

# PÄISTÄÄN NOSTETUN JÄNNEBETONIPALKIN KIEPAHDUS

ILPO SALO

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 2 No. 2 1969 ss. 75—80;  
Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

**Yhteenveto:** Artikkelissa käsitellään lähinnä jännebetonipalkkien asennusvaiheessa esiintyvää stabiilisuusprobleemaa, jossa päistään nostettu palkki kiepahtaa oman painon vaikutuksesta. Probleeman ratkaisu on johdettu tapaukselle, jossa palkin muuttumattoman kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen käyritysmisjäykkyys voidaan jättää huomiotta. Tehtävän ratkaisu on pyritty saattamaan sellaiseen muotoon, että sen soveltaminen käytännössä olisi mahdollisimman yksinkertaista (yhtälöt 14 ja 16 sekä kuva 2). Probleeman asetelun yhteydessä tehtyjen ratkaisua yksinkertaistavien oletusten vaikutusta tuloksen soveltamiseen myös muunlaisiin rakenteisiin on lopuksi käsitelty lyhyesti. Tarvittavien laskelmien selvittämiseksi on artikkeliin liitetty myös kaksi numeerista esimerkkiä.

Rakennusalalla vallitseva pyrkimys entistä lujemmista raaka-aineista tehtyihin varsin hoikkiin rakenteisiin on aiheuttanut sen, että stabiilisuusnäkökohdat ovat saaneet yhä kasvavan merkityksen rakenteiden suunnittelussa. Yhä hoikempien jännebetonipalkkien käyttöönoton vuoksi niiden suunnittelussa on täytynyt lisääntyvässä määrin kiinnittää huomiota myös palkkien kiepahdusvaaraan, jolla aikaisemmin on ollut käytännön merkitystä vain teräsrakenteiden suunnittelussa.

Kiepahdus on ilmiö, jossa tietyn pysty-suoran kuormituksen vaikuttaessa taivutus-palkki menettää stabiilisuutensa sen puristuspuolen nurjahtaessa sivulle. Tällöin palkki taipuu sivulle sekä vääntyy samalla akselinsa ympäri. Jännebetonirakenteiden suunnittelussa kiepahdusvaaran toteaminen saattaa tulla kysymykseen sekä valmiissa rakenteissa että eri asennusvaiheissa, erityisesti palkkien noston yhteydessä. Tällöin palkkia kuormittaa tosin vain sen oma paino, joka yleensä on pieni suunnittelukuormaan verrattuna, mutta samalla myös palkin tukemistapa on kiepahduksen kannalta varsin epäedullinen.

Tapauksessa, jossa palkin päät ovat kiinnitetyt kiertymisen suhteen täysin jäykästi, on käsitelty kirjallisuudessa runsaasti. Tämän tapauksen selvittäminen ei siten tuottane suunnittelijalle erityisempiä vaikeuksia. Sitä

vastoin palkin asennusvaiheen nostotapaus-ta, jossa palkin päät ovat kiertymisen suhteen joustavasti kiinnitetyt, on käsitelty kirjallisuudessa varsin niukasti. Näistä mainittakoon Pettersson [1], Czonka [2] ja Lebel [3].

Seuraavassa käsitellään päistään nostetun jännebetonipalkin kiepahtamista oman painon vaikutuksesta. Probleeman käsittely yksinkertaistamiseksi oletetaan:

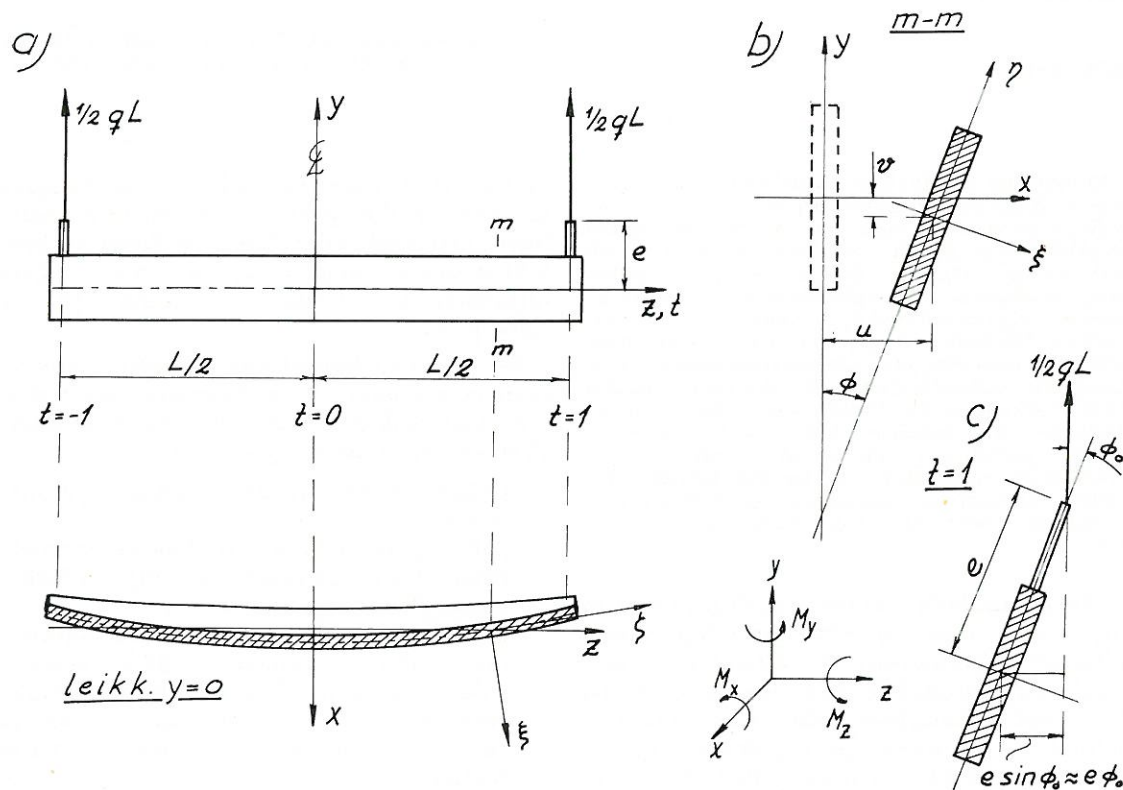
- palkin toimiva poikkileikkaus on muuttumaton
- palkin poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen (sen vääntökeskiö yhtyy poikkileikkauksen painopisteeseen)
- poikkileikkauksen käyritysmisjäykkyyden vaikutus voidaan jättää huomiotta, sillä kapean poikkileikkauksen tapauksessa sen merkitys on varsin vähäinen ja saatu tulos on joka tapauksessa varmallalla puolella.

Tehtävän ratkaisua varten valitaan kiinteä suorakulmainen  $(x, y, z)$  koordinaatisto (kuva 1 a). Lisäksi valitaan suorakulmainen  $(\xi, \eta, \zeta)$  koordinaatisto, jonka origo on kiepahtaneen palkin painopisteakselilla palkin mielivaltaisessa poikkileikkauksessa  $m$ — $m$ ,  $\zeta$ -akseli yhtyy palkin kimmoviivan tangentiin sekä  $\xi$ - ja  $\eta$ -akselit poikkipinnan pääjäyhyysakseleihin (kuva 1 b). Kuormitus vaikuttaa  $y$ -akselin suuntaan. Palkin kiepahtaessa sen poikkileikkauksen  $m$ — $m$  painopiste saa siirtymät  $u$  ja  $v$ , sekä poikkipinta kiertyy kulman  $\Phi$ . Palkin kiertymän  $\Phi$  pysyessä pienenä poikkileikkauksessa  $m$ — $m$  vaikuttava oman painon aiheuttama taivutusmomentti  $M_x$  voidaan jakaa komponentteihin

$$\begin{aligned} M_\xi &= M_x \cos \Phi \simeq M_x \\ M_\eta &= M_x \sin \Phi \simeq M_x \Phi \end{aligned} \quad (1)$$

$$M_\zeta = \frac{du}{dz} M_x$$

Näistä saadaan palkin väännölle ja sivuttaiselle taivutukselle differentiaaliyhtälöt



Kuva 1. Päistään nostetun palkin kiepahtaminen oman painon vaikutuksesta, käytetyt suureet ja koordinaatit.

