ERÄIDEN INTEGROIMISKAAVOJEN RAKENNUSSTAATTINEN TULKINTA

EERO-MATTI SALONEN

Rakenteiden Mekaniikka 1 (1968) ss. 60—63; Kustannusosakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

Yhteenveto: Artikkelissa johdetaan kaksi kaavaa ((10) ja (18)) numeerisen integroinnin suorittamiseksi rakennusstatiikan tuttuja käsitteitä hyväksi käyttäen. Kaavat ovat muotoa, jossa trapetsikaavan antamaan tulokseen (A_{tr}) on lisätty tiettyjä korjaustermejä. Kaava (10) saadaan muuntamalla palkin kokonaiskuormitus pistekuormiksi antamalla kuormituksen vaikuttaa välillisesti ja korvaamalla kuormituksen intensiteetti paloittain toisen asteen polynomeilla. Kaava (18) johdetaan korvaamalla integroitava funktio palkin taipumaviivalla. Kaavan (18) tarkkuus on usein hyvä jo jakovälien lukumäärän ollessa vain yksi tai kaksi. Kaavan käyttöä rajoittaa se, että integroitavan funktion derivaatan arvoja integroimisvälin päätepisteissä ei aina tunneta. Molemmat kaavat ovat täysin tarkkoja kolmannen tai alemman asteen polynomeille. Kaavat ovat voimassa Simpsonin kaavasta poiketen myös parittomille jakovälien lukumäärille. Taulukossa 1 esitetään eräästä sovellutuksesta saatuja tuloksia.

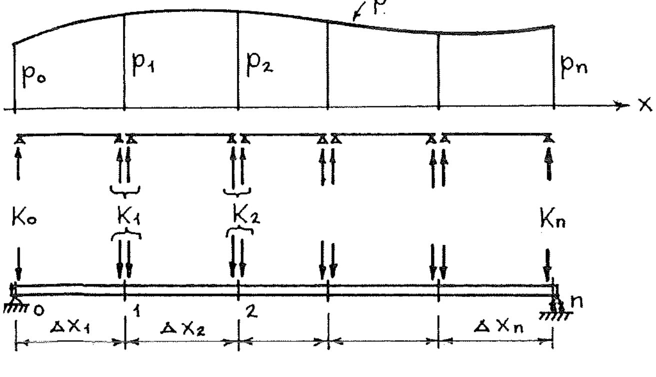
K-voimien käyttöön perustuva kaava

Palkkiin vaikuttava jatkuva kuormitus korvataan laskelmissa usein pistekuormilla. Pistekuormat voidaan määrittää seuraavasti. Kuormituksen p ajatellaan vaikuttavan palkkiin välillisesti kuvan 1 esittämien palkkien kautta. Palkkien tukireaktiot ovat etsittyjä pistekuormia, joita nimitetään seuraavassa K-voimiksi.

Mikäli K-voimat lasketaan tarkasti integroimalla, saadaan niitä käyttäen palkin taivutusmomentille ja leikkausvoimalle jakopisteissä 0,1, . . . , n staattisesti määrätyssä tapauksessa täysin oikeat arvot. Tasapainoehtojen perusteella on myös selvää, että palkin kokonaiskuormitus on yhtä kuin K-voimien summa eli

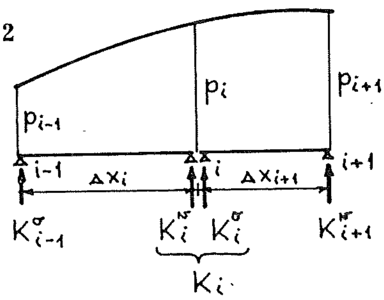
$$\int_{x_0}^{x_n} p dx = \sum_{i=o}^{n} K_i \tag{1}$$

1



K-voimia ei useinkaan voida laskea tarkasti, koska p:n arvot tunnetaan monesti vain jakopisteissä. Saattaa myös olla mahdotonta tai liian suuritöistä suorittaa integrointi suljetussa muodossa. K-voimien likimääräisessä laskemisessa menetellään usein siten, että p korvataan paloittain kahden jakovälin $\Delta x_i + \Delta x_{i+1}$ matkalla toisen asteen polynomilla, joka kulkee tunnettujen p:n arvojen p_{i-1}, p_i, p_{i+1} kautta (kuva 2) ja lasketaan K-voimat tämän polynomin avulla

