

ONTELOLAATAN JÄYKKYYSARVOT

MATTI HOME

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 2 No. 1 1969 ss. 28—37; Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

Yhteenveto: Artikkeliki käsittelee kokeellista tutkimusta, missä on selvitetty putkionteloin kevennetyn teräsbetoni-laatan jäykkyysarvoja. Arvot D_x , D_y , D_{xy} ovat ortotrooppisen rakenteen jäykkyyden mittoja. Kokeellisesti jäykkyysarvot D_x ja D_y määritettiin Mohrin menetelmällä artikkelissa selostetuista koekappaleista taipumien avulla. Tällöin oletettiin, että leikkausvoiman aiheuttaman taipuman osuus kokonaistaipumasta on niin pieni, että se voidaan jättää huomiotta. Laskettiin taiputusjäykkyyksien suhte D_y/D_x , joka parhaiten kuvaa kevennyksen vaikutusta laatan jäykkyysarvoihin. Vertaamalla kokeellisia ja teoreettisia jäykkyyksien suhteita saatiin likiarvokaava suhteen D_y/D_x määrittämiseksi.

Kokeellisia ja teoreettisia vääntöjäykkyyden D_{xy} arvoja verrattaessa oletettiin, että ortotrooppisen laatan laattayhtälössä on vakio $H = \sqrt{D_x D_y}$, mikä on yleisesti käytetty oletamus massiivilaattaa mitoitettaessa. Saadusta likiarvokaavasta laskettiin koelaattojen taiputusjäykkyyksien suhte D_y/D_x , jolloin vääntöjäykkyyksien tuloksista saatiin tarkistus kyseiselle likiarvokaavalle. Lopputulokseksi saatiin, että kyseinen likiarvokaava sopii käytännössä taiputusjäykkyyksien suhteen D_y/D_x määrittämiseksi ja olettamusta $H = \sqrt{D_x D_y}$ voidaan pitää oikeana.

Lisäksi pyrittiin johtamaan kevennysputkin varustetun teräsbetoni-laatan leikkausjäykkyyksien S_x ja S_y riippuvuus taiputusjäykkyyksistä D_x ja D_y . Näiden suureiden määrittäminen on tarpeen, jos laatta halutaan ratkaista sandwich-laatan teorian mukaan.

Kaikki tarvittavat laattavakiot on määritetty siten, että lähtöarvoksi on otettu taiputusjäykkyys D_x , joka on helpoimmin ratkaistavissa oleva suure. Muut vakiot on määritetty tästä suureesta riippuviksi.

»Ontelolaatan staattinen toiminta on vielä hämärän peitossa, mikä johtuu yksinomaan puutteellisesta tutkimuksesta. Teoriassa ontelolaattaa voitaisiin käsitellä sandwich-rakenteena, ortotrooppisena laattana, toisiinsa kiinnitettyinä rinnakkaisina palkkeina sekä eräissä tapauksissa arinana tai tavallisena massiivisena laattana. Minkään em. käsittelyn oikeutuksesta ei kuitenkaan voida olla varmoja, sillä kokeellisten tutkimustulosten puuttuessa ei tiedetä toimiiko laatta ajatellulla tavalla.» [1].

A. Ahlström Oy:n Kartonkitehtaan toimeksiannosta on tehty diplomityö [2] VTT:n Sillanrakennus- ja staattisessa laboratoriossa. Tässä työssä on kokeellisesti tutkittu kevennysputkien vaikutusta teräsbetoni-laatan jäykkyysarvoihin.

1. Koekappaleet

Seuraavassa selostettavilla koekappaleilla ja niillä suoritetuilla kokeilla tutkittiin putkionteloin kevennetyn teräsbetoni-laatan taiputus- ja vääntöjäykkyyttä.

1.1 Koepalkit

Taiputusjäykkyyksien D_x ja D_y tutkimiseksi valmistettiin kaksi sarjaa kartonkiputkin kevennettyjä teräsbetonipalkkeja n:o 1 ja n:o 2, joissa molemmissa oli kaksi palkkia A ja B. A-palkeissa kevennysputket olivat jänteen suuntaisia ja niitä oli kaksi. B-palkeissa kevennysputket olivat kohtisuoraan jänteen suuntaa vastaan ja niitä oli kymmenen. Lisäksi saatiin kustakin koepalkista kaksi samanlaista koekappaletta a ja b terästäväällä ne symmetrisesti (veto- ja puristuspuolella sama teräsmäärä).

a = ensimmäinen kuormitusasento

b = toinen kuormitusasento, jolloin palkki käännettiin 180° pituusakselinsa ympäri.

Palkkien mitat on esitetty taulukossa 1.1. Käytetyt merkinnät nähdään kuvista 1.1 ja 1.2. Koepalkkien kuormitusjärjestely on esitetty kuvissa 1.3 ja 1.4. Koepalkit olivat päästään vapaasti tuettuja. Laakerit olivat liikkuvia, minkä vuoksi kulmanmuutokset ja vaakasiirtymät pääsivät tapahtumaan tuilla esteettä. Kuormat sijaitsivat jänteen kolmannespisteissä ja mittakellot jänteen keskellä, neljännespisteissä sekä tukien painumien määrittämiseksi niin lähellä tukia kuin mahdollista. Mittakelloja, joiden tarkkuus oli 0,002 mm, oli yhteensä kymmenen, viisi kelloa palkin kummallakin puolen 5 cm:n etäisyydellä palkin reunasta.

nakuormitus keskittyy tässä tapauksessa voiman vaikutuskohdan läheisyyteen, minkä vuoksi kuormituksen momenttivaikutus on pienempi. Kuvasta 7 nähdään, että tavalla 2 saatu leikkausvoima muuttuu voiman vaikutuskohdassa jyrkimmin, kuten pitääkin.

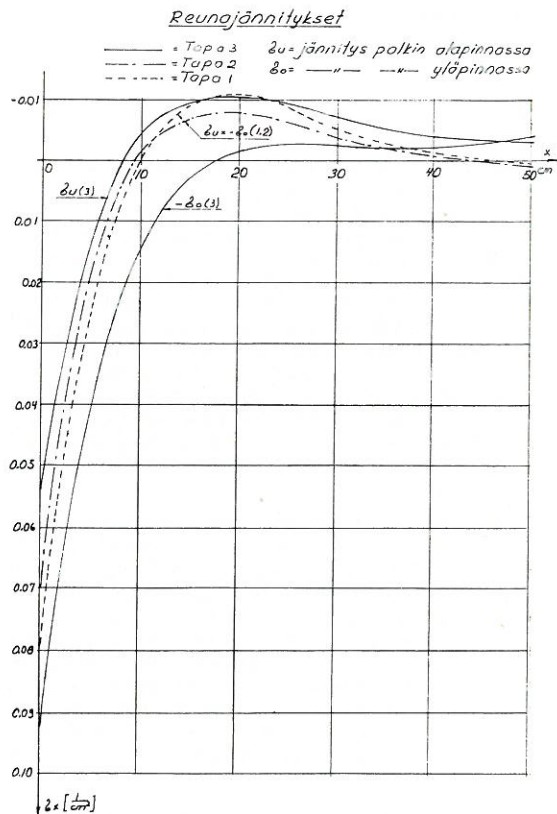
Kuvassa (10) on esitetty reunajännitysten kuvaajat. Koska palkin poikkileikkaus on symmetrinen, tavan 1 ja 2 mukaisessa käsittelyssä reunajännitysten itseisarvot ovat luonnollisesti yhtä suuret. Tavan 3 mukaiset reunajännitykset ovat itseisarvoltaan yhtä suuret milloin normaalivoima $N_x = 0$. Esimerkissä σ_u - ja σ_o -käyrän leikkauspisteet $x = +47$ cm ovat normaalivoiman (kuva 9) 0-kohdat.

Tavalla 3 saatu palkin yläpinnan reunajännityksen itseisarvo voiman vaikutuskohdassa on n. 27 % suurempi kuin tavalla 1 saatu. Jos siis voidaan olettaa, että palkin taivutuksessa ei synny alustan suhteen siirtymiä, kuten tavassa 3 oletettiin, palkki voi saada suurempia jännityksiä kuin siinä tapauksessa, että palkki voi vapaasti liukua alustaansa nähden.

Lopputoteamus

Tavan 2 mukaisesta käsittelystä on todettava, että se on puhtaasti teoreettinen. Leikkausvoimien oletetaan siinä häviävän palkin alapinnassa. Kuitenkaan ratkaisun mukaan leikkausvoimat eivät häviä levyn yläpinnassa. Todellisuudessa ratkaisu lienee löydettävissä tavan 1 ja 3 väliltä, sillä palkin ja alustan välillä voi syntyä myös leikkausvoimia vaikka palkki taipuessaan liukuukin alustaansa nähden. Tällöin leikkausvoimat ovat kitkavoimia, jotka syntyvät hankauksesta palkin ja alustan välillä.

Koska palkki on laskettu teknisen taivutusopin mukaan, palkin pystysuuntaisia muodonmuutoksia ϵ_y ja liukumia γ_{xy} ei ole otettu huomioon. Tällöin varsinkin piste-kuorman läheisyydessä käyritykset palkin eri korkeuksilla voivat poiketa huomattavastikin toisistaan. Tästä aiheutuva virhe on riippuvainen palkin muodosta.



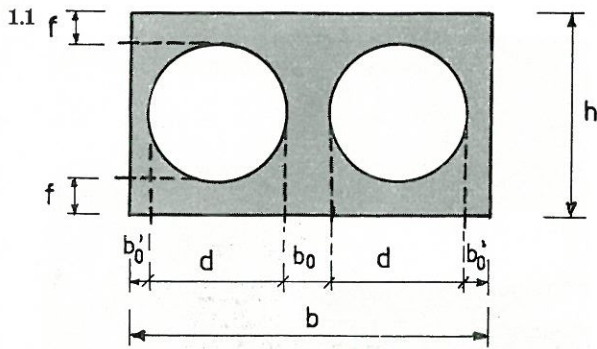
Kuva 10. Palkin reunajännitykset

Gig. 10. Normal stresses σ_o , σ_u on the upper and lower faces of the beam in fig. 6.

Kirjallisuutta

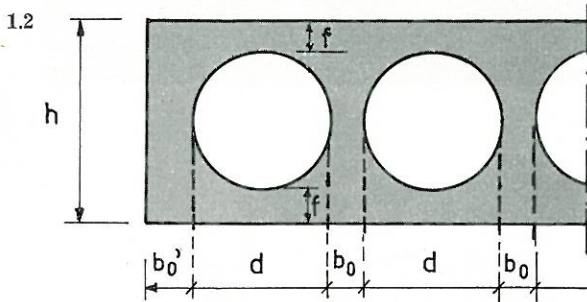
- Biot, M. A., Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation
 Girkmann, K., Flächentragwerke
 Jahnke — Emde, Tables of Functions
 Teräs, E., Diplomityö. TKK 1963

Erkki Teräs, dipl.ins.
 Tie- ja vesirakennushallituksen siltaosasto,
 Helsinki.



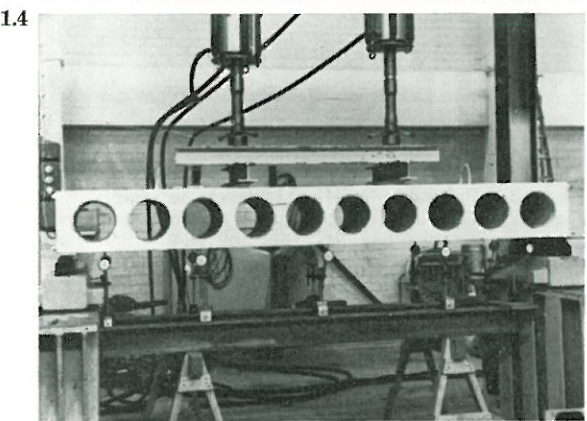
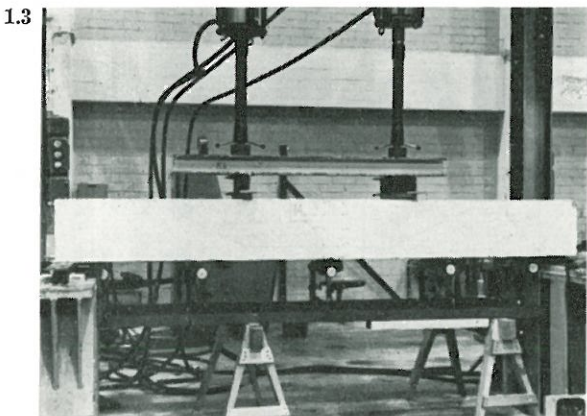
Taulukko 1.1

