

# KOTELORAKENTEIDEN PAINON MINIMOINTIIN SOVELTUVA OPTIMOINTIMENETELMÄ

ERKKI PENNALA ja VEIKKO LINNALUOTO

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 2 No. 2 1969 ss. 71–74;  
Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

**Yhteenveto:** Artikkelissa käsitellään paino-optimoititehtävää ensinnä yleisessä mielessä. Sen jälkeen tarkastellaan G. C. Bestin esittämää paino-optimoitimenetelmää, joka perustuu maksimaalisen painonvähennyksen antavan suunnan määrittämiseen optimoinnin kussakin vaiheessa. Menetelmän soveltamisen edellytyksenä on, että rakenne on valmiiksi analysoitu. Tämän vuoksi ennen varsinaista optimoimintimenetelmää artikkelissa on käsitelty hiukan rakenteiden analysointia.

## Johdanto

Rakenteiden optimaalinen suunnittelu käytetyn aineen määrään nähden on tärkeää rakennustekniikassa, koska aineen säästö merkitsee useimmiten myös kustannusten säästöä. Kuljetustekniikassa, erikoisesti lentokoneenrakennuksessa, jossa taarapainon on oltava mahdollisimman pieni, rakenteiden painon optimoisesta on muodostunut oma tieteenhaaransa. Sen kehittymiseen viime vuosina tietokoneiden suomat mahdollisuudet ovat oleellisesti vaikuttaneet.

Yksinkertaisten rakenne-elimien, kuten nurjahdussauvan, jäykistetyin panelin, taiputuspalkin jne. optimoisesta voidaan käsitellä yksinkertaisilla matemaattisilla ja graafisilla menetelmillä. Monimutkaisten rakenteiden, kuten jäykistettyjen kotelopalkkien, käsittelyssä on mielekästä turvautua tietokoneen tarjoamiin etuihin.

Seuraavassa käsitellään erästä optimoimintimenetelmää, joka kuitenkin edellyttää jo valmiiksi suoritettua rakenteen analysointia ja sopivien muuttujien valintaa. Tähän optimoimintitehtävää edeltävään analysointiin liittyy luonnollisesti rakenteen jäykkyyden, jännitysten ja muodonmuutosten määrittäminen lujuusopista tunnettujen menetelmien avulla.

## 1. Optimoititehtävä

Yleisessä tapauksessa optimoimintitehtävä on esitettävissä funktioiden joukolla

$$\begin{aligned} G &= G(x_1, \dots, x_n) \\ \psi_1 &= \psi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_m &= \psi_m(x_1, \dots, x_n) \\ \sigma_1^a &\leq \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \leq \sigma_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_s^a &\leq \Phi_s(x_1, \dots, x_n) \leq \sigma_s^y \end{aligned} \quad (1)$$

Muuttujien  $x_1, \dots, x_n$  funktio  $G$  on ns. kriteeriofunktio, joka halutaan optimoida. Paino-optimoimintitehtävissä  $G$ :tä kutsutaan rakenteen painofunktioksi.

$\psi_1, \dots, \psi_m$  ovat ns. funktiorajoja muuttujille  $x_i$ . Jos esimerkiksi koneistettu lentokoneen siipipaneli on lineaarisesti trapetsinen, kunkin tässä panelissa olevan levyelementin paksuus on määrättävissä lineaarisesta lausekkeesta.

$\Phi_1, \dots, \Phi_m$  ovat tiettyjä muuttujien avulla määrättäviä suureita, kuten esim. jännityksiä ja muodonmuutoksia rakenteen eri pisteissä. Nämä suureet voivat saada vain tietyllä välillä  $\sigma_i^a, \dots, \sigma_i^y$  olevia arvoja, jonka vuoksi niitä kutsutaan rajoitetuiksi suuriksi. Niiden erityisen joukon muodostavat geometriset dimensiot (levypaksuudet, pariteiden poikkipinta-alat jne.), jotka voivat olla vain positiivisia.

Funktiota  $G$  esittää  $n + 1$  dimensionaalisessa avaruudessa pinta, hyperpinta, jonka tietyllä, rajoittavien tekijöiden määrittämällä osalla voidaan liikkua haettaessa  $G$ :n minimiä.

