

# RAKENTEIDEN VÄRÄHTELYISTÄ

PENTTI LOIKKANEN

*Rakenteiden Mekaniikka* 1 (1968) ss. 64—72; Kustannus-  
osakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

**Yhteenveto:** Tarkastelun kohteena ovat rakenteet, joiden massa on keskittynyt yhteen tai useampaan kohtaan. Aluksi on käsitelty yksivapausasteista systeemiä merkintöjen soveltamiseksi ja harmonisen värähdysliikkeen kaavojen mieleenpalauttamiseksi. Saadut tulokset on sitten yleistetty vapausasteitten lukumäärän ollessa mielivaltainen.

Aluksi tarkastellaan ominaisvärähtelyjä ja sitten alkutilan, ulkoisten voimien ja tukien liikkeiden aiheuttamia värähtelyjä sekä vaimennuksen vaikutusta ja sen huomioonottamista. Lopuksi teoriaa on sovellettu kaksivapausasteiseen kehään. Esityksessä käytetään matriisimerkintöjä ja se on koetettu mekanisoida mahdollisimman pitkälle laskelmien tietokoneella suorittamisen helpottamiseksi, mihin niiden laajuuden vuoksi on yleensä turvauduttava.

## 1. Yleistä

Rakennustekniikassa joudutaan varsinkin erikoisrakenteiden ja kuormitusten yhteydessä usein kiinnittämään huomiota värähtelyilmiöihin. Näihin sisällytetään tavallisesti frekvenssianalyysi (jossa tarkastellaan rakenteen värähtelytaajuuksia ja värähtelymuotoa) sekä alkuehtojen, ulkoisten voimien ja tukien vaikutukset.

Värähtelytehtävien ratkaisussa kohdataan erinäisiä vaikeuksia. Rakenteiden käsittely sellaisenaan johtaa yleensä ylivoimaisiin vaikeuksiin. Liikkeyhtälöiden ratkaisu suljetussa muodossa on mahdollista vain yksinkertaisimmissa tapauksissa. Seuraavassa käsitellään tämän vuoksi rakenteita, joiden kokonaisuudessa on voimakkaasti keskittynyt ja osamassat yhdistetty toisiinsa ja tukiin kimmoisesti. Menettely ei kuitenkaan ole kimmoisesti yhdistettyjen jäykkien kappalten dynamiikkaa, sillä massojen ulottuvuuksia ei oteta huomioon. Massan ollessa tasaisesti jakaantunut, kuten esimerkiksi sauvarakenteissa yleensä on laita, voidaan rakennetta approksimoida keskittämällä massa sopivasti nurkkapisteisiin ja sauvoille (kuva 1).

Rakenteen vapausasteiden lisääntyessä laskelmien vaatima työmäärä paisuu tavatomaasti. Tietokoneiden käyttö mahdollistaa kuitenkin monivapausasteistenkin rakenteiden analysoinnin.

## 2. Lähtötaksumat

Rakenteet otaksutaan lineaarisesti kimmoisiksi ja stabiileiksi sekä värähdysamplitudi niin pieneksi, että muodonmuutokset pysyvät kimmoisessa alueessa. Edelleen oletetaan värähdysasennon määräytyvän  $n$  parametrilla, rakenteen kaikkien osien värähtelevän samassa tahdissa sekä värähtelyn olevan muodoltaan periodista ja harmonista.

## 3. Rakenteella yksi vapausaste: perusyhtälöt ja merkinnät

Seuraavassa tarkastellaan lyhyesti rakennetta, jolla on yksi vapausaste, merkintöjen soveltamiseksi tunnettuihin harmonisen värähdysliikkeen kaavoihin.

### 3.1. Vapaat värähtelyt

Kuva 2 esittää yksivapausasteisen systeemin mekaanista analogiaa, jossa jäykkä massa  $M$  on kiinnitetty tukeen massattomalla kimmoisella rajoittimella, sekä massan voimakuviota liikemahdollisuuden suuntaisille voimille pienestä poikkeamasta  $D$ . Voimakuviosta saadaan liikkeen differentiaaliyhtälöksi d'Alembertin periaatetta käyttäen

$$M \cdot \ddot{D} + A_1 = 0 \quad (1)$$

Värähtelyn aikana jousivoima  $A_1$  on lineaarisesti verrannollinen siirtymään  $D$

$$A_1 = S \cdot D \quad (2)$$

tai kääntäen

$$D = F \cdot A_1 \quad (3)$$

Yhtälöiden (2) ja (3) välinen ero on tässä tapauksessa triviaalinen, mutta yleisessä tapauksessa erittäin tärkeä. Riippuen siitä kumpaa yhtälöä käytetään saadaan teoria lausutuksi rakenteen jäykkyyksisarvojen  $S$  tai notkeusarvojen  $F$  avulla. Seuraavassa käytetään ensin mainittua tapaa, koska jäykkyyksisarvojen määrittäminen yksikäsitteisestä kinemaattisesti määrätystä perusmuodosta on yleensä helpompaa kuin notkeusarvojen

määrittäminen monikäsitteisestä staattisesti määrätystä perusmuodosta. Käyttämällä yhtälöä (2) saadaan liikeyhtälö (1) muotoon

$$M \cdot \ddot{D} + S \cdot D = 0 \quad (4)$$

tai merkitsemällä  $p^2 = \frac{S}{M}$  muotoon

$$\ddot{D} + p^2 \cdot D = 0 \quad (5)$$

Yhtälön yleinen ratkaisu on tunnetusti

$$D = C_1 \cdot \sin pt + C_2 \cdot \cos pt \quad (6)$$

jossa integroimisvakiot  $C_1$  ja  $C_2$  riippuvat alkuehdoista. Värähdysaika

$$T_n = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{S}} \quad (7)$$

ja frekvenssi  $f_n = 1/T$  (8)

### 3.2. Ulkoisen voiman vaikutus ilman vaimennusta

Rakenteeseen vaikuttavat ulkoiset voimat voivat olla joko periodisia tai epäperiodisia. Massan liike voidaan jakaa alkutilan aiheuttamaan liikkeeseen, joka saadaan yhtälöstä (6), sekä ulkoisten voimien alkuaan levossa olevaan massaan aiheuttamaan liikkeeseen. Oletetaan, että levossa olevaan massaan vaikuttaa ulkoinen voima ajan  $dt$  verran kuvan 3 mukaisesti. Viivoitettu alue ilmaisee silloin impulssin lisäyksen. Newtonin toisen

lain mukaan  $M \cdot \ddot{D} = A_E$

eli  $M \frac{d(D)}{dt} = A_E$

Hetkellinen nopeuden lisäys

$$d(D) = \frac{A_E}{M} dt$$

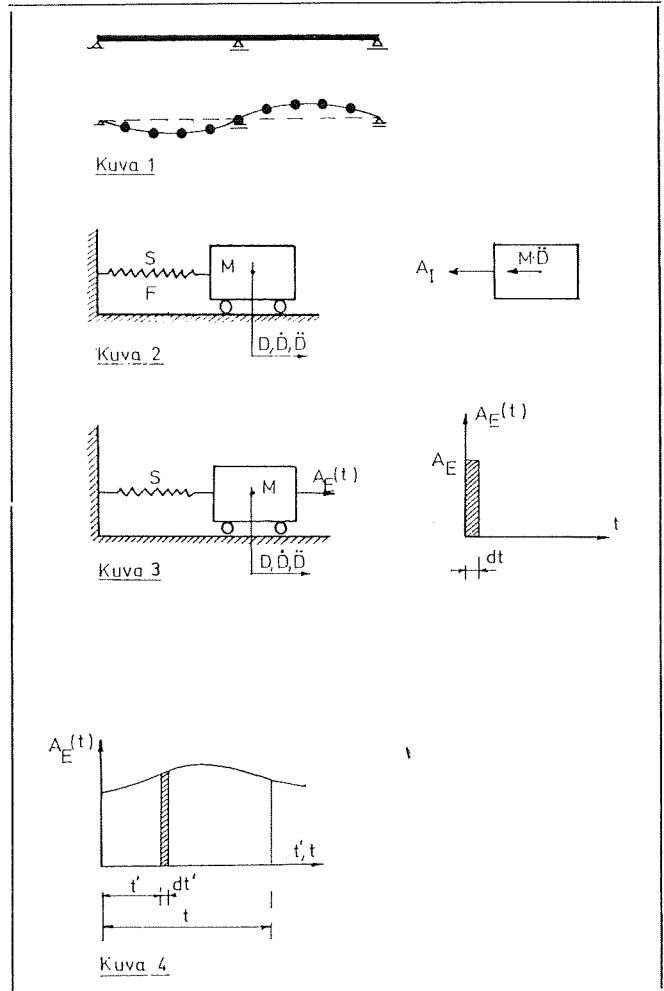
Seurauksena on vapaa värähtely alkuehdoin

$$t = 0, D = 0, \dot{D} = \frac{A_E}{M} dt$$

joten impulssin lisäyksen differentiaaliseksi vaikutukseksi tulee yhtälön (6) mukaan

$$d(D) = \frac{A_E}{M \cdot p} \cdot \sin pt \cdot dt \quad (9)$$

Kokonaisvaikutus saadaan integroimalla kuvan 4 merkinnöin



Kuva 1. Jatkuvan palkin approksimointi  
Fig. 1. Lumping the mass of a continuous beam

Kuva 2. Yksivapausasteisen rakenteen mekaaninen analogia ja voimakuvio vaakasuorille voimille

Fig. 2. Mechanical analogy of a structure with one degree of freedom and free-body diagram for horizontal actions

Kuva 3. Hetkellisen ulkoisen voiman vaikutus  
Fig. 3. Response to incremental impulsive action

Kuva 4. Mielivaltaisen ulkoisen voiman vaikutus  
Fig. 4. Response to an arbitrary impulsive action

$$D = \frac{1}{M \cdot p} \cdot \int_0^t A_E(t') \cdot \sin p(t-t') \cdot dt' \quad (10)$$

$$\text{tai } D_D = p \cdot \int_0^t A_D(t') \cdot \sin p(t-t') \cdot dt' \quad (11)$$

jossa  $D_D = \frac{D}{A_E/S} =$  dimensioton siirtymä ja

$$A_D(t') = \frac{A_E(t')}{A_E} = \text{dimensioton voimasuure.}$$

### 3.3. Tukien liike

Impulssin lisäys tuen liikkeestä on kuvan 5 merkinnöin

$$S \cdot D_G \cdot dt$$

Yhtälö (9) saa siten tässä tapauksessa muodon

$$d(D) = p \cdot D_G \cdot \sin pt \cdot dt \quad (12)$$

Kokonaisvaikutus saadaan yhtälöstä (10), kun  $A_E(t')$  korvataan lausekkeella  $M \cdot D_G(t')$  tai yhtälöstä (11), kun  $A_D(t')$  korvataan lausekkeella  $D_{GD}(t') = D_G(t')/D_G$ , jolloin  $D_D = D/D_G$ .

### 3.4. Vaimennuksen vaikutus

Vapaat värähtelyt vaimenevat käytännössä erilaisten vaimennustekijöiden vaikutuksesta. Näistä tarkemmin tuonnempana. Yleensä käytetään viskoosia vaimennusmallia, jossa vaimennusvoima on suoraan verrannollinen massan nopeuteen. Kuvan 6 mukaan saadaan vapaan värähtelyliikkeen differentiaaliyhtälöksi

$$M \cdot \ddot{D} + C \cdot \dot{D} + S \cdot D = 0,$$

jossa  $C$  on vaimennuskerroin (vaimennusvoima yksikkönopeudella). Merkitsemällä

$$p^2 = \frac{S}{M} \text{ ja } 2 \cdot n = \frac{C}{M}$$

$$\text{saadaan } \ddot{D} + 2 \cdot n \cdot \dot{D} + p^2 \cdot D = 0 \quad (13)$$

Tämän yleinen ratkaisu on

$$D = e^{-nt} \cdot (E_1 \cdot \sin p_d t + E_2 \cdot \cos p_d t) \quad (14)$$

$$\text{jossa } p_d = \sqrt{p^2 - n^2}$$

Kriittinen vaimennus  $C_c$  saadaan asettamalla  $p^2 = n^2$ , josta  $C_c = 2 \cdot M \cdot p$ . Jos  $C \geq C_c$ , ei systeemi värähtele lainkaan.

Ulkoisen voiman  $A_E(t)$  vaikuttaessa systeemiin liikeyhtälön (13) oikeaksi puoleksi tulee  $A_E(t)/M$  ja ratkaisuun (14) on lisättävä yksi yksityisratkaisu. Tukien liikkeen vaikutusta tutkittaessa edellisen tapauksen  $A_E$  on korvattava lausekkeella  $D_G \cdot S$ .

## 4. Rakenteella on monta vapausastetta

Tarkastellaan yleisesti systeemiä, jolla on  $n$  vapausastetta. Kohdassa 2 mainittujen otaksuminen ollessa voimassa on systeemillä  $n$  erilaista värähtelytapaa. Värähtelytapaa, siihen kuuluvaa frekvenssiä ym. kutsutaan seuraavassa värähdysmuodoksi (engl. mode).

### 4.1. Vapaat värähtelyt ilman vaimennusta

#### 4.1.1. Liikeyhtälöt

Liiekyhtälöitä (4) on nyt yhtä monta kuin vapausasteitakin eli  $n$  kpl. Ne voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$S \cdot D = -M \cdot \ddot{D} \quad (15)$$

Sijoittamalla tähän periodista ja harmonista muotoa olevat lausekkeet

$$D_i = D_{Mi} \cdot \sin(p_i t + \alpha_i)$$

$$\ddot{D}_i = -D_{Mi} \cdot p_i^2 \cdot \sin(p_i t + \alpha_i)$$

(i:s malli) saadaan differentiaaliyhtälö (15) algebralliseksi

$$S \cdot D_{Mi} = p_i^2 \cdot M \cdot D_{Mi} \quad (16)$$

Yhtälö esittää ominaisarvotehtävää, jossa  $p_i^2$  on  $i$ :s ominaisarvo ja  $D_{Mi}$   $i$ :s ominaisvektori. Ominaisarvot saadaan määritetyksi yhtälöstä  $S - p_i^2 \cdot M = 0$ , asettamalla näin saatu polynomi nolaksi ja ratkaisemalla sen juuret. Ominaisvektorit  $D_{Mi}$  saadaan sijoittamalla vastaava  $p_i^2$  yhtälöihin (16).

#### 4.1.2. Ominaisvektoreiden ortogonalisointi ja normeeraus.

Tarkasteltaessa kahden värähdysmuodon  $a$  ja  $b$  välistä yhteyttä oletetaan, että niiden ominaisvektorit ovat  $\mathbf{D}_{Ma}$  ja  $\mathbf{D}_{Mb}$  sekä ominaisarvot vastaavasti  $p_a^2$  ja  $p_b^2$ . Kaavan (16) mukaan voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_{Ma} = p_a^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Ma}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_{Mb} = p_b^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Mb}$$

Kun edellisen transponentilla kerrotaan  $\mathbf{D}_{Mb}$  ja jälkimmäinen kerrotaan  $\mathbf{D}_{Ma}$ :lla, saadaan

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_{Ma})' \cdot \mathbf{D}_{Mb} = p_a^2 \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Ma})' \cdot \mathbf{D}_{Mb}$$

$$\mathbf{D}'_{Ma} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_{Mb} = p_b^2 \cdot \mathbf{D}'_{Ma} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Mb}$$

Ottaen huomioon, että  $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_{Ma})' = \mathbf{D}'_{Ma} \cdot \mathbf{S}'$ , symmetrisenä  $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$  ja diagonaalina  $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$  ovat yhtälöiden vasemmat puolet samat. Asettamalla oikeat puolet yhtä suuriksi saadaan muotojen välinen yhteys

$$(p_a^2 - p_b^2)' \cdot \mathbf{D}'_{Ma} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Mb} = 0 \quad (17)$$

Jos  $a \neq b$  (eri muodot), niin

$$\mathbf{D}'_{Ma} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Mb} = 0 \quad (18)$$

Voidaan siis todeta, että eri mallien ominaisvektorit ovat ortogonaalisia  $\mathbf{M}$ :n suhteen. Jos  $a = b = i$  (sama muoto) niin  $\mathbf{D}'_{Mi} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Mi} =$  mielivaltainen vakio. Valitsemalla täksi vakioksi 1 saadaan

$$\mathbf{D}'_{Ni} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Ni} = 1 \quad (19)$$

jolloin  $\mathbf{D}_{Ni}$  = i:nnen mallin normeerattu ominaisvektori.

#### 4.1.3. Liikeyhtälöiden muuntaminen riippumattomiksi

i:nnen mallin normeerattu ominaisvektori  $\mathbf{D}_{Ni}$  on ominaisvektori  $\mathbf{D}_{Mi}$  kerrottuna vakiolla, joten yhtälöistä (16) saadaan

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_{Ni} = p_i^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Ni} \quad (\text{i:s malli}) \quad (20)$$

Yhtälö (20) voidaan kirjoittaa laajennetussa muodossa siten, että siihen sisältyvät kaikki muodot:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_N = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{C}_V \quad (21)$$

missä

$$\mathbf{C}_V = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n^2 \end{bmatrix}$$

diagonaalinen ominaisarvo matriisi.

Yhtälössä (21) kaikki matriisit ovat kokoa  $n \times n$  sisältäen  $n^2$  algebrallista yhtälöä.

Kerrotaan (21)  $\mathbf{D}'_N$ :llä:

$$\mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_N = \mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{C}_V \quad (22)$$

Koska

$$\mathbf{D}'_{Na} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_{Nb} = \begin{cases} 0, & \text{jos } a \neq b \\ 1, & \text{jos } a = b \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa

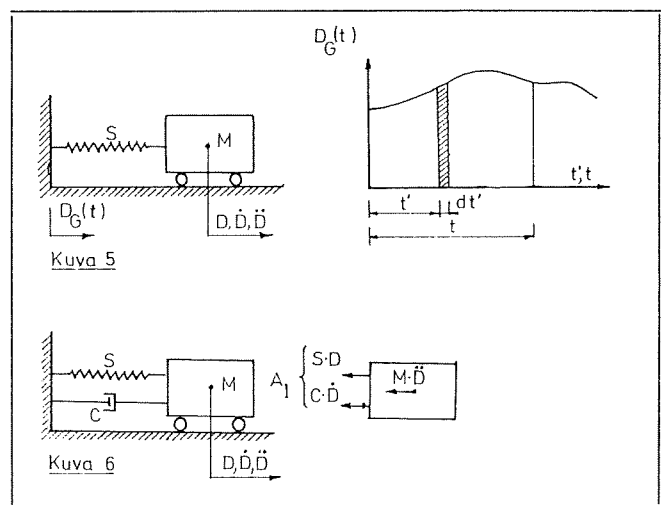
$$\mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_N = \mathbf{I} \quad (23)$$

Kun yhtälön molemmilla puolilla kerrotaan

$\mathbf{D}_N^{-1}$ , saadaan  $\mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{M} = \mathbf{D}_N^{-1}$ , joka sijoitettuna lausekkeeseen (22) antaa

$$\mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_N = \mathbf{C}_V \quad (24)$$

Koska  $\mathbf{C}_V$  on diagonaalinen, yhtälö (24) osoittaa, että matriisi  $\mathbf{D}_N$  muuntaa jäykkyysmat-



Kuva 5. Tuen mielivaltaisen liikkeen vaikutus  
Fig. 5. Response to arbitrary support displacement

Kuva 6. Kuvan 2 systeemi vaimennuksen kera  
Fig. 6. The system of fig. 2 with damping

riisiin  $S$  diagonaaliseksi. Tämä seikka mahdollistaa liikeyhtälöiden kirjoittamisen toisistaan riippumatta. Yhtälöt (15)  $M \cdot \ddot{D} + S \cdot D = 0$  kerrotaan  $D'_N$ :lla ja lausekkeella  $I = D_N \cdot D^{-1}_N$ :

$$D'_N \cdot M \cdot D_N \cdot D^{-1}_N \cdot D + D'_N \cdot S \cdot D_N \cdot D^{-1}_N \cdot D = 0$$

Koska  $D'_N \cdot M \cdot D_N = I$  ja  $D'_N \cdot S \cdot D_N = C_V$ , saadaan  $D^{-1}_N \cdot \ddot{D} + C_V \cdot D^{-1}_N \cdot D = 0$ , mitkä voidaan kirjoittaa kuten riippumattomat yhtälöt:

$$\ddot{D}_P + C_V \cdot D_P = 0 \quad (25)$$

$D_P$  on lausuttu systeemin pääkoordinaatistossa ja muuntuu seuraavasti:

$$D_P = D^{-1}_N \cdot D = D'_N \cdot M \cdot D$$

$$\dot{D}_P = D^{-1}_N \cdot \dot{D} = D'_N \cdot M \cdot \dot{D}$$

$$\ddot{D}_P = D^{-1}_N \cdot \ddot{D} = D'_N \cdot M \cdot \ddot{D}$$

ja kääntäen

$$D = D_N \cdot D_P$$

$$\dot{D} = D_N \cdot \dot{D}_P$$

$$\ddot{D} = D_N \cdot \ddot{D}_P$$

#### 4.1.4. Ratkaisu

Yhtälöryhmän (25) kussakin yhtälössä on vain yksi tuntematon, joten ne voidaan ratkaista toisistaan riippumatta soveltaen kohdan 3 tuloksia.

a) Alkuehtovektorit pääkoordinaatistossa:

$$D_{oP} = D^{-1}_N \cdot D_o ; \quad \dot{D}_{oP} = D^{-1}_N \cdot \dot{D}_o$$

b) Riippumattomien yhtälöiden ratkaisuvektori:

$$D_{Pi} = \frac{\dot{D}_{oPi}}{p_i} \cdot \sin p_i t + D_{oPi} \cdot \cos p_i t$$

c) Kokonaisratkaisu:

$$D = D_N \cdot D_P$$

#### 4.2. Ulkoisten voimien aiheuttamat värähtelyt

Liikeyhtälö  $M \cdot \ddot{D} + S \cdot D = A_E(t)$  muunnetaan pääkoordinaatistoon samalla tavalla kuin edellä kohdassa 4.1.3. Tulokseksi saadaan

$$\ddot{D}_P + C_V \cdot D_P = A_{EP}(t) \quad (26)$$

jossa  $D_P = D^{-1}_N \cdot D$  ja  $A_{EP}(t) = D'_N \cdot A_E(t)$ .

Ratkaisuksi pääkoordinaatistossa saadaan (vert. (11)):

$$D_P = \frac{1}{p_i^2} \int_0^t p_i \cdot A_{EPi}(t') \cdot \sin p_i(t-t') \cdot dt' \quad (27)$$

ja muunnettuna

$$D = D_N \cdot D_P$$

Edellä oleva pätee alkuaan levossa olevaan systeemiin. Jos systeemi on alkuaan liikkeessä, on kokonaisvaikutus alkuehdoista johtuvan vapaan värähtelyn ja ulkoisten voimien aiheuttaman värähtelyn summa.

#### 4.3. Tukien liikkeiden aiheuttamat värähtelyt

Määritellään  $S_R$  jäykkyysmatriisiksi, joka sitoo rakenteen nodaaliset vapausasteet tukipisteiden liikemahdollisuuksien rajoituksiin. Liikemahdollisuuksia on yleisessä tapauksessa tukea kohti kuusi; kolme siirtymä- ja kolme kiertymämahdollisuutta. Liikemahdollisuuksien rajoitukset yhdellä tuella vaihtelevat näin ollen yhdestä kuuteen. Matriisissa  $S_R$  alkio  $S_{Rjl} =$  rajoitinta  $j$  vastaava tukireaktio rajoittimen  $l$  yksikkösiirtymästä (tai -kiertymästä). Jos rakenne on tuettu siten, että tukipisteissä on yhteensä  $r$  rajoitinta, niin  $S_R$  on kokoa  $n \times r$ . Liikeyhtälö on tässä tapauksessa

$$M \cdot \ddot{D} + S \cdot D + S_R \cdot D_R(t) = 0 \quad (28)$$

joka saadaan muunnetuksi pääkoordinaatistoon samoin kuin edellä

$$\ddot{\mathbf{D}}_P + \mathbf{C}_V \cdot \mathbf{D}_P = \mathbf{D}_{RP}(t) \quad (29)$$

kun

$$\mathbf{D}_P = \mathbf{D}^{-1}_N \cdot \mathbf{D} \text{ ja } \mathbf{D}_{RP}(t) = -\mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{S}_R \cdot \mathbf{D}_R(t).$$

Ratkaisu pääkoordinaateissa:

$$\mathbf{D}_P = \frac{1}{p_i^2} \int_0^t p_i \cdot \mathbf{D}_{RPi}(t') \cdot \sin p_i(t-t') \cdot dt' \quad (30)$$

Muunnettuna takaisin alkuperäiseen koordinaatistoon:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}_P.$$

## 5. Vaimennus

### 5.1. Yleistä

Monivapausasteisten systeemien vaimennusilmiötä ei vielä täysin hallita. Vaimennuksen vaikutus (kun  $C \leq 0,2 \cdot C_c$ ) on merkityksetön, kun impulsoivan voiman vaikutus on lyhyt tai ulkoisen periodisen voiman aiheuttamissa pakkovärähtelyissä voiman frekvenssi ei ole lähellä yhtäkään rakenteen ominaisfrekvenssiä. Sen sijaan vaimennuksen vaikutus on erittäin merkityksellinen ulkoisten voimien frekvenssien osuessa samaksi tai hyvin lähelle jotakin rakenteen ominaisvärähtelyn frekvenssiä. Vaimennukseen vaikuttavat mitä moninaisimmat seikat. Näistä mainittakoon rakennetyyppi, rakennusaine, nurkkien ja liitosten rakenne, sisäisten jännitysten luonne, värähdysliikkeen amplitudi ja värähdysmuoto.

### 5.2. Vapaat värähtelyt

Oletettaessa vaimennuksen olevan suoraan verrannollisen massan absoluuttiseen

nopeuteen saa liikkeen differentiaaliyhtälömuodon

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (31)$$

jossa  $\mathbf{C}$  on vaimennuskertoimien muodostama diagonaalimatriisi. Yhtälö (31) muunnetaan pääkoordinaatistoon kuten edelläkin:

$$\mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}^{-1}_N \cdot \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}^{-1}_N \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}^{-1}_N \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\text{eli } \ddot{\mathbf{D}}_P + \mathbf{C}_P \cdot \dot{\mathbf{D}}_P + \mathbf{C}_V \cdot \mathbf{D}_P = 0 \quad (32)$$

kun

$$\mathbf{D}_P = \mathbf{D}^{-1}_N \cdot \mathbf{D} \text{ ja } \mathbf{C}_P = 2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_N$$

Jotta (32) olisi pääkoordinaatistossa, täytyy  $\mathbf{C}_P$ :n olla diagonaalimatriisi. Yleensä  $\mathbf{C}_P$  on symmetrinen ja ei-diagonaalinen. Muuntamalla alkuehdot ja vaimennus pääkoordinaatistoon  $(\mathbf{D}_P)_o = \mathbf{D}^{-1}_N \cdot (\mathbf{D})_o$ ,  $(\dot{\mathbf{D}}_P)_o = \mathbf{D}^{-1}_N \cdot$

$\cdot (\dot{\mathbf{D}})_o$  ja  $\mathbf{C}_P = 2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_N$ , saadaan ratkaisuksi pääkoordinaatistossa (vrt. 14))

$$\mathbf{D}_P = e^{-n_i t} \cdot t$$

$$\left[ \frac{(\dot{\mathbf{D}}_P)_{oi} \cdot \sin p_{di} t + (\mathbf{D}_P)_{oi} \cdot \cos p_{di} t}{p_{di}} \right] \quad (33)$$

jossa  $p_{di} = \sqrt{p_i^2 - n_i^2}$ , ja lopulliseksi ratkaisuksi

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}_P$$

Systeemillä sanotaan olevan klassiset värähdysmuodot, kun yhtälöt (32) ovat toisistaan riippumattomia. Tällöin, kuten mainittu, täytyy matriisin  $\mathbf{C}_P$  olla diagonaalinen. Näin on laita vain silloin, kun vaimennusmatriisi  $\mathbf{C}$  on lineaarisesti riippuva jäykkyysmatriisista  $\mathbf{S}$  eli  $\mathbf{C}$  diagonalisoituu samalla muunnoksella kuin  $\mathbf{S}$ .

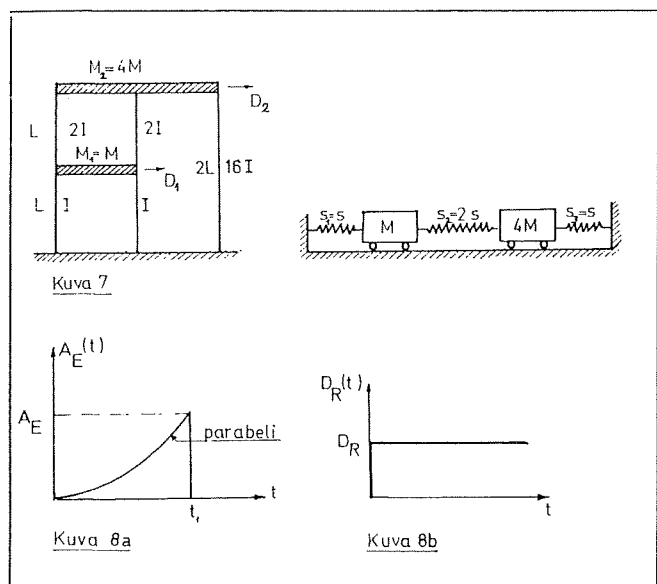
Kysymys siitä, onko  $\mathbf{C}$  lineaarisesti riippuva jäykkyysmatriisista  $\mathbf{S}$ , riippuu ensi kädessä vaimennuskertoimista  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \dots$ , jotka muodostavat vaimennusmatriisin. Vastaus saadaan muodostamalla tulo  $\mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_N$ . Jos tulo on diagonaalinen, voidaan ratkaisu esittää muodossa (33).

Ehtoja, joiden vallitessa systeemillä on klassiset värähdysmallit, on käsitelty laajemmin tutkimuksessa [4].

## 6. Esimerkki

### 6.1. Tehtävä

Kuva 7 esittää kehärakennetta, jossa hoiakat pilarit tukevat massiivisia välipohjia. Rakenteen massan voidaan näin ollen katsoa keskittyvän välipohjiin. Kumpikin massa pääsee siirtymään vaakasuorasti, joten rakenteella on kaksi vapausastetta kuvion tasossa vaikuttaville vaakasuorille voimille ja siirtymille. Tehtävänä on selvittää rakenteen värähdysliike



Kuva 7. Esimerkissä käsitelty rakenne ja sen analogia

Fig. 7. Structure handled in example and its analogy

Kuva 8a. Massaan 2 vaikuttava voima kuvassa 7

Fig. 8a. The horizontal force acting upon mass 2 in fig. 7

Kuva 8b. Tuen liike kuvassa 7

Fig. 8b. Ground motion in fig. 7

a) alkuarvoista

$$(D_1)_0 = (D_2)_0 = D_0 \text{ ja}$$

$$(\dot{D}_1)_0 = (\dot{D}_2)_0 = 0,$$

b) massaan 2 vaikuttavasta kuvan 8a mukaisesta vaakasuorasta voimasta vasemmalla oikealle;  $t \leq t_1$ , ja

c) perusmaan liikkauksesta vasemmalla oikealle  $D_R$ :n verran kuvan 8b mukaan.

### 6.2. Ominaisarvot ja -vektorit

Kuvan 7 merkinnöillä saadaan jäykkyyssmatriisiksi

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & -s_2 \\ -s_2 & s_2 + s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s & -2s \\ -2s & 3s \end{bmatrix}$$

$$\text{jossa } s = \frac{24 EI}{L^3}$$

$$\text{ja massamatriisiksi } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot M.$$

Ominaisarvoiksi saadaan yhtälöstä

$$|\mathbf{S} - p_i^2 \cdot \mathbf{M}| = 0$$

$$p_1^2 = (15 - \sqrt{145})/8 \cdot s/M = 0,3698 \cdot s/M$$

$$p_2^2 = (15 + \sqrt{145})/8 \cdot s/M = 3,3802 \cdot s/M$$

$$\text{joten } \mathbf{C}_V = \begin{bmatrix} 0,3698 & 0 \\ 0 & 3,3802 \end{bmatrix} \cdot s/M$$

Yhtälöstä (16) saadaan

$$\mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} 0,7604 D_{M21} & -5,2602 D_{M22} \\ D_{M21} & D_{M22} \end{bmatrix}$$

Normeerataan  $\mathbf{D}_M \mathbf{D}_N$ :ksi:

$$\sum_{j=1}^n M_j \cdot (D_{Nji})^2 = 1$$

$$\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 0,3554 & -0,9348 \\ 0,4674 & 0,1777 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{M}$$

Edelleen

$$\mathbf{D}'_N = \begin{bmatrix} 0,3554 & 0,4674 \\ -0,9348 & 0,1777 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{M} \text{ ja}$$

$$\mathbf{D}^{-1}_N = \begin{bmatrix} 0,3554 & 1,8696 \\ -0,9348 & 0,7108 \end{bmatrix} \sqrt{M}$$

Tarkistetaan ortogonalisuus (18):

$$\begin{bmatrix} 0,3554 & 0,4674 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{M} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} -0,9348 \\ 0,1777 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{M} = 0$$

ja normeraus (19):

$$i = 1 \begin{bmatrix} 0,3554 & 0,4674 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{M} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 0,3554 \\ 0,4674 \end{bmatrix} 1/\sqrt{M} = 1,000$$

$$i = 2 \begin{bmatrix} -0,9348 & 0,1777 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{M} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} -0,9348 \\ 0,1777 \end{bmatrix} 1/\sqrt{M} = 1,000$$

### 6.3. Alkuarvotehtävä

Alkuarvovektorit

$$\mathbf{D}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_o, \dot{\mathbf{D}}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pääkoordinaatistossa

$$\mathbf{D}_{oP} = \mathbf{D}^{-1}_N \mathbf{D}_o = \begin{bmatrix} 0,3554 & 1,8696 \\ -0,9348 & 0,7108 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{M} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_o = \begin{bmatrix} 2,2250 \\ -0,2240 \end{bmatrix} \sqrt{M} \cdot D_o$$

$$\text{ja } \dot{\mathbf{D}}_{oP} = \mathbf{D}^{-1}_N \dot{\mathbf{D}}_o = 0.$$

Ratkaisu pääkoordinaatistossa

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{Pi} &= \mathbf{D}_{oPi} \cdot \cos p_i t = \\ &= \begin{bmatrix} 2,2250 \cdot \sqrt{M} \cdot D_o \cdot \cos p_1 t \\ -0,2240 \cdot \sqrt{M} \cdot D_o \cdot \cos p_2 t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

jossa

$$p_1 = 0,6082 \cdot \sqrt{s/M} \text{ ja } p_2 = 1,8385 \cdot \sqrt{s/M}.$$

Lopullinen ratkaisu alkuperäisessä koordinaatistossa

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}_P = \begin{bmatrix} 0,3554 & -0,9348 \\ 0,4674 & 0,1777 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{M} \cdot \begin{bmatrix} 2,2250 \cdot \sqrt{M} \cdot D_o \cdot \cos p_1 t \\ -0,2240 \cdot \sqrt{M} \cdot D_o \cdot \cos p_2 t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,791 \cdot \cos p_1 t + 0,209 \cdot \cos p_2 t \\ 1,040 \cdot \cos p_1 t - 0,040 \cdot \cos p_2 t \end{bmatrix} \cdot D_o$$

Värähdysaika

$$T_1 = \frac{2\pi}{0,6082} \cdot \sqrt{M/s} = 10,331 \cdot \sqrt{M/s}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{0,8385} \cdot \sqrt{M/s} = 3,418 \cdot \sqrt{M/s}$$

### 6.4. Ulkoisten voimien vaikutus

Kuvan 8a mukaan vaikuttava voimavektori

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_E(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ t^2/t_I^2 \end{bmatrix} \cdot A_E, \text{ kun } t \leq t_I, \text{ on} \\ &\text{pääkoordinaatistossa } \mathbf{A}_{EP}(t) = \mathbf{D}'_N \cdot \mathbf{A}_E(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0,3554 & 0,4674 \\ -0,9348 & 0,1777 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 0 \\ t^2/t_I^2 \end{bmatrix} \cdot A_E \\ &= \begin{bmatrix} 0,4674 \\ 0,1777 \end{bmatrix} \cdot \frac{t^2}{t_I^2} \cdot \frac{A_E}{\sqrt{M}} \end{aligned}$$

