

KAKSIULOTTEISELLA KIMMOISELLA ALUSTALLA OLEVAN PALKIN TAVUTUKSEN TUTKIMINEN

ERKKI TERÄS

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 2 No. 1 1969 ss. 17–27; Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

Yhteenveto: Artikkelissa on tutkittu kimmoisella alustalla olevan palkin taivutusta, kun palkin alustana on seinämäinen tasolevy. Levyn jännitystilaa on ratkaistu Airy'n jännitysfunktion avulla. Jännitysfunktio ja kuormitukset on esitetty Fourier-integraalin muodossa. Ratkaisu saadaan palkin ja levyn yhteisistä reunaehdoista. Artikkelissa on tutkittu myös tapausta, jossa palkki ei voi liukua alustansa nähden. Ratkaisuisissa on käsitelty palkkia teknisen taivutusopin mukaan.

Kimmoisella alustalla olevan palkin taivutuksen tutkimisessa käytetään hyvin yleisesti Winklerin teoriaa. Tämän mukaan palkin ja alustan välinen alustapaine on suoraan verrannollinen alustan painumaan

$$p(x) = k \cdot v(x) \quad (1)$$

Vakio k on alustakerroin, joka ilmaisee alustan kimmoisen ominaisuuden. Tämä oletamus ei tunnu yleisesti ottaen luonnolliselta, koska alustan painuma jossakin pisteessä on riippuvainen vain tällä kohdalla vaikuttavasta alustapaineesta. Seuraavassa on tutkittu kimmoisella alustalla olevan palkin taivutusta Winklerin teoriasta poiketen ottamalla huomioon alustan muodonmuutokset levyteorian perusteella.

Lähtöotakumat

Palkin alustana on isotrooppinen Hooken lakia noudattava ohut tasolevy, johon palkista tulevat kuormitukset vaikuttavat levyn tasossa. Lisäksi on oletettu, että levy on äärettömän pitkä ja korkea. Tällä idealisoinnilla saadaan laskelmat yksinkertaisemmiksi. Akselisto valitaan kuvan 1 mukaisesti siten, että x -akseli otetaan levyn yläreunaa pitkin ja y -akseli suoraan alaspäin. Levyn paksuus on h .

Tasojännitystilän Airy'n jännitysfunktio

Koska aluslevylle tulevien kuormitusten oletetaan vaikuttavan levyn tasossa ja koska levyn paksuus h on pieni, voidaan levyn katsoa olevan tasojännitystilassa. Tällöin voidaan levyn jännitystilaa tarkastelussa ottaa avuksi tasojännitystilän Airy'n jännitysfunktio $F(x, y)$. Tämä funktio toteuttaa osittais-differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (2)$$

Jos tunnetaan sellainen (2):n ratkaisu, joka toteuttaa tehtävän reunaehdot, jännityskomponentit saadaan yhtälöistä

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

Kuormituksen ollessa symmetrinen lähtöotaksumien mukaisen levyn jännitysfunktio voidaan esittää Fourier-integraalin avulla muodossa

$$F = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A + \alpha y B) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (4)$$

missä A ja B eivät ole vakioita, vaan parametrin α funktioita. Tämä funktio toteuttaa yhtälön (2).

Vastaavat jännityskomponentit ovat

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \int_0^{\infty} (A - 2B + \alpha y B) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \int_0^{\infty} (A + \alpha y B) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = - \int_0^{\infty} (A - B + \alpha y B) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

Levyn reunalla vaikuttavan pistekuorman esittäminen Fourier-integraalin avulla

Kuvassa (2) katkoviivoilla merkitty tasainen kuormitus voidaan esittää Fourier-integraalin avulla muodossa

$$p_x = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha c}{\alpha} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (6)$$

Pistekuormasta aiheutuva kuormitus saadaan merkitsemällä $2pc = P$ ja antamalla $c \rightarrow 0$

$$p_x = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha c}{\alpha c} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (7)$$

Ottaen huomioon, että $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha c}{\alpha c} \rightarrow 1$, kun $c \rightarrow 0$, saadaan

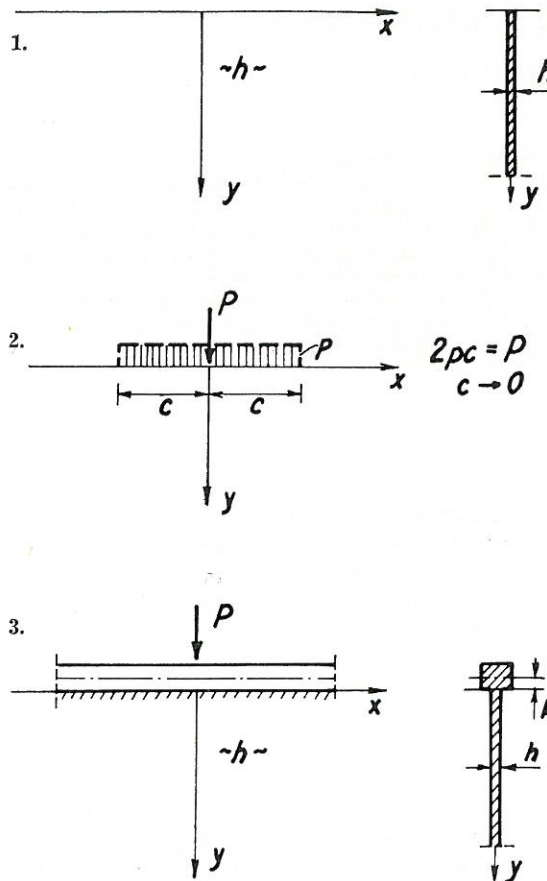
$$p_x = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (8)$$

Tämä integraali ei ole suppeneva, mutta kuitenkin tällä kuormitusfunktiolla saadaan suppenuvia integraaleja jännityskomponenteille voiman vaikutuskohdan ulkopuolella olevissa levyn pisteissä.

Pistekuorman kuormittama äärettömän pitkä palkki

Seuraavassa käsitellään tehtävä kolmella eri tavalla.

1. Palkki voi taipuessaan liukua vapaasti alustan suhteen.
2. Oletetaan, että palkin taipuessa sen alapinnan ja alustan välillä ei tapahdu keskinäistä siirtymää palkin pituussuunnassa. Ratkaisussa ei oteta huomioon palkin ja alustan välisten leikkausvoimien vaikutusta palkin jännityksiin ja muodonmuutoksiin.
3. Sama kuin tapa 2, mutta ratkaisussa otetaan huomioon palkin ja alustan välisten



Kuva 1. Levyn koordinaatisto

Fig. 1. The coordinates of the foundation wall plate

Kuva 2. Levyn kohdistuvan kuormituksen esittäminen

Fig. 2. Representation of the single load in the form of Fourier integral

Kuva 3. Pistekuorman kuormittama äärettömän pitkä palkki

Fig. 3. A beam of infinite length under single load

leikkausvoimien vaikutus palkin jännityksiin ja muodonmuutoksiin.

Ratkaisuissa palkkia käsitellään teknisen taiputusopin mukaan.

Tapa 1.

Merkitään seuraavassa (kuva 3)

- h = alustalevyn paksuus
 E = alustalevyn kimmokerroin
 ν = alustalevyn Poissonin vakio
 A_s = palkin poikkileikkausala
 I_s = palkin jäyhyysmomentti
 E_s = palkin kimmokerroin
 k = palkin alapinnan reunaetäisyys

Kaavan (8) mukaan pistekuormasta P aiheutuva kuormitus on

$$p_x = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha$$

Palkin alapinnassa vaikuttava vastavoima esitettyä samassa muodossa on

$$p_x = \int_0^{\infty} p(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \quad (9)$$

jossa $p(\alpha)$ on toistaiseksi määräämätön parametriefunktio.

Palkkiin vaikuttaa tällöin y -akselin suunnassa kuormitus $P_x - p_x$. Tämä aiheuttaa palkille taipuman v_s , joka määräytyy yhtälöstä

$$E_s I_s \frac{d^4 v_s}{dx^4} = P_x - p_x =$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{P}{\pi} - p(\alpha) \right] \cos \alpha x \, d\alpha$$

Integroimalla kahdesti saadaan

$$E_s I_s \frac{d^2 v_s}{dx^2} = - \int_0^{\infty} \left[\frac{P}{\pi} - p(\alpha) \right] \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} \, d\alpha + c_1 x + c_2 = -M(x)$$

Integroimalla vielä kerran todetaan, että integroimisvakiot ovat nolliä, koska taivutusmomentin ja leikkausvoiman tulee hävitä äärettömyydessä. Täten palkille saadaan

$$-E_s I_s \frac{d^2 v_s}{dx^2} = M_x = \int_0^{\infty} \left[\frac{P}{\pi} - p(\alpha) \right] \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} \, d\alpha \quad (10)$$

Koska leikkausjännitykset häviävät alkutaksumien mukaan levyn reunalla, yhtälöstä (5) saadaan

$$\tau_{xy} = - \int_0^{\infty} (A-B) \sin \alpha x \, d\alpha = 0, \text{ joten } A=B$$

$$\sigma_y = - \int_0^{\infty} A \cdot \cos \alpha x \, d\alpha = - \frac{P_x}{h} = - \frac{1}{h} \int_0^{\infty} p(\alpha) \cdot \cos \alpha x \, d\alpha \quad \text{josta } A = \frac{1}{h} p(\alpha)$$

Levyn jännitysfunktion lauseke (4) saa siten muodon

$$F = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \frac{p(\alpha)}{\alpha^2} (1+\alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (11)$$

Jännityskomponenteille saadaan yhtälöistä (5) arvot

$$\sigma_x = - \frac{1}{h} \int_0^{\infty} p(\alpha) (1-\alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha$$

$$\sigma_y = - \frac{1}{h} \int_0^{\infty} p(\alpha) (1+\alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{1}{h} \int_0^{\infty} p(\alpha) \alpha \sin \alpha x \, d\alpha$$

Siirroskomponentit saadaan yhtälöistä

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Kun nämä integroidaan, saadaan siirroskomponentit

$$u = \frac{1}{E} \left[\int (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx + \phi(y) \right] \quad (14)$$

$$v = \frac{1}{E} \left[\int (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy + \psi(x) \right]$$

Voidaan osoittaa, että $\psi(x)$ ja $\phi(y)$ ovat x :n ja y :n lineaarisia funktioita, jotka häviävät, kun muodostetaan siirroskomponenttien toiset derivaatat. Tässä yhteydessä ei tarvitse tutkia tarkemmin niiden luonnetta. Kun jälkimmäiseen yhtälöistä (14) sijoitetaan jännityskomponenttien arvot lausuttuna jännitysfunktion avulla yhtälöiden (3)

mukaan, saadaan pystysiirtymän määrittämiseksi yhtälöt

$$E\nu = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial F}{\partial y} + \psi(x) \quad (15)$$

$$E \cdot \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} dy - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \quad (16)$$

Kun yhtälöön (16) sijoitetaan jännitys-funktio (11), laskutoimituksen jälkeen saadaan

$$E \cdot \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \rho(\alpha) a [2 + (1 + \nu) a y] e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha \quad (17)$$

Levyn reunalla ($y = 0$) saadaan

$$E \cdot \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = -\frac{2}{h} \int_0^{\infty} \rho(\alpha) \alpha \cos \alpha x d\alpha \quad (18)$$

Reunalla levyn käyristyksen tulee olla sama kuin palkilla, joten

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = \frac{d^2 v_s}{dx^2}$$

Jotta tämä ehto olisi voimassa kaikilla x :n arvoilla, saadaan yhtälöistä (10) ja (18)

$$\frac{P}{\pi} - \rho(\alpha) = 2 \frac{E_s I_s}{Eh} \rho(\alpha) \alpha^3$$

Merkitään

$$\kappa = \sqrt[3]{\frac{E_s I_s}{Eh}} \quad (19)$$

jolloin saadaan

$$\rho(\alpha) = \frac{P}{\pi(1 + 2\alpha^3 \kappa^3)}$$

Yhtälön (9) mukaan reunapaine on

$$P_x = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + 2\alpha^3 \kappa^3} d\alpha \quad (20)$$

Suurin reunapaine esiintyy arvolla $x = 0$, jolloin

$$P_{max} = \frac{2P}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2\kappa}} \quad (21)$$

Taivutusmomentin lausekkeeksi saadaan yhtälöstä (10)

$$\begin{aligned} P_x - P_x &= \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{1}{1 + 2\alpha^3 \kappa^3} \right] \cos \alpha x d\alpha \\ &= E_s I_s \frac{d^4 v_s}{dx^4} \end{aligned}$$

Kun tämä integroidaan kahdesti ja, kun aikaisemmin todettiin, integroimisvakiot ovat nollia, saadaan

$$M_x = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha \kappa^3}{1 + 2\alpha^3 \kappa^3} \cos \alpha x d\alpha \quad (22)$$

Suurin taivutusmomentti esiintyy arvolla $x = 0$, jolloin

$$M_{max} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2\kappa}}{3\sqrt{3}} P \quad (23)$$

Leikkausvoiman lauseke saadaan derivoimalla yhtälö (18) x :n suhteen. Tällöin

$$Q_x = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha^2 \kappa^3}{1 + 2\alpha^3 \kappa^3} \sin \alpha x d\alpha \quad (24)$$

Leikkausvoima on epäjatkuva voiman vaikutuskohdassa. Sen arvo on voimasta vasemmalle $P/2$ ja voimasta oikealle $-P/2$. Nämä arvot saadaan myös yhtälöstä (24), kun se ratkaistaan antamalla x :n lähestyä nolaa vasemmalta ja oikealta.

Tapa 2.

Jos otaksutaan, että palkin taipuessa sen alapinnassa ei tapahdu levyn suhteen siirtymää, levyn yläpinnan ja palkin alapinnan venymät ovat yhtä suuret. Jos merkitään palkin alapinnan venymä = ϵ_{xs} ja levyn yläpinnan venymä = ϵ_x , tällöin

$$\epsilon_{xs} = \epsilon_x \quad (25)$$

Kun palkin akselin suuntaisia voimia ei oteta huomioon, teknisen taiputusopin mukaan palkin alapinnan venymä on

$$\epsilon_{xs} = \frac{q}{E_s} = \frac{M \cdot k}{E_s I_s}$$

Yhtälön (10) mukaan taiputusmomentti on

$$M_x = \int_0^{\infty} \left[\frac{P}{\pi} - \rho(\alpha) \right] \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha, \text{ joten}$$

$$\epsilon_{xs} = \frac{k}{E_s I_s} \int_0^{\infty} \left[\frac{P}{\pi} - \rho(\alpha) \right] \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha \quad (26)$$

jossa $p(\alpha)$ on, kuten aikaisemminkin, toistaiseksi määräämätön parametrifunktio.

Levyssä venymä on $\epsilon_y = 1/E (\sigma_x - \nu \sigma_y)$. Kun tähän sijoitetaan jännityskomponenttien arvot yhtälöstä (5), seuraa niistä levyn reunalla ($y = 0$)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} [(1+\nu)A - 2B] \cos \alpha x d\alpha \quad (27)$$

Merkitsemällä yhtälöt (26) ja (27) yhtä suuriksi saadaan

$$\frac{1}{E} \int_0^{\infty} [(1+\nu)A - 2B] \cos \alpha x d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{k}{E_s I_s} \left[\frac{P}{\pi} - \rho(\alpha) \right] \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha$$

Jotta tämä olisi voimassa kaikilla x :n arvoilla, tulee olla

$$\frac{1}{E} [(1+\nu)A - 2B] = \frac{k}{E_s I_s} \left[\frac{P}{\pi} - \rho(\alpha) \right] \frac{1}{\alpha^2}$$

Ottaen huomioon, että $A = p(\alpha)/h$, saadaan B :lle arvo

$$B = \left[\frac{1+\nu}{2h} + \frac{kE}{2E_s I_s} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \right] \rho(\alpha) - \frac{kEP}{2\pi E_s I_s} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \quad (28)$$

$p(\alpha)$ määritetään ehdosta, että levyn yläpinnan ja palkin käyritykset ovat yhtä suuret

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 v_s}{dx^2}, \text{ kun } y=0$$

Sijoittamalla yhtälöön (16) jännitysfunktion arvo yhtälöstä (11), saadaan tässä tapauksessa

$$E \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \int_0^{\infty} \alpha [(1+\nu)A + (1-\nu)B + (1+\nu)\alpha y B] e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha \quad (29)$$

Levyn reunalla ($y = 0$)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \alpha [(1+\nu)A + (1-\nu)B] \cos \alpha x d\alpha \quad (30)$$

Kun yhtälöön (30) sijoitetaan $A = p(\alpha)/h$ ja B :n arvo yhtälöstä (28), yhtälöiden (10) ja (30) esittämien palkin ja levyn yläreunan käyrityksien yhtäsuuruudesta saadaan $p(\alpha)$:lle arvo

$$\rho(\alpha) = \frac{P [2 + k(1-\nu)\alpha]}{2\pi E_s I_s \left[\alpha^2 \frac{3+2\nu-\nu^2}{2Eh} + \frac{1-\nu}{2E_s I_s} \kappa \alpha + \frac{1}{E_s I_s} \right]} \quad (31)$$

Yhtälön (9) mukaan reunapaine on

$$p_x = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 + k(1-\nu)\alpha}{1 + \frac{1-\nu}{2} \kappa \alpha + \frac{3+2\nu-\nu^2}{2} \kappa^2 \alpha^3} \cos \alpha x d\alpha \quad (32)$$

jossa yhtälön (19) mukaan

$$\kappa = \sqrt{\frac{3E_s I_s}{Eh}}$$

Merkitään edelleen

$$C = \frac{3+2\nu-\nu^2}{2} \kappa^3 \quad D = \frac{1-\nu}{2} k \quad (33)$$

Näiden lyhennysmerkintöjen perusteella reunapaineelle saadaan kaava

$$p_x = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1+D\alpha}{1+D\alpha+C\alpha^3} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (34)$$

Suurin reunapaine esiintyy arvolla $x=0$, jolloin

$$p_{max} = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1+D\alpha}{1+D\alpha+C\alpha^3} \, d\alpha \quad (35)$$

Tämä voidaan integroida suljetussa muodossa. Merkitään

$$G = \sqrt{-\frac{1}{2C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2C}\right)^2 + \left(\frac{D}{3C}\right)^3}} + \sqrt{-\frac{1}{2C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2C}\right)^2 + \left(\frac{D}{3C}\right)^3}} \quad (36)$$

$$H = \left[\sqrt{-\frac{1}{2C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2C}\right)^2 + \left(\frac{D}{3C}\right)^3}} \right]^2 + \left[\sqrt{-\frac{1}{2C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2C}\right)^2 + \left(\frac{D}{3C}\right)^3}} \right]^2 + \frac{D}{3C}$$

Integroituna saadaan

$$p_{max} = \frac{P}{\pi C(H+2G^2)} \left[\frac{2DH+DG^2-3G}{\sqrt{4H-G^2}} \arctg \frac{2\alpha+G}{\sqrt{4H-G^2}} + (DG+1) \ln \frac{\alpha-G}{\sqrt{\alpha^2+G\alpha+H}} \right]$$

Suorittamalla sijoitukset reunapaineen maksimiarvoksi saadaan

$$p_{max} = \frac{P}{\pi C(H+2G^2)} \left[\frac{2DH+DG^2-3G}{\sqrt{4H-G^2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{G}{\sqrt{4H-G^2}} \right) - (DG+1) \ln \frac{-G}{\sqrt{H}} \right] \quad (37)$$

Taivutusmomentti on yhtälön (10) mukaan

$$M_x = \int_0^{\infty} \left[\frac{P}{\pi} - p(\alpha) \right] \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} \, d\alpha$$

Kun tähän sijoitetaan $p(\alpha)$:n arvo yhtälöstä (31) ja otetaan huomioon edellä esitetyt lyhennysmerkinnät, seuraa taivutusmomentille kaava

$$M_x = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{C\alpha}{1+D\alpha+C\alpha^3} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (38)$$

Suurin taivutusmomentti esiintyy voiman vaikutuskohdassa ($x=0$). Tämän arvo saadaan integroiduksi suljetussa muodossa. Käyttämällä edellä esitettyjä lyhennysmerkintöjä saadaan taivutusmomentin arvoksi

(39)

$$M_{max} = \frac{P}{\pi(H+2G^2)} \left[\frac{2H+G^2}{\sqrt{4H-G^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{G}{\sqrt{4H-G^2}} \right) - G \ln \frac{-G}{\sqrt{H}} \right]$$

Leikkausvoiman $Q_x = \frac{dM}{dx}$ lausekkeeksi saadaan

$$Q_x = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{C\alpha^2}{1+D\alpha+C\alpha^3} \sin \alpha x \, d\alpha \quad (40)$$

Tapa 3.

Edellä käsiteltiin tapausta, jossa palkin alapinnan ja levyn yläpinnan suhteelliset pituudenmuutokset merkittiin yhtä suuriksi. Kuitenkaan ei otettu huomioon palkin ja levyn välisten leikkausvoimien vaikutusta palkin muodonmuutoksiin ja jännityksiin. Seuraavassa pyritään ottamaan huomioon näiden vaikutus.

Kuvassa (4) on esitetty kaaviollisesti palkin ja levyn välisten leikkausjännitysten kulku sekä näiden aiheuttama normaalivoima palkin alapinnassa. Leikkausjännitysten aiheuttama normaalivoima palkin alapinnassa on

$$N_x = h \int_x^{\infty} \tau_{yx} dx = h \int_x^{\infty} \tau_{xy} dx \quad (41)$$

Leikkausjännitykset aiheuttavat palkkiin myös taivutusmomentin. Kuvan (5) mukaan se on

$$M_x = h \int_x^{\infty} [k + (v_x - v_x')] \tau_{\xi} d\xi$$

Palkin taipumaerojen huomioonottaminen taivutusmomentissa on vaikeaa, joten määritämme seuraavassa leikkausvoimien momenttivaikutuksen siten, että normaalivoiman momenttivartena on palkin alapinnan reunaetäisyys. Yhtälön (5) mukaan leikkausjännitys levyn reunalla on

$$M_x = h \int_x^{\infty} [k + (v_x - v_x')] \tau_{\xi} d\xi$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (41), saadaan normaalivoimaksi

$$N_x = -h \int_0^{\infty} (A-B) d\alpha \int_x^{\infty} \sin \alpha x dx \quad (42)$$

$$N_x = -h \int_0^{\infty} (A-B) d\alpha \left[-\frac{\cos \alpha x}{\alpha} \right] \quad (43)$$

Voidaan osoittaa, että integraalin

$$h \int_0^{\infty} (A-B) \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha$$

arvo = 0, kun $x = \infty$, joten

$$N_x = -h \int_0^{\infty} (A-B) \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha \quad (44)$$

Normaalivoimasta aiheutuu palkin alapintaan suhteellinen venymä

$$\epsilon_{xx}^{(N)} = -\frac{1}{E_s} \left[\frac{N_x}{A_s} + \frac{N_x k^2}{I_s} \right] \quad (45)$$

Sijoittamalla yhtälöön (45) normaalivoiman lauseke (44) saadaan

$$\epsilon_{xx}^{(N)} = -\frac{h}{E_s} \int_0^{\infty} (A-B) \left(\frac{1}{A_s} + \frac{k^2}{I_s} \right) \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha \quad (46)$$

Kokonaisvenymä pystysuorista kuormista ja normaalivoimasta saadaan laskemalla yhteen yhtälöiden (26) ja (46) esittämät venymät

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{p}{\pi} - \rho(\alpha) \right) \frac{k}{I_s \alpha^2} - \frac{h}{\alpha} (A-B) \left(\frac{1}{A_s} + \frac{k^2}{I_s} \right) \right] \cos \alpha x d\alpha \quad (47)$$

Yhtälön (27) mukaan levyn yläreunan suhteellinen pituudenmuutos on

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} [(1+\nu)A - 2B] \cos \alpha x d\alpha$$

Kun tämä merkitään yhtä suureksi kuin yhtälön (47) esittämä venymä ja otetaan huomioon, että $A = p(\alpha)/h$, saadaan tästä ratkaistuna B :n suhteen

$$B = \frac{\frac{p(\alpha)}{h} \left(\frac{1+\nu}{E} + \frac{hk^2}{\alpha E_s I_s} + \frac{h}{\alpha A_s E_s} \right) - \left(\frac{p}{\pi} - \rho(\alpha) \right) \frac{k}{\alpha^2 E_s I_s}}{\frac{h}{E_s} \left(\frac{k^2}{I_s} + \frac{1}{A_s} \right) \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{E}} \quad (48)$$

$p(\alpha)$ määritetään ehdosta

$$\frac{d^2 v_x}{dx^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \text{ kun } y = 0$$

Palkin taivutusmomenttia pystykuormista esittää yhtälö (10), mutta sen lisäksi tulee yhtälön (44) esittämästä normaalivoimasta momentti

$$M_{xy}^{(N)} = N_x \cdot k = -hk \int_0^{\infty} (A-B) \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha$$

Kokonaistaivutusmomentti on siten

$$M_x = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{p}{\pi} - p(\alpha) \right) \frac{1}{\alpha^2} - \frac{hk(A-B)}{\alpha} \right] \cos \alpha x \, d\alpha =$$

$$= -E_s I_s \frac{d^2 v_s}{dx^2} \quad (49)$$

eli

$$\frac{d^2 v_s}{dx^2} = -\frac{1}{E_s I_s} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{p}{\pi} - p(\alpha) \right) \frac{1}{\alpha^2} - \frac{hk(A-B)}{\alpha} \right] \cos \alpha x \, d\alpha \quad (50)$$

Levyn yläreunassa pätee yhtälön (30) mukaan

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{E} \int_0^{\infty} \alpha \left[(1+\nu)A + (1-\nu)B \right] \cos \alpha x \, d\alpha$$

Kun tämä merkitään yhtä suureksi kuin yhtälön (50) esittämä palkin käyrästys sekä sijoitetaan $A = p(\alpha)/h$ ja B :n arvo yhtälöstä (48), $p(\alpha)$:n arvoksi saadaan

$$p(\alpha) = \frac{p}{\pi} \frac{k(1-\nu)\alpha^2 + 2\alpha + \frac{hE}{A_s E_s}}{\frac{3+2\nu-\nu^2}{Eh} E_s I_s \alpha^4 + 2(k^2 + \frac{I_s}{A_s}) \alpha^3 + 2k(1-\nu)\alpha^2 + 2\alpha + \frac{Eh}{A_s E_s}} \quad (51)$$

Reunapaine on siten

$$P_x = \int_0^{\infty} p(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \quad (52)$$

Taivutusmomentti pystysuorista kuormista saadaan sijoittamalla $p(\alpha)$:n arvo yhtälöstä (51) yhtälöön (10)

$$M_x^{(P)} = \frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\frac{3+2\nu-\nu^2}{Eh} E_s I_s \alpha^2 + 2(k^2 + \frac{I_s}{A_s}) \alpha + k(1-\nu)}{\frac{3+2\nu-\nu^2}{Eh} E_s I_s \alpha^4 + 2(k^2 + \frac{I_s}{A_s}) \alpha^3 + 2k(1-\nu)\alpha^2 + 2\alpha + \frac{Eh}{A_s E_s}} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (53)$$

Normaalivoima saadaan yhtälöstä (44) kun siihen sijoitetaan $A = p(\alpha)/h$ ja B :n arvo yhtälöstä (48) sekä näissä esiintyvä $p(\alpha)$:n arvo yhtälöstä (51).