2



[1]. Suorittamalla laskelmat saadaan tapauksessa

$$\Delta x_i = \Delta x_{i+1} = \Delta x$$

$$K_{i-1}^o = \frac{\Delta x}{12}(3{,}5\, p_{i-1} + 3\, p_i - 0{,}5\, p_{i+1}) \tag{2}$$

$$K_i^v = \frac{\Delta x}{12}(1{,}5\, p_{i-1} + 5\, p_i - 0{,}5\, p_{i+1}) \tag{3}$$

$$K_i^o = \frac{\Delta x}{12}(-0{,}5\, p_{i-1} + 5\, p_i - 1{,}5\, p_{i+1}) \tag{4}$$

$$K_i = K_v^i + K_o^i = \frac{\Delta x}{12} \cdot (p_{i-1} + 10\, p_i + p_{i+1}) \quad (5)$$

$$K_{i+1}^v = \frac{\Delta x}{12}(-0{,}5\, p_{i-1} + 3\, p_i + 3{,}5\, p_{i+1}) \quad (6)$$

Palkin reunapisteille o ja n lasketaan K-voimat kaavoista (2) ja (6) sekä kaikille sisäpisteille kaavasta (5). Tapauksessa, jolloin kaikki jakovälit ovat yhtä suuria ($= \Delta x$), saadaan siis

$$\left.\begin{aligned}
K_o &= \frac{\Delta x}{12}(3{,}5\, p_o + 3\, p_1 - 0{,}5\, p_2) \\
K_1 &= \frac{\Delta x}{12}(p_o + 10\, p_1 + p_2) \\
K_2 &= \frac{\Delta x}{12}(p_1 + 10\, p_2 + p_3) \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
K_{n-1} &= \frac{\Delta x}{12}(p_{n-2} + 10\, p_{n-1} + p_n) \\
K_n &= \frac{\Delta x}{12}(-0{,}5\, p_{n-2} + 3\, p_{n-1} + \\
&\quad + 3{,}5\, p_n)
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Koska K-voimat on laskettu likimääräisesti, on myös kaava (1) vain likimääräisesti voimassa. Koska taas jokainen funktio voidaan käsittää kuormitukseksi, saadaan mielivaltaiselle funktiolle y

$$\int_{x_o}^{x_n} y dx \approx \sum_{i=o}^{n} K_i = \frac{\Delta x}{12}\,(4{,}5\, y_o + 14\, y_1 + $$
$$+ 11{,}5\, y_2 + 12\, y_3 + 12\, y_4 + \cdots + 4{,}5\, y_n) \quad (8)$$
$$= \frac{\Delta x}{2}\,(y_o + 2\, y_1 + 2\, y_2 + \cdots + y_n) +$$
$$+ \frac{\Delta x}{12}\,(-1{,}5\, y_o + 2\, y_1 - 0{,}5\, y_2 - 0{,}5\, y_{n-2} +$$
$$+ 2\, y_{n-1} - 1{,}5\, y_n) \quad (9)$$

Kaava (9) on saatu soveltamalla kaavoja (7) ja suorittamalla termien järjestelyjä. Kaavan (9) oikean puolen edellinen osa esittää trapetsikaavan [2] antamaa tulosta. Jälkimmäisen osan esittämä korjaustermi riippuu kolmen ensimmäisen ja viimeisen ordinaatan arvoista. Kirjoitetaan vielä kaava (9) lyhennetyssä muodossa

$$\int_{x_o}^{x_n} y dx \approx A_{tr} + \frac{\Delta x}{12}(-1{,}5\, y_o + 2\, y_1 - 0{,}5\, y_2 -$$
$$- 0{,}5\, y_{n-2} + 2\, y_{n-1} - 1{,}5\, y_n), \quad n \geqq 2 \quad (10)$$

Kaava on katkaistu Gregoryn kaava [3]. Tapauksissa n = 2, 3, 4 ja 5 saadaan

$$\int_{x_o}^{x_2} y dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_o + 4\, y_1 + y_2) \quad (11)$$

$$\int_{x_o}^{x_3} y dx \approx \frac{3\Delta x}{8}(y_o + 3\, y_1 + 3\, y_2 + y_3) \quad (12)$$

$$\int_{x_o}^{x_4} y dx \approx \frac{\Delta x}{12}(4{,}5\, y_o + 14\, y_1 + 11\, y_2 + 14\, y_3 + 4{,}5\, y_4) \quad (13)$$

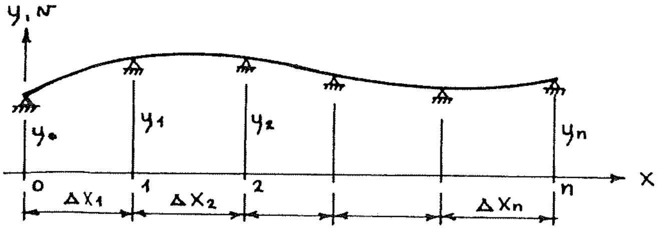
$$\int_{x_o}^{x_5} y dx \approx \frac{\Delta x}{12}(4{,}5\, y_o + 14\, y_1 + 11{,}5\, y_2 + 11{,}5\, y_3 + 14\, y_4 + 4{,}5\, y_5) \quad (14)$$

Huomataan, että (11) on Simpsonin kaava [2] tapauksessa n = 2 ja (12) on ns. 3/8-kaava [4].

Palkin taipumaviivan käyttöön perustuva kaava

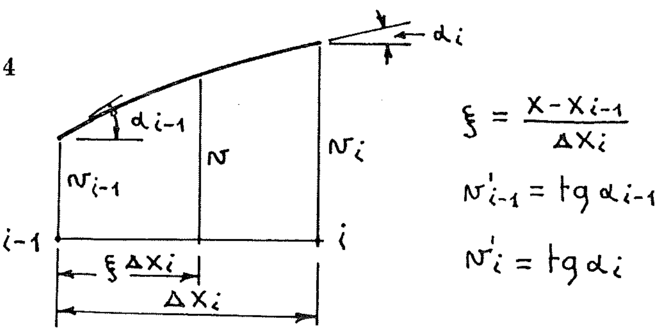
Esim. veneiden linjapiirustusten teossa esiintyy seuraava tehtävä: On piirrettävä käyrä, joka kulkee »kauniisti» annettujen pisteiden kautta. Tehtävä ratkaistaan asettamalla puinen rima annetuissa pisteissä nastojen tai painojen avulla paikoilleen ja piirtämällä käyrä riman taipuneen muodon mukaan. Syntyvä käyrä on siinä mielessä kaunis, että sillä on ensimmäisen derivaatan lisäksi myös käyristys jatkuva $1/\varsigma$ $(1/\varsigma = M/EI$; taivutusmomentti M on palkin tasapainoehtojen perusteella jatkuva, taivutusjäyhyys EI on vakio, joten $1/\varsigma$ on jatkuva).

3



Korvataan integroitava käyrä y integroimisen suorittamiseksi palkin taipumaviivalla v, joka kulkee annettujen pisteiden x_o, $y_o \cdots x_n$, y_n kautta (kuva 3). Taipumaviivan yhtälöksi Δx_i:n matkalla (kuva 4) saadaan kolmannen asteen käyrä

4



$$v = (2\,\lambda^3 - 3\,\xi^2 + 1)\, v_{i-1} + (-2\,\xi^3 + 3\,\xi^2)\, v_i + (\xi^3 - 2\,\xi^2 + \xi)\,\Delta x_i\, v'_{i-1} + (\xi^3 - \xi^2)\,\Delta x_i\, v'_i \tag{15}$$

Integroimalla saadaan

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} v dx = \frac{\Delta x_i}{2}(v_{i-1} + v_i) = \frac{\Delta x_i^2}{12} \cdot (v'_{i-1} - v'_i) \tag{16}$$

Tapauksessa, jolloin jakovälit ovat yhtä suuria $(= \Delta x)$, saadaan laskemalla jakovälien integraalit yhteen

$$\begin{aligned}\int_{x_o}^{x_n} v dx &= \frac{\Delta x}{2}(v_o + v_1 + v_1 + v_2 + v_2 + \cdots + v_n) + \\ &+ \frac{\Delta x^2}{12}(v'_o - v'_1 + v'_1 - v'_2 + v'_2 + \cdots - v'_n) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(v_o + 2\,v_1 + 2\,v_2 + \cdots + v_n) + \\ &+ \frac{\Delta x^2}{12}(v'_o - v'_n)\end{aligned} \tag{17}$$

Kaavassa (17) ensimmäinen sulkulause kertoimineen esittää trapetsikaavan antamaa tulosta. Jälkimmäinen korjaustermi riippuu vain taipumaviivan derivaatoista palkin päissä. Edellisen perusteella funktion y määrätty integraali voidaan laskea likimäärin kaavasta

$$\int_{x_o}^{x_n} y dx \approx A_{tr} + \frac{\Delta x^2}{12}(y'_o - y'_n) \quad , n \geqq 1 \tag{18}$$

Kaava on katkaistu Euler-Maclaurinin kaava [3].

