

ALAREUNASTAAN KUORMITETUN SEINÄLEVYN JÄNNITYSTILAN TARKASTELU

BJÖRN GRUNDFELT

Rakenteiden Mekaniikka 1 (1968) ss. 4–11; Kustannus-
osakeyhtiö Rakennustekniikka, Helsinki

Yhteenveto: Seinälevyn jännitystilaa teoreettinen tarkastelu liittyy osana Valtion teknillisen tutkimuslaitoksen tekemään kontainerin (kuljetussäiliön) kestävyystutkimukseen.

Seinälevyn jännitystila on ratkaistu Airy'n jännitysfunktion avulla. Jännitysfunktio muodostuu hyperbolisten ja trigonometristen funktioiden tulosta ja summista. Levyyn vaikuttava kuormitus on kehitetty Fourier'n sarjoiksi. Jännitysfunktiosta esiintyvät parametrit on määritetty pienimmän neliosumman menetelmällä siten, että levyn reunaehdot täyttyvät mahdollisimman hyvin. Tämän jälkeen on laskettu jännityskomponentit jännitysfunktion toisten derivaattojen avulla.

Artikkeliin liittyy laskuesimerkki, josta tuloksena saadut jännityskomponenttien arvot on esitetty kuvissa.

1. Yleistä

Seinälevyn jännitystilaa teoreettinen tarkastelu tuli esille, kun Valtion teknillisessä tutkimuslaitoksessa tutkittiin kontainerin kestävyyttä. Kontaineri (kuljetussäiliö) on laatikontapainen rakenne, jossa voidaan varastoida ja kuljettaa tavaroita yhdellä tai useammalla kulkuneuvolla ilman kuorman uudelleen lastaamista. Kontaineri on varustettu laittein, jotka mahdollistavat sen helpon käsittelyn, varsinkin siirrettäessä sitä kulkuneuvosta toiseen. Kontainerin toisessa päädyssä on ovi, josta kuorma voidaan helposti lastata ja purkaa. Rakenteen jokaisen nurkkapisteen alla on terästuki.

2. Lähtöotaksumat

Kontainerin seinälevy on suhteellisen ohut ja sitä pidetään tarkastelussa isotrooppisena, Hooken lakia noudattavana levynä. Kuormituksen katsotaan vaikuttavan ainoastaan seinälevyn tasossa. Nurkissa syntyvän levyä taivuttavan kiinnitysmomentin vaikutus jätetään levyn pienen sivujäykkyyden vuoksi merkityksettömänä huomioonottamatta. Nurkkia pidetään tällöin siten niveloituna, etteivät nivelissä yhtyvät levyt liu'uta toisiinsa nähden.

Valitaan tutkittavan seinän pituudeksi $2a$ ja korkeudeksi $2b$. Tukipinnan pituutta merkitään c :llä. Katon ja lattian leveys $= 2d = 2b$, seinän ja katon paksuus h sekä lattian paksuus $2h$.

Lattialle tulevan kuormituksen katsotaan jakautuvan seinälevyille kuvan 1 mukaisesti. Otaksuma pitää likimain paikkansa. Seinälevyn kuormituksen jakautuminen voitaisiin selvittää tarkemmin käsittelemällä lattialaattaa ottaen huomioon seinälevyistä johtuvat reunaehdot. Tehtävän ratkaiseminen on suoritettu mielivaltaiselle kuormitukselle, mutta laskuesimerkki on laskettu juuri em. kuormitusotaksumalle (kuva 1). Seinälevyn oma paino jätetään pienenä huomioon ottamatta.

3. Airy'n jännitysfunktio

Seinälevyn voidaan katsoa olevan tasojännitystilassa, koska kaikkien voimien oletetaan vaikuttavan levyn tasossa. Koska seinän tasoa vastaan kohtisuoraa kuormitusta ei ole, jännityskomponentit $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Koska levyn paksuus h on pieni toisiin dimensioihin verrattuna, voidaan lisäksi olettaa, että $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ seinälevyn sisällä.

Kun kysymyksessä on tasojännitystila, voidaan kappaleen jännityksien määräämistä olennaisesti yksinkertaistaa ottamalla käyttöön nk. jännitysfunktio $F(x, y)$, joka toteuttaa neljännen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$(1) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

Tätä differentiaaliyhtälöä kutsutaan levy-yhtälöksi.

Jos tunnetaan sellainen (1):n ratkaisu, joka täyttää reunaehdot, saadaan jännityskomponentit yhtälöistä

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Yhtälön (1) tarkka ratkaiseminen tuottaa tässä tapauksessa suuria vaikeuksia. Seuraavassa pyritään riittävän tarkkaan likiratkaisuun muodostamalla sarjakehitelmä

$$(3) \quad F = \sum_n a_n \varphi_n(x, y) \quad (n = 1, 2, \dots, r),$$

missä funktiot $\varphi_n(x, y)$ ovat sopivia koordinaattifunktioita, jotka toteuttavat probleeman reunaehdot mahdollisimman hyvin. Parametrit a_n määrätään sitten niin, että reunaehdot saadaan toteutumaan niin tarkasti kuin mahdollista. Näin on asianlaita, jos virheen neliösumma saavuttaa minimin. Ratkaisu tullaan suorittamaan käyttäen koordinaattifunktiona hyperbolisten ja trigonometrinen funktioiden tuloja.

4. Kuormituksen kehittäminen Fourier-sarjaksi

Jos seinälevyn jännitystila ratkaistