

KATSAUS AINEEN LUJUUTEEN HAURAS- MURTOTEORIOIDEN POHJALTA

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 2 No. 2 1969 ss. 81—85;
Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

S. E. PIHLAJAVAARA

Yhteenveto: Tässä kirjoituksessa tarkastellaan atomisidoksia ja sidosvoimien aineelle antamaa teoreettista eli ideaalista lujuutta ja aineen todellista lujuutta sekä esitetään lyhyesti kuuluisa GRIFFITH'in v. 1920—1921 esittämä hauraiden aineiden murtoteoria [1]. Luvuissa 2 ja 3 on noudatettu pääasiassa Edelglass'in esitystä [2] ja luvuissa 4 ja 5 Cotrell'in esitystä [3].

1. Atomien väliset sidokset

Atomien järjestäytyminen ja aineen luonne, siis myös lujuus, on riippuvainen atomien välisten sidosten lujuudesta ja suuntautuvuudesta. Sidovoimat ovat sähköisiä voimia, joten elektronien energia ja sijainti positiivisesti varautuneisiin ioniytimiin näiden määräävät sidosvoimat. Elektronien energian merkittävä alentuminen aiheuttaa voimakkaan, ns. primäärisen sidoksen, kun taas vähäinen alentuminen aikaansaa vain heikon, ns. sekundäärisen sidoksen.

Primäärisidoksia (eli kemiallisia sidoksia) on kolmea tyyppiä:

- 1) *Ionisidos* eli *elektrostaattinen* eli *elektrovalenttinen* eli *heteropolaarinen sidos*, joka on tuloksena (elektronilisäyksen tai elektronivähennyksen seurauksena) vapaista atomeista syntyneiden negatiivisten tai positiivisten ionien sähköstaattisesta (Coulombin) vetovoimasta.
- 2) *Kovalenttinen* eli *homopolaarinen sidos*, joka on seurauksena siitä, että kahdesta atomista kumpikin luovuttaa elektronin toisen uloimmalle elektronikuorelle tai että yhteisen elektroniparin molemmat elektronit ovat peräisin samasta atomista. Viimeksimainitussa tapauksessa käytetään sidoksesta myös yksityiskohtaisempaa nimeä *koordinatiivinen kovalenttinen sidos* tai *koordinaatiosidos*.
- 3) *Metallisidos*, joka esiintyy metalleilla ja on saman kaltainen kuin kovalenttinen sidos, mutta vallitsee identtisten tai samojen atomien välillä. Atomit ovat tässä sidoksessa kokonaan tai osaksi luopuneet valenssielektroneistaan, jotka irrallisina

liikkuvat »elektronikaasussa» täten syntyneiden positiivisten ionien välissä.

Sekundäärisidokset, jotka ovat siis heikkoja verrattuna edellä selostettuihin primäärisidoksiin, syntyvät dipoolien sähköstaattisesta vetovoimasta.

Sekundäärisidokset voidaan jakaa kahteen ryhmään:

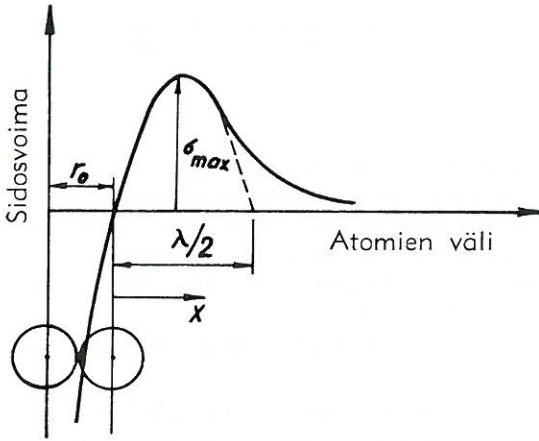
- 1) *van der Waalsin sidos*, jota myös kutsutaan fysikaaliseksi sidokseksi, johtuu siitä, että elektroneja on jonakin ajan-kohtana atomiytimen toisella puolella enemmän kuin toisella puolella. Kysymyksessä on siis vaihteleva dipoolisidos.
- 2) *Vetysidoksessa* toimii vetyatomi yhdistävänä siltana kahden atomin välillä (vety-silta). Dipooli on tällöin pysyvä eli permanentti eli tietyn suuntautuvuutensa säilyttävä. Sidos on tavallista van der Waalsin sidosta vahvempi (nylon).

Erityisesti on huomattava, että kaikki edellä esitetyt sidokset ovat pelkistettyjä äärimmäistapauksia. Useissa aineissa sidokset ovat jossakin perustyyppien välissä. Joissakin tapauksissa tietty sidos on tehollinen kaikissa suunnissa, kun taas joissakin tapauksissa eri sidosvoimat vaikuttavat eri suunnissa. Esim. SiO_2 on puoliksi ionisesti ja puoliksi kovalenttisesti sitoutunut.

Ainetta koossapitävät voimat ovat sähköisiä voimia, jotka ovat kääntäen verrannollisia atomien tai molekyylien välisen etäisyyden potenssiin r^m , jossa m voi olla jopa 6. Näille sidosvoimille on tyypillistä se, että ne ovat suuria atomien ja molekyylien ollessa hyvin lähellä toisiaan ja pieniä, jopa mitättömiä, jos aineen rakenneosaset taas ovat etäällä toisistaan. Sidovoimien maksimi saavutetaan etäisyyden ollessa muutaman angströmin suuruusluokkaa.

2. Teoreettinen haurasmurtolujuus eli ideaalinen vetolujuus

Kun kahta atomitasoa vedetään irti halkaisemalla aine atomitasojen välistä, niin



Kuva 1. Sidosvoimien muuttuminen atomien välisen etäisyyden funktiona voidaan approksimoida sinifunktiolla.

sidosvoimat, jotka sitovat atomit toisiinsa, muuttuvat atomien välisen etäisyyden funktiona oheisen kuvan 1 mukaisesti. Atomien tasapainoetäisyyttä on merkitty r_0 :lla. Pyritäessä vetämään atomit irti toisistaan havaitaan tähän tarvittavan voiman lisääntyvän jyrkästi, ja välin kasvaessa vähän suuremmaksi kuin sidosvoiman suurinta arvoa vastaava väli, aine ei enää pysty kestäämään kuormittavaa jännitystä ja toistensa kanssa yhdensuuntaiset atomitasot irtoavat toisistaan. Approksimoimalla kuvan esittämä atomien jännitysmuodonmuutoskäyrä eli tässä tapauksessa jännitysvenymäkäyrä sinifunktiolla voidaan kirjoittaa

$$\sigma = \sigma_{max} \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1)$$

Siirtymän (venymän) ollessa vähäinen Hookeen laki on voimassa. Kun x on pieni, voidaan lisäksi käyttää sitä tunnettua approksimaatiota, että pienen kulman sini on likimain yhtäsuuri kuin kulma itse. Edellämämainitusta seuraa

$$\sigma = \sigma_{max} \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{E x}{b} \quad (2)$$

jossa E on kimmokerroin, x/b suhteellinen muodonmuutos ja b atomien väli. Yhtälöstä (2) seuraa

$$\sigma_{max} = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{b} \quad (3)$$

Murtumisen tapahduttua sen aikaansaamiseen kulunut työ, joka on varastoitunut lisääntyneenä sidosenergiana, on muuttunut kahden vastasyntyneen uuden pinnan energiaksi (jos kineettinen energia jätetään huomiotta). Asettamalla tehty työ pinta-alayksikköä kohti yhtäsuureksi kuin uusien pintojen energia saadaan

$$\int_0^{\lambda/2} \sigma_{max} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx = \frac{\sigma_{max} \lambda}{\pi} = 2\gamma, \quad (4)$$

missä γ on pintaenergia pinta-alayksikköä kohti. Sijoittamalla yhtälön (4) tulos yhtälöön (3) saadaan atomistiseksi teoreettiseksi lujuudeksi

$$\sigma_{a.teor.} \approx (E \gamma / b)^{1/2} \quad (5)$$

Edellä esitetty tarkastelu voidaan suorittaa myös yksinkertaisemmin approksimoimalla jännitysvenymäkäyrän rajoittama alue kolmioksi, jolloin muodonmuutostyö on $\sigma_{max} \cdot \lambda/4$ eli

$$\frac{\sigma_{max} \lambda}{4} = 2\gamma \quad (6)$$

Jos lisäksi approksimoidaan Hookeen lain mukaan

$$\sigma_{max} = E \frac{\lambda/4}{b} \quad (7)$$

saadaan yhtälöiden (6) ja (7) mukaan atomistiseksi teoreettiseksi lujuudeksi

$$\sigma'_{a.teor.} \approx (2E\gamma/b)^{1/2}, \quad (8)$$

joka on 40 % yhtälön (5) esittämää teoreettista lujuutta suurempi.