Koe-palkin n:o	d (cm)	l (cm)	h (cm)	b (cm)	b ₀ (cm)	b' ₀ (cm)	f (cm)
1A	21,2	272	29,9	52,3	5,0	2,45	4,3
1B	»	»	29,7	52,3	»	7,50	4,2
2A	10,6	166	18,9	31,3	»	2,55	4,15
2B	10,6	»	18,9	31,3	»	7,50	4,15



Taulukko 1.2

Koe-palkin n:o	d (cm)	a (cm)	b (cm)	h (cm)	b ₀ (cm)	b' ₀ (cm)	f (cm)
1	21,2	136	136	29,4	5,0	5,0	4,1
2	10,6	83,2	83,2	15,3	5,0	5,1	2,35



Kuva 1.1 A-palkin poikkileikkaus

Fig. 1.1 Cross section of the beam type A

Kuva 1.2 B-palkin pituusleikkaus

Fig. 1.2 Cross section of the beam type B

Kuva 1.3 Palkin 1Aa koejärjestely

Fig. 1.3 Test arrangement with the beam type 1Aa

Kuva 1.4 Palkin 1Ba koejärjestely

Fig. 1.4 Test arrangement with the beam type 1Ba

1.2 Koelaatat

Vääntöjäykkyyden D_{xy} tutkimiseksi tehtiin kaksi koelaattaa: n:o 1 ja n:o 2. Kummastakin koelaatasta saatiin kaksi samanlaista koekappaletta a ja b asentamalla sekä veto- että puristuspuolelle harjateräksistä koottu neliöverkko, jossa verkon terästen poikkileikkaus oli yhtä suuri.

a = ensimmäinen kuormitusasento

b = toinen kuormitusasento, jolloin laatta käännettiin 90° pystyakselinsa ympäri.

Laattojen mitat on esitetty taulukossa 1.2. Koejärjestely oli kuvan 1.5 mukainen. Koelaatat olivat kahdesta vastakkaisesta nurkastaan vapaasti tuettuja laakereihin, joista toinen oli liikkuva. Laattoja kuormitettiin jäljelle jäävistä kahdesta nurkasta hydraulisilla puristimilla. Kuormien välitys laattaan tapahtui kuvan 1.5 osoittamalla tavalla. Laattojen taipumat mitattiin mittakelloilla, joiden tarkkuus oli 0,01 mm. Mittakelloja oli yhteensä seitsemän: kuormituspisteissä, lä-

vistäjien neljänneksipisteissä ja laatan keskellä.

2. Jäykkyysluku

Termit D_x , D_y ja D_{xy} ovat ortotrooppisen rakenteen jäykkyyden mittoja, joita tarvitaan rakenteen muodonmuutosten määrittämiseksi.

Kukin termi koostuu seuraavista tekijöistä:

1. E = kimmomoduuli, joka on ainevakio ja muuttuu muodonmuutosten funktiona.
2. I = jäyhyysmomentti, joka teräsbetonirakenteelle voidaan laskea kolmella eri menetelmällä
 - Otetaan huomioon yksinomaan poikkileikkauksen betonipinta
 - Otetaan edellä mainitun lisäksi huomioon terästen poikkipinta ($n-1$):llä kerrottuna ($n = E_t/E_b$)
 - Otetaan huomioon vain betonin puristuspuoli ja teräkset n :llä kerrottuna.

3. ν = suppeumakerroin, joka on ainevakio.

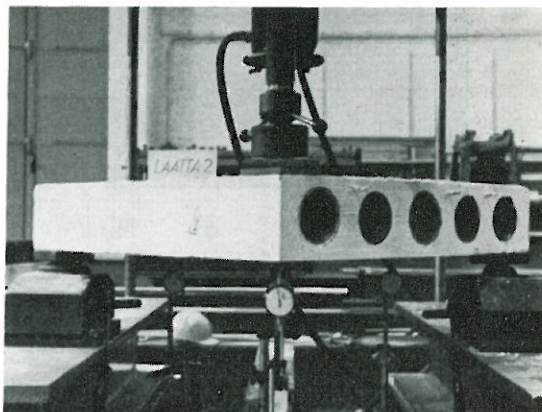
Nyt käsitelty rakenne on muodostettu homogeenisesta ja isotrooppisesta aineesta, mutta rakenne on ortotrooppinen. Rakenteen vaikutusta ν -arvoon ei tiedetä. Tosin tutkimuksen [2] yhteydessä on saatu suppeumakerroimille ν_x ja ν_y lähellä betonin ν -arvoa olevat lukuarvot.

Koordinaatisto x, y, z on valittu siten, että xy -taso yhtyy laatan keskitasoon ja x -akselin suunta on kevennyspotkien suunta sekä z -akseli on alaspäin kohtisuorasti keskitasoa vastaan.

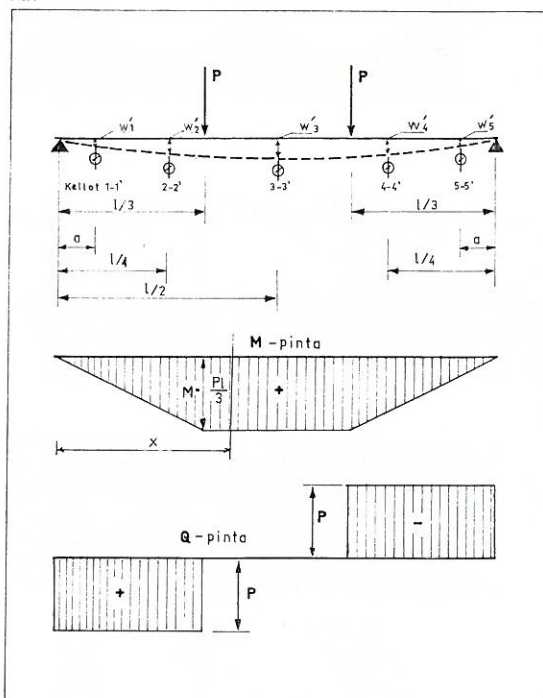
2.1 Kokeelliset jäykkyysluvut D_x ja D_y sekä suhteet D_y/D_x