Ratkaisu (27), joka tässä tapauksessa voidaan laskea suljetussa muodossa, tulee seuraavaksi:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_P &= \frac{\sqrt{M}}{s} \begin{bmatrix} 1,2639 \cdot \left( \frac{t^2}{t_I^2} - \frac{2}{p_1^2 \cdot t_I^2} \right) \\ 0,0526 \cdot \left( \frac{t^2}{t_I^2} - \frac{2}{p_2^2 \cdot t_I^2} \right) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} (1 - \cos p_1 t) \\ (1 - \cos p_2 t) \end{bmatrix} \cdot A_E \end{aligned}$$

Lopullinen ratkaisu saadaan muuntamalla takaisin pääkoordinaatistosta:  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}_P$  eli

$$\mathbf{D} = \frac{A_E}{s} \begin{bmatrix} 0,040 \cdot \frac{t^2}{t_I^2} - \frac{0,898}{p_I^2 \cdot t_I^2} (1 - \cos p_I t) \\ 0,600 \cdot \frac{t^2}{t_I^2} - \frac{1,182}{p_I^2 \cdot t_I^2} (1 - \cos p_I t) \\ + \frac{0,098}{p_2^2 \cdot t_I^2} \cdot (1 - \cos p_2 t) \\ - \frac{0,019}{p_2^2 \cdot t_I^2} \cdot (1 - \cos p_2 t) \end{bmatrix}$$

### 6.5. Tukien liikkeiden vaikutus

$$\mathbf{D}_R(t) = D_R, \mathbf{S}_R = \begin{bmatrix} -s \\ -s \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{RP}(t) = \begin{bmatrix} 0,8228 \\ -0,7571 \end{bmatrix} \cdot D_R \cdot s / \sqrt{M} \text{ ja}$$

$$\mathbf{D}_P = \begin{bmatrix} 2,2250 \cdot (1 - \cos p_I t) \\ -0,2240 \cdot (1 - \cos p_2 t) \end{bmatrix} \cdot D_R.$$

Lopullinen ratkaisu:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_N \mathbf{D}_P =$$

$$\begin{bmatrix} 1,000 - 0,791 \cdot \cos p_I t - 0,209 \cdot \cos p_2 t \\ 1,000 - 1,040 \cdot \cos p_I t + 0,040 \cdot \cos p_2 t \end{bmatrix} \cdot D_R$$

### 6.6. Huomautuksia

Lausekkeissa (27) ja (30) joudutaan yleensä integroimaan numeerisesti esim. Simpsonin kaavaa käyttäen. Kun  $A_E$ - ja  $D_R$ -funktiot tunnetaan tietyin aikaväleillä  $\Delta t$ , saadaan amplitudit  $D$  samoina ajankohtina. Laskelma on sangen työläs.

Kun värähdysliikkeen amplitudit tunnetaan, saadaan näistä lasketuksi voimasuureet ja edelleen vaikutus jännityksiin.

### Merkintöjä

$A_I$	=	sisäinen voima
$A_E$	=	ulkoinen voimasuurevektori
$C$	=	vaimennuskerroin
$C$	=	vaimennusmatriisi (diagonaalinen)
$C_c$	=	kriittinen vaimennuskerroin
$C_V$	=	ominaisarvomatriisi (diagonaalinen)
$\mathbf{D}$	=	siirtymävektori (kiertymävektori)
$\dot{\mathbf{D}}$	=	nopeusvektori
$\ddot{\mathbf{D}}$	=	kiihtyvyyvektori
$\mathbf{D}_{Mi}$	=	i:nneen muodon ominaisvektori (amplitudi-vektori)
$\mathbf{D}_M$	=	ominaisvektoreiden neliömatriisi
$\mathbf{D}_{Ni}$	=	i:nneen muodon normeerattu ominaisvektori
$\mathbf{D}_N$	=	normeerattujen ominaisvektoreiden neliömatriisi
$\mathbf{D}_o$	=	alkusiiirtymävektori
$\dot{\mathbf{D}}_o$	=	alkunopeusvektori
$\mathbf{D}_R$	=	tukipisteiden siirtymävektori
$\mathbf{I}$	=	yksikkömatriisi
$\mathbf{M}$	=	massamatriisi (diagonaalinen)
$\mathbf{S}$	=	jäykkyysmatriisi (symmetrinen)
$t$	=	i:nneen mallin ominaisarvo
$T$	=	aika
$p_i^2$	=	värähdysaika
$f$	=	värähdystaajuus (frekvenssi)

### Kirjallisuutta

1. Timoshenko, S. P. and Young, D. H., Vibration Problems in Engineering. D. van Nostrand Co., Inc., New York 1955.
2. Rodgers, Dynamics of Framed structures. John Wiley and Sons, New York, 1959.
3. Norris et al., Structural Design for Dynamic Loads. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959.
4. Caughey, T. K., Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. Journal of Applied Mechanics, vol. 27, Transactions ASME, vol. 82, Series E, 1960, 269—271.
5. Weaver, W., Luentoja Stanfordin yliopistossa, 1964.

Pentti Loikkanen, dipl.ins., Wärtsilän teknillinen oppilaitos, Joensuu