Molemmat tulokset (5) ja (8) sisältävät vaikeasti määritettäviä ja varsin epäluotettaviksi jääviä arvoja. Järkevää on sopia teoreettiseksi eli ideaaliseksi haurasmurtolujuudeksi eli ideaaliseksi vetolujuudeksi.

$$\sigma \approx (E\gamma/b)^{1/2} \quad (9)$$

Kiinteän aineen pintaenergia voidaan mitata käyttäen kalvoja tai lankoja, joiden pinta-alan ja tilavuuden suhde on hyvin suuri. Riittävän korkeissa lämpötiloissa nämä koe-kappaleet supistuvat ja siten vähentävät energiaansa pienentämällä pinta-alaansa. (Supistuminen tapahtuu pinta-atomien diffusioituessa kappaleen sisäosiin.) Se kuor-

ma, joka juuri ja juuri tarvitaan supistumisen estämiseksi eli sen tasapainotilan saavuttamiseksi, jossa ei tapahdu lyhenemistä eikä pitenemistä, pitää pintajännityksen tasapainossa. Pinta-energia on yksinkertaisesti se työ, joka tehdään pintajännityksen voittamiseksi yksikön suuruisen pinnan syntyessä. Tyypilliset mittaustulokset metalleille ja keraamisille aineille ovat suuruusluokkaa

$$\gamma \approx 10^3 \text{ erg/cm}^2.$$

Sementtikiven aineosille on saatu [4]: kalsiumhydroksidille $\gamma = 1,18 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^2$ ja tobermoriitille $\gamma = 0,39 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^2$.

Kiinteän ideaaliaineen vetolujuuden yleistarkastelua varten voidaan siis sopia, että pintaenergia $\gamma \approx 10^3 \text{ erg/cm}^2 = 10^{-3} \text{ kp cm/cm}^2$

Edelleen voidaan mainittua tarkastelua varten olettaa atomien väliseksi etäisyydeksi

$$b \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 3 \text{ \AA}$$

ja kimmokertoimeksi

$$E \approx 10^{12} \text{ dyne/cm}^2 = 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

Sijoittamalla edellämainitut arvot yhtälöön (9) saadaan ideaalivetolujuudeksi $n \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ dyne/cm}^2 = 0,2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \approx E/5$. Riippuen arvoista γ , b ja E esitetään kirjallisuudessa ideaalivetolujuudelle jonkin verran vaihtelevia arvoja. Koska ne ideaaliolosuhteita jäljittelevissä kokeissa saatuihin arvoihin verrattuna ovat yleensä suuria, on syytä valita:

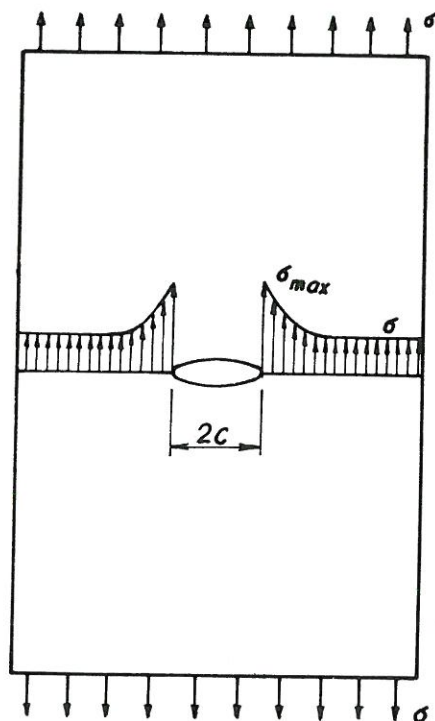
$$\text{Ideaalivetolujuus} \approx E/10 \quad (10)$$

3. Griffith'n haurasmurtolujuus

Edellä esitetty ideaalilujuus on useita dekaadeja reaaliaineiden murtolujuutta suurempi. Huono yhteensopivuus johtuu reaaliaineessa olevista mikroskooppisista halkeamista, jotka aiheuttavat paikallisia jännityshuippuja, jotka ovat ideaalilujuuden luokkaa. Murtuminen saa siis alkunsa näistä suurista jännityshuipuista, vaikka aineen keskijännitys onkin pieni.

Halkeaman sisältävä aine on alemmassa muodonmuutosenergiatilassa kuin vastaava virheetön aine (virheetön hila), ja sen murtamiseen tarvitaan vähemmän energiaa. Griffith esitti seuraavan ajatuksen: vaikka muodonmuutosenergia on sitä pienempi mitä suurempi halkeama on, niin halkeamat ovat

kuitenkin stabiileja niin kauan kuin sen pinnan energia, joka syntyy halkeaman pidentyessä, on suurempi kuin halkeaman kasvusta vapautuva kokonaismuodonmuutosenergia. Tämä erotusenergia, siis pintojen syntymiseen tarvittavan energian ja muodonmuutosenergian erotus, saadaan ulkoisesta työstä. Aine voi siirtyä alempaan energiatilaan ilman ulkoista työtä vain silloin, jos sidoksen murtuessa (ja siis halkeaman pidentyessä) vapautunut muodonmuutosenergia on suurempi kuin uusien halkeamapintojen muodostamiseen tarvittava energia. Kun jännitys halkeaman reunassa (kuva 2) on tarpeeksi suuri täyttääkseen tämän ehdon, niin halkeama tulee epästabiiliksi ja etenee ilman kuorman lisäystä. Jännitys, jonka vaikutuksesta halkeama tulee epästabiiliksi, on murtolujuus. Nopeus, jolla halkeama etenee, on riippuvainen kineettisen energian kasvusta, joka taas määräytyy muodonmuutosenergian vähentymisen ja pinnan energian lisääntymisen erotuksesta. Tämä johtaa halkeaman



Kuva 2. Jännityksen jakautuminen Griffith'in halkeaman ympäristössä.

etenemisnopeuteen, joka on suurimmillaan jonkin verran enemmän kuin kolmasosa pitkittäisten ääniaaltojen etenemisnopeudesta ko. aineessa. Koska halkeaman etenemisnopeudet ovat hyvin suuria (suuruusluokkaa 1 km/s), niin murto tapahtuu hauraissa lujuissa aineissa varoituksetta katastrofimaisesti paukahtaen.

Tietyin oletuksin voidaan kirjoittaa, että aineen, jossa on $2c$:n pituinen halkeama, energian ja virheettömän aineen energian erotus yksikköpaksuutta kohti on

$$W_1 = -\pi \frac{\sigma^2 c^2}{2E}, \quad (11)$$

missä σ on aineen keskimääräinen jännitys. Yksikönpaksuisella levyllä, jossa on halkeama, on lisäksi likimäärin pintaenergia

$$W_2 = 2 \cdot 2 c \gamma \quad (12)$$

Griffith'in murtoehdon mukaan muodonmuutosenergian vähennys on yhtä suuri kuin pintaenergian lisäys, joten saadaan

$$\frac{d(W_1 + W_2)}{dc} = 4\gamma - \frac{\pi \sigma^2 c}{E} = 0, \quad (13)$$

joten Griffith'in haurasmurtolujuudeksi saadaan yhtälöstä (13)

$$\sigma \approx \left(\frac{4E\gamma}{\pi c}\right)^{1/2} \quad (14)$$

Tehtyjen epävarmojen oletuksien vuoksi kirjoitetaan Griffith'in haurasmurtolujuudeksi usein

$$\sigma \approx (E\gamma/c)^{1/2} \quad (15)$$

Yhtälöiden (15) ja (9) vertailu osoittaa ne analogisiksi.

4. Aineen sitkeys

Aineen käytännöllisen lujuuden arvostelussa on otettava huomioon aineen suhtautuminen jännityshuippuja aiheuttaviin tekijöihin kuten teräviin halkeamiin, niinkuin Griffith'in teoria osoittaa. Todellisen halkeaman rakenne on sellainen, että kaikki mahdolliset muodonmuutosvaiheet ja murtovaiheet voivat esiintyä halkeaman reunalla, joten ideaalilujuus tuskin tulee kysymykseen edes halkeaman reunan jännityshuipun kohdallakaan. Aineen (ainekoostuman) lujuus riippuu pintaenergiasta γ . Orowan (1948—1949) ja Irwin (1948) korostivat ensimmäi-