Koekappaleiden jäykkyysarvot D_x ja D_y määritettiin taipumien avulla Mohrin menetelmällä. Tällöin oletettiin, että leikkausvoiman osuus kokonaistaipumasta on niin vähäinen, että se voidaan jättää huomiotta. Näin saadaan kuormituspisteiden välissä, kohdassa x olevan pisteen taipumaksi (kuva 2.1)

1.5



2.1



Kuva 1.5 Laatan 2a koejärjestely

Fig. 1.5 Test arrangement with the plate type 2a

Kuva 2.1 Palkkien taipumakokeiden järjestely

Fig. 2.1 Test arrangement with the symmetrically bended beam

$$w_M = \frac{PJ^3}{6D} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{27} \right]$$

D = palkin taivutusjäykkyys. Tästä erikoistapauksina saadaan palkin keskipisteen

taipumalle w_{M1} ja neljännespisteen taipumalle w_{M2} lausekkeet

$$w_{M1} = \frac{23}{648} \frac{Pl^3}{D} \quad (2.1)$$

$$w_{M2} = \frac{29}{1152} \frac{Pl^3}{D} \quad (2.2)$$

missä $w_{M1} = w_1 = w'_3 =$ palkin keskiviivan taipuma jänteen keskipisteessä. $w_{M2} = w_2 = (w'_2 + w'_4)/2 =$ palkin keskiviivan keskiarvotaipuma jänteen neljännespisteissä. w'_3 , w'_2 ja $w'_4 =$ mitattuja taipumia, jotka on saatu palkin kummallakin puolen sijaitsevilla kelloilla mitattujen taipumien keskiarvoina ja joista tukien painumat on vähennetty. Näistä yhtälöistä voidaan ratkaista D , kun taipumat tunnetaan. Kokeissa taipumat mitattiin koko palkin pituudelta (kuva 2.1). Taipumista saadaan ns. kokonaisjäykkyys. Momentin ja leikkausvoiman aiheuttamia taipumia ei voida erottaa tällaisessa koejärjestelyssä. Mainittakoon, että tällainen yritys tehtiin, mutta todettiin, ettei sillä saatu mielekkäitä tuloksia.

Kun kunkin koepalkin taivutusjäykkyys eri kuormitusarvoilla on ratkaistu kaavoista (2.1) ja (2.2), voidaan laskea suhde D_y/D_x , joka parhaiten ilmaisee kevennyksen vaikutuksen laatan jäykkyysarvoihin.

Taivutusjäykkyyslukujen suhde D_y/D_x eri palkkisarjoille ja kuormitusasannoille on esitetty kuvissa 2.2, 2.3 ja 2.4. Niistä todetaan, ettei jäykkyyksien suhde ole vakio, mikä johtuu betonin oikukkaasti käyttäytymisestä. Kuvasta 2.2 nähdään, että koepalkkien IAa ja IB tulosten mukaan laskettujen taivutusjäykkyyksien suhde D_y/D_x on välillä 0,7–0,3, jolloin suoraksi keskiarvoksi saadaan $D_y/D_x = 0,5$.

Kuvissa 2.3 ja 2.4 on koepalkkien 2Aa ja 2Ba sekä 2Ab ja 2Bb tulosten mukaan lasketut jäykkyyslukujen suhteet. Kuvasta 2.3 saadaan keskimääräiseksi arvoksi 0,7–0,9 ja kuvasta 2.4 0,6–0,8. Molempien tulosten keskiarvona $D_y/D_x = 0,75$. Lisäksi tiedetään, että massiivilaatassa $D_y/D_x = 1,0$.

2.2 Teoreettiset jäykkyysluvut D_x ja D_y sekä suhteet D_y/D_x .

Ortotrooppisen laatan taivutusjäykkyydet x - ja y -akselia vastaan kohtisuorissa tasoissa ovat [3]

$$D_x = \frac{(EI)_x}{1-\nu_x \nu_y} \quad D_y = \frac{(EI)_y}{1-\nu_x \nu_y}$$

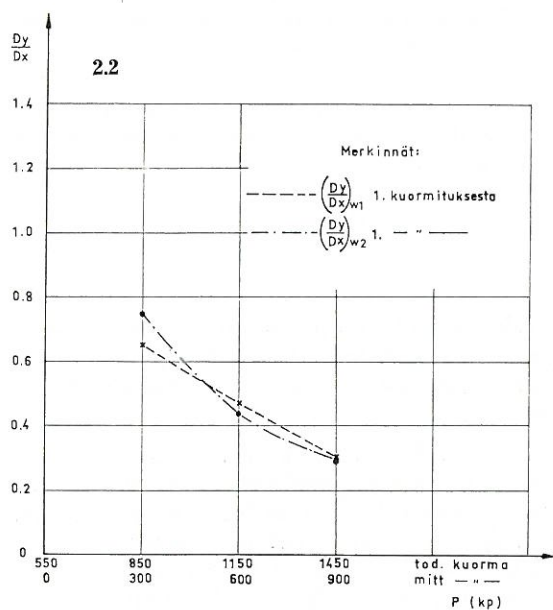
Kyseessä olevan putkionteloin kevennetyn laatan jäykkyysluku D_x on helppo ratkaista. Kun asetetaan $\nu_x \cdot \nu_y = 0$, saadaan $D_x = (EI)_x$.

Betonin kimmomoduulin arvo E saatiin tekemällä määrittäykseet 28 ja 97 vuorokautta vanhoilla koelieriöillä ja -prismoilla. Samalla suoritettiin betonin kuutiolujuuden määrittäykseet. Kokeet tehtiin VTT:n Betonilaboratoriossa. Betonin kuutiolujuudeksi saatiin K300 ja kimmomoduuliksi $E = 230000$ kp/cm².