Fig. 1. The lateral buckling of a beam suspended at its ends under the action of its own weight. The dimension and the coordinates of the beam.

$$C \frac{d\Phi}{dz} - \frac{du}{dz} M_x + \int_0^z q(s) [u(z) - u(s)] ds + Q_y(0) [u(z) - u(0)] - M_\xi(0) = 0 \quad (2)$$

$$B_y \frac{d^2 u}{dz^2} + \Phi M_x = 0 ; B_y = EI_y, C = GI_t$$

Derivoimalla edellinen yhtälö  $z$ :n suhteen ja sijoittamalla siihen jälkimmäinen yhtälö saadaan siirtymä  $u$  eliminoiduksi

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \frac{M_x^2}{B_y C} \Phi = 0 \quad (3)$$

Laskelmien suorittamista varten otetaan käyttöön dimensioton koordinaatti  $t = 2z/L$ . Tällöin palkin oman painon ( $q$ ) momentille saadaan lauseke

$$M_x = \frac{qL^3}{8} (1 - t^2) \quad (4)$$

Koska

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = \left(\frac{2}{L}\right)^2 \frac{d^2 \Phi}{dt^2}$$

saadaan kiepahduksen määräävä differentiaaliyhtälö (3) muotoon

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{q^2 L^6}{256 B_y C} (1 - t^2)^2 \Phi = 0 \quad (5)$$

eli

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + k^2 (1 - t^2)^2 \Phi = 0 ; k = \frac{qL^3}{16 \sqrt{B_y C}} \quad (6)$$

Differentiaaliyhtälön (6) ratkaiseminen voidaan tässä tapauksessa suorittaa sarjakehitelmän avulla. Koska tehtävä on symmetrinen kohdan  $t = 0$  suhteen, haetaan kiertymä  $\Phi$  parillisen potenssisarjan

$$\Phi = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + \dots \quad (7)$$

muodossa. Sijoittamalla lauseke (7) yhtälöön (6) saadaan kertoimien  $a_n$  välille yhteys

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 \cdot a_2 &= k^2 a_0 \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 &= k^2 (-2a_0 + a_2) \\ 6 \cdot 5 \cdot a_6 &= k^2 (a_0 - 2a_2 + a_4) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dots \\ n(n-1)a_n &= k^2 (a_{n-6} - 2a_{n-4} + a_{n-2}) ; \\ n &= 8, 10, 12, \dots \end{aligned}$$

Yhtälöiden (8) perusteella sarjan (7) kertoimet voidaan lausua yhden tuntemattoman  $a_0$  avulla

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 (-0,50000000 k^2) \\ a_4 &= a_0 (0,16666667 k^2 + 0,04166667 k^4) \\ a_6 &= a_0 (-0,33333333 k^2 - 0,03888889 k^4 - \\ &\quad 0,00138889 k^6) \\ a_8 &= a_0 (0,01547620 k^4 + 0,00218540 k^6 + \\ &\quad 0,000024802 k^8) \\ a_{10} &= a_0 (-0,00259259 k^4 - 0,00149912 k^6 - \\ &\quad 0,000055115 k^8) \\ a_{12} &= a_0 (0,00025253 k^4 + 0,00054874 k^6 + \\ &\quad 0,000054948 k^8) \\ a_{14} &= a_0 (-0,00011491 k^6 - 0,000031481 k^8) \\ a_{16} &= a_0 (0,00001291 k^6 + 0,000011298 k^8) \\ a_{18} &= a_0 (-0,00000083 k^6 - \\ &\quad 0,000002587 k^8) \end{aligned} \quad (9)$$

Kertoimien (9) arvoissa on  $k^{10}$  ja sitä korkeammat potenssit jätetty pois.

Tuntemattoman integroimisvakion  $a_0$  määrittämiseksi on tarkasteltava tehtävän reunaehto palkin päässä  $t=1$  (kuva 1 c). Nostovoima aiheuttaa palkkiin vääntömomentin

$$M_t = \frac{1}{2} q L e \Phi_0 = C \frac{d\Phi}{dz} = \frac{2}{L} C \frac{d\Phi}{dt} \quad (10)$$

Palkin reunaehdoista saadaan yhtälö

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{qL^2}{4C} e \Phi_0 \quad (11)$$

Palkin päässä  $t=1$  suureilla  $\frac{d\Phi}{dt}$  ja  $\Phi$  on arvot

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= 2a_2 + 4a_4 + 6a_6 + \dots = a_0 (0,53333333 k^2 \\ &\quad + 0,05714285 k^4 - 0,00912699 k^6 \\ &\quad + 0,000198413 k^8 + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \dots = a_0 (1 \\ &\quad + 0,36666667 k^2 + 0,01825398 k^4 \\ &\quad - 0,00079365 k^6 + 0,00002480 k^8 \\ &\quad + \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

Jos käytetään noston epäkeskisyyttä kuvaamaan dimensiota parametria

$$\gamma = \frac{e}{L} \sqrt{\frac{B_y}{C}} = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{1}{4k\Phi_0} \quad (13)$$

saadaan yhtälöistä (11) ja (12) suureiden  $\gamma$  ja  $k$  välille yhteys (kun  $a_0 \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{k}{4D} (0,53333333 + 0,05714285 k^2 - \\ &\quad - 0,00912699 k^4 + 0,000198413 k^6) \end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned} D &= 1 + 0,36666667 k^2 + 0,01825398 k^4 - \\ &\quad - 0,00079365 k^6 + 0,00002480 k^8 \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{e}{L} \sqrt{\frac{B_y}{C}} \quad (14)$$

$$k = \frac{qL^3}{16 \sqrt{B_y C}}$$

Kun tunnetaan palkin dimensiot ja kuormat, voidaan yhtälöistä (14) laskea tarvittava nostopisteen etäisyys ( $e$ ) palkin painopisteestä, jotta palkki ei kiepahtaisi. Valmiiksi laskettuja suureiden  $\gamma$  ja  $k$  arvopareja sekä niiden kuvaaja on annettu kuvassa 2.

Kun käytännössä yleensä suureella  $k$  on melko pieni arvo, voidaan yhtälössä (14) sen korkeammat potenssit jättää huomiotta, jolloin saadaan

$$\gamma = \frac{2}{15} k \quad (15)$$

Tämän avulla voidaan kriittisen kuormituksen arvo määrittää yhtälöstä

$$q_{kr} = 120 \frac{B_y e}{L^4} ; \quad (0 \leq k \leq 0,3) \quad (16)$$

Jos  $k \leq 0,3$  on yhtälön (16) virhe  $\leq 2,8$  %. Jos  $k = 0,2$  virhe on vain  $1,2$  %.

Vaikka edellä saatu tulos onkin johdettu poikkileikkaukseltaan muuttumattomalle palkille, sitä voidaan käyttää hyväksi myös harjapalkkia laskettaessa, sillä sen jäykkyysuureet  $C$  ja  $B_y$  muuttuvat varsin vähän palkin korkeuden vaihdella. Tarvittavan nostoetäisyyden  $e$  määrittäminen voidaan suorittaa yhtälöiden (14) avulla käyttämällä palkin jäykkyysuureina sopivasti valittuja keskimääräisiä arvoja  $C_m$  ja  $B_{ym}$  [1]. Nosto-

pisteen paikkaa määrättäessä on huomattava, että etäisyys  $e$  on määritettävä koko palkin todellisesta painopisteakselista, joka on ylempänä kuin palkin pään poikkileikkauksen painopiste.

Poikkileikkaukseltaan I-muotoisten jännebetonipalkkien poikkipinta ei yleensä ole kaksoissymmetrinen, vaan vääntökeskiö on hieman painopistettä ylempänä, lähempänä järeämpää ylälaippaa. Tässä tapauksessa yhtälö (14) antaa jonkin verran varmallaa puolella olevia tuloksia. Virhe on kuitenkin yleensä merkitykseltään pieni, eikä tarkempiin laskelmallisiin määrityksiin ole aihetta, mikäli poikkipinnan käyritysmisjäykkyys on pieni sen vääntöjäykkyyteen verrattuna.

Yhtälön (14) avulla voidaan määrittää myös teräsbetonipalkin kiepahdus. Tällöin on kuitenkin otettava huomioon, että palkin sivuttaista taiputusjäykkyyttä laskettaessa voidaan huomioida vain betonin puristuspuoli sekä teräkset. Sitä vastoin vääntöjäykkyyttä määrättäessä voidaan tutkimusten mukaan pitää palkin koko betonipoikkileikkausta toimivana.

Periaatteessa yhtälön (14) avulla voidaan määrittää myös teräspalkin kiepahdus. Käytännössä on kuitenkin teräspalkkien käyritysmisjäykkyys aina varsin huomattava, usein sen vaikutus palkin muodonmuutoksiin on selvästi suurempi kuin palkin vääntöjäykkyyden. Näin ollen saadaan yhtälöstä (14) aivan liian pieniä kriittisen kuorman arvoja.

Erilaisten kiepahdustapausten lähempää tarkastelua varten suositetaan teokseen [1] perehtymistä.

### Esimerkki 1.

Poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisen jännebetonipalkin mitat ovat  $b = 10$  cm;  $h = 100$  cm ja  $L = 12,00$  m ( $L =$  nostopisteiden väli). Mikä on palkin varmuus kiepahdusta vastaan, kun palkin nostoköydet on kiinnitetty nostokoukkuihin 5 cm palkin yläreunan yläpuolelta? Betonin lujuusluokka on K 400 ja Poissonin vakio  $\nu = 0,17$ .

$$E = 18000 \sqrt{K} = 360 \text{ Mp/cm}^2; G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$= 154 \text{ Mp/cm}^2$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = 8333 \text{ cm}^4$$

$$I_t = k_1 hb^3 = 0,312 \cdot 100 \cdot 10^3 = 31200 \text{ cm}^4$$

$$B_y = EI_y = 300 \text{ Mpm}^2; C = GI_t = 480 \text{ Mpm}^2$$

$$\gamma = \frac{e}{L} \sqrt{\frac{B_y}{C}} = \frac{0,55}{12} \sqrt{\frac{300}{480}} = 0,03625$$

Kuvasta 2 saadaan arvoa  $\gamma = 0,003625$  vastaava arvo  $k = 0,26$ . Kriittisen kuormituksen arvoksi saadaan

$$q_{kr} = \frac{k \cdot 16 \sqrt{B_y C}}{L^3} = \frac{0,26 \cdot 16 \sqrt{300 \cdot 480}}{12^3} = 0,914 \text{ Mp/m}$$

Palkin paino  $g = 0,24 \text{ Mp/m}$ , joten varmuusluvaksi kiepahdusta vastaan saadaan

$$n = \frac{0,914}{0,24} = 3,8$$

### Esimerkki 2.

Kuinka korkealta on järjestettävä kuvan 3 harjapalkin nostoköyden kiinnitys, jotta palkin varmuus kiepahdusta vastaan olisi  $n = 1,5$ ? Betoni: lujuusluokka K 400,  $\nu = 0,17$ .

Palkin päissä olevan poikkileikkauksen levennykset voidaan jättää huomioimatta. Palkin jäykkyysluvut lasketaan jänteen neljännespisteessä, jossa palkin korkeus  $h = 100$  cm. Poikkileikkauksen vääntöjäykkyysdeksi  $I_t$  saadaan [4 s. 627]:

$$\text{laippa: } \frac{h}{b} = \frac{15}{7,5} = 2 \therefore k_1 = 0,229,$$

$$I_t = 0,229 \cdot 15 \cdot 7,5^3 = 1450 \text{ cm}^4$$

$$\text{uuma: } \frac{h}{b} = \frac{85}{5} = 17 \therefore k_1 = 0,333,$$

$$I_t = 0,333 \cdot 85 \cdot 5^3 = 3540 \text{ cm}^4$$

uuman ja laipan liitos:

$$\Delta I_t = aD^4; a = 0,1; D = 10 \text{ cm}$$

$$\Delta I_t = 0,1 \cdot 10^4 = 1000 \text{ cm}^4$$

$$\Sigma I_t = 2 \cdot 1450 + 3540 + 2 \cdot 1000 = 8440 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{90 \cdot 5^3}{12} + 2 \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 2 \cdot 25 \left(\frac{25}{6}\right)^2 = 4617 \text{ cm}^4$$

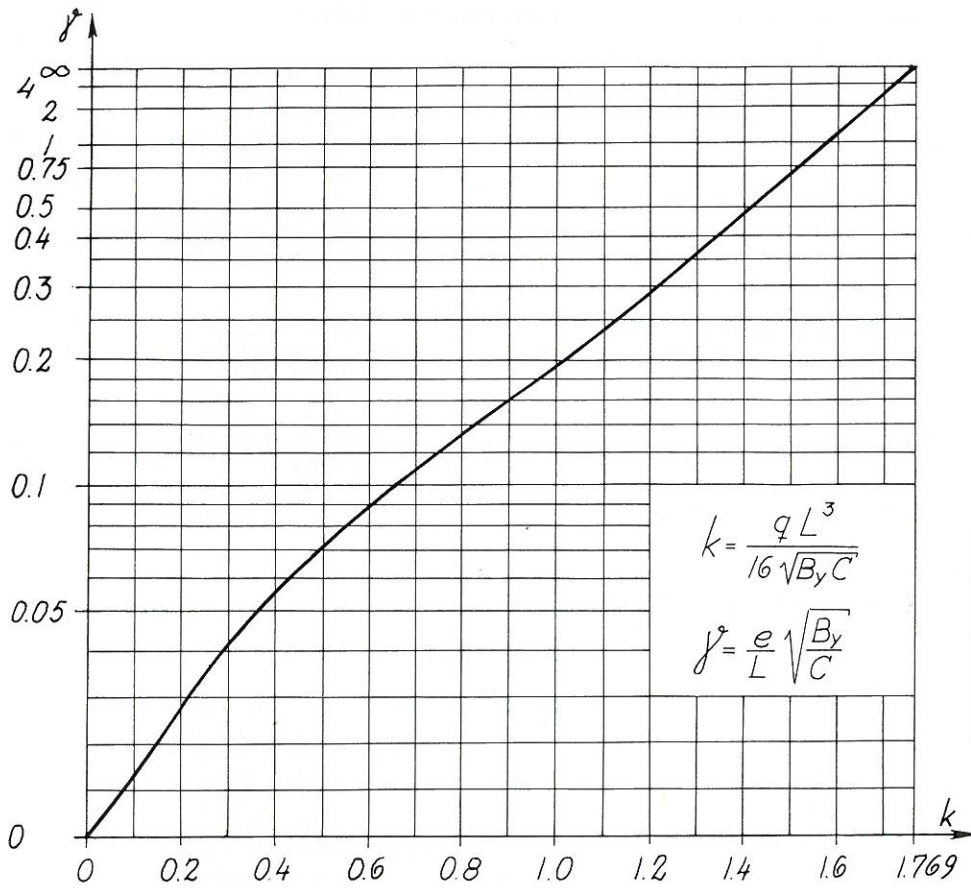
$$E = 18000 \sqrt{K} = 360 \text{ Mp/cm}^2; G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 154 \text{ Mp/cm}^2$$

Kuva 2. Parametrien  $k$  ja  $\gamma$  välinen yhteys yhtälössä (14).

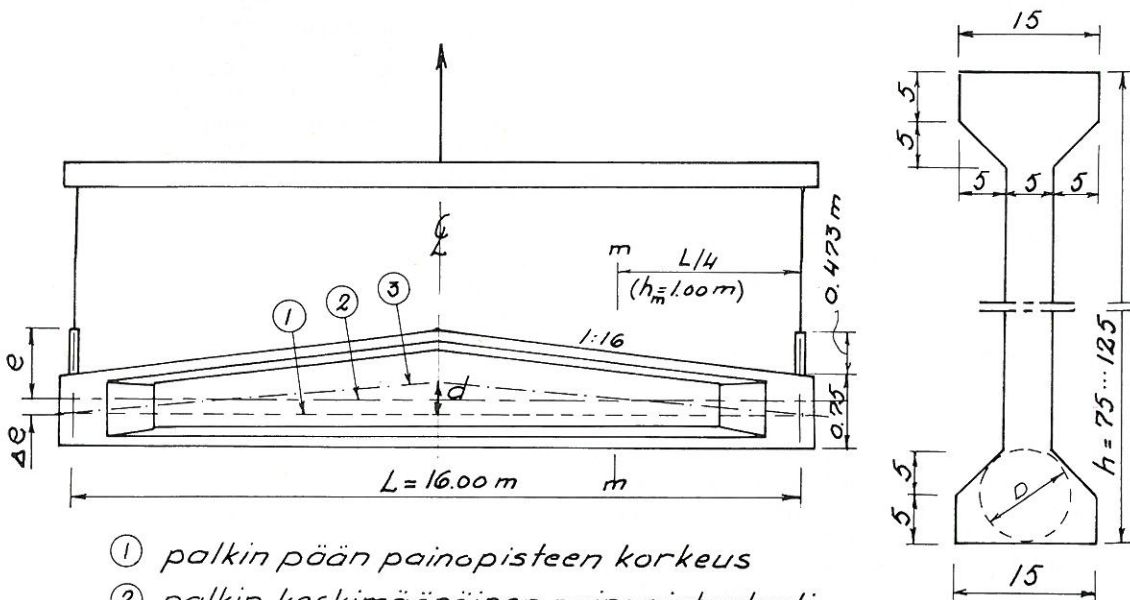
Fig. 2. Relation between  $k$  and  $\gamma$  in the equation (14).

Kuva 3. Laskuesimerkissä 2 käsitelty palkki.

Fig. 3. The beam considered in the numerical example 2.



k	$\gamma$
0	0
0.1	0.01337
0.2	0.02699
0.3	0.04112
0.4	0.05605
0.5	0.07214
0.6	0.08984
0.7	0.10972
0.8	0.13260
0.9	0.15963
1.0	0.19252
1.1	0.23404
1.2	0.28883
1.3	0.36549
1.4	0.48190
1.5	0.68245
1.6	1.11612
1.7	2.78744
1.769	$\infty$



- ① palkin pään painopisteen korkeus
- ② palkin keskimääräinen painopiste akseli
- ③ palkin paikkileikkauksen painopiste

Palkin paino jänteen neljänneksessä  $g = 0,140 \text{ Mp/m}$ . Kun vaadittava varmuus  $n = 1,5$ , täytyy laskelmat suorittaa palkin painolle

$$q = n \cdot g = 0,21 \text{ Mp/m}$$

$$B_y = EI_y = 166 \text{ Mpm}^2;$$

$$C = CI_t = 130 \text{ Mpm}^2; L = 16 \text{ m}$$

$$k = \frac{qL^3}{16 \sqrt{B_y C}} = \frac{0,21 \cdot 16^3}{16 \sqrt{166 \cdot 130}} = 0,3660$$