sinä, että yleisempi Griffith'in kaavan tulkinta on mahdollinen ottamalla γ yksikköpintaa kohden määritetyksi kokonaismurto-työksi, joka tehdään murtopinnan syntyessä. Suureeseen γ sisältyy siis plastinen työ yhtä hyvin kuin ideaalinen pintaenergia. Tätä yleistystä on jo käsitelty kimmoplastisuus-teoriassa (Bilby, Cottrell & Swinden 1963). Olkoon σ_y jännitys jossakin alkiossa halkeamarintaman edessä ja u siirtymä tässä kohdassa. Silloin

$$2\gamma = \int_0^{\infty} \sigma_y du \quad (16)$$

Todellisessa haurasmurtumisessa σ_y on jännitys ja u siirtymä atomisidoksissa, jotka sitovat halkeamistasot. Ohuen sitkeän metallilevyn yksinkertaisessa plastisessa leikkausmurrossa σ_y on paikallinen juoksurajajännitys ja u liukuva siirtymä. Samantyyppisiä tulkintoja voidaan suorittaa muillekin murtumistavoille. Yleisesti ottaen σ_y putoaa käytännöllisesti katsoen nolnaan tietyn karakteristisen »murtosiirtymän» u_f tapahduttua siten, että suuruusluokalleen

$$2\gamma \approx \sigma_y u_f, \quad (17)$$

missä σ_y on nyt karakteristinen ainealkion ideaalilujuus tietyyppiselle murtumistavalle. Esimerkiksi yksinkertaisessa hauras-halkeamisessa on $\sigma_y \approx E/10$, $u_f = b$ joten

$$\gamma \approx \frac{Eb}{20}, \quad (18)$$

kuten koetuloksetkin osoittavat. Sitkeissä metalleissa on γ niin suuri (esim. suurempi kuin 10^8 erg/cm²), että koko kappale myötää plastisesti ennen murtoa. Griffith'in kaava ei tällöin enää päde ja murto tapahtuu juoksurajalla tai sen yläpuolella.

Halkeamien läsnäollessa sitkeyden ja suuren lujuuden saavuttamiseksi on sekä σ_y :n että $\sigma_y u_f$:n oltava suuria kussakin kyseessä olevassa murtotapahtumassa. Lasi on makroskooppisena heikkoa, koska u_f on pieni; tina taas, koska σ_y on pieni. Ei voida saavuttaa σ_y :n suurimpia arvoja eli lähestyä arvoa $E/10$ menettämättä sitkeyttä ja makroskooppista lujuutta, koska korkeilla jännityksillä haurasmurtuminen tulee vallitsevaksi ja tällöin u_f on pieni. Aineeseen olisi saatava toisenlainen murtotapahtuma siten, että σ_y on

pienempi, mutta u_f vastaavasti paljon suurempi.

Halkeaman reunassa voi tapahtua mitä moninaisimpia murtumisilmiöitä. Atomit voivat yksinkertaisesti repäisemällä irrota toisistaan niinkuin täysin hauraassa vetomurrossa. Atomit voivat liukua toistensa suhteen, niinkuin sitkeän murron eri muodoissa tapahtuu. Atomit voivat irrottautua toisistaan diffusioitumalla tai kemiallisen prosessin vaikutuksesta. Hauraissa kiteissä halkeaminen voi tapahtua tiettyjä halkeamistasoja pitkin tai noudattamatta kidetasoja, kuten kvartseissa tapahtuu. Monikiteisissä aineissa halkeama voi hypätä rakeesta toiseen sarjana halkeamisia, tai kulkea pitkin rakeiden rajapintoja, tai edetä vielä mutkikkaammin vuoroin sitkeästi ja vuoroin hauraasti, jne. Jokaisella näistä murtotapahtumista on oma σ_y , joka riippuu tietenkin monista tekijöistä (lämpötilasta, muodonmuutosnopeudesta, kuormitusnopeudesta jne.).

Tekniikan käyttämät lujat aineet on suunniteltava makroskooppisesti lujiksi, joten σ_y on se suure, josta joudutaan tinkimään, jotta saataisiin suuri $\sigma_y u_f$. Eräs keino σ_y :n ja u_f :n tasapainoittamiseksi on havaittu käytännössä sopivaksi, nimittäin kovien hiukkasten sekoittaminen pehmeämpään väliaineeseen.

5. Ideaalilujuus, reaalilujuus, lujat aineet

Vetolujuus, joko myötörajalalla tai murrossa, voidaan kirjoittaa muotoon (vrt. yhtälö (10))

$$\sigma = \alpha E \quad (19)$$

korostaen, että aine pettaa venymän ylittäessä atomisidosten kriittisen venymän. Näiden sidosten lujuuden osoittaa siis kimmo kerroin E . Edellä (osa 2) todettiin, että atomisidosten mukaan kiinteillä aineilla voidaan odottaa olevan arvo $\alpha \approx 0,1$ eli niiden ideaalivetolujuus on noin $E/10$. Ns. lujilla aineilla E vaihtelee $2 \cdot 10^{12} \dots 10 \cdot 10^{12}$ dyne/cm² eli $2 \cdot 10^6 \dots 10 \cdot 10^6$ kp/cm².

Tavallisesti käytössä oleville aineille α on hyvin paljon pienempi kuin em. ideaaliarvo 0,1. Tavallinen lasitavara särkyi, kun $\alpha \approx 0,001$ ja tavalliset metallit myötäävät plastisesti, kun $\alpha \approx 0,001$ ja katkeavat, kun $\alpha \approx 0,01$. Lujat teräkset myötäävät, kun $\alpha \approx 0,01$. Tiedämme edelleen, että ohuet lasi-, selluloosa- ja asbestikuidut sekä melkein

kaikkien aineiden säiekiteet, joiden halkaisija on suuruusluokkaa 0,001 mm, ovat usein erittäin lujia ja niiden α on lähellä ideaaliarvoa eli noin 0,02...0,04 (Al_2O_3 -säie, $\alpha = 0,03$; Fe -säie 0,04; lasikuitu 0,035; Cu -säie 0,03). Arvo $\alpha = 0,02$ näyttää olevan saavutettavissa ja kuitulasi ja vahvin teräslanka täyttävätkin tämän ehdon. Jopa niinkin suuri arvo kuin $\alpha = 0,05$ on saatu 6 mm:n paksuiselle virheettömälle lasisauvalle.

Griffith'in haurasmurtoteoria antaa useille aineille hyvin järkeviä tuloksia eli Griffith'in kaavan mukaan laskettu haurasmurtolujuus yhtyy hyvin kokeellisesti saatuun murtolujuuteen eli reaalilujuuteen. Lasilla suoritetut kokeet ovat osoittaneet, että $c \approx 0,001$ mm. Vaikka näitä halkeamia ei ole voitu lasista löytää, niin Griffith'in kaava ennustaa lujuuden oikein, kun tietynmittaiset pinta-halkeamat on tehty koneellisesti. Jos sementtikiven pintaenergiaksi otetaan tobermoriitin pintaenergia $400 \text{ erg/cm}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ kp cm/cm}^2$ [4], ja halkeaman pituudeksi $c = 0,05$ cm eli 0,5 mm sekä kimmokertoimeksi $E = 5 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$, niin vetolujuudelle saadaan Griffith'in kaavan eli yhtälön (15) mukaan suuruusluokalleen kokeellisiin tuloksiin sopiva arvio 60 kp/cm^2 . Kuivatulle mikrobetonille on saatu taivutusvetolujuudeksi noin 100 kp/cm^2 . Jos oletetaan, että vetolujuus on puolet tästä eli 50 kp/cm^2 ja halkeamaksi otetaan järkevä arvio 0,1 cm eli 1 mm, niin em. arvojen E ja γ mukaan saadaan Griffith'in kaavasta vetolujuudeksi 45 kp/cm^2 . Kuivattu betoni on todettu varsin hauraaksi aineeksi ja murtuminen tapahtuu mikrobetonissa, jossa kiviainesrakeet ovat lujia kvartsirakeita, sementtikivessä.

Kirjallisuutta

1. Griffith, A. A., Trans. Roy. Soc., A 221 (1920—1921).
2. Edelglass, S. M., Engineering Materials Science. The Ronald Press Co. New York, 1966.
3. Cottrell, A. H., Strong solids. Proc. Roy. Soc. Vol. 282, p. 2...9, 1964.
4. Pihlajavaara, S. E., Brief reviews: What is concrete, ... A literature survey published as a internal report, State Institute for Technical Research (Finland). Laboratory of Concrete Technology. Helsinki 1965.

S. E. Pihlajavaara, filtri, VTT:n Betonitekniillinen laboratorio, Otaniemi.