

# AVARUUSKEHISTÄ

PEKKA HELANDER

*Rakenteiden Mekaniikka* 1 (1968) ss. 18—25; Kustannus-  
osakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

**Yhteenveto:** Artikkelissa avaruuskehät jaetaan kolmeen ryhmään, joista ensimmäisessä kaikki kuhunkin nurkkapisteesen liittyvät sauvat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, toisessa kaikki pystysauvat ovat kohtisuorassa kehän vaakatasossa olevia sauvoja vastaan ja kolmannessa sauvat liittyvät toisiinsa mielivaltaisissa kulmissa. Sauvan rombisen poikkileikkauksen sivujen ja jäyhyysellipsin liittoakseliin yhdensuuntaisuuteen perustuen esitetään menetelmä toisen ja kolmannen kehätyypin muuntamiseksi ratkaisua varten ensimmäisenä mainituksi avaruuskehätyypiksi.

Rakentamisessa on kysymys lähes aina toiminnasta ja vaikutuksesta kolmessa ulottuvaisuudessa. Rakenteiden mitoituksessa operoidaan kuitenkin kernaasti vain laskentapaperin tasossa. Melko usein  $z$  suunta tietää joutumista alueelle, missä suunnittelijaa odottaa staattisen käsittelyn monimutkaistuminen ja työlästyminen.

Tavanomaisissa huonerakennuksissa, joissa kuormat ovat suhteellisen pieniä, muodostavat kantavat tai jäykistävät rakenteet yleensä ortogonaalisen runkosysteemin. Rakenteiden taloudellisuuden ja käyttövarmuuden kannalta on tällöin usein täysin riittävää tarkastella kulloinkin määrättyjen rasitusten suuntaisia tasorakenteita. Sen sijaan esim. siltoja ja yleensä tornimaisia rakenteita on välttämätöntä tutkia kokonaisuutena.

Seuraavassa tarkastellaan eräitä avaruuskehien mitoitusperiaatteita sekä niiden suunnittelussa huomioon otettavia seikkoja. Sen mukaan kuinka hallitseva on kehän kolmiulotteinen vaikutus, on tarkoituksenmukaista erottaa kolme kehätyyppiä (kuva 1).

I-asteen avaruuskehän (kuva 1a) kaikki nurkkapisteesen liittyvät sauvat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Sauvojen poikkileikkausten pääjäyhyysakselit ovat yhdensuuntaisia suorakulmaisten koordinaatti-akseliin kanssa.

Siirtymättömän systeemin laskemiseksi voidaan kuormitukset jakaa komponentteihin, jotka kuormittavat yksittäisiä tasokehiä. Yhdensuuntaiset kehät toimivat yhdessä vain poikittaisten vaakasauvojen vääntöjäykkyyden avulla. Kehästä toiseen väännön

kautta siirtyvät momentit voidaan kuitenkin ottaa huomioon jo tasoituksessa.

Mikäli vääntöjäykkyys unohdetaan, ovat vaaka- ja pystykehät toisistaan riippumattomia, sillä molemmat pääjäyhyysakselit ovat yhdensuuntaisia sauvojen akseliin kanssa. Momentit voidaan tasoittaa erikseen vaaka- ja pystytasolle ja superponoida sitten samansuuntaiset pidäkevoimat. I-asteen avaruuskehien käsittely on siten periaatteessa täysin analoginen tasokehien käsittelyn kanssa.

II-asteen avaruuskehässä (kuva 1b) kaikki vaakasauvat ovat samassa tasossa, jota vastaan kohtisuorassa ovat pystysauvat. Horisontaalisauvat liittyvät toisiinsa mielivaltaisessa kulmassa ja toinen pääjäyhyysakseli on palkkien muodostaman tason suuntainen. Vaakasauvaan kohdistuva horisontaalivoima aiheuttaa siirtymättömässä systeemissä vain palkeissa taivutusmomentteja. Pilareihin syntyy ainoastaan vääntömomentteja. Koska pilarit ovat kohtisuorassa palkkien vaakatasoa vastaan, ei niitä rasita taivutuslainkaan. Sitä vastoin pystysuorat voimat on myös siirtymättömässä systeemissä otettava vastaan eri tasoissa olevilla pilareilla. Tosi asia, että momentit kiertävät vain palkkien horisontaalisen pääjäyhyysakselin ympäri, yksinkertaistaa kuitenkin olennaisesti laskelmia.

III-asteen avaruuskehän (kuva 1c) voima-  
suureita ei voida enää arvioida tuntematta tarkemmin kehän käyttäytymistä monoliittisenä systeeminä. Kaikki sauvat saattavat liittyä toisiinsa mielivaltaisessa kulmassa. Palkkien ei myöskään enää tarvitse olla samassa tasossa. Määrätyin geometrisin edellytyksin, joista mainitaan tuonnempana tarkemmin, voidaan III-asteen avaruuskehän staattinen käsittely palauttaa alempiasteisen kehän tapaukseen.

## II- ja III-asteen avaruuskehän muuntaminen I-asteen kehäksi

Olkoon kahden sauvan välinen kulma  $\alpha$  (kuva 2). Kun niihin yhtyy kolmas sauva  $s$ ,

joka on muotoiltu niin, että palkin ja pilarin taivutusosat leikkaavat sauvan  $s$  poikkileikkaukselle piirretyn jäyhyysellipsin sen liittoakselien suunnissa, on myös ei-kohtisuorassa toisiaan vastaan olevien tasojen suhteen täytetty edellytykset sauvojen vapaalle muodonmuutokselle. Voidaan näet todistaa, että tällaiselle rombille poikkileikkaukselle piirretty ellipsi on aina yhdenmuotoinen pinnan jäyhyysellipsin kanssa. Tämän vuoksi rombisien poikkileikkauksen sivut ja jäyhyysellipsin liittoakselit ovat yhdensuuntaisia.

Seuraavassa tarkastellaan lähemmin kehän nurkkapisteen muodonmuutoksia.

Jos kuvan 3 mukaan horisontaalitasossa vaikuttaa momentti  $M$ , voi vaakasuoran ja vinossa olevan kehän yhteinen, poikkileikkaukseltaan rombinen sauva  $s$  siirtyä vain kohtisuoraan vinoa tasoa vastaan. Virtuaalisen työn periaatetta soveltamalla saadaan siirtymälle vinossa taivutuksessa lauseke

$$\delta = \frac{1}{E} \left( \int_0^s \frac{M_y \bar{M}_y}{J_1} ds + \int_0^s \frac{M_z \bar{M}_z}{J_2} ds \right) \quad (1)$$

jossa  $y$  ja  $z$  ovat pääjäyhyysakselien 1 ja 2 suunnat.