Kuvasta 2 saadaan interpoloimalla arvoa  $k = 0,3660$  vastaava arvo  $\gamma = 0,05097$  josta saadaan nostoetäisyudeksi

$$e = \gamma L \sqrt{\frac{C}{B_y}} = 0,722 \text{ m}$$

Tämän lisäksi täytyy vielä määrittää palkin keskimääräisen painopiste akselin (tasapaino akselin) asema. Kun palkin painopisteen paikka ja palkin paino muuttuvat lineaarisesti, saadaan keskimääräisen painopiste akselin ja palkin pään poikkileikkauksen painopisteen väliseksi etäisyudeksi

$$\Delta e = \frac{2 + \alpha}{3(1 + \alpha)} d$$

jossa  $\alpha$  = palkin pään poikkileikkauksen ja jänteen keskellä olevan poikkileikkauksen pinta-alojen suhde ja  $d$  = palkin pään ja keskikohdan painopisteiden välinen etäisyys

$$\alpha = \frac{587}{612} = 0,959 ; d = 25 \text{ cm}$$

$$\Delta e = \frac{2 + 0,959}{3(1 + 0,959)} \cdot 25 = 12,6 \text{ cm}$$

Tarvittava nostoetäisyys palkin pään poikkileikkauksen painopisteestä on

$$e + \Delta e = 72,2 + 12,6 = 84,8 \text{ cm}$$

Nostoköyden kiinnityksen on siten tapahduttava vähintään  $84,8 - 37,5 = 47,3 \text{ cm}$  palkin pään yläreunan yläpuolelta.

Saadusta tuloksesta  $k = 0,3660$  voidaan todeta, että tällä ripustuspisteen korkeudella palkin kriittinen kuormitus on vain viidesosa siitä kuormituksesta, jonka palkki kestäisi valmiissa rakenteessa ollessaan, kun sen päät ovat kiertymisen suhteen jäykästi kiinnitettyt. ( $k/k_\infty = 0,3660/1,769 = 20,7 \%$ )

## Yleisimmät merkinnät

$B_y$	sivuttainen taivutusjäykkyys
$C$	vääntöjäykkyys
$E$	kimmomoduuli
$e$	nostopisteen etäisyys palkin pään poikkileikkauksen painopisteestä
$G$	liukumoduuli
$I_t$	vääntöjäyhyysmomentti
$I_y$	$y$ -akselin suhteen laskettu taivutusjäyhyysmomentti
$k$	$k = \frac{qL^3}{16 \sqrt{B_y C}}$ dimensioton parametri
$L$	palkin jännemitta
$M_i$	$i$ -akselin suhteen vaikuttava taivutusmomentti
$q$	palkin oma paino
$t$	$2z/L$ dimensioton koordinaatti
$u, v$	poikkileikkauksen painopisteen siirtymät
$(x, y, z)$ ( $\xi, \eta, \zeta$ )	suorakulmaiset koordinaatit
$\Phi$	palkin kiertymäkulma
$\gamma = \frac{e}{L} \sqrt{\frac{B_y}{C}}$	dimensioton parametri

## Kirjallisuutta

1. *Pettersson, Ove*, Vippningsproblem vid hisning och montering av slanka balkar. Bulletin 7, Institutionen för konstruktionslära. Kungliga tekniska högskolan, Stockholm 1960.
2. *Czonka, P.*, Die Stabilität des an einem Punkt aufgehängten geraden Balkens. Acta Techn. Hung., Budapest 1954 H. 3/4. — Die Stabilität der an ihren Enden aufgehängten prismatischen Stäbe von rechteckigem Querschnitt. Acta Techn. Hung., Budapest 1964 H. 8. — Die Stabilität des an seinen Enden aufgehängten, an einer seitlichen Verschiebung gehinderten Balkens. Acta Techn. Hung., Budapest 1955, H. 1/2.
3. *Lebelle, P.*, Stabilité élastique des poutres en béton précontraint à l'égard du déversement latéral. Anm. Inst. Techn. Bât. Trav. Publ., No 141, Paris 1959.
4. *Ylinen, A.*, Kimmo- ja lujuusoppi II, Porvoo 1950.

*Ilpo Salo, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi*