

# LAATTOJEN KOKEELLINEN TUTKIMUS MOIRÉ-MENETELMÄLLÄ

TEUVO KOLONEN, LASSE LAHTINEN JA  
MARTTI MIKKOLA

*Rakenteiden Mekaniikka* 1 (1968) ss. 12—17; Kustannus-  
osakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki.

**Yhteenveto:** Artikkelissa selostetaan laattojen pienoismallien tutkimista moiré-menetelmällä. Aluksi kuvataan yleisesti moiré-ilmiötä ja sen soveltamista muodonmuutosten kokeelliseen määrittämiseen. Ligtenbergin kehittämästä moiré-menetelmästä, jonka avulla voidaan määrittää laattojen ja arinoiden jännitystiloja, tehdään selkoa yksityiskohtaisesti. Tässä yhteydessä käsitellään myös moiré-valokuvien analysoimiseksi kehitettyä menetelmää, jossa käytetään hyväksi stereokartoituskojetta ja tietokonetta, pienoismallien valmistamista sekä tuloksien siirtämistä todelliseen rakenteeseen. Esimerkkinä tarkastellaan erään siltalaatan taivutusmomenttien määrittämistä selostetun menetelmän avulla.

Rakenteen jännitys- ja muodonmuutos-tilan määrittäminen voidaan suorittaa graafisesti, numeerisesti tai kokeellisesti. Viime vuosikymmeninä numeeriset ja kokeelliset menetelmät ovat lähes kokonaan syrjäyttäneet graafiset ratkaisutavat, jotka olivat vallitsevia vuosisadan vaihteen molemmiin puolin. Nykyään ovat tärkeimpiä numeeriset laskutavat, joiden kehittämislle nopeiden ja tehokkaiden tietokoneiden käyttöönotto on antanut voimakkaan sysäyksen. Kokeellisia tutkimuksia on käytetty muilla keinoilla saatujen tulosten tarkistamiseen ja muilla ratkaisutavoilla vaikeasti ja työläästi käsiteltävien rakenteiden analysointiin. Pienoismallin valmistaminen, sen muodonmuutosten mittaaminen ja saatujen tulosten soveltaminen rakenteen suunnitteluun on monissa tapauksissa yksinkertainen ja edullinen ratkaisukeino. Mallien valmistuksessa ilmenneet vaikeudet ja aikaavievät mittaussmenetelmät ovat aikaisemmin rajoittaneet pienoismallitutkimuksen käyttöä. Nykyään malleja voidaan kuitenkin valmistaa helposti ja pienin kustannuksin muovista. Samoin on kehitetty uusia menetelmiä mittausten nopeuttamiseksi.

Seuraavassa selostetaan pienoismallien, erityisesti laattojen tutkimista viime vuosina kehitetyllä moiré-menetelmällä, joka on halpa, yksinkertainen ja nopea sekä antaa käytännön tarpeita varten tyydyttävän tarkkoja tuloksia.

Teknillisen korkeakoulun rakennusinsinööriostasoon on hankittu laattojen tutkimiseen soveltuva moiré-laite (kuva 1). Sillä on suoritettu pääasiassa diplomitöinä muuta-

mia tutkimuksia, jotka osoittavat menetelmän erittäin käyttökelpoiseksi etenkin laatan muodon tai tukemisen ollessa tavallisuudesta poikkeava.

## Moiré-ilmiö

Moiré-menetelmä perustuu geometriseen interferenssi-ilmiöön, joka syntyy kun kaksi päällekkäin asetettua läpinäkyvää viivastoja tai pisteistöä siirtyy tai kiertyy toisiinsa nähden. Näin syntyvää käyrästöä nimitetään moiré-kuvioksi ja vaaleita ja tummia viivoja moiré-käyriksi (kuva 2) (moiré ransk. = läikekangas).

Lord Rayleigh havaitsi tämän ilmiön ja kuvasi sitä jo vuonna 1874 ja ennusti sillä olevan merkitystä kokeellisessa tutkimuksessa /1/. Hollantilainen Tollenaar lienee kuitenkin ollut ensimmäinen, joka otti käyttöön Rayleigh'n idean. Hän julkaisi vuonna 1945 tutkimuksen /2/, jossa hän kuvaa geometrisen interferenssi-ilmiön käyttöä venymien mittaukseen. Sen jälkeen on julkaistu runsaasti selostuksia moiré-menetelmän kehittämisestä ja sen soveltamisesta levyjen, tasokehien, laattojen, arinoiden ja kuorien muodonmuutostilojen määrittämiseen. Eri-tyisesti kannattaa mainita Theocarisin laatima yhteenveto /3/, joka sisältää laajan kirjallisuusluettelon.

## Moiré-menetelmä

Alkuperäisessä muodossaan moiré-menetelmää käytetään tasorakenteiden muodonmuutoksien tutkimiseen. Tällaisia rakenteita ovat esim. levyt, palkit ja kehät. Koejärjestelyn periaate selvinnee seuraavasta esimerkiksi, jossa tehdään selkoa vakiomomentin taivuttaman palkin kaltevuuskulman määrittämisestä /4/.

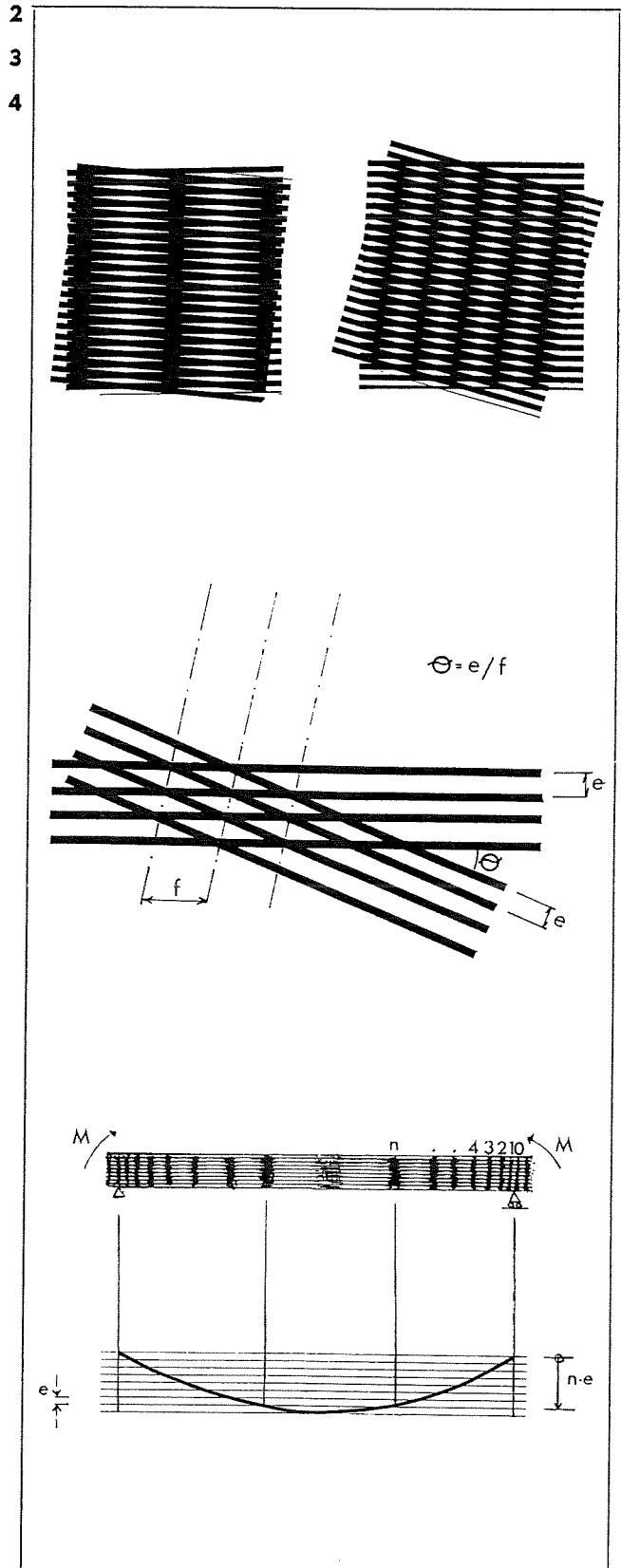
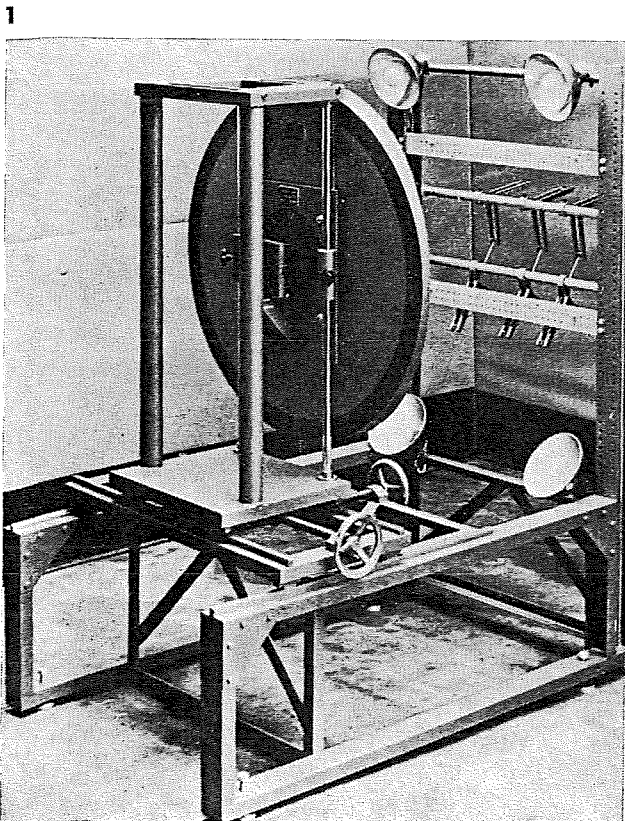
Läpinäkyvästä materiaalista valmistettuun palkkiin on kiinnitetty pituusakselin suuntainen viivasto. Palkki sijoitetaan kiinteän läpinäkyvän levyn eteen, johon on kiinnitetty samanlainen viivasto, siten että viivastot täysin yhtyvät ennen palkin kuormittamista. Kun palkki kuormitettaessa taipuu, siihen kiinnitetty viivasto kiertyy kiin-

Kuva 1. Moiré-laite laattojen tutkimista varten.  
Moiré apparatus for the investigation of  
small slab models.

Kuva 2. Moiré-ilmiö.  
Moiré effect.

Kuva 3. Viivastojen kiertyminen toisiinsa nähden.  
Relative rotation of two arrays of lines.

Kuva 4. Vapaasti tuetun palkin taipumaviiva.  
Deflection of a simply supported beam.



teän viivaston suhteen. Syntyneestä moiré-kuviosta (kuva 4) voidaan kiertymän, s.o. palkin kaltevuuden  $dv/dx$ , suuruus eri kohdissa määrittää. Kuvan 3 mukaan kiertymäkulmalle saadaan lauseke  $\vartheta = e/f$ , jossa  $e$  on viivaväli ja  $f$  on kahden moiré-käyrän välinen etäisyys. Kun kaltevuuden arvo eri pisteissä on määritetty, saadaan taivutusmomentti kaavasta  $M = EI d^2v/dx^2$  suorittamalla graafinen tai numeerinen derivointi.

Menetelmää voidaan käyttää myös kehien ja levyjen jännitystilän tutkimiseen. Sen soveltamista kehien ja kaarien vaikutusviivojen määrittämiseen on selostettu artikkelissa /4/.

Jos siirtymät tapahtuvat kohtisuoraan rakenteen tasoa vastaan, on menetelmää modifioitava moiré-ilmiön aikaansaamiseksi. Seuraavassa tarkastellaan yksityiskohtaisesti Ligtenbergin /5/ kehittämää moiré-menetelmää, joka soveltuu laattojen ja arinoiden tutkimiseen.

### Moiré-menetelmän soveltaminen laattojen tutkimiseen

Ohuen isotrooppisen laatan taipuma  $w$  saadaan ratkaisemalla osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$(1) \quad \partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 = p/D$$

asianmukaisin reunaehdoin. Laatan momentit lausutaan käyrityksien avulla seuraavasti

$$M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2)$$

$$(2) \quad M_y = -D(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \partial^2 w / \partial x \partial y$$

Yhtälöissä (1) ja (2)  $D$  tarkoittaa laatan jäykkyyttä  $D = Eh^3/12 (1 - \nu^2)$ ,  $\nu$  Poissonin lukua,  $h$  laatan paksuutta ja  $p$  kuormitusta.

Laatan momenttien laskemiseksi on tunnettava jäykkyys ja taipuman toiset derivaatat. Moiré-menetelmän avulla vaaditut suureet saadaan mittaustuloksista ilman monimutkaisia laskutoimituksia.

Kuvassa 5 koejärjestely on esitetty kaaviollisesti. Laatan pienoismalli, jonka pinta on hyvin heijastava, on asetettu etäisyydelle  $a$  viivoitetusta varjostimesta. Tarkastellaan mallilaatan pisteen  $P$  synnyttämää kuvaa  $S$  kameran himmeälasilla. Samaan pisteeseen heijastuu myös kuva varjostimen pisteestä  $Q$ . Kuormitettaessa laattaa sen pinta kallistuu kulman  $\varphi$  verran ja varjostimen piste  $R$  kuvautuu himmeälasille pisteeseen  $S$ . Kaltevuuskulma  $\varphi$  saadaan laskeksi etäisyyden  $QR$  avulla. Kun mallin pinnasta heijastuva viivoitettu varjostin kuvataan samalle negatiiville ennen laatan kuormitusta ja kuormituksen jälkeen, valokuvaan syntyy moiré-käyrästä, josta etäisyys  $QR$  voidaan määrittää. Kullakin moiré-käyrällä  $QR$ , ja siten myös  $\varphi$ :llä, on vakioarvo. Siirryttäessä käyrältä toiselle  $\Delta\varphi$  on vakio, jonka arvo riippuu varjostimen viivavälistä  $d$  ja mallin etäisyydestä  $a$  ( $\Delta\varphi = d/2a$ ).

Käytettäessä varjostimena tasopintaa saadaan

$$QR = 2a\varphi (1 + b^2/a^2).$$

Ligtenberg osoitti, että termi  $b^2/a^2$  tulee merkityksettömän pieneksi, jos tasovarjostimen asemasta käytetään sylinteripinnan muotoista varjostinta, jonka kaarevuussäde on  $r = 3.5 a$ . Virhe on pienempi kuin 0.3 % kun pisteen  $P$  etäisyys laitteen optisesta akselista on enintään  $0.4 a$ . Mitattava laatan kaltevuuskulma on siten

$$\varphi = QR/2a.$$

Edellä kuvatun moiré-ilmiön syntyntavasta johtuu, että ainoastaan kaltevuuserot kuormittamattoman ja kuormitetun tilan välillä tulevat havaituiksi. Tämän vuoksi mallilaatan ei tarvitse alkuaan olla täysin tasainen. Samoin on mahdollista käyttää pientä alkukuormitusta, niin kuin eräissä tapauksissa on tarpeen.

Moiré-käyristä saadaan kaltevuus ainoastaan varjostimen viivoitusta vastaan kohtisuorassa suunnassa. Tästä syystä joudutaan kustakin kuormitusasennosta ottamaan kaksi valokuvaa, joissa varjostimen viivoitus poikkeaa toisistaan  $90^\circ$ . Varjostin on laakeroitu laitteeseen siten, että se on vapaasti pyöritettävissä optisen akselin ympäri

haluttuun asentoon. Edellä mainitut kaksi kuvaa kuormitusasentoa kohti määrittävät täysin kaltevuuksien jakautumisen ja tekevät mahdolliseksi momenttien laskemisen koko laatan alueella.

Momenttien  $M_x$ ,  $M_y$  ja  $M_{xy}$  laskemiseksi on tunnettava taipumien toiset derivaatat. Sen takia on suoritettava valokuvista saatujen kaltevuuksien derivointi, joka voidaan tehdä graafisesti tai numeerisesti. Edellinen tapa perustuu kaltevuutta kuvaavan käyrän piirtämiseen ja sen derivaatan mittaamiseen. Graafinen menetelmä tulee suuritöiseksi, jos tutkittavia pisteitä on paljon kuten esim. vaikutuskenttiä määritettäessä. Silloin on edullisempaa käyttää numeerista menetelyä, jossa tietokoneen hyväksikäyttö on mahdollista.

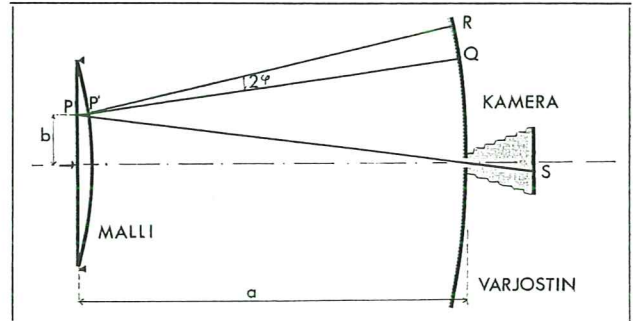
Numeerista menetelmää käytettäessä tulkitaan moiré-käyrät kaltevuuskulmien tasa-arvokäyriksi ja numeroidaan ne. Kaltevuuskulmien kasvusuunta on helppo saada selvälle tarkastelemalla mallin kiinnitysehtoja ja kuormitusta. Käyrityksien määrittämiseksi pisteessä  $(x, y)$  piirretään sen kautta koordinaattiakselien suuntaiset suorat, ja mitataan suorien ja tasa-arvokäyrien leikkauspisteiden koordinaatit  $x_i$  ja  $y_i$ . Tämä työvaihe kannattaa suorittaa autografiilla, jolloin reikänauhalle saadaan automaattisesti kaikki derivaattojen laskemisessa tarvittavat tiedot. Näin säästytään kirjoitus- ja laskutyöltä ja vältetään lävistysvirheet.

Jos varjostimen viivoitus on valokuvaa otettaessa ollut  $x$ -akselin suuntainen, saadaan vastaavasta moiré-kuviosta  $y$ -suuntaisella derivoinnilla  $\partial^2 w / \partial y^2$  ja  $x$ -suuntaisella  $\partial^2 w / \partial y \partial x$ . Varjostimen viivoituksen ollessa  $y$ -suuntaan saadaan vastaavasti derivaatat  $\partial^2 w / \partial x^2$  ja  $\partial^2 w / \partial x \partial y$ .

Moiré-menetelmän yhteydessä ei ole tarpeellista käyttää korkeampaa kuin kolmannen asteen approksimaatiofunktioita. Käytämällä Lagrangen interpolatiopolynomia

$$L_3(x; x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{j=1}^4 \frac{f(x_j) \pi_4(x)}{\pi_4(x_j) (x-x_j)}$$

saadaan taipuman toisille derivaatoille lausekkeet



Kuva 5. Koejärjestely.

*The principle of the method of Ligtenberg.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d}{2a} & \left[ f_1 \frac{(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_2)(x-x_4) + (x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \right. \\ & + f_2 \frac{(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \\ & + f_3 \frac{(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \\ & \left. + f_4 \frac{(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{d}{2a} [x:n \text{ tilalle tulee } y],$$

$f_j$  = tasa-arvokäyrän numero pisteessä  $x_j$  tai  $y_j$ .

Derivaatat  $\partial^2 w / \partial y^2$  ja  $\partial^2 w / \partial y \partial x$  lasketaan vastaavalla tavalla. Sekaderivaatan  $\partial^2 w / \partial x \partial y$  arvoksi valitaan kummastakin kuvasta laskettujen derivaattojen keskiarvo.

Lopulliset momentit saadaan sijoittamalla toisten derivaattojen arvot kaavoihin (2).

Moiré-käyrien yleisten ominaisuuksien tunteminen helpottaa oleellisesti valokuvien tulkintaa. Tottunut tutkija pystyy jo suoraan valokuvista päättämään momenttien jakautumisen sekä taivutus- ja vääntömomenttien keskinäisen suhteen, vieläpä valitsemaan tarkoituksenmukaisen raudoitustavan mikäli teräsbetonilaatan suunnittelu on kysymyksessä. Moiré-käyrien välin kasvussa taivutus- ja vääntömomentit yleensä pienenevät. Puhdas taivutus tai vääntö on havaittavissa suoraan kuvista, sillä käyrät ovat silloin kohtisuorassa laatan akseleita

vastaan. Moiré-käyrien suunnasta laatan akseleihin nähden saadaan siis käsitys taivutus- ja vääntömomenttien keskinäisestä suhteesta. Leikkausvoimien ja momenttien aiheuttamia muodonmuutoksia ei voida erottaa toisistaan moiré-käyrien perusteella.

Laatan pienoismallin on täytettävä eräitä vaatimuksia. Sen pinnan tulee olla hyvin heijastava, ja sen materiaalin pitää olla kimmoista esiintyvien muodonmuutosten rajoissa. Lisäksi on eduksi, jos se on hyvin työstettävissä ja jos liitosten teko on helppoa. Materiaaleina on hyvällä menestyksellä käytetty messinki- ja muovilevyjä. Perspex-levy on hintansa ja työstettävyytensä puolesta osoittautunut edulliseksi. Hopeomalla tai aluminoimalla siihen saadaan erinomaisesti heijastava peilipinta. Halvempi ratkaisu on musta perspex, joka heijastaa valoa tyydyttävästi ilman erikoiskäsittelyä. Tosin se vaatii noin 20-kertaisen valotusajan hopeoituun levyyn verrattuna, mikä ei kuitenkaan ole vielä haitallisen pitkä.

Mallista saatujen tulosten siirtäminen koskemaan todellista laattaa tapahtuu mitta-kaavatekijöiden perusteella. Jonkin verran vaikeuksia saattaa syntyä siitä seikasta, että mallin Poissonin luku  $\nu$  ei ole sama kuin todellisen rakenteen, esimerkiksi perspex-muovilla  $\nu \approx 1/3$  ja teräsbetonilla  $\nu \approx 1/6$ . Tapauksissa, joissa reunaehdot eivät sisällä  $\nu$ :tä, Poissonin lukujen eron vaikutus voidaan ottaa täsmällisesti huomioon. Jos  $\nu$  sisältyy reunaehtoihin, kuten esim. vapaan reunan tapauksessa, pientä virhettä aiheutuu. Todellisten momenttien voidaan otaksua olevan niiden arvojen välillä, jotka saadaan käyttämällä mallin ja todellisen rakenteen Poissonin lukuja, esim.  $\nu = 1/3$  ja  $\nu = 1/6$ .

Moiré-menetelmällä saatujen tulosten tarkkuus on suurimmille momenteille noin  $\pm 5\%$ , mikä riittänee useimmissa suunnittelutehtävissä.

### Sovellutus

Menetelmän havainnollistamiseksi tarkastellaan erästä laattatutkimusta.

Tutkittava rakenne oli jatkuva teräsbetoninen palkkisilta. Pääkannattajina oli kaksi

150 cm korkeaa ja 40 cm leveää palkkia, joiden keskinäinen etäisyys oli 7.0 m ja jänneväli 10.5 m. Laatta, jonka paksuus oli 25 cm, oli tukien kohdalla kiinnitetty jäykästi poikkikannattajiin.

Malli tehtiin pituusmittakaavaan 1 : 50 ja kuormitus suoritettiin samassa suhteessa pienennetyllä telikuormalla mitoituksen kannalta tarkoituksenmukaisissa pisteissä. Kuorman ollessa laatan keskellä saatiin kuvissa 6 ja 7 esiintyvät moiré-kuviot. Moiré-käyrästöjen perusteella saadut kaltevuuk-sien kuvaajat laatan akseleilla ovat nähtävissä kuvissa 8 ja 9. Samoissa kuvissa on esitetty myös taivutusmomenttien kuvaajat laatan akseleilla.

Vertailun vuoksi laskettiin taivutusmomenttien arvot laatan keskipisteessä Bittnerin /14/ mukaan ottaen huomioon palkkien vääntöjäykkyyden:

	Pienoismalli	Bittner
$M_x$	8.7 Mpm	8.9 Mpm
$M_y$	6.4 »	6.6 »

Pienoismallista saadut samoin kuin lasketut tulokset on redusoitu koskemaan Poissonin luvun arvoa nolla. Erot ovat siis noin 3 %.

### Kirjallisuutta:

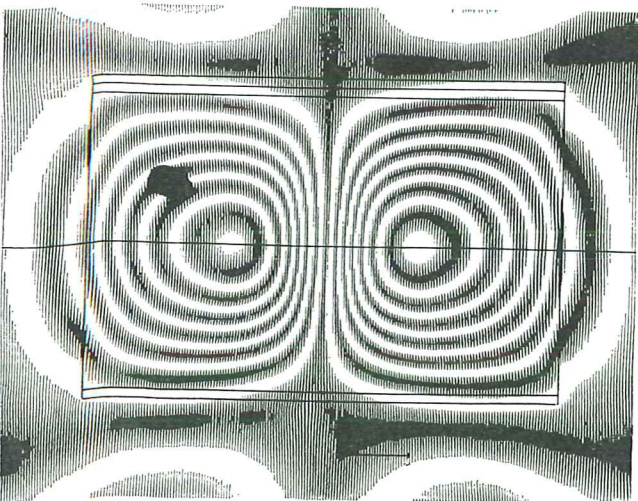
1. Lord Rayleigh, On the manufacture and theory of diffraction gratings, Scientific Papers, Cambridge Univ. Press, 1874.
2. Tollenaar, D., Moiré-Interferentieverschynselen bij rasterdruk. Inst. voor Grafische Techniek, 1945.
3. Theocaris, P. S., Moiré fringes — a powerful measuring device. Appl. Mech. Reviews, 15 (1962) 5.
4. Anderlind, G., Blomqvist, L. ja Samuelsson, A., Moirémetoden — influenslinjer ur modellförsök. Väg- och vattenbyggaren 13 (1967) 4, 120—124.
5. Ligtenberg, F. K., The Moiré Method — A New Experimental Method for the Determination of Moments in Small Slab Models. Proc. Society of Experimental Stress Analysis, 12 (1955) 2, 83—98.
6. Kubitz, W., Spannungsuntersuchungen an Trägerrostmodellen nach dem Moiré-Verfahren. Der Stahlbau 36 (1967) 4, 106—113.
7. Coull, A. ja Lickiss, K. G., Analysis of continuous skew bridge slabs by the Moiré method. Civil Engineering and Public Works Review, London. 60 (1965), February, 215—217.

8. Zienkiewicz, O. C. ja Holister, G. S., Stress Analysis. J. Wiley & Sons Ltd, 1965.
9. Szmodits, K., Zur Theorie des Moiré Verfahrens Proc. Symp. Shell Research Amsterdam 1961, 208–216.
10. Jong de Josselin, G., Refraction Moiré Analysis of Curved Surfaces, Proc. Symp. Shell Research, Amsterdam 1961, 302–308.
11. Kolunen, T., Vinon siltalaatan tutkimus moirémenetelmällä. TKK:n diplomityö, 1967.
12. Koski, Pirkko, Laatan ulokkeiden vaikutus keskitetyksi kuomitetun laattakaistaleen jännitystilaan. Kokeellinen tutkimus moiré-laitteella. TKK:n diplomityö, 1967.
13. Lahtinen, L., Vuorotteleville sienipilareille tuettu jatkuva teräsbetoninen siltalaatta. TKK:n diplomityö, 1967.
14. Bittner, E., Platten und Behälter. Springer-Verlag. Wien — New York, 1965.

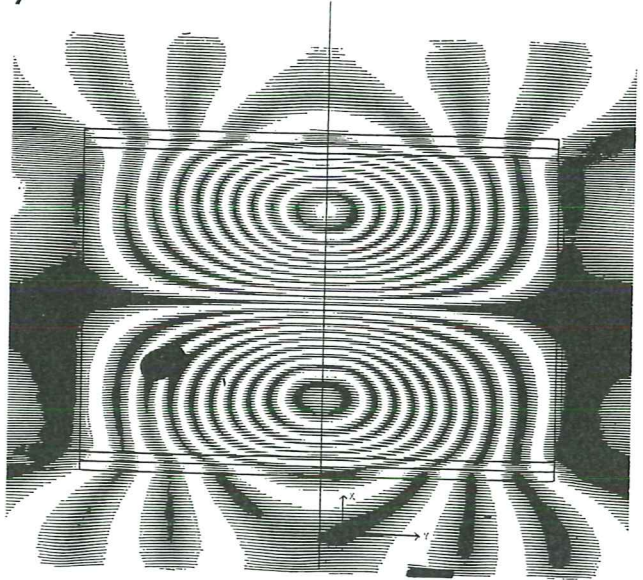
Teuvo Kolunen, dipl.ins., Oy Kunnallistekniikka Ab, Helsinki  
 Lasse Lahtinen, dipl.ins., Ins.tsto Kruus & Myllymäki, Helsinki  
 Martti Mikkola, tekn.tri, Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi

- Kuva 6. Moiré-käyrästä; varjostin  $x$ -suunnassa. Moiré fringe pattern; ruling of the screen in  $x$ -direction.
- Kuva 7. Moiré-käyrästä; varjostin  $y$ -suunnassa. Moiré fringe pattern; ruling of the screen in  $y$ -direction.
- Kuva 8.  $\partial w / \partial y$ - ja  $M_y$ -käyrät laatan pituusakselilla. Graphs of  $\partial w / \partial y$  and of  $M_y$  along the longitudinal axis of the slab.
- Kuva 9.  $\partial w / \partial x$ - ja  $M_x$ -käyrät laatan poikittaisakselilla. Graphs of  $\partial w / \partial x$  and of  $M_x$  along the transverse axis of the slab.

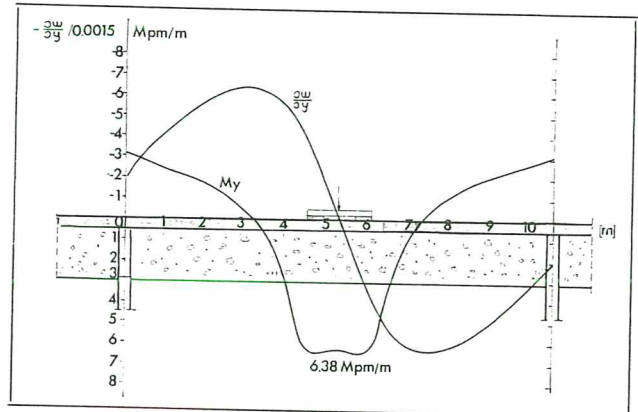
6



7



8



9

