

TÄYDEN SAUVAN JA RISTIKKOSAUVAN NURJAHDUSTAIVUTUS

JAAKKO LAINE

Rakenteiden Mekaniikka 1 (1968) ss. 53—59; Kustannus-
osakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

Yhteenveto: Artikkelissa on käsitelty yleisimpiä täyden sauvan nurjahdustaivutusilmiön ratkaisuun liittyviä laskumenetelmiä. Ottamalla huomioon leikkausvoiman muodonmuutoksia lisäävä vaikutus on eräissä nurjahdustaivutustapauksissa johdettu ristikkosauvalle sopivat kaavat.

Kevytmetallisilla pyörötangoilla ja teräksisellä ja kevytmetallisella ristikkosauvalle tehtyjen kokeiden tuloksia on verrattu teoreettisiin laskelmiin.

Koetulokset osoittavat, että täyden sauvan mitoituksessa käytetyt laskumenetelmät antavat varmemmalla puolella olevia arvoja.

Pultatuilla ristikkosauvoilla suoritetuissa kokeissa huomattiin pulttiliitoksien siirtymillä olevan merkittävän vaikutuksen koetuloksiin. Liitoksissa esiintyvät siirtymät saattavat olla jopa 6-kertaiset sauvan kimmoisiin muodonmuutoksiin verrattuina (reiän väljyys 1 mm). Siirtymä voitaisiin ottaa laskelmissa helposti huomioon, mutta sen suuruuden arviointi ilman erikoistutkimuksia on vaikeata.

1. Nurjahdustaivutus

Nurjahdustaivutuksella tarkoitetaan kuormitustapausta, jossa puristettuun sauvaan vaikuttaa joko itse puristavasta voimasta tai erillisistä ulkoisista voimista aiheutuva poikittaissuuntainen momentti.

Käytännössä yleisimmin esiintyvät nurjahdustaivutustapaukset ovat epäkeskisesti puristettu sauva, keskisesti puristettu sivulta tasaisesti kuormitettu sauva ja keskisesti puristettu alkuaan käyrä sauva. Eräissä rakenteissa ne kaikki voivat esiintyä samanaikaisesti. Kun puristava voima pysyy vakiona, voidaan muihin ulkoisiin kuormiin soveltaa superpositioperiaatetta. Sen sijaan puristavan voiman muuttuessa eivät rakenteen jännitykset enää muutu lineaarisesti.

Taivutetun puristetun sauvan taipuma on Hooken lakia rajattomasti noudattavilla aineilla yksikäsitteisesti määrätty. Jos sauvan kantokyvyn mittana pidetään sitä, että reunajännitys saavuttaa aineen tyssäysrajan, voidaan myös teräs- ja alumiinisauvojen taipuma määrittää yksikäsitteisesti murtohetkeen asti.

Nurjahdustaivutustapauksissa käytettyjen kaavojen johto perustuu sauvan käyrästä-

sen, taivutusmomentin ja taipuman toisen derivaatan välisiin yhtälöihin. Kun kimmoiviivan kaltevuuskulman arvot ovat pieniä, nämä yhtälöt voidaan esittää seuraavassa yksinkertaisessa muodossa.

$$(1) \quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad [1]$$

Sijoittamalla tähän kuhunkin kuormitukseen liittyvä momentin lauseke voidaan taipumalle, momentille ja leikkausvoimalle johdattaa kuhunkin tapaukseen sopivat lausekkeet. Kaavojen yksityiskohtainen johto on esitetty useissa lujuusopin kirjoissa [1]. Yleisimmistä ratkaisuksista mm. V. Linnaluoto on laatinut käyttökelpoiset kaavakokoelmat [2].

Koska myöhemmin tarkasteltaviksi tulevat kokeet on tehty epäkeskisesti puristetulla ja tasaisen poikittaiskuorman rasittamalla sauvalla (kuva 1), esitetään tätä kuormitustapausta vastaava taivutusmomentin arvo sauvan keskellä.

$$(2) \quad M = \frac{g}{k^2} \left(\frac{1}{\cos k \frac{L}{2}} - 1 \right) - \frac{Fe}{\cos k \frac{L}{2}}$$

$$\text{jossa } k^2 = \frac{F}{EI} \quad [2]$$

2. Mitoitusmenetelmät

Sovellettaessa edellä esitetyllä tavalla johdettuja kaavoja käytännön mitoitukseen joudutaan suorittamaan aikaavieviä laskelmia. Tämän vuoksi eri maiden normeissa ja kirjallisuudessa on esitetty likimääräiskaavoja tai laskettu työtä helpottavia apukäyrästäjä.

Prof. Ylisen Kimmo- ja lujuusopissa [1] on esitetty käyrästäjä erälle yleisimmille nurjahdustaivutustapauksille. Nämä käyräparvet on esitetty akselistossa, jonka abskissa-

$$\text{sana on lauseke } \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{ty}}{E}}$$

ja oordinaattana kriittisen jännityksen ja tyssäysrajan suhde. Myös tietyille aineille ja kuormitukselle voidaan helposti laatia ku-

van 4 mukaiset käyrästöt, joista käy selville kriittisen keskimääräisen puristusjännityksen arvo hoikkuuden ja epäkeskisyyden funktiona.

Edellä esitetyn tapaiset käyrästöt helpottavat mitoitusyötä, mutta eivät anna suunnittelijalle selvää kuvaa eri tekijöiden (momentti, puristava voima) osuudesta lopullisiin jännityksiin. Havainnollisemman kuvan asiasta saa laatimalla eri kuormituksille kuvan 2 mukaiset käyrät, joista selviää momentin ja leikkausvoiman kasvu puristavan voiman funktiona. Käyrissä olevien kertoimien K ja N arvot voidaan helposti laskea myös muille kuormitustapauksille. Kertoimien lauseke voidaan johtaa yhtälöstä (2) käyttämällä hyväksi keskisesti puristetun sauvan nurjahdusvoiman lauseketta.

$$(3) \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 TJ}{L^2}$$

ja korvaamalla kaavassa esiintyvä vakio k uudella vakiolla a .

$$(4) \quad k = \sqrt{\frac{F}{TJ}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}} = a \cdot \frac{2}{L}$$

$$(5) \quad a = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}}$$

Kun tämä vakio sijoitetaan esim. yhtälöön (2), saadaan seuraava lauseke.

$$(6) \quad M = \frac{gL^2}{8} \frac{2}{a^2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) - \frac{Fe}{\cos \alpha} \\ = K \cdot M_{g0} - K^1 \cdot M_{e0}$$

Tässä M_{g0} ja M_{e0} tarkoittavat tasaisen kuorman ja epäkeskisen voiman aiheuttamia yksinkertaisen palkin momenteja. Kerroin K on laskettavissa suhteen F/F_{kr} eri arvoille. Koska mitoituksen yhteydessä aina on tarpeen tutkia myös sauvan kriittinen nurjahdusvoima ilman lisämomenteja, saadaan kerroin K helposti määritetyksi erilaisille puristavan voiman arvoille. Vastaavat kertoimet voidaan johtaa myös leikkausvoimalle.

Likimääräisistä mitoitusmenetelmistä lie-
nee yleisimmin käytössä suomalaisten teräs-

normien [3] suosittama saksalaisessa DIN 4114 normissa esitetty kaava.

$$(7) \quad \frac{\omega F}{A} + 0.9 \cdot \frac{M}{W_d} \leq \delta_{sall}$$

Tämän kaavan käyttöä ei suositella, sillä se yleensä johtaa rakenteen tarpeettomaan ylimitoitukseen (vrt. koetulokset) ja antaa lisäksi täysin väärän kuvan puristavan voiman ja momentin osuudesta rakenteen jännityksiin. Kaavan mukaan myös rakenteen jännitys kasvaa lineaarisesti kuormituksen kasvaessa. Tämä olettaus ei kuitenkaan pidä paikkaansa, kuten kaavasta (2) voi huomata.

Ruotsalaisissa teräsnormeissa [4] ja suomalaisissa nosturinormeissa on suositeltu seuraavaa muotoa olevia likiarvokaavoja momentin laskemiseksi.

$$(8) \quad M = M_0 \left(1 + \frac{\beta n F}{F_{kr} - nF} \right)$$

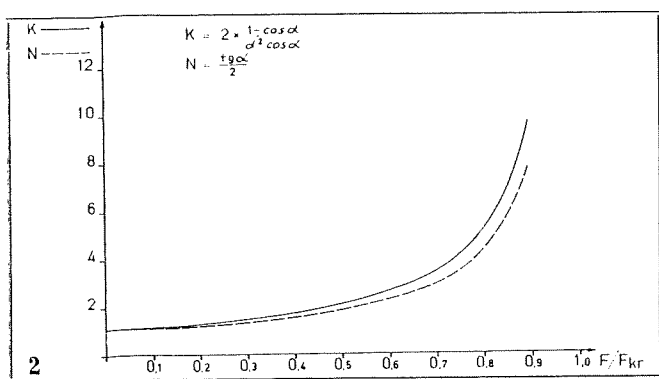
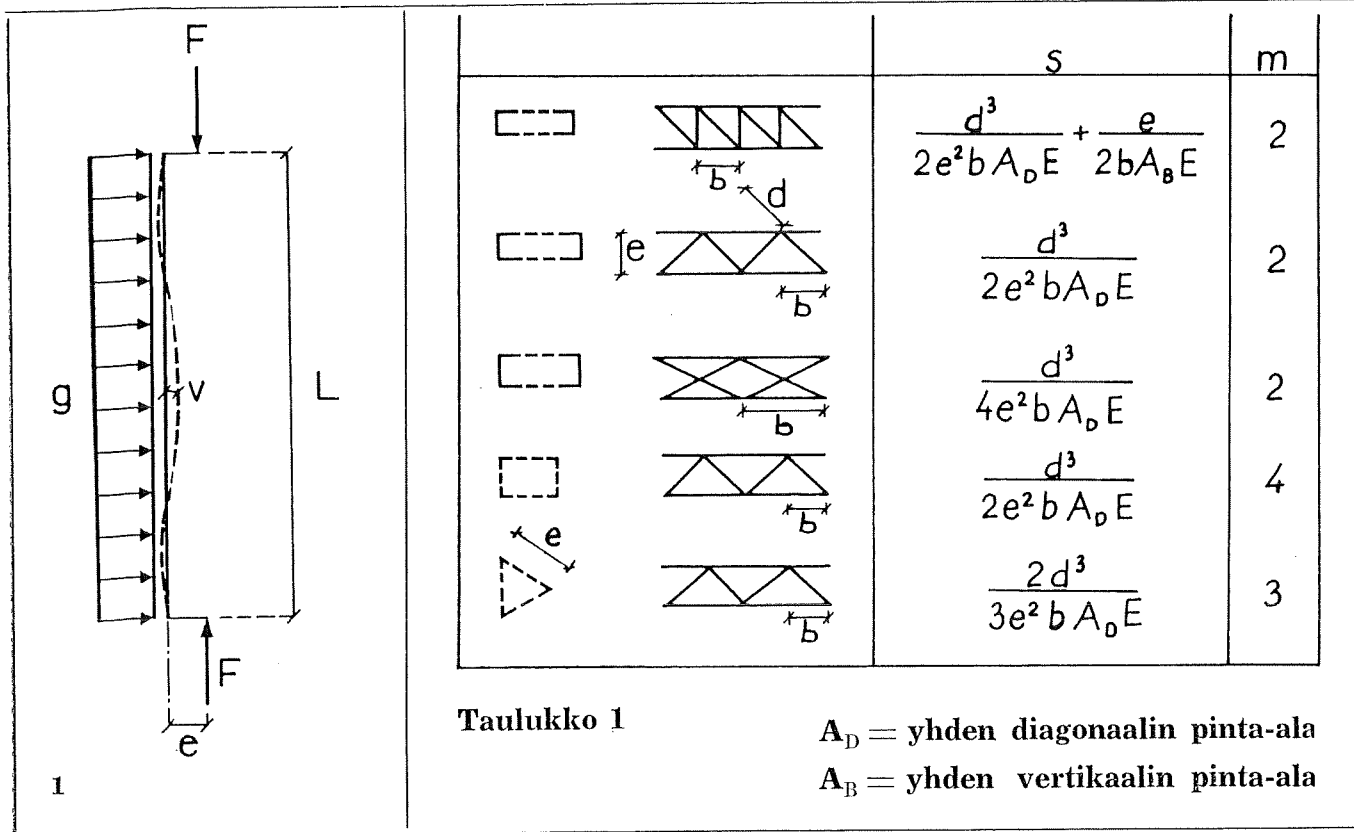
jossa β :n arvo vaihtelee kuormitustapauksesta riippuen. Tämä menetelmä antaa paremman kuvan eri tekijöiden vaikutuksesta jännityksiin. Tulokset poikkeavat esim. yhtälöstä (6) saaduista vain noin 1–2 %. Lisäksi kaavassa otetaan huomioon, että jännitys ei kasva lineaarisesti kuormituksen kasvaessa.

3. Ristikkosauvan mitoitusmenetelmät

Taskasteltaessa ristikkosauvan nurjahdustaivutusta on otettava huomioon myös leikkausvoiman aiheuttamat muodonmuutokset. Tämä merkitsee sitä, että perusyhtälöön (1) on lisättävä leikkausvoimasta aiheutuva termi, joka täydellä sauvalla voidaan jättää pois pienen merkityksensä vuoksi. Yhtälö (1) saa tällöin muodon

$$(9) \quad \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{\zeta dQ}{AG dx}$$

Leikkausvoiman lauseke on esim. kuvassa 1 esitettyä kuormitustapauksessa



Kuva 1. Epäkeskisesti puristettu ja sivultaan taisysesti kuormitettu sauva.

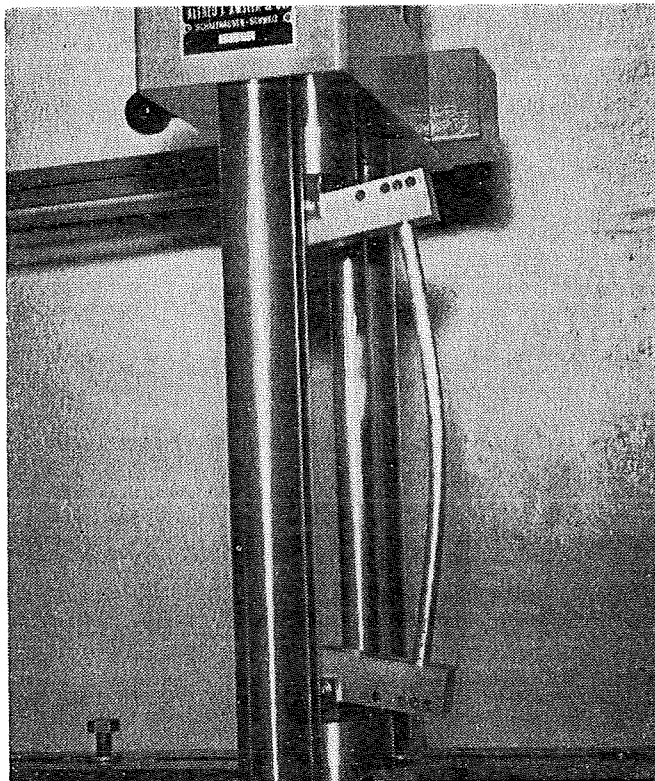
Fig. 1. Eccentric compressed laterally loaded (uniform loading) strut.

Kuva 2. Taivutusmomentin ja leikkausvoiman kasvu sauvaan vaikuttavan puristavan voiman ja sauvan kriittisen voiman suhteen kasvaessa.

Fig. 2. Increase of bending moment and shear force with the relation between compression force and critical force of strut.

Kuva 3. Epäkeskisesti puristetun sauvan koejärjestely.

Fig. 3. Test arrangement with eccentric loaded strut.



$$(10) \quad Q = F \cdot \frac{dv}{dx} - gx$$

Yhtälössä (9) esiintyvä leikkausvoimatermin kerroin S (11) vaihtelee ristikkosysteemistä riippuen ja saa taulukossa 1 esitetyjä arvoja

$$(11) \quad S = \frac{\xi}{AG}$$

Ratkaisemalla yhtälöt (9) ja (10) saadaan ristikkosauvalle kuvan 1 esittämässä kuorimitustapauksessa seuraava maksimimomentin lauseke (12) (ainoa ero verrattuna kaavaan (2) esiintyy cosinitermissä, jossa vakio k on korvattava vakiolla a).

$$(12) \quad M = \frac{g}{k^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{aL}{2}} - 1 \right) - \frac{Fe}{\cos \frac{aL}{2}}$$

$$\text{jossa } a = \frac{k}{\sqrt{1 - SF}}$$

Sovellettaessa likimääräismenetelmiä ristikkosauvan mitoittamiseen on yhtälöstä (7) ω ja yhtälöstä (8) F_{kr} määrättävä ristikkojalan ideaalihoikkisuuden perusteella. Ideaalihoikkisuuden lauseke on

$$(13) \quad \lambda_i = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 AS m T}$$

jossa λ = koko sauvan hoikkuusluku
 A = parresauvan pinta-ala
 m = ristikkosysteemistä riippuva vakio (taulukko 1).
 T = nurjahdusmoduuli.

Kirjallisuudessa on esitetty myös muita laskumenetelmiä, jotka kuitenkin edellyttävät tietokoneen käyttöä [5]. Nämä menetelmät käyttävät hyväksi iterointia ottaen huomioon rakenteen geometriassa tapahtuvat muutokset ja ristikon kussakin nurkkapisteessä vaikuttavien voimien tasapainoyhtälöt.

4. Kokeet \varnothing 13 mm kevytmetallitangolla

Edellä esitettyjen täydelle sauvalle johdettujen kaavojen käyttökelpoisuuden toteami-

seksi Imatran Voima Osakeyhtiön laboratoriossa on tehty eräitä kokeita epäkeskisesti puristetulla \varnothing 13 mm alumiinitangolla. Koejärjestely käy selville kuvasta 3 ja koetulokset kuvasta 4. Koetuloksissa ja kuvassa esitetyissä vertailukäyrissä epäkeskisyyden mittana on käytetty epäkeskisyyden (e) ja sydänetäisyyden (r) suhdetta (m). Vertailukäyrät ilmaisevat eri hoikkuuksilla ja epäkeskisyyden (m) arvoilla sitä puristavaa voimaa vastaavan keskimääräisen jännityksen arvon, joka synnyttää sauvassa aineen tyssäysrajaa vastaavan reunajännityksen. Koetuloksista saadut kriittisen keskimääräisen jännityksen arvot ovat poikkeuksetta suuremmat kuin teoreettisesti lasketut. Tämä johtunee seuraavista syistä

