

# KESKUSTELUPALSTA

ERÄIDEN INTEGROIMISKAAVOJEN  
RAKENNUSSTAATTINEN TULKINTA  
Vol. 1 No. 3—4 1968

## Pentti Loikkanen: Simpsonin kaava parittomalle määrälle jakovälejä

Simpsonin kaavasta näkee usein kirjallisuudessa maininnan, että sitä voidaan soveltaa vain parilliselle määrälle jakovälejä. Jos jakovälien lukumäärä on pariton, voidaan analogisesti saatua tulosta kirjoittajan mielestä oikeutetusti kutsua otsikossa mainitulla nimellä.

Korvataan integroitava funktio  $y=f(x)$  parabelilla  $y=ax^2+bx+c$ , jolloin kuvan mukaisessa koordinaatistossa

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_0 - 2y_1 + 2y_2}{2(\Delta x)^2} \\ b &= \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (1)$$

$$c = y_1$$

Määrätyn integraalin geometrisena tulkintana saadaan kuvassa viivoitetuille pintaaloille lausekkeet

$$A_1 \approx \int_0^{\Delta x} (ax^2 + bx + c) dx$$

$$A_2 \approx \int_{\Delta x}^{2\Delta x} (ax^2 + bx + c) dx$$

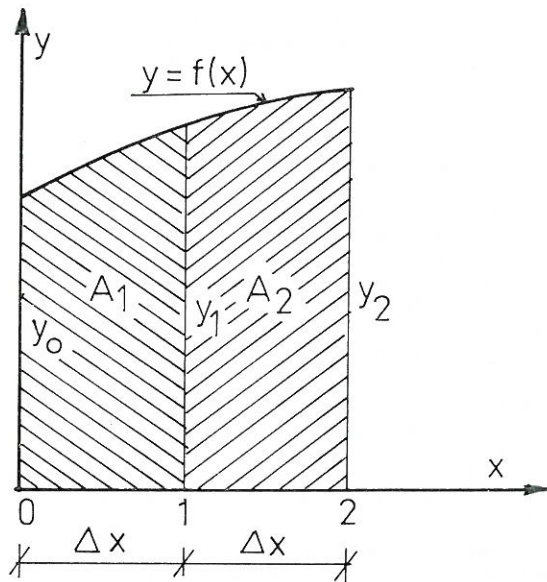
Integroimalla sekä sijoittamalla kertoimet  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kaavasta (1) saadaan

$$A_1 \approx \frac{\Delta x}{3} (1,25y_0 + 2y_1 - 0,25y_2) \quad (2)$$

$$A_2 \approx \frac{\Delta x}{3} (-0,25y_0 + 2y_1 + 1,25y_2) \quad (3)$$

Laskemalla  $A = A_1 + A_2$  saadaan Simpsonin kaava muotoon

$$A \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (4)$$



Jos välejä on parillinen määrä  $2n$ , saadaan Simpsonin yleinen kaava soveltamalla kaavaa (4)  $n$  kertaa

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} y dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Jos välejä on pariton määrä  $2n+1$ , saadaan vastaava lauseke laskemalla yhteen kaavaa (2) ja kaavaa (5) sovellettuna jäljellä olevaan parilliseen määrään jakovälejä

$$\int_{x_0}^{x_{2n+1}} y dx \approx \frac{\Delta x}{3} (1,25y_0 + 3y_1 + 3,75y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \dots + 4y_{2n} + y_{2n+1}) \quad (6)$$

'Pariton' jakoväli voidaan valita muualtakin integroimisväliltä. Kun sovelletaan ensin kaavaa (5) parilliseen määrään jakovälejä, lisätään tähän (2) tai (3) ja sovelletaan kaavaa (5) jälleen jäljellä olevaan parilliseen määrään jakovälejä, seurauksena on kaavan