomioon. Jäykkyyksiluvut voidaan johtaa lähtemällä määrittely-yhtälöstä (10). Sen mukaan on esim.

$$A_{44} = \frac{Q_y}{\gamma_{yz}}$$

Leikkausmuodonmuutos saadaan eri kerrosten leikkausjännitysten ja liukumoduulien avulla kuvan 5 osoittamalla tavalla. Tarkempaa johtoa suorittamatta annetaan lopputulokset

$$A_{44} = \frac{12 bc^2 + (n^2 - 1)(n - 3)}{12 bc(n - 3) + (n^2 - 1)(n - 3)} 2 G_2 h \quad (28)$$



Kuva 5. Leikkausvoimasta aiheutuvan liukuman määrittäminen

Fig. 5. The determination of the shear strain

$$A_{55} = \frac{12 ac(n - 1) + (n - 1)(n - 3)(n - 5)}{12 ac^2 + (n - 1)(n - 3)(n - 5)} 2 G_2 h \quad (29)$$

joissa  $G_2$  on poikkisuuntaisten viilujen ko. muodonmuutokseen liittyvä liukumoduuli. Tarkastelemalla yhtälöitä lähemmin todetaan, että tavalliselle vanerille voidaan kirjoittaa

$$A_{44} = A_{55} = 2 G_2 h \quad (30)$$

Yhtälöillä (28) ja (29) on käytännön merkitystä lähinnä vain pinnoitettuja vanereita laskettaessa.

## 6. Vanerin suppeumaluvut

Suhteita  $\frac{A_{12}}{A_{22}}$ ,  $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ ,  $\frac{D_{12}}{D_{22}}$  ja  $\frac{D_{12}}{D_{11}}$  nimitetään

seuraavassa lyhyesti suppeumaluvuiksi. Laatan ollessa isotrooppinen niillä on kaikilla sama arvo  $\nu$ . Näin ei ole vanerin laita, vaan suppeumaluku on vieläpä erilainen vedossa ja taivutuksessa, kuten seuraavasta nähdään. Merkitään suppeumalukuja yllämainitussa järjestyksessä  $\nu_{xv}$ ,  $\nu_{yv}$ ,  $\nu_{xt}$  ja  $\nu_{yt}$  ja rajoitetaan yksinkertaisuuden vuoksi tapaukseen, jossa kaikki viilut ovat samanlaisia. Yhtälöistä (14), (15), (16), (21), (22) ja (23) saadaan silloin suppeumaluvuille lausekkeet

$$\nu_{xv} = \frac{2n}{\frac{\nu_1}{\nu_2}(n - 1) + (n + 1)} \nu_1 \quad (31)$$

$$\nu_{yv} = \frac{2n}{\frac{\nu_1}{\nu_2}(n+1) + (n-1)} \nu_1 \quad (32)$$

$$\nu_{xt} = \frac{2n}{\frac{\nu_1}{\nu_2}(n-3) + (n+3)} \nu_1 \quad (33)$$

$$\nu_{yt} = \frac{2n}{\frac{\nu_1}{\nu_2}(n+3) + (n-3)} \nu_1 \quad (34)$$

joissa  $\nu_1$  ja  $\nu_2$  ovat vaneriviilun suppeumaluvut. Jos niiden suhteeksi otetaan suoraan koivupuulle saatu arvo  $\frac{\nu_1}{\nu_2} = 27$  [2, s. 27], saadaan suppeumaluvuille kuvan 6 esittämät suhteelliset arvot.

Koska  $\nu_1$  ei voi nousta kovin suureksi (vaikka se onkin suurempi kuin koivupuun  $\nu$ -arvot), vanerin suppeumaluvut voidaan yleensä käytännössä olettaa nolllaksi. Kuvan 6 mukaisella esityksellä onkin lähinnä vain teoreettista mielenkiintoa.

## 7. Vanerin vastusvakiot

Käytännön kannalta ehkä suurin merkitys on rakenteen vastusvakioilla. Niiden avulla voidaan laskea rakenteen varmuus murtumista vastaan olettaen sen toimivan lineaarisesti murtoon saakka. Vaikka tämä olettaus ei yleensä pidä paikkaansa, ko. laskutapa on yksinkertaisuutensa vuoksi osoittautunut hyväksi.

Vastusvakiot voidaan määrittellä keskenään analogisilla kaavoilla

$$F_{ii} = \frac{N}{\sigma} \quad (35)$$

$$W_{ii} = \frac{M}{\sigma} \quad (36)$$

$$F_{jj} = \frac{Q}{\tau} \quad (37)$$

joissa  $\sigma$  ja  $\tau$  ovat ko. normaalivoimasta, taivutusmomentista tai leikkausvoimasta aiheutuvia jännityksiä vastaavassa murtokohdassa. Vetovastukset ja taivutusvastukset saadaan helpoimmin yhtälöistä (1), (3), (6) ja (7) olettamalla poikittainen muodon-

muutos nolllaksi. Kun on kysymys tavallisesta vanerista, ne voidaan esittää vastaavien jäykköysvakioiden avulla seuraavasti:

$$F_{11} = \frac{A_{11}}{E_1} \quad (38)$$

$$F_{22} = \frac{A_{22}}{E_1} \quad (39)$$

$$W_{11} = \frac{2 D_{11}}{E_{dx} t (n-2 + \frac{d}{t})} \quad (40)$$

$$W_{22} = \frac{2 D_{22}}{E_1 t (n-3)} \quad (41)$$

Kuvassa 7 on esitetty hiomattoman vanerin suhteelliset taivutusvastukset olettaen, että  $E_{dx} = E_1$  ja  $E_{dy} = E_2 = 0$ .

Leikkausvastukset laatan tasoa vastaan kohtisuorien leikkausvoimien suhteen saavat muodon

$$F_{44} = \frac{12 b c^2 + (n^2 - 1) (n - 3)}{12 b c + 1,5 I_4} t \quad (42)$$

jossa  $I_4 = (n+1)(n-3)$ , kun  $n = 4k+3$   
 $= (n-1)^2$ , kun  $n = 4k+1$

$$F_{55} = \frac{12 a c^2 + (n-1) (n-3) (n-5)}{12 a c + 1,5 I_5} t \quad (43)$$

jossa  $I_5 = (n-1)(n-5)$ , kun  $n = 4k+1$   
 $= (n-3)^2$ , kun  $n = 4k+3$

$k =$  positiivinen kokonaisluku.

Yksinkertaisimman vanerin leikkausvastusten suhteelliset arvot on esitetty kuvassa 8.

## 8. Loppulause

Edellä on tarkasteltu vanerin kimmoisia ominaisuuksia ja niiden riippuvuutta viilujen lukumäärästä. Suppean esitystavan vuoksi lausekkeet on johdettu ylimalkaisesti ja muutamat on jopa jätetty kokonaan jättämättä. Asiaa on käsitelty yksityiskohtaisemmin tutkimuksessa [5], jossa laskutapaa on sovellettu suomalaiseen koivuvaneriin.

**Käytettyjä merkintöjä**

$A_{ij}, D_{ij}$	jäykköisyvakiot
$E_i, E_{dx}, E_{dy}$	kimmomoduulit
$F_{ii}$	vetovastukset, leikkausvastukset
$G_i, G_d$	liukumoduulit
$M_x, M_y, M_{xy}$	momentit
$N_x, N_y$	normaalivoimat
$N_{xy}, Q_x, Q_y$	leikkausvoimat
$W_{ii}$	taivutusvastukset
$a, b, c$	kaavojen (25)–(27) mukaisia apusuureita
$d$	pintaviilun paksuus
$e_{ij}$	kimmovakioita
$h$	vanerin paksuus
$n$	viilujen lukumäärä
$t$	sisäviilun paksuus
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	liukumat
$\bar{\gamma}_{yz}, \bar{\gamma}_{zx}$	keskimääräiset liukumat
$\epsilon_x, \epsilon_y$	venymät
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	käyritykset
$\nu_i, \nu_{kl}$	suppeumaluvut
$\sigma_x, \sigma_y$	normaalijännitykset
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	leikkausjännitykset