— sauvan kantokyvyn (murto) mittana ei voida pitää vain reunajännityksen nousumista tyssäysrajalle; olisi syytä käyttää eräänlaista poikkileikkauksen »muotokerrointa» kuten plastisessa taivutuksessa tai ratkaista tehtävä stabilisuusproblemana

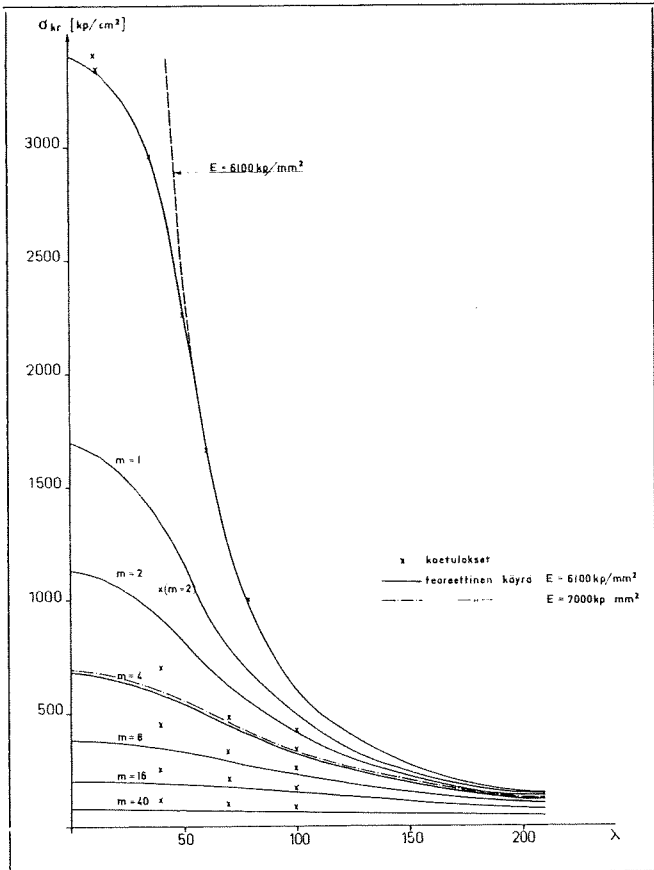
— nivelissä on saattanut kokeen aikana esiintyä vähäistä kitkaa

— käyriä laskettaessa käytetty kimmokerroin 6100 kp/mm² voi olla liian pieni, vaikka se perustuukin mittaustuloksiin. Kirjallisuudessa annettujen arvojen mukaan kimmokerroin vaihtelee 6000...7000 kp/mm². Käyrästä on vertailun vuoksi piirretty kimmokertoimen arvoa 7000 kp/mm² vastaava käyrä epäkeskisyyden (m) arvolla 4.

5. Kokeet teräksisellä ja kevytmetallisella ristikkosauvalla

Kokeet on tehty Imatran Voima Osakeyhtiössä suunnitelluilla harustetuilla pylväillä, joissa pylväsjalkaan vaikuttaa epäkeskinen puristava voima ja tuulikuorman aiheuttama poikittainen vaakakuorma. Ko-

4



Taulukko 1. Leikkausvoiman aiheuttaman korjaustermin (S) arvo erilaisilla ristikkorakenteilla.
Value of factor S for different bracing systems.

Kuva 4. Epäkeskisesti kuormitetun sauvan koetulosten vertailu teoreettisiin käyriin.

Fig. 4. Comparison between test results and theoretical curves (eccentric compressed strut).

Kuva 5. Pylväsjalan parresauvan nurjahtaminen.

Fig. 5. Buckling of one of the main members of tower leg.

Kuva 6. Teräksisen ristikkojalan taipuma. Koetulosten vertailu teoreettisiin arvoihin.

Fig. 6. Deflections of latticed steel strut. Comparison between test results and theoretical values.

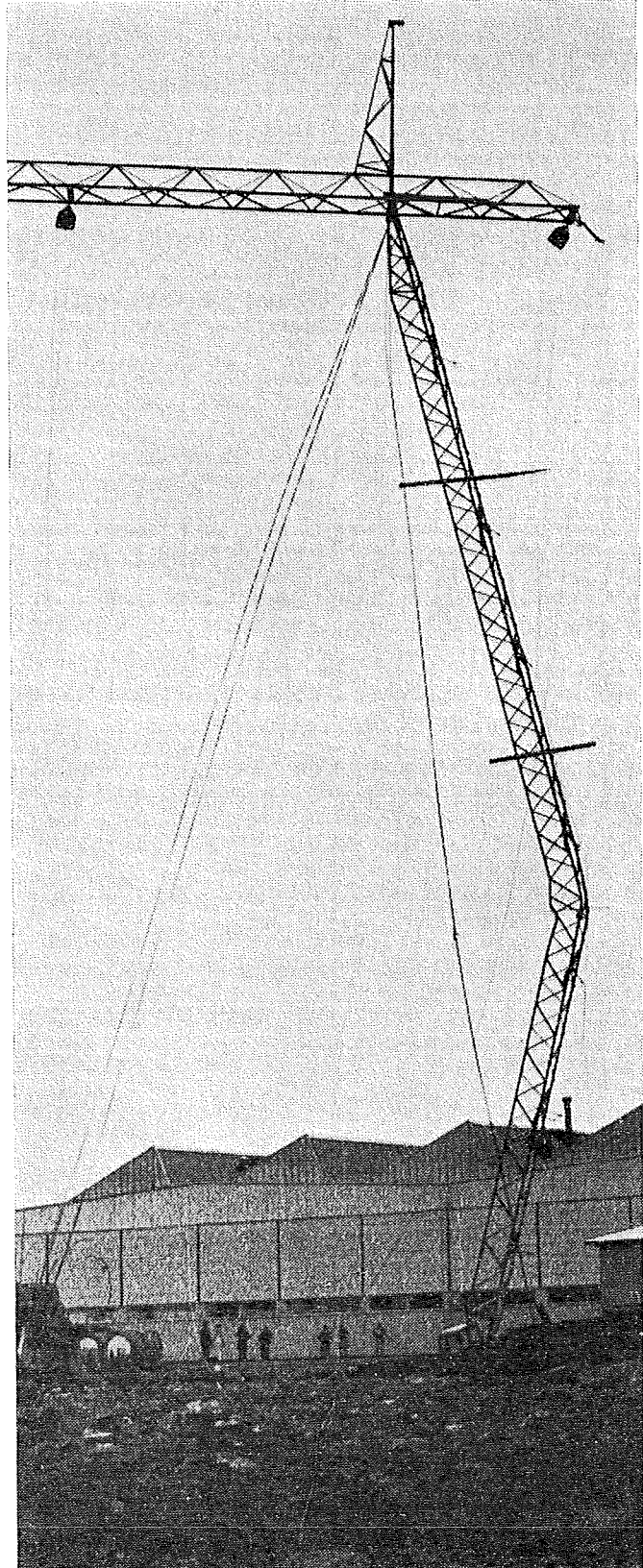
Kuva 7. Kevytmetallisen ristikkojalan taipuma.

Fig. 7. Deflections of latticed aluminium strut.

Taulukko 2. Teräksisen ristikkojalan parresauvan jännitys murtohetkellä.

Maximum stress in the main member of latticed strut before collapse.

5



keita on tehty sekä teräksisellä että kevytmetallisella pylväällä. Molemmissa pylväissä ristikon paarsauvan nurjahtaminen aiheutti jalan lopullisen murtumisen (kuva 5). Paarsauvaan vaikuttava voima voidaan määrittää ristikkosauvan nurjahdustavutukselle johdettujen kaavojen avulla. Tämän jälkeen on paarsauvan nurjahdus tutkittava erikseen stabilisustehtävänä.