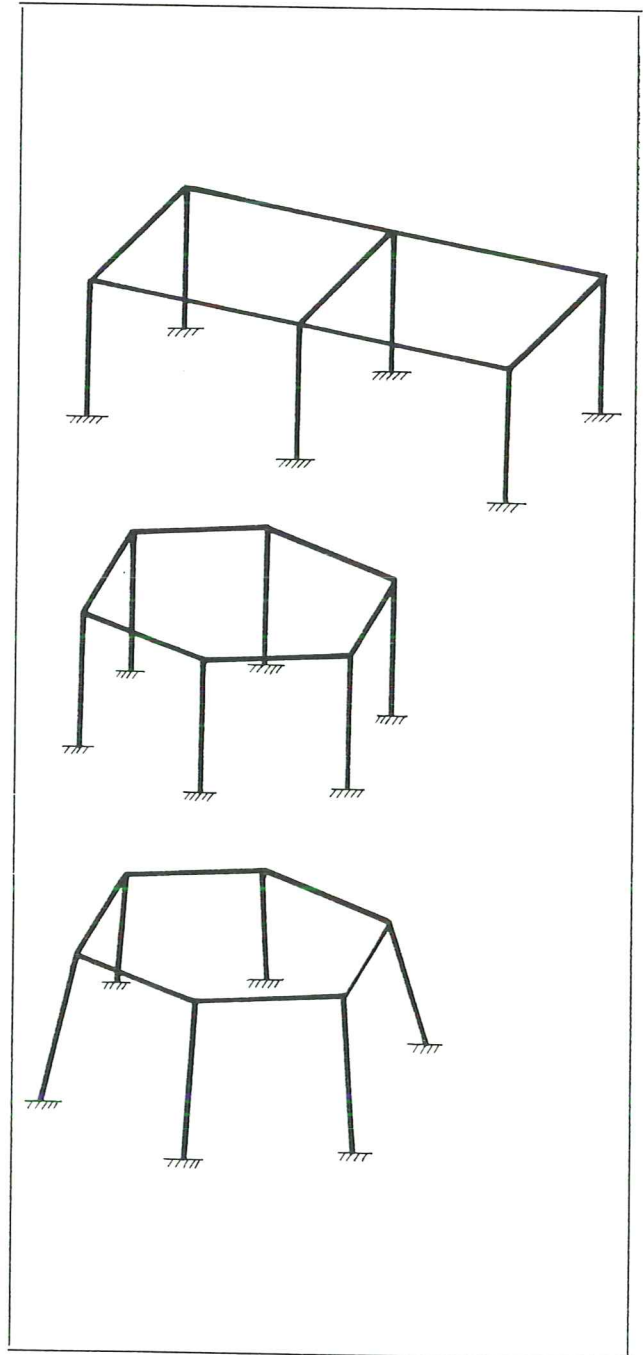
Kuvan 3 mukaan

$$\begin{aligned} M_y &= M \sin a/2 & M_z &= M \cos a/2 \\ \bar{M}_y &= \bar{M} \cos a/2 & \bar{M}_z &= \bar{M} \sin a/2 \end{aligned} \quad (2)$$

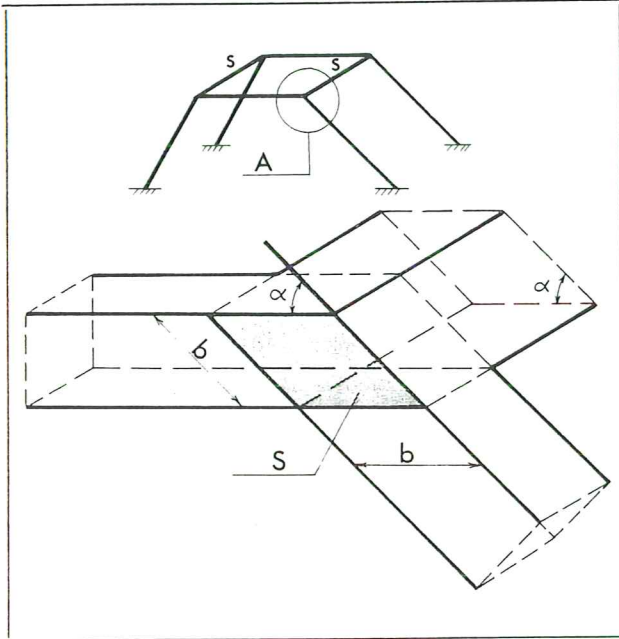
Ottamalla huomioon jäyhyysmomenttien arvot

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot b^4 \sin a/2 \cdot \cos^3 a/2 \quad (3)$$

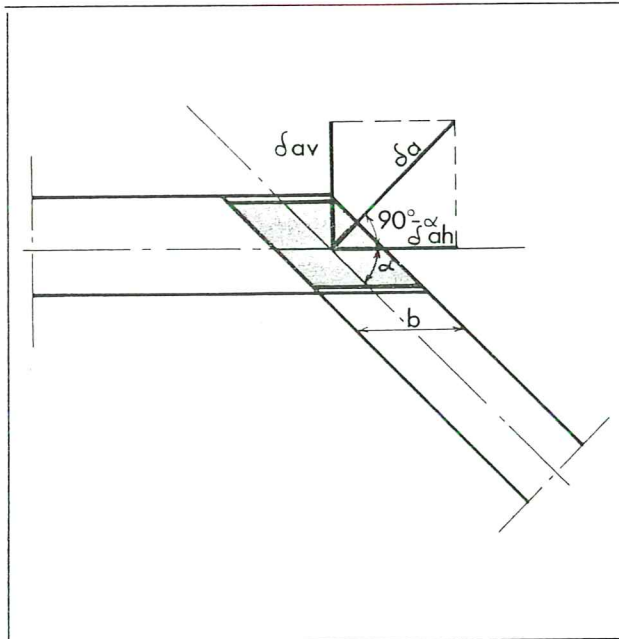
$$J_2 = \frac{1}{3} \cdot b^4 \sin^3 a/2 \cdot \cos a/2$$



Kuva 1. Avaruuskehien päätyypit  
The principal classes of space frames



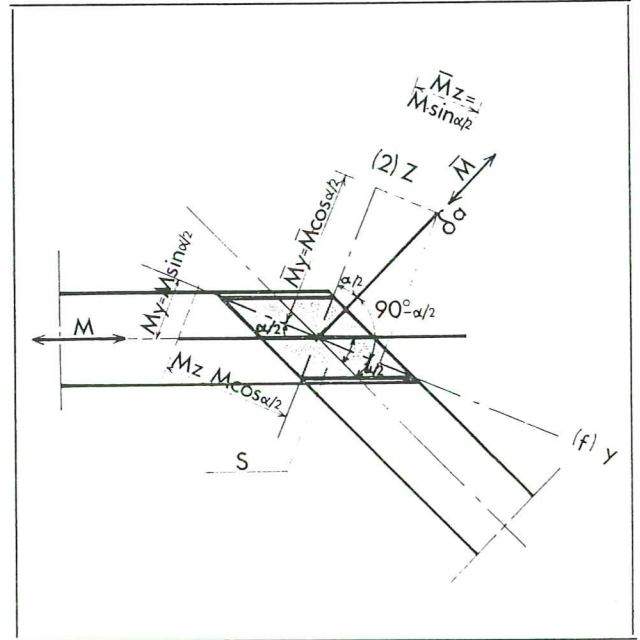
2



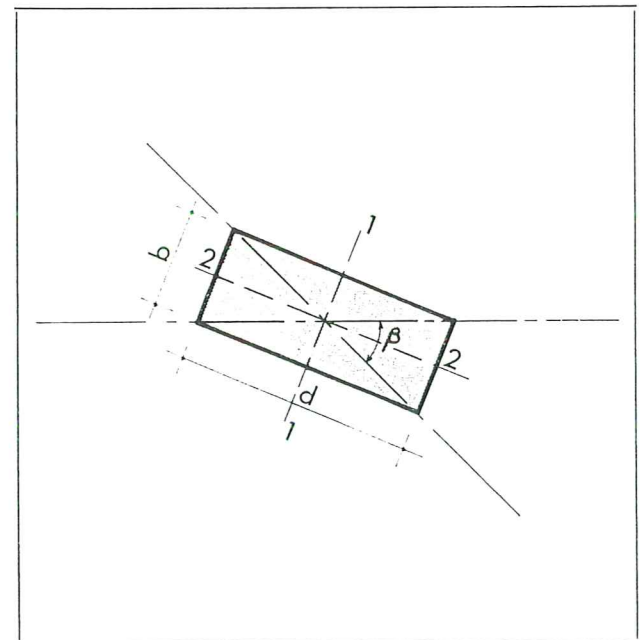
4

Kuva 2. Sauvan rombinen poikkileikkausmuoto  
The rhombic cross section of a bar

Kuva 3. Rombisen sauvan taivutustasot ( $M =$  kuormituksen aiheuttama momentti,  $\bar{M} =$  momentti voimasta  $F_a = 1$ )  
The deflection planes of a rhombic bar



3



5

Kuva 4. Kehän nurkkapisteen siirroskomponentit  
The components of displacement on a joint of the frame

Kuva 5. Kulmalleen käännetty poikkileikkausmuoto  
Rectangular cross section lying on its edge

saadaan sijoittamalla kaavaan (1)

$$\begin{aligned}
 E\delta &= \int_0^s M\bar{M} \frac{\cos a/2 \sin a/2}{1/3 \cdot b^4 \sin a/2 \cdot \cos^3 a/2} ds + \\
 &+ \int_0^s M\bar{M} \frac{\sin a/2 \cdot \cos a/2}{1/3 \cdot b^4 \sin^3 a/2 \cdot \cos a/2} ds \\
 &= \frac{3}{b^4} \left( \frac{1}{\cos^2 a/2} + \frac{1}{\sin^2 a/2} \right) \int_0^s M\bar{M} ds \\
 &= \frac{12}{b^4} \cdot \frac{1}{\sin^2 a} \int_0^s M\bar{M} ds
 \end{aligned} \tag{4}$$

Nurkkapisteen siirtymän vaaka- ja pystykomponentit ovat (kuva 4)

$$E \delta_h = \frac{12}{b^4} \cdot \frac{1}{\sin a} \int_0^s M\bar{M} ds \tag{5a}$$

$$E \delta_v = \frac{12}{b^4} \cdot \frac{\cos a}{\sin^2 a} \int_0^s M\bar{M} ds \tag{5b}$$

Välittömästi voidaan todeta, että edellä esitetyn mukaiset geometriset ehdot täyttävän avaruuskehän siirtymät lasketaan täsmälleen yhdenmuotoisesta matemaattisesta lausekkeesta kuin tasokehänkin. Tällöin jäyhyysmomentti on kerrottava lisäksi tietyllä kehän ja sen sauvojen poikkileikkausten muodosta riippuvalla kertoimella.

On olemassa myös toinen poikkileikkausmuoto, johon toisen tasokehän rasitukset ja muodonmuutokset eivät vaikuta. Tällainen profiili on kuvan 5 mukaisesti syrjälleen käännetty suorakulmio, jonka sivut suhtautuvat toisiinsa siten, että

$$h/b = \cot \frac{\beta}{2}. \tag{6}$$

Rombinen poikkileikkausmuoto soveltuu vaakasauvoille, kun taas pilareille on edullisempi suorakaideprofiili. Neljäkkään muotoinen poikkileikkaus on konstruktiivisesti usein parempi, koska käytännössä pilarit sijoitetaan yleensä niin loivasti, että se poikkeaa hyvin vähän suorakaiteesta.

Vesisäiliöiden ja jäähdystornien alusrakenteissa, joissa tavallisesti on useita pilareita kannattamassa rengaspalkkia, muodostuu lävistäjäkulma  $\beta$  hyvin pieneksi. Siitä aiheutuu, että poikkileikkaus venyy pitkänomaiseksi. Tällaisissa tapauksissa ei ole aina asiallista toteuttaa niitä edellytyksiä, jotka mahdollistavat staattisen käsittelyn yksinkertaistamisen, vaan kehä on laskettava II-asteen avaruuskehänä olettamalla pilarien poikkileikkaus neliönmuotoiseksi tai matalammaksi suorakaiteeksi. On tuskin tarpeellista huomauttaa, että niin rombinen kuin suorakaidepoikkileikkauskin on terästettävä siten, että jäyhyysmomenttien suhdetta ei muuteta.

### Esimerkki

Kuvassa 6 esitettyä avaruuskehää rasittaa seuraava kuormitus:

- vaakasuora voima  $W = 10,0$  mp
- pystysuora voima  $P = 10,0$  mp.
- Horisontaalikuormitus

Valitsemalla saumojen 4 ja 5 poikkileikkaus kuva 7 mukaan rombiseksi, voidaan tehtävä palauttaa I-asteen avaruuskehän käsittelyksi. Pilareille ja pystysuorassa olevien puolisuunnikaskehien palkeille saadaan

$$I_x = \frac{0,40 \cdot 0,50^3}{12} = 41,67 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{0,50 \cdot 0,40^3}{12} = 26,67 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Kaavasta 5a ilmentyy, että horisontaalitaso suuntaisia siirtymiä laskettaessa on sauvoille 4 ja 5 käytettävä arvoa





Siirtymä suunnassa  $F_4$

Sauvan 4 rombinen poikkileikkaus saa aikaa sen, että tämä sauva siirtyy vain horisontaalitasossa, kuten kuva 10 osoittaa. Siirtymän  $\Delta_4$  aiheuttamat momentit ja niiden tasointen kehäjalkojen ja -palkkien tasoissa on esitetty kuvassa 11.

Pidäkevoimat voidaan laskea seuraavasti:

$$P_4'^{(4)} = - \frac{2 \times 2.13}{5.59} = 0.76 \text{ Mp}$$

$$P_4''^{(4)} = - \frac{4 \times (-3.21)}{6.00} = 2.15 \text{ »}$$

$$P_4^{(4)} = P_4'^{(4)} + P_4''^{(4)} = 2.91 \text{ »}$$

$$P_3^{(4)} = - \frac{4 \times 3.21}{4.00} = 3.21 \text{ »}$$

$$P_2^{(4)} = - P_4''^{(4)} = -2.15 \text{ Mp}$$

Momentit siirtymistä  $\Delta_2$  ja  $\Delta_3$  saadaan symmetrisyyden perusteella momenteista  $M^{(4)}$  ja  $M^{(1)}$ .