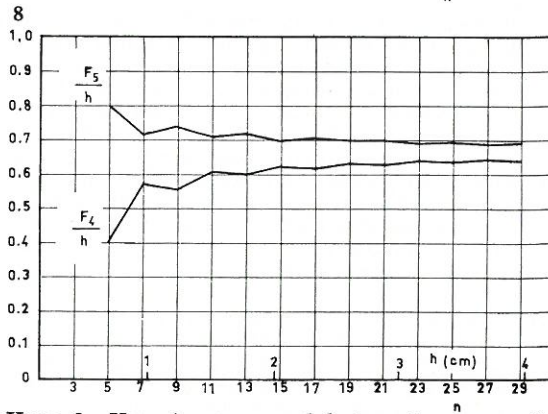
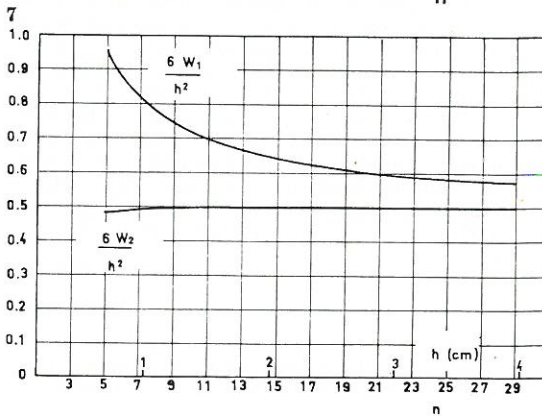
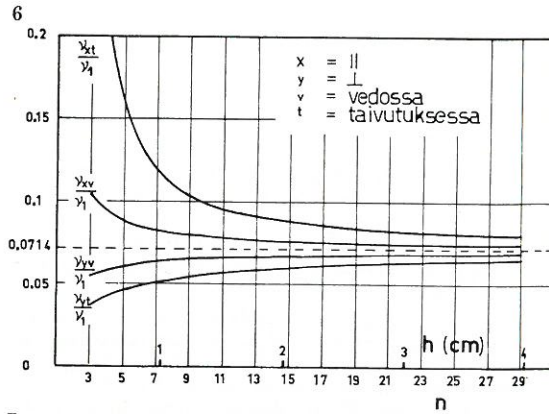
**Alaviitat**

- 11, 55 x-akselin suuntaan, pintaviilujen suuntaan
- 22, 44 y-akselin suuntaan, kohtisuoraan pintaviilujen syiden suuntaa vastaan
- 33 liittyy laatan suuntaiseen leikkausjännitykseen sen tasoa vastaan kohtisuorassa tasossa
- d liittyy pintaviiluun

**Kirjallisuutta**

1. Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I, WSOY, Porvoo 1948.
2. Keylwerth, R., Die anisotrope Elastizität des Holzes und der Lagenhölzer -VDI- Forschungsheft 430, Beilage zu »Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens«, Ausgabe B Band 17, 1951, 40 s.
3. Mc Glenn, J. & Hartz, B., Finite element analysis of plywood plates, Journal of the structural division, ASCE, Vol 94, No ST2, February 1968, ss. 551–563.
4. Rautakorpi, H., Diplomityö, TKK 1968.
5. Rautakorpi, H., Vaneri kerroksellisena rakenteena (Plywood as a laminated structure), Helsinki 1969. [Valtion teknillinen tutkimuslaitos. Tiedotus. Sarja III — Rakennus 138]

Heikki Rautakorpi, dipl.ins. VTT:n sillanrakennus- ja staattinen laboratorio, Otaniemi



Kuva 6. Vanerin suppeumalukujen riippuvuus viilujen lukumäärästä

Fig. 6. Poisson's ratios of plywood as a function of the number of veneers

Kuva 7. Vanerin taivutusvastusten riippuvuus viilujen lukumäärästä

Fig. 7. The section moduli of plywood as a function of the number of veneers

Kuva 8. Vanerin leikkausvastusten riippuvuus viilujen lukumäärästä

Fig. 8. The section moduli of plywood in shear as a function of the number of veneers