Merkitään

$$P_2(\alpha) = \frac{4k}{h} \alpha^2 + 2 \left[\frac{1-\nu}{h} + \frac{Ek}{E_s I_s} (k^2 + \frac{I_s}{A_s}) \right] \alpha + \frac{1-\nu}{E_s} \left(\frac{1}{A_s} + \frac{k^2}{I_s} \right)$$

$$Q_2(\alpha) = 2(3+2\nu-\nu^2) \frac{E_s I_s}{Eh} \alpha^5 + (7+2\nu-\nu^2) (k^2 + \frac{I_s}{A_s}) \alpha^4 +$$

$$+ \left[\frac{2Eh}{E_s I_s} (k^2 + \frac{I_s}{A_s})^2 + 4k(1-\nu) \right] \alpha^3 + \left[\frac{2hk(1-\nu)}{I_s} \frac{E}{E_s} (k^2 + \frac{I_s}{A_s}) + 4 \right] \alpha^2 + \quad (54)$$

$$+ \frac{2Eh}{E_s I_s} (k^2 + \frac{2I_s}{A_s}) \alpha + \frac{h^2}{A_s I_s} \left(\frac{E}{E_s} \right)^2 (k^2 + \frac{I_s}{A_s})$$

tällöin saadaan normaalivoima lausekkeesta

$$N_x = -\frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_2(\alpha)}{Q_2(\alpha)} \cos \alpha x \, d\alpha \quad (55)$$

Kokonaismomentti on siten

$$M_x = M_x^{(P)} + N_x k$$

jossa $M_x^{(P)}$:n arvo saadaan yhtälöstä (53) ja N_x yhtälöstä (55).

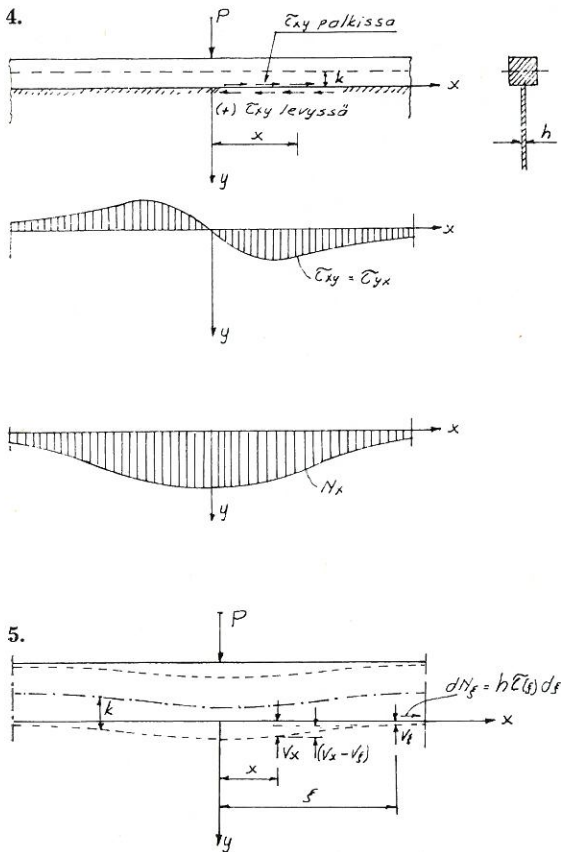
Laskuesimerkki

Käsitellään pistekuorman kuormittamaa äärettömän pitkää palkkia kolmella edellä esitetyllä tavalla.

Alustana on teräslevy, jonka paksuus $h = 10$ mm. Palkki teräspalkki IP 10 $k = 5$ cm, $A_s = 10,6$ cm², $I_s = 171$ cm⁴

Koska alustan ja palkin kimmokertoimet ovat yhtä suuret $E = E_s$, ne supistuvat pois yhtälöstä. Poissonin vakio $\nu = 0,3$. Kuormitus $P = 1$.

Ratkaisuissa esiintyvät integraalit on laskettu tietokoneella. Niiden integraalien arvot, jotka saatiin suljetussa muodossa, on laskettu edellä olevista lausekkeista. Tietokoneella suoritettussa integroinnissa on käytetty Simpsonin kaavaa.

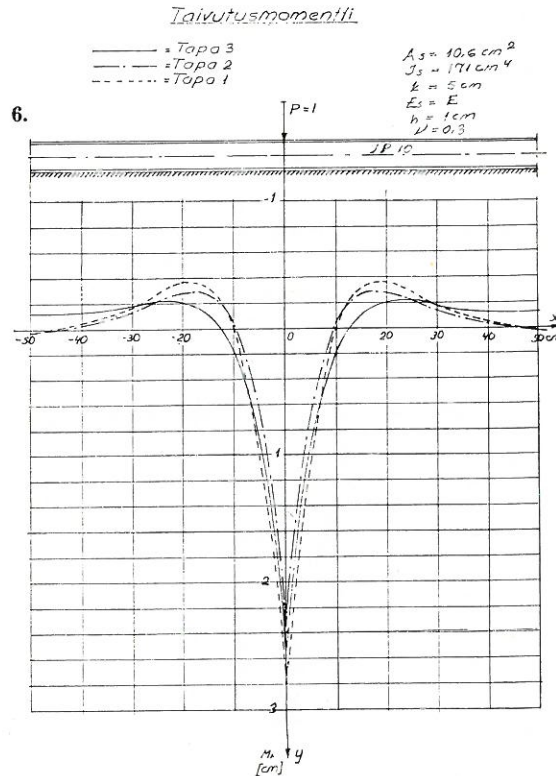


Kuva 4. Palkin ja levyn väliset leikkausjännitykset
Fig. 4. Shearing stresses between beam and plate

Kuva 5. Leikkausjännitysten aiheuttaman taivutusmomentin muodostuminen

Fig. 5. The effect of shearing stresses on the bending moment

Integroimisvälillä α , 0—1 on käytetty 20 jakoväliä ja välillä α , 1—10 on käytetty 100 jakoväliä. Cosini-integraalit on laskettu x :n arvoille 0, 10, 20, 30, 50 ja 100 cm. Sini-integraalit x :n arvoille 1, 10, 20, 30, 50 ja 100 cm. Parametrin arvoilla 10— ∞ integraalit voidaan korvata riittävän tarkasti niiden lyhemmillä muodoilla, joissa sini- ja cosinifunktion kertojana esiintyy osoittajan ja nimittäjän korkeimpien potenssien osamäärä. Näiden integraalien arvot saadaan käsikirjoista.



Kuva 6. Äärettömän pitkän palkin taivutusmomentit yksikköpistekuormasta

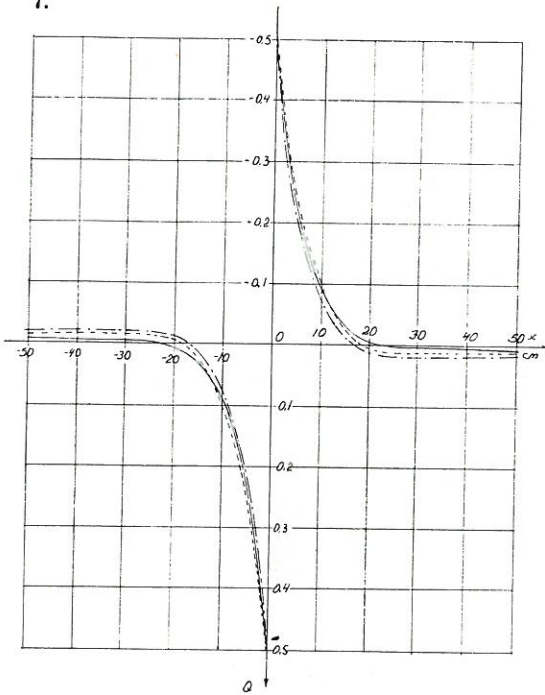
Fig. 6. Bending moment of the beam of infinite length under single load $P=1$: Case 1. The beam can slide freely on the foundation. Case 2. The beam cannot slide on the foundation; the effects of shearing stresses between beam and foundation on stresses and deformations of the beam are neglected. Case 3. The effects of shearing stresses are noticed.

Tulokset on esitetty graafisesti kuvissa 6—10. Koska tavan 3 mukaisessa käsittelyssä esiintyi myös normaalivoima, kuvassa 10 on esitetty vertailun vuoksi myös palkin reunajännitykset.

Kuvassa (6) on esitetty eri tavoin lasketut taivutusmomentin arvot. Näistä nähdään, että tavalla 1 saatu momentin maksimi-arvo on suurin ja tavalla 2 saatu pienin. Tavan 3 mukaisessa käsittelyssä momentin 0-kohta siirtyy kauemmaksi kuin muissa ja samoin

Leikkausvoima

7.



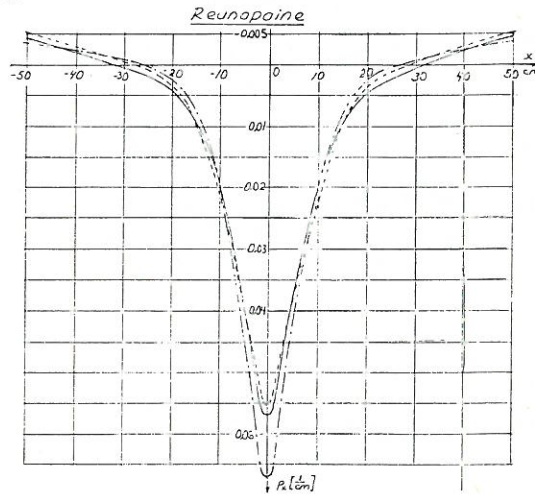
myös negatiivinen momentti jatkuu pidemmälle. Tämä johtuu siitä, ettei palkki voi normaalivoimasta johtuen taipua samalla tavoin kuin tavan 1 ja 2 oletusten mukaan.

Kuvassa (8) on esitetty reunapaineen jakautumiset. Näistä nähdään, että tavan 2 mukaan saadaan huomattavasti suurempi reunapaineen maksimiarvo kuin muissa. Tämä oli odotettavissakin, koska tässä merkittiin palkin ja alustan yläreunan suhteelliset pituudenmuutokset yhtä suuriksi eikä oletettu palkin muodonmuutosten riippuvan vaakasuorista voimista. Levyn yläreunan suhteellinen pituudenmuutos

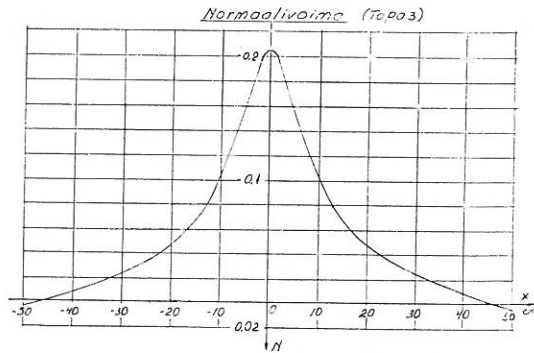
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

Reunapaineesta aiheutuu negatiivinen σ_y , joten sen vaikutus ε_x :n arvoon on positiivinen. Näin ollen reunakuormituksen tulee keskittyä pääasiassa sinne, missä palkin pituudenmuutos pyrkii olemaan suurin, jotta oletettu ehto $\varepsilon_x = \varepsilon_{xs}$ olisi voimassa. Siis reu-

8.