Muuttujien  $x$  esittämää »tasoa» kutsutaan hypertasoksi. Tällä tasolla rajoittavat tekijät määrittävät tietyn alueen, joka projisoituna hyperpinnalle määrittää edellä mainittuun alueeseen.

Vaihtoehtoinen menetelmä tehtävän esittämiseksi on määrittää hypertasolla käyrät  $G = \text{vakio}$  ja näin hakea se käyrä, joka edustaa pienintä  $G$ :n arvoa ja josta ainakin yksi piste on sallitulla alueella. Tämä piste on se muuttujien arvojen kombinaatio, joka antaa  $G$ :lle minimin.

## 2. Rakenteiden analysoinnista

Rakenteiden analysoinnissa on periaatteessa kysymys annetun informaation muuttamisesta toiseen, haluttuun muotoon.

Tutkittaessa monimutkaisia rakenteita tasapaino- ja kombatiliteettiehtoihin perustuvat menetelmät ovat osoittautuneet edullisiksi. Näistä menetelmistä käytetään myös nimityksiä voima- ja muodonmuutosmenetelmät. Menetelmien tarkempaan esittelyyn ei tässä yhteydessä voi puuttua, joten tyydytään vain optimointimenetelmän kannalta tärkeiden yleisten tulosten lyhyeen tarkasteluun. Haluttaessa lähempiä tietoja näiden menetelmien soveltamisesta kotelorakenteisiin voidaan kirjallisuusviitteenä mainita teos [6].

Molemmissa menetelmissä ajatellaan rakenne paloitteluksi peruselementeiksi siten, että edellisessä menetelmässä kullekin elementille on kirjoitettavissa joustomatriisi (flexibility matrix) ja jälkimmäisessä jäykkymatriisi (stiffness matrix). Peruselementteihin liitetään koordinaatit, joihin kuhunkin liittyy voimasuure ja muodonmuutos.

Voimamenetelmässä rakenteeseen vaikuttavat ulkoiset voimat muunnetaan sisäisiksi, elementeissä vaikuttaviksi, voimiksi muunnosmatriisilla  $\mathbf{b}$ .

$$P = \mathbf{b} F, \quad (2)$$

missä  $P$  on vektori, jonka komponentteina ovat sisäiset voimat ja  $F$  vastaavasti vektori, jonka komponentteina ovat ulkoiset voimat.

Samoin on löydettävissä muunnosmatriisi  $\mathbf{a}$ , jolla ulkoiset voimat muunnetaan muodonmuutoksiksi niiden koordinaattien suunnissa.

$$\delta = \mathbf{a} F, \quad (3)$$

missä  $\delta$  on vektori, jonka komponentteina ovat ko. muodonmuutokset ja  $\mathbf{a}$  on muunnosmatriisi, josta käytetään nimitystä rakenteen joustomatriisi.

Muodonmuutosmenetelmässä rakenteen tiettyjen pisteiden muodonmuutokset muunnetaan sisäisiksi, elementtien muodonmuutoksiksi

$$\delta_s = \mathbf{c} \delta, \quad (4)$$

missä  $\delta_s$  on vektori, jonka komponentteina

ovat elementtien muodonmuutokset ja  $\mathbf{c}$  on muunnosmatriisi.

Tämän vektorin ja matriisin  $\mathbf{k}_e$  avulla on määrättävissä vektori, jonka komponentteina ovat sisäiset voimat

$$P = \mathbf{k}_e \delta_s, \quad (5)$$

Matriisi  $\mathbf{k}_e$  on muodostettu elementtien jäykkymatriiseista asettamalla ne sen päälävistäjälle. Ulkoisen voimavektorin ja muodonmuutosvektorin välillä on yhteys

$$F = \mathbf{k} \delta, \quad (6)$$

missä  $\mathbf{k}$  on rakenteen jäykkymatriisi.

Optimoitaessa rakennetta muodonmuutokset ja jännitykset voidaan määrittää kummalla menetelmällä tahansa. Seuraavassa käytetään kuitenkin vain voimamenetelmää.

## 3. Rakenteiden paino-optimointi

### 3.1. Yleistä

Rakenteiden paino-optimointi voidaan määrittellä sellaisen muuttujien kombinaation etsimiseksi, joka annettujen rajoittavien tekijöiden puitteissa minimoi painofunktion  $G$ . Rajoittavina tekijöinä ovat esimerkiksi sallitut jännitykset ja muodonmuutokset rakenteen tietyissä pisteissä. Käytännössä rakenteet saattavat joutua lisäksi hyvin monenlaisten kuormitustilojen alaisiksi. Tämä on omiaan huomattavasti mutkistamaan optimikombinaation määrittämistä.

Optimoitavan rakenteen painofunktio voidaan esittää muodossa

$$G = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (7)$$

missä  $a_i$ :t ovat vakioita, jotka riippuvat käytettävän materiaalin tiheydestä sekä rakenteen ulkoisista dimensioista.  $x_i$ :t ovat muuttujia kuten esim. levypakkuuksia, paarteiden poikkipinta-aloja ja kimmomoduuleja.

Jännityksistä ja muodonmuutoksista rakenteen tietyissä pisteissä käytetään nimitystä »ulostulosuureet». Ulostulosuureita esitetään seuraavassa vektorilla  $\sigma$ , jonka komponentteina ne ovat. On huomattava, että  $\sigma$  sisältää ulostulosuureet kaikille kuormitustiloille. Jos esimerkiksi on valittu  $m$  pistettä, joissa halutaan jännitys ja (tai) muodonmuutos pitää tietyissä rajoissa, on  $\sigma$ :n  $m$  ensimmäistä termiä ulostulojen arvot

ko. pisteissä kuormitustilassa I ja  $m$  seuraavaa kuormitustilassa II, jne.

Ulostulot ovat rajoitettuja suureita, joiden oletetaan olevan muuttujien  $x_i$  jatkuvia funktioita. Rajoja merkitään  $\sigma_j^r$ . Jos ulostulolla  $\sigma_j$  on sekä ylä- että alaraja, se voi esiintyä ulostulovektorissa  $\sigma$  kahdesti.

Ulostulon rajan ja lasketun ulostulon eroksi määritellään

$$\Delta\sigma_j = \varepsilon_j^j (\sigma_j^r - \sigma_j), \quad (8)$$

missä  $\varepsilon_j^j$  on 1, os  $\sigma_j^r$  on yläraja, ja  $-1$ , jos  $\sigma_j^r$  on alaraja. Tällä järjestelyllä erosuureen negatiivinen merkki tulee osoittamaan rajan ylityksen.

Jos ajatellaan oltavan muuttujien »tasolla» tietyssä pisteessä, mistä liikutaan suuntaan  $u$ , ts. muutetaan  $x$ :n komponentteja kiinteässä ( $u$ :n komponenttien) suhteessa ja uudeksi muuttujaksi otetaan  $\lambda$  pätee seuraava yhteys

$$\frac{dG(x + \lambda u)}{d\lambda} = \frac{d\{a_1(x_1 + \lambda u_1) + \dots + a_n(x_n + \lambda u_n)\}}{d\lambda} \quad (9)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i} u_i = g' u,$$

missä  $g'$  on painofunktion gradientti transponoituna. Saatu lauseke merkitsee  $G$ :n muuttumista suunnassa  $u$ .

Optimointi aloitetaan jostakin pisteestä  $x$ , joka on pyrittävä valitsemaan mahdollisimman lähelle minimin antavaa pistettä myöhemmin ilmenevästä syystä. Määritetään tämän pisteen läheisyydessä ulostulojen osittaisderivaatat

$$d_{ij} = \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} \quad (10)$$

ja muodostetaan termeistä  $d_{ij}$  matriisi  $\mathbf{D}$ .

Rakenne oletetaan analysoiduksi voimamenetelmällä, jolloin  $\delta$  ja  $P$  ovat tunnettuja ja niiden avulla on  $\sigma$  määritettävissä. Jos  $x$ :n  $i$ :ttä komponenttia muutetaan  $\Delta x_i$ :n verran ja määritetään näillä muuttujien arvoilla uudet ulostot  $\bar{\sigma}$ ,  $d_{ij}$ :tä voidaan aproksimoida

$$d_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_j - \sigma_j}{\Delta x_i} \quad (11)$$

Määrittämällä  $d_{ij}$  kaikille  $j$ :n arvoille saadaan matriisin  $\mathbf{D}$   $i$ :s vaakarivi. Kun  $\mathbf{D}$  on määrätty saadaan kunkin ulostulon  $\sigma_j$  muutos yksikkömuutosta suunnassa  $u$  kohti seuraavasti

$$\frac{d\sigma_j(x + \lambda u)}{d\lambda} = \frac{\partial \sigma_j}{\partial u} = \sum_i \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} u_i = \mathbf{D}_j' u, \quad (12)$$

missä  $\mathbf{D}_j'$  on  $\mathbf{D}$ :n  $j$ :s pystyrivi transponoituna.  $\mathbf{D}_j' u$  on ts. vektorin  $\mathbf{D}' u$   $j$ :s komponentti.

### 3.2. Suuntavektorin määrittäminen

Ensimmäiseksi suuntavektoriksi otetaan painofunktion normalisoitu gradientti negatiivisena

$$u = -(g' g)^{-1/2} g. \quad (13)$$

Jos nyt ajatellaan, että siirrytään  $u$ :n suuntaan askelpituus  $\Delta\lambda$ , jonka määrittämiseen palataan tuonnempana, tulee uudeksi muuttujavektoriksi

$$\bar{x} = x + \Delta\lambda u. \quad (14)$$

Tämän pisteen läheisyydessä määritetään uudelleen ulostulosuureiden arvot, erosuureet ja  $\mathbf{D}$ .

Jokin tai jotkut erosuureet,  $r$  kappaletta, ovat nyt  $= 0$  tai ainakin käytännössä riittävän lähellä sitä. Uusi suuntavektori valitaan seuraavassa siten, ettei nollaan menneet erosuureet enää muuttuisi. Jos nyt otetaan matriisiin  $\mathbf{C}$  ne  $\mathbf{D}$ :n pystyrivit, jotka liittyvät nollaan menneisiin erosuureisiin,  $u$  on valittava siten, että

$$\mathbf{C}' u = 0 \quad (15)$$

Lisäksi  $u$ :n tulee olla yksikkövektori ja minimoida lauseke (9), joten tehtävänä on määrittää lausekkeen (9) sidottu ääriarvo.

Huomautettakoon tässä yhteydessä, että ehto (15) tulisi asettaa

$$\mathbf{C}' u \geq 0, \quad (16)$$

jotta varmasti optimoinnissa päädyttäisiin minimiin [3]. Jos nimittäin tehtävässä on  $m$  muuttujaa ja  $t$  sitovaa ehtoa siten, että  $t > m$ , on käytettävässä avaruudessa enemmän kuin yksi piste, missä  $m$  pakkoehdotinta leikkaa toisensa. Näin ollen ei ole takeita siitä, että ensinnä nollaan saatettu erosuure ja sitä seuraavat, siinä järjestyksessä kuin ne menevät nollaan, johtaisivat pakkoehtopintojen leikkauspisteeseen, joka antaa painofunktiolle minimin.

Edellä olevan perusteella on nyt selvää, miksi optimoinnin aloituspiste, sovellettaessa tässä esitettyä menetelmää, on valittava mahdollisimman läheltä minimin antavaa pistettä.

Soveltamalla Lagrangen menetelmää sidotun ääriarvon määrittämiseksi saadaan

$$\Phi = \sum_i^n g_i u_i + \sum_i^n \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{C}'_{ki} u_i + \lambda_0 (\sum_i^n u_i^2 - 1) \quad (17)$$

missä  $\lambda_k$ :t ovat Lagrangen kertojia. Derivoimalla tämä osittain  $u_j$ :n suhteen saadaan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} = g_j + \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{C}'_{kj} + 2\lambda_0 u_j = 0 \quad (18)$$

missä  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Matriiseilla esitetynä tämä saa muodon

$$g + \mathbf{C} \lambda + 2\lambda_0 u = 0 \quad (19)$$

missä  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$

Tästä  $u$  voidaan ratkaista ottamalla edeltä huomioon ehto (15).

$$u = -\frac{1}{2\lambda_0} \{g - \mathbf{C}[\mathbf{C}'\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{C}'g\} = -\frac{1}{2\lambda_0} v. \quad (20)$$

$2\lambda_0$  on määritettävissä ehdosta, että  $u$ :n tulee olla yksikkövektori, jolloin edellinen lauseke voidaan saattaa muotoon

$$u = \pm (v'v)^{-1/2} [\mathbf{I} - \mathbf{H}] g, \quad (21)$$

missä  $\mathbf{H} = \mathbf{C}[\mathbf{C}'\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{C}'$  ja  $\mathbf{I}$  on yksikkömatriisi.

Voidaan osoittaa, että jos  $g'u$  ei ole nolla, maksimivähennys painossa saadaan, kun  $u$ :lle käytetään edellä saadussa lausekkeessa —merkkiä.

### 3.3. Askelpituus

Kun painonvähennyksen yksikkösuunta-vektori on määrätty, on arvioitava, miten pitkälle tähän suuntaan voidaan mennä ennenkuin yksi tai useampia erosuureita menee nolnaan.

Jos oletetaan erosuureiden muuttuvan lineaarisesti liikuttaessa suuntaan  $u$ , askelpituuden  $\Delta\lambda$  ensimmäiseksi approksimatioksi voidaan valita

$$\Delta\lambda_j = \varepsilon_1^j \varepsilon_2^j \min \frac{\Delta\lambda_j}{|\partial\sigma_j/\partial u|} = \varepsilon_1^j \varepsilon_2^j \min \gamma_j \quad (22)$$

missä  $\varepsilon_j^j = \partial\sigma_j/\partial u$ :n merkki. Kun haetaan  $\gamma_j$  minimiä,  $\Delta\lambda_j$ :n merkki on määrättävä ja ne  $\gamma_j$ :t, joilla  $\Delta\lambda_j$  on negatiivinen, vaikka  $\Delta\sigma_j$  on positiivinen, jätetään huomiotta.

Yleensä käsiteltävät funktiot eivät ole kuitenkaan lineaarisia, jolloin erosuureen nolnaan saattaminen liittyy askelpituuden approksimoinnin onnistumiseen. Kun erosuureet on laskettu askelpituuden ensimmäisen approksimoinnin jälkeen, askelpituutta on korjattava sopivalla iterointimeneteltyllä, jos jokin rajasuure on ylitetty erosuureen epälineaarisuudesta johtuen.

Jos jokin muuttuja  $\bar{x}_i = x_i + \Delta\lambda u_i$  tulee optimoinnin jossakin vaiheessa negatiiviseksi, askelpituutta on korjattava siten, että ko. muuttuja tulee positiiviseksi ja vain hiukan nolnaan suuremmaksi.

Uuden suuntavektorin ja askelpituuden tultua määritetyksi lasketaan uudet muuttujien arvot  $\bar{x} = x + \Delta\lambda u$ . Edellä oleva toistetaan tässä pisteessä. Ts. määritetään tämän pisteen läheisyydessä  $\mathbf{D}$  ja lasketaan  $u$  sekä  $\Delta\lambda$ , jolloin saadaan jälleen uusi  $\bar{x}$ . Tätä toistetaan siksi kunnes mahdollisimman monet erosuureet menevät nolnaan tai  $g'u$  tulee riittävän pieneksi.

### Kirjallisuutta

1. Best, G. C., Completely Automatic Weight-Minimization Method for High-Speed Digital Computers, J. Aircraft, Vol. 1, No. 3, 1964 s. 129—133
2. Best, G. C., A Method of Structural Weight Minimization Suitable for High-Speed Digital Computers, AIAA Journal, Vol. 1, No 3, 1963, s. 478—479
3. Schmit, Lucien A., Comment on »Completely Automatic Weight Minimization Method for High-Speed Digital Computers», J. Aircraft, Vol. 1, No 6, s. 375—376, 1964
4. Razani, Reza, Behavior of Fully Stressed Design of Structures and Its Relationship to Minimum-Weight Design, AIAA Journal, Vol. 3, No 12, s. 2262—2268, 1965
5. Przemieniecki, J. S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1967
6. Argyris, J. H., Kelsey, S., Energy Theorem of Structural Analysis, Butterworths, London 1960
7. Rubinstein, M., Matrix Computer Analysis of Structures, Prencite Hall, 1966
8. Pennala, E., Tutkimus eräästä paino-optimointimenetelmästä sovellettuna kotelorakenteeseen, diplomityö, Tkk, 1968.

Linnaluoto, Veikko, lentotekniikan professori, TKK Pennala, Erkki, dipl.ins., lab.ins., TKK