Kaavojen käytöstä ja tarkkuudesta

Kaava (18) antaa usein jo n:n arvolla 1 ja 2 hämmästyttävän tarkkoja tuloksia. Matemaattisesti tulkittuna on kyseessä Hermiten interpolaatiopolynomin käyttö numeerisen integroinnin suorittamiseksi siten, että käytetään hyväksi funktion arvojen lisäksi vain funktion ensimmäisen derivaatan arvoja [4]. Kaavan haittana on se, että derivaatan arvoja integroimisvälin päätepisteissä ei aina tunneta. Jos käyrä on esitetty graafisesti, voidaan derivaatat mitata. Eräs mahdollisuus määrittää derivaatat likimääräisesti on approksimoida funktiota integroimisvälin kummassakin päässä polynomeilla jakopisteissä tunnettuja funktion arvoja käyttäen ja laskea derivaatat näistä. On mielenkiintoista todeta, että kun valitaan toisen asteen polynomit, päädytään K-voimien avulla edellä johdettuun kaavaan (10).

Rakennusstatiikassa kaavaa (18) voidaan soveltaa edullisesti esim. määritettäessä sauvarakenteiden staattisia suureita vaikutusviivojen avulla. Tasaisen kuormituksen vaikuttaessa joudutaan tällöin laskemaan funktion y määrättyjä integraaleja, kun y on jonkin suureen vaikutusviivan ordinaatta. y saadaan rakenteen taipumaviivana tietystä kuormituksesta. Taipumaviivasta saadaan monesti sekä taipumat y että kiertymät y' tietyissä pisteissä, mutta ei sen sijaan y:n analyyttistä lauseketta. Kaavaa (18) voidaan kuitenkin nyt käyttää, ja jos sauvojen taivutusjäyhyydet ovat jakoväleittäin vakioita ja kuormat vaikuttavat vain jakopisteihin, saatu tulos on täysin tarkka.

Sekä kaava (10) että kaava (18) antavat oikeat tulokset kolmannen tai alemman asteluvun funktioille. Tutkimalla kaavojen virheitä havaitaan, että ne ovat suurilla n:n arvoilla Simpsonin kaavan virheeseen verrattuna yleensä suuruusluokkaa

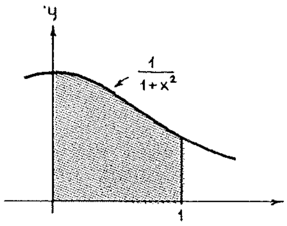
$$\text{virhe (10)} \approx 19/4 \cdot \text{virhe (Simpson)}$$

$$\text{virhe (18)} \approx -1/4 \cdot \text{virhe (Simpson)}$$

Pienillä n:n arvoilla nämä arviot eivät pidä paikkaansa, kuten nähdään taulukossa 1 esitetystä sovellutuksesta. Kaavojen (10) ja (18) etuna Simpsonin kaavaan verrattuna on se, että ne ovat voimassa myös parittomille n:n arvoille. Mikäli integroitavassa funktiossa esiintyy hyppäyksiä tai kärkipisteitä, on integroimisväli jaettava sopiviin osaväleihin ja sovellettava kuhunkin erikseen annettuja kaavoja.

Kaavat ovat helposti yleistettävissä myös suorakaiteen muotoisten alueiden yli laskettavien pintaintegraalien määräämiseen.

5



$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big|_0^1 \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}$$

$$= 0{,}785'398'163\cdots$$

	Kaava	Tulos	Virhe (‰)
n = 1	(18)	0,791'666'67	− 8,0
n = 2	(18)	0,785'416'67	− 0,024
	(10)	0,783'333'33	2,6
	Simpson	— " —	− " −
n = 3	(18)	0,785'398'86	− 0,000'89
	(10)	0,784'615'39	1,0
n = 4	(18)	0,785'398'29	− 0,000'17
	(10)	0,785'134'80	0,34
	Simpson	0,785'392'16	0,007'6
n = 5	(18)	0,785'398'20	− 0,000'051
	(10)	0,785'296'65	0,13
n = 6	(18)	0,785'398'17	− 0,000'026
	(10)	0,785'353'54	0,057
	Simpson	0,785'397'95	0,000'27

Kirjallisuutta:

1. *Stüssi, F.*, Baustatik I, Basel/Stuttgart 1953.
2. *Myrberg, P. J.*, Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja, Helsinki 1942.
3. *Scheid, F.*, Numerical analysis, New York 1968.
4. *Zurmühl, R.*, Praktische Mathematik, 5. neuarb. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York 1965.

Eero-Matti Salonen, tekn. lis., Valtion teknillistieteellisen toimikunnan tutkimusassistentti, Helsinki.