Kokeissa mitattiin ulkoisten kuormitusten lisäksi jalan taipuma. Kuvissa 6 ja 7 on esitetty mitatut ja teoreettisesti lasketut (kaava 12) taipumat puristavan voiman ja vaakavoiman yhdistelmille. Teoreettiset käyrät on laskettu kahdelle kertoimen S arvolle. Alemmassa käyrässä ei ole otettu lainkaan huomioon liitospulteissa esiintyviä siirtymiä. Ylemmässä käyrässä on oletettu, että pulttien aiheuttama sauvakohtainen siirtymä sauvan kimmoisiin muodonmuutoksiin verrattuna on kaksinkertainen teräspylväässä (kaksi diagonaalia kiinnitetty samaan pulttiin, jolloin siirtyminen on rajoitettu) ja kolminkertainen kevytmetallipylväässä (diagonaalit eri pulteissa, jolloin siirtyminen on vapaa).

Liitoksissa esiintyvä kitka kuitenkin pienentää siirtymiä ja tekee lähes mahdottomaksi kertoimen S suuruuden arvioimisen. Kertoimen S tarkka arviointi olisi tärkeätä etenkin kevytmetallirakenteissa, joissa pieni kimmokerroin lisää tämän tekijän vaikutusta.

Ero teoreettisten ja kokeista saatujen taipumien välillä vaihtelee 10...20 %. Koska taipumien vaikutus momenttiin ja jalan paarteiden jännityksiin on sekundäärinen, koetulosten ja laskelmien välinen ero momentissa supistuu 3...5 % ja paarteiden jännityksissä 2...3 %. Tarkkuutta voidaan pitää erittäin hyvänä ja sitä voidaan parantaa ottamalla kerrointa S määritettäessä huomioon pulttiliitoksen sallimat siirtymät maksimissaan.

Taulukkoon 2 on vertailun vuoksi laskettu yhtälön (12) ja normien likimääräismenetelmien antamat paarsauvan jännitykset murtohetkellä: $F = 26.2$ t ja $g = 73$ kp/m.

Jännitys kp/cm ²	(7)	(8)	(12)	Test result
	DIN 4114	Ruotsalaiset normit		Koetulos
Puristavan voiman aiheuttama	2265	1140	1140	1140
Tasaisen kuorman aiheuttama	1130	2420	2430	
Epäkesk. voiman aiheuttama	-385	-890	-880	
Kokonaisjännitys	3010	2670	2690	2760

Taulukko 2.

Taulukossa esitetty vertailu osoittaa selvästi DIN 4114 mukaisen likimääräismenetelmän puutteet. Ero olisi vielä suurempi, jos kokeissa olisi käytetty korkealuokkaista terästä (myötöraja $\sigma_m = 3600$ kp/mm²) paarsauvojen materiaalina. DIN 4114 mukaan laskien paarteiden jännitys tällöin kasvaisi, kun se taas muiden menetelmien mukaan ja myös todellisuudessa sauvan hoikkuudesta riippuen joko pienenesi tai pysyisi samana.

KIRJALLISUUTTA:

1. Ylinen, A., Kimmo- ja Lujuusoppi II, Porvoo 1950.
2. Linnaluoto, V., Teknillinen Aikakausilehti 32, 1942.
3. Teräsrakenteiden Normaalimääräykset, RIY julkaisu A 34, 1958.
4. Normalbestämmelser för Järnkonstruktioner till byggnadsverk (Järnbestämmelser), Stockholm 1952.
5. K. Klöppel; W. Ramm., Versuche und Berechnungen zur Bestimmung der Traglast mehrteiliger Gitterstäde unter aussermittiger Belastung, Stahlbau, Heft 6 und 8, 1968.

Jaakko Laine, dipl.ins., Imatran Voima Osakeyhtiö, Helsinki.