Kertoimet, joiden avulla saadaan kehän todellista siirtymätilaa vastaavat momentit, ratkaistaan tasapainoyhtälöistä

(8)

$$c_1 P_1^{(1)} + c_2 P_1^{(2)} + c_3 P_1^{(3)} + c_4 P_1^{(4)} = P_1^{(0)}$$

$$c_1 P_2^{(1)} + c_2 P_2^{(2)} + c_3 P_2^{(3)} + c_4 P_2^{(4)} = P_2^{(0)}$$

$$c_1 P_3^{(1)} + c_2 P_3^{(2)} + c_3 P_3^{(3)} + c_4 P_3^{(4)} = P_3^{(0)}$$

$$c_1 P_4^{(1)} + c_2 P_4^{(2)} + c_3 P_4^{(3)} + c_4 P_4^{(4)} = P_4^{(0)}$$

Ulkoisilla vaakavoimilla on arvot

$$P_1^{(0)} = 10 \text{ Mp}$$

$$P_i^{(0)} = 0 \text{ » } (i = 2, 3, 4, \dots)$$

Vastaava yhtälöryhmä (8) ja sen ratkaisu Banachiewicz'in menetelmällä on esitetty seuraavassa.

+ 8,74	- 3,22	+ 4,83	- 3,22	10,0
+ 3,22	- 2,91	+ 3,22	- 2,15	0
- 4,83	+ 3,22	- 8,74	+ 3,22	0
- 3,22	+ 2,15	- 3,22	+ 2,91	0
<hr/>				
+ 8,74	+ 0,369	- 0,552	+ 0,369	- 1,14
+ 3,22	- 1,72	+ 0,838	- 0,558	- 2,14
- 4,83	+ 1,44	- 4,86	+ 0,132	+ 0,502
- 3,22	+ 0,960	- 0,638	+ 1,10	- 1,19
<hr/>				
- 2,21	- 1,19	+ 0,346	- 1,19	
(c <sub>1</sub> )	(c <sub>2</sub> )	(c <sub>3</sub> )	(c <sub>4</sub> )	

Lopulliset momentit:

Avaruuskehän todellista siirtymätilaa vastaavat momentit saadaan, kuten tasokehilläkin, kaavasta

$$M = M^{(0)} + c_i M^{(i)} \quad (9)$$

Siten saadaan

$$M_{b1} = -2.21 \times 5.33 = -11.8 \text{ Mpm}$$

$$M_{b4} = 1.19 \times 2.13 = 2.53 \text{ »}$$

$$M_{b2} = -2.21 \times 4.82 + 1.19 \times 3.22 + 0.35 \times 4.82 + 1.19 \times 3.22 = -1.38 \text{ »}$$

$$M_{f6} = -0.346 \times 5.33 = -1.84 \text{ »}$$

Lopulliset momenttipinnat voidaan piirtää nyt välittömästi. (Kuva 12)

b) Vertikaalikuormitus

Momentit esim. nurkan b pystysuorasta siirtymästä voidaan laskea normaaliin tapaan jakamalla siirtymä sauvojen 1, 2 ja 4 suunnille. Tässä tapauksessa saadaan kuitenkin virtuaalisen työn periaatteen avulla seuraava yksinkertaistus. Kuorman P kohdalla vaikuttava pidäkevoima  $P_1^{(1)}$  voidaan nimittäin korvata vertikaalivoimalla, joka tekee saman työn kuin  $P_1^{(1)}$ . Siten on voimassa yhtälöt

$$V_1 \cdot \Delta_2' = P_1^{(1)} \cdot \Delta_h \quad \Delta_2' = \frac{1}{2} \Delta_h$$