Kun näin saatua teoreettista jäykkyysluvun arvoa D_x verrattiin kokeellisiin arvoihin, todettiin sen pitävän hyvin paikkansa molemmissa koepalkeissa aina ensimmäisten vetohalkeamien muodostumiseen asti. Tällöin jäyhyysmomentit I_x oli laskettu ottaen huomioon ainoastaan betonipoikkileikkaus ($= I_{xb}$)

Jäykkyysluvun $D_y = (EI)_y$ ratkaiseminen on jäyhyysmomentista I_y johtuen likiarvomenetelmien varassa. Jäyhyysmomentin I_y määrittämiseksi käytettiin kahta tapaa, joista toinen, rakenteen käsitteleminen kerroksellisenä (sandwich) tuntui mielekkäämmältä. B-palkin ajatellaan koostuvan kolmesta kerroksesta. Palkin ylä- ja alareunassa on f :n paksuinen kerros täyttä betonia ja palkin keskiosan muodostaa ns. välikerros. Koska välikerroksen kimmomoduuli on pieni reuna-kerrosten kimmomoduuliin verrattuna, voidaan ottaa $E = 0$ eli välikerros ei ota vastaan jännityksiä. Jäyhyysmomentti $I_y = I_{yb}$ voidaan tällöin laskea ottamalla huomioon ainoastaan putken päällä ja alla oleva betonikerros.

Teoreettiset jäykkyyslukujen suhteet D_y/D_x saadaan suoraan jäyhyysmomenttien



Kuva 2.2 Jäykkyyslukujen suhde D_y/D_x koepalkkien 1Aa ja 1Ba tulosten mukaan lasketuna

Fig. 2.2 Experimental values of the ratio of flexural rigidities D_y/D_x (beams 1Aa and 1Ba)

suhteena I_{yb}/I_{xb} . Suhteeksi eri koepalkkisarjoille saadaan:

Koepalkit 1A ja 1B

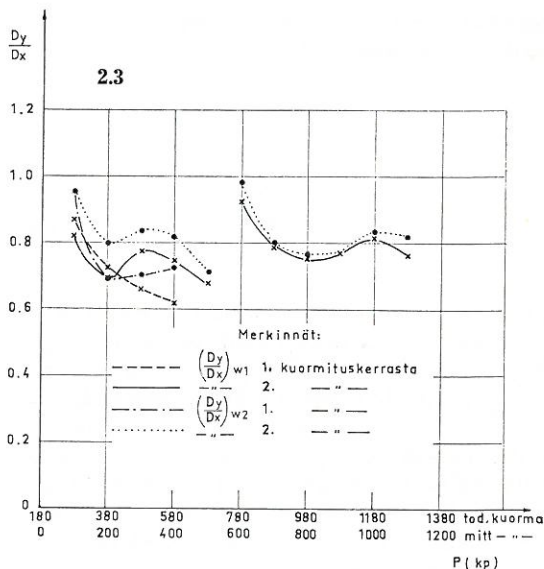
$$\frac{D_{yb}}{D_{xb}} = \frac{I_{yb}}{I_{xb}} = 0,735$$

Koepalkit 2A ja 2B

$$\frac{D_{yb}}{D_{xb}} = \frac{I_{yb}}{I_{xb}} = 0,885$$

Kokeellisia ja teoreettisia taivutusjäykkyyksien suhteita verrataan sijoittamalla ne koordinaatistoon, jossa abskissana on teoreettinen jäyhyysmomenttien suhde I_{yb}/I_{xb} ja ordinaattana jäykkyysien suhde D_y/D_x (kuva 2.5). Sijoittamalla kokeelliset keskiarvotulokset D_y/D_x kyseiseen koordinaatistoon ja yhdistämällä ne suoralla, jonka on katsottu parhaiten kuvaavan saatuja koetuloksia ja sitä tosiasiaa, että kun $I_{yb}/I_{xb} = 1$ niin $D_y/D_x = 1$, saadaan suoran yhtälöksi kaava (2.3)

$$\frac{D_y}{D_x} = 2 \cdot \frac{I_{yb}}{I_{xb}} - 1 \quad (2.3)$$

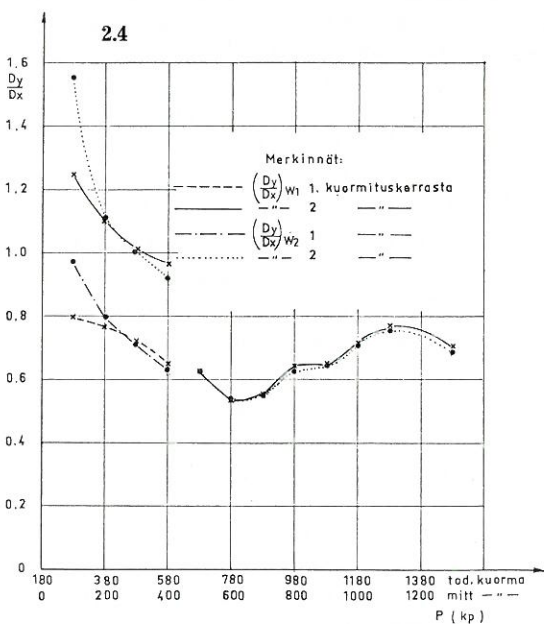


Kuva 2.3 Jäykkyyslukujen suhde D_y/D_x koepalkkien 2Aa ja 2Ba tulosten mukaan lasketuna

Fig. 2.3 Experimental values of the ratio of flexural rigidities D_y/D_x (beams 2Aa and 2Ba)

Kuva 2.4 Jäykkyyslukujen suhde D_y/D_x koepalkkien 2Ab ja 2Bb tulosten mukaan lasketuna

Fig. 2.4 Experimental values of the ratio of flexural rigidities D_y/D_x (beams 2Ab and 2Bb)



Saatujen tulosten perusteella kaava (2.3) on käytännöllinen likiarvokaava, josta voidaan määrittää koepalkkien suhteet täyttävien, kevennysputkin varustettujen teräsbetonilaattojen taivutusjäykkyyksien suhde D_y/D_x .

3. Taivutusjäykkyyksien ja vääntöjäykkyyden vertailu

3.1 Kokeelliset vääntöjäykkyyden D_{xy} arvot

Kokeissa mitattiin taipumat kullakin kuormitusarvolla pisteissä 1, 1', 2, 2', 3, 4 ja 4' (kuva 2.6), mutta vääntöjäykkyyden laskemiseksi tarvitsee tietää ainoastaan pisteiden 1, 1' ja 3 taipumat.

Vääntömomentille voidaan kirjoittaa yhtälö [3]

$$M_{xy} = -2D_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1)$$

Koearjestelystä johtuen voidaan kirjoittaa [4]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{4w}{ab}$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2} P$$

missä $w = w_{1-1'} - w_3$
 $w_{1-1'}$ = pisteiden 1 ja 1' keskiarvotaipuma
 w_3 = pisteen 3 taipuma
 a ja b = koelaatan sivumitat
 P = kuormitus

Sijoittamalla nämä yhtälöön (3.1) saadaan

$$D_{xy} = \frac{P \cdot a \cdot b}{16 \cdot w} \quad (3.2)$$

Kaavasta (3.2) laskettiin vääntöjäykkyyksien arvot koelaatoille 1a, 1b, 2a ja 2b. Taipumat mitattiin kussakin laatassa keskimäärin 13:lla kuormitusarvolla.

3.2 Teoreettisten ja kokeellisten vääntöjäykkyyksien vertailu

On lähdetty siitä oletuksesta, että ortotrooppisen laatan laattayhtälön [3] vakio H on muotoa $H = \sqrt{D_x \cdot D_y}$, mikä on yleisesti käytetty oletamus massiivilaattaa mitoitettaessa.

Laskemalla kaavasta (2.3) koelaattojen taivutusjäykkyyksien suhde D_y/D_x , saadaan vääntöjäykkyyksikokeiden tuloksista tarkistuskaavalle (2.3).

Taivutus- ja vääntöjäykkyyden välille saadaan yhteys [3]

$$M_{xy} = -(1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

josta

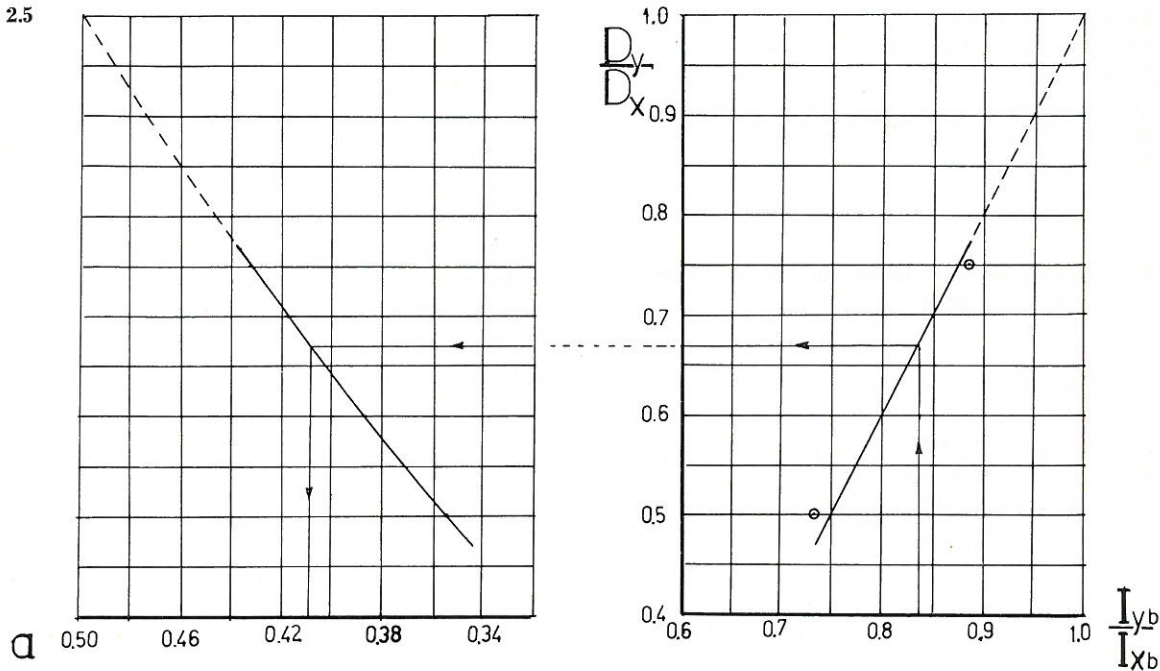
$$D_{xy} = \frac{1}{2} (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \quad (3.3)$$

Koska suppeumakertoimien ν_x ja ν_y vaikutus vääntöjäykkyyden arvoon on merkittävä, käytetään arvoja $\nu_x = 0,175$ ja $\nu_y = 0,107$. Kyseiset arvot on saatu koepalkkeihin 2A ja 2B sijoitettujen vastusvenymäliuskojen avulla [2]. Kun kaavaan (3.3) sijoitetaan $D_y = \frac{D_x}{D_x} \cdot D_x$, voidaan kirjoittaa

$$D_{xy} = a(1 - \nu_x \nu_y) D_x$$

jossa $a = 1/2 \cdot \sqrt{D_y/D_x}$ (kuva 2.5). Kun kaavasta (2.3) ratkaistaan koelaattojen taivutusjäykkyyksien suhde D_y/D_x sekä lasketaan teorettinen taivutusjäykkyys $D_x = E \cdot I_{xb}$ ja sijoitetaan saadut arvot kaavaan (3.4), voidaan teoreettisia ja kokeellisia D_{xy} arvoja verrata keskenään.

Saaduista koetuloksista todettiin, että teoreettiset ja kokeelliset vääntöjäykkyyden arvot molemmassa koelaatoissa olivat varsin lähellä toisiaan. Lopputulokseksi saatiin,



että kaava (2.3) on käytännöllinen likiarvo-kaava tietyt alkuolettamukset täyttävien putkionteloin kevennettyjen teräsbetonilaattojen taivutusjäykkyyksien suhteen D_y/D_x määrittämiseksi. Lisäksi olettamusta $H = \sqrt{D_x \cdot D_y}$ voidaan pitää oikeana.

4. Kaavojen (2.3) ja (3.4) käyttöalue

Kaavojen (2.3) ja (3.4) voidaan katsoa soveltuvan poikkileikkauksiin, jotka mitoiltaan vastaavat koepalkkeja ja -laattoja. Tällöin

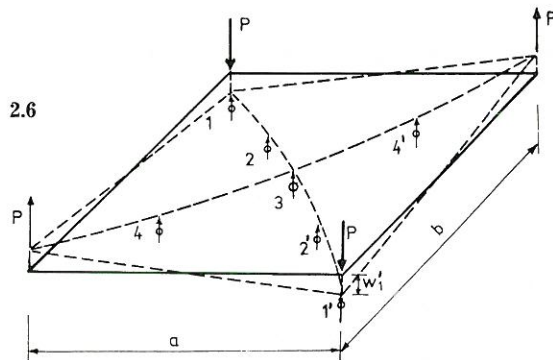
$$I_{xb} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{yb} = \frac{b}{12} (h^3 - d^3)$$

$$0,735 < \frac{I_{yb}}{I_{xb}} < 0,885$$

$$0,735 < \frac{h^3 - d^3}{h^3 - \frac{3\pi}{16} \frac{d}{b} \cdot d^3} < 0,885$$

missä $b = d + b_o$.



Kuva 2.5 Kokeellisten ja teoreettisten jäykkyyksien suhteiden D_y/D_x vertailu

Fig. 2.5 Comparison between experimental and theoretical values of D_y/D_x

Kuva 2.6 Koelaattojen taipumakokeiden järjestely

Fig. 2.6 Test arrangement with the bended plate

Tästä ratkaisemalla saadaan

$$1,35 < \frac{h}{d} < 1,77$$

kun $\frac{d}{b}$:lle saadaan koepalkkisarjoista

n:o 1 ja 2 ehto

$$0,68 < \frac{d}{b} < 0,81$$

Näistä ehdoista saadaan edelleen

$$\frac{d}{5,7} < f < \frac{d}{2,6}$$

$$\frac{d}{4,2} < b_0 < \frac{d}{2,1}$$

5. Leikkausjäykkyyden likiarvo

Leikkausjäykkyys on suure, joka ilmoittaa leikkausvoiman ja sen aiheuttaman kulmanmuutoksen γ suhteen. Seuraavassa pyritään teoreettisesti johtamaan kevennysputkin varustetun teräsbetonilaatan leikkausjäykkyyden arvot S_x ja S_y sekä näiden riippuvuus taivutusjäykkyyksiluvuista D_x ja D_y . Näiden suureiden määrittäminen on tarpeellista, jos laatta halutaan ratkaista sandwich-teorian mukaan.

5.1 Leikkausjäykkyyden määrittäminen

Leikkausjäykkyys S on siis leikkausvoiman Q ja sen aiheuttaman kulmanmuutoksen γ suhde [4].

$$S = \frac{Q}{\gamma} \quad (5.1)$$

Lisäksi tiedetään, että [5]

$$\gamma = \frac{\tau_k}{G} \quad (5.2)$$

missä τ_k = keskimääräinen leikkausjännitys
 G = liukumoduuli.

Näin saadaan

$$S = \frac{Q}{\gamma} = \frac{Q \cdot G}{\tau_k}$$

Jos käytetään liukumoduulin likiarvoa $G = E/2$, saadaan

$$S = \frac{Q \cdot E}{2 \cdot \tau_k} \quad (5.3)$$

Kaavaa (5.3) sovelletaan kevennettyyn laattaan.

5.11 Leikkausjäykkyys S_x

Jos poikkileikkaus on massiivinen, saadaan [5] $\tau_k = Q_x/A_1$, missä $A_1 = 1 \cdot h =$ yksikön levyisen kaistan poikkileikkauksen pinta-ala. Tällöin saadaan

$$S_x = \frac{E \cdot h}{2}$$

Massiivipoikkileikkauksen taivutusjäykkyudeksi $D_x = E \cdot I_x$ yksikön levyiselle kaistalle saadaan

$$D_x = \frac{E \cdot h^3}{12}$$

Massiivisessa poikkileikkauksessa saadaan tällöin suhteeksi

$$\frac{S_x}{D_x} = \frac{6}{h^2}$$

Suhde muunnetaan ontelolaattaan soveltuvaan kertoimelle b_0/b

$$\frac{S_x}{D_x} = \frac{6 \cdot b_0}{b} \cdot \frac{1}{h^2} \quad (5.4)$$

5.12 Leikkausjäykkyys S_y

Kuvasta 5.1 saadaan

$$M = Q_y \cdot b = T \cdot (d + f); \quad T = \frac{b}{d + f} \cdot Q_y$$

$\tau_k = T/A_2$, missä $A_2 = 1 \cdot b_0 =$ yksikön levyisen vaakaleikkauksen pinta-ala ohuimmalta kohden.

$$S_y = \frac{E \cdot (d + f) \cdot b_0}{2 \cdot b} \quad (5.5)$$

Taivutusjäykkyudeksi $D_y = E \cdot I_y$ yksikön levyiselle kaistalle saadaan, kun lasketaan

jäyhyysmomentti I_y edellä selostetulla tavalla

$$D_y = \frac{E \cdot (h^3 - d^3)}{12};$$

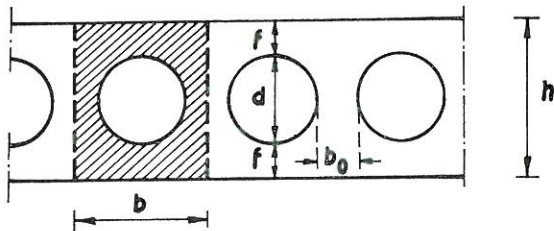
Suhteeksi S_y/D_y saadaan

$$\frac{S_y}{D_y} = \frac{6 \cdot b_0}{b} \cdot \frac{(d + f)}{(h^3 - d^3)} \quad (5.6)$$

Näin on saatu määritetyksi kaikki tarvittavat laattavakiot kevennysputkin varustetun teräsbetoni-laatan laskemiseksi ortotrooppisen laatan ja sandwich-laatan teorian mukaan siten, että lähtöarvoksi on otettu taivutusjäykkyys D_x , joka on helpoimmin ratkaistavissa oleva suure. Muut vakiot on määritetty tästä suureesta riippuviksi.

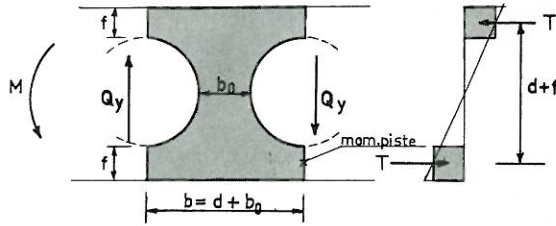
Esimerkki

Lasketaan edellä esitettyjä kaavoja käyttäen esimerkilaatan taivutusjäykkyyksien suhde D_y/D_x , kun $D_x = 1$, sekä vääntöjäykkyyden D_{xy} suhteellinen arvo ja vääntöjäykkyyksien ja taivutusjäykkyyksien suhteet S_x/D_x ja S_y/D_y .



Esimerkkilaatta
The plate as an example

$$\begin{aligned} h &= 18,0 \text{ cm} & b_0 &= 5,0 \text{ cm} \\ d &= 10,0 \text{ »} & b &= 15,0 \text{ »} \\ f &= 4,0 \text{ »} \end{aligned}$$



Kuva 5.1 Keskimääräisen leikkausjännityksen τ_{yk} määrittäminen

Fig. 5.1 Determination of the average value (τ_{yk}) of shearing stress

Lasketaan viivoitetun poikkileikkauksen hitausmomenttien suhde I_{yb}/I_{xb}

$$I_{xb} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$I_{yb} = \frac{b}{12} \cdot (h^3 - d^3)$$

Suhde I_{yb}/I_{xb} saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \frac{I_{yb}}{I_{xb}} &= \frac{h^3 - d^3}{h^3 - 0,59 \cdot \frac{d}{b} \cdot d^3} = \\ &= \frac{18^3 - 10^3}{18^3 - 0,59 \cdot 0,67 \cdot 10^3} = 0,89 \end{aligned}$$

Taivutusjäykkyyksien suhde saadaan kaavasta (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{D_y}{D_x} &= 2 \cdot \frac{I_{yb}}{I_{xb}} - 1 \\ \frac{D_y}{D_x} &= 2 \cdot 0,89 - 1 = 0,78 \end{aligned}$$

Vääntöjäykkyyden laskemista varten käytetään suppeumakertoimia ν_x ja ν_y laskettaessa Bettin sääntöä [3]

$$D_y \cdot \nu_x = D_x \cdot \nu_y; \nu_y = \frac{D_y}{D_x} \cdot \nu_x$$

$$\begin{aligned} \text{Kun } \nu_x &= 0,175 \text{ saadaan} \\ \nu_y &= 0,78 \cdot 0,175 = 0,137 \end{aligned}$$

Tällöin saadaan kaavasta (3.4)

$$D_{xy} = a \cdot (1 - \sqrt{\nu_x \cdot \nu_y}) \cdot D_x$$

missä $D_x = 1$

$$a = 1/2 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} = 1/2 \cdot 0,884 = 0,442$$

$$\sqrt{\nu_x \cdot \nu_y} = \sqrt{0,175 \cdot 0,137} = 0,153$$

$$D_{xy} = 0,442 \cdot 0,847 = 0,373$$

Ortotrooppisen laatan laattayhtälössä käytettävä vääntöjäykkyyden arvo on kaksinkertainen tässä saatuun arvoon verrattuna, joten laattayhtälössä käytettävä suhteellinen vääntöjäykkyyden arvo $2D_{xy} = 2 \cdot 0,373 = 0,746$. Leikkausjäykkyyksien S_x ja S_y ja taivutusjäykkyyksien D_x ja D_y suhteet saadaan kaavoista (5.4) ja (5.6)

$$\frac{S_x}{D_x} = \frac{6 \cdot b_0}{b} \cdot \frac{1}{h^2} = \frac{6 \cdot 5}{15} \cdot \frac{1}{324} = 0,00620$$

josta ratkaistaan S_x :n suhteellinen arvo

$$S_x = 0,00620 \cdot D_x = 0,00620$$

$$\frac{S_y}{D_y} = \frac{6 \cdot b_0}{b} \cdot \frac{d+f}{h^3 - d^3} = \frac{6 \cdot 5}{15} \cdot \frac{14}{4900} = 0,00570$$

josta voidaan ratkaista S_y :n suhteellinen arvo

$$S_y = 0,00570 \cdot D_y = 0,00570 \cdot 0,78 = 0,00445$$

6. Ortotropisen laatan laattayhtälö ja taipuman lauseke.

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (6.1)$$

missä $H = \sqrt{D_x D_y}$. Ortotropisen laatan laattayhtälön (6.1) [3] molemmat puolet jaetaan D_y :llä, jolloin yhtälö saadaan muotoon (6.2)

$$\frac{D_x}{D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D_y} \quad (6.2)$$

Sijoitetaan $\lambda = \sqrt[4]{D_y/D_x}$ ja laattayhtälö voidaan kirjoittaa muotoon (6.3)

$$\frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D_y} \quad (6.3)$$

Nyt yhtälö voidaan ratkaista samalla tavalla kuin isotrooppisen laatan laattayhtälö, kun D :n paikalle sijoitetaan D_y ja kaikki x -koordinaatin suuntaiset mitat kerrotaan λ :lla.

Kun esimerkiksi neljältä sivulta vapaasti tuetussa laatassa

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3,$$

saadaan ortotropisen laatan taipumalle lauseke (6.4)

$$w(x, y) = \frac{1}{D_y \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (6.4)$$

Momentit ja leikkausvoimat voidaan ratkaista tästä, kun kuormitus tunnetaan.

Kuormitusvakio a_{mn} on sama kuin isotrooppiselle laatalle, koska λ laskutoimitusten yhteydessä supistuu pois.

Momentit ja leikkausvoimat saadaan ratkaistuksi käyttämällä jäykkyyksilukujen suhteellisia arvoja. Taipumia määritettäessä joudutaan todellinen taivutusjäykkyys D_x ratkaisemaan.

Kirjallisuutta

1. Mäkipuro, R., Ontelolaattasillat, Rakennustekniikka 5/1968.
2. Home, M., Kartonkinen kierrehylsy teräsbetoni-laatan kevennysputkena ja näin kevennetyn laatan jäykkyysarvoja, Diplomityö Oulu 1968.
3. Girkmann, K., Flächentragwerke, 6. Aufl. Wien 1963.
4. Plantema, F. J., Sandwich-Construction, New York 1966.
5. Ylinen, A., Kimmo- ja lujusoppi I, Porvoo 1965.
6. Home, M., Kartonkihylsyillä kevennetyn teräsbetoni-laatan mitoittamisesta. Rakennusteollisuus 1/1969.

Matti Home, dipl.ins. A. Ahlström Oy, Helsinki