9.



Kuva 7. Leikkausvoimat yksikköpistekuormasta
Fig. 7. Shearing Force of the beam in fig. 6

Kuva 8. Levyn reunapaine yksikköpistekuormasta
Fig. 8. Foundation pressure of the beam in fig. 6

Kuva 9. Palkin normaalivoiman N_x jakautuminen
Fig. 9. Normal force N_x of the beam in fig. 6

nakuormitus keskittyy tässä tapauksessa voiman vaikutuskohdan läheisyyteen, minkä vuoksi kuormituksen momenttivaikutus on pienempi. Kuvasta 7 nähdään, että tavalla 2 saatu leikkausvoima muuttuu voiman vaikutuskohdassa jyrkimmin, kuten pitääkin.

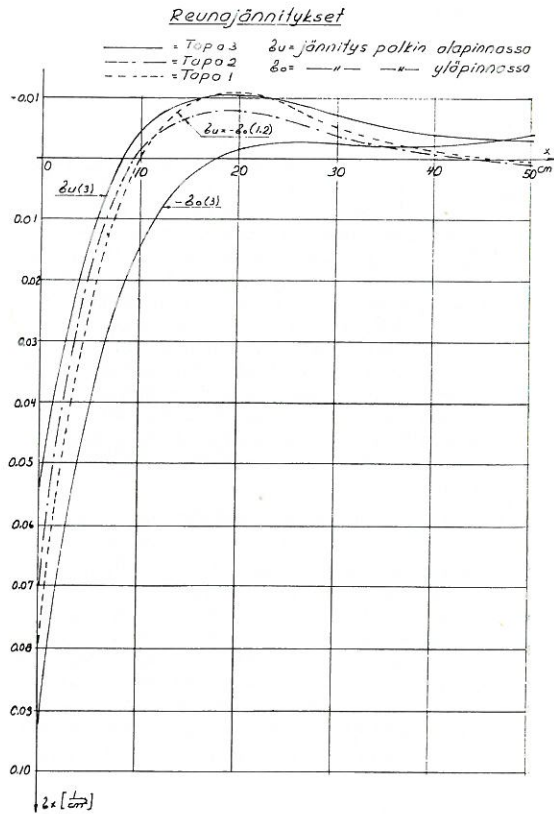
Kuvassa (10) on esitetty reunajännitysten kuvaajat. Koska palkin poikkileikkaus on symmetrinen, tavan 1 ja 2 mukaisessa käsittelyssä reunajännitysten itseisarvot ovat luonnollisesti yhtä suuret. Tavan 3 mukaiset reunajännitykset ovat itseisarvoltaan yhtä suuret milloin normaalivoima $N_x = 0$. Esi merkissä σ_u - ja σ_o -käyrän leikkauspisteet $x = +47$ cm ovat normaalivoiman (kuva 9) 0-kohdat.

Tavalla 3 saatu palkin yläpinnan reunajännityksen itseisarvo voiman vaikutuskohdassa on n. 27 % suurempi kuin tavalla 1 saatu. Jos siis voidaan olettaa, että palkin taiputuksessa ei synny alustan suhteen siirtymiä, kuten tavassa 3 oletettiin, palkki voi saada suurempia jännityksiä kuin siinä tapauksessa, että palkki voi vapaasti liukua alustaansa nähden.

Lopputoteamus

Tavan 2 mukaisesta käsittelystä on todettava, että se on puhtaasti teoreettinen. Leikkausvoimien oletetaan siinä häviävän palkin alapinnassa. Kuitenkaan ratkaisun mukaan leikkausvoimat eivät häviä levyn yläpinnassa. Todellisuudessa ratkaisu lienee löydettävissä tavan 1 ja 3 väliltä, sillä palkin ja alustan välillä voi syntyä myös leikkausvoimia vaikka palkki taipuessaan liukuukin alustaansa nähden. Tällöin leikkausvoimat ovat kitkavoimia, jotka syntyvät hankauksesta palkin ja alustan välillä.

Koska palkki on laskettu teknisen taiputusopin mukaan, palkin pystysuuntaisia muodonmuutoksia ϵ_y ja liukumia γ_{xy} ei ole otettu huomioon. Tällöin varsinkin piste kuorman läheisyydessä käyritykset palkin eri korkeuksilla voivat poiketa huomattavastikin toisistaan. Tästä aiheutuva virhe on riippuvainen palkin muodosta.



Kuva 10. Palkin reunajännitykset
 Fig. 10. Normal stresses σ_o , σ_u on the upper and lower faces of the beam in fig. 6.

Kirjallisuutta

- Biot, M. A., Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation
 Girkmann, K., Flächentragwerke
 Jahnke — Emde, Tables of Functions
 Teräs, E., Diplomityö. TKK 1963

Erkki Teräs, dipl.ins.
 Tie- ja vesirakennushallituksen siltaosasto,
 Helsinki.