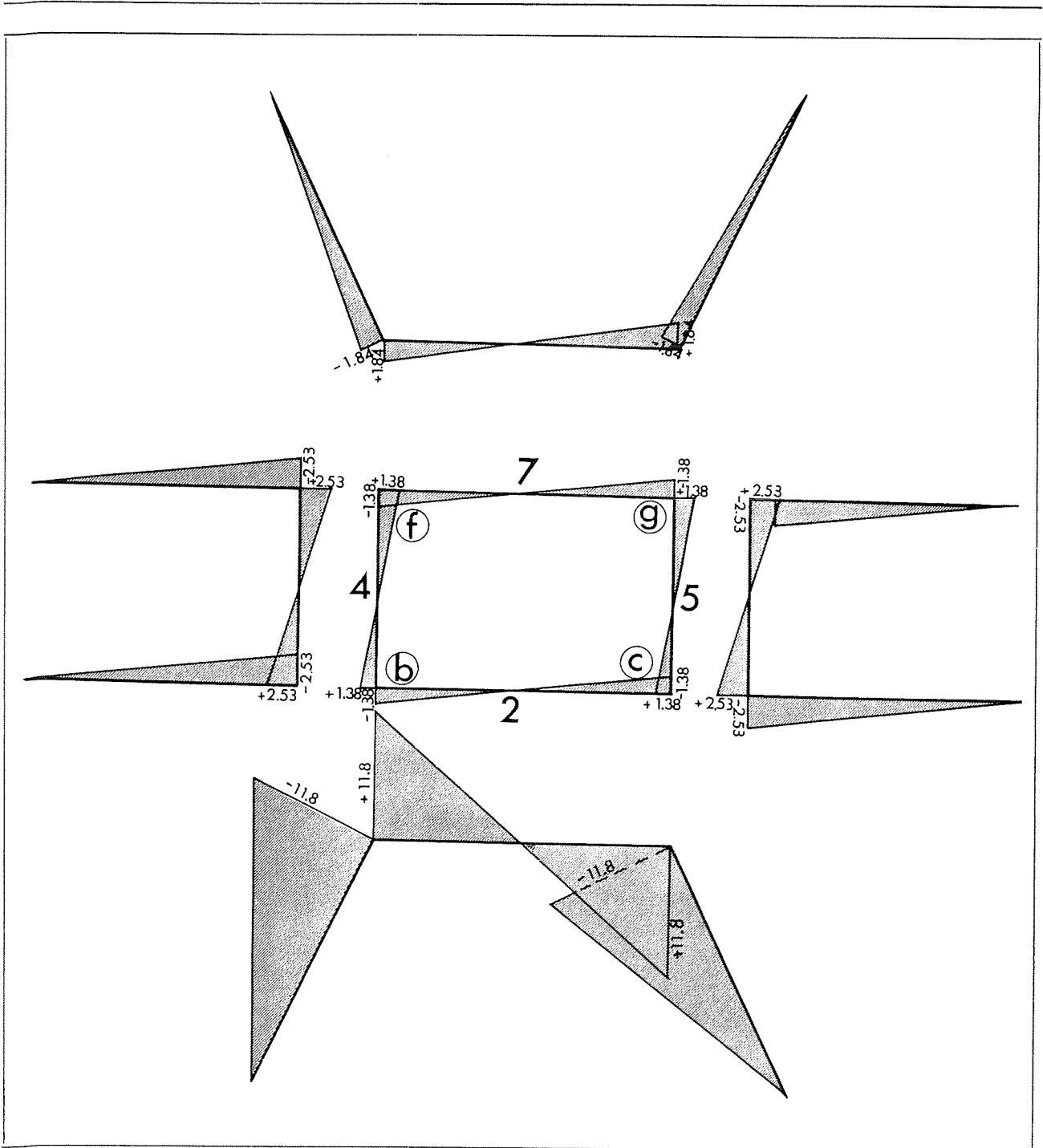
$$V_1 = 2 P_1^{(1)}$$

Koska  $\dot{P} = W$ , vertikaalivoima tekee puolta pienemmän työn kuin horisontaalivoima. Pystysuoran voiman aiheuttamat momentit ovat näin ollen 50 % samansuuruisen vaakavoiman synnyttämistä momenteista.

**Kirjallisuutta:**

1. Kupferschmid, V., Ebene und räumliche Rahmentragwerke
2. Ohlig, R., Räumliche Tragwerke des Stahlbetonbehälterbaus (Beton- und Stahlbetonbau, 1948)
3. Hirschfeld, K., Baustatik
4. Saliger, R., Praktische Statik
5. Guldán, R., Rahmentragwerke und Durchlaufträger
6. Timoshenko, S. P., Theory of Structures

Pekka Helander, dipl.ins., Ins.tsto Pekka Helander, Oulu



Kuva 12. Horisontaalikuorman aiheuttamat lopulliset momenttipinnat  
*The final bending moments arising from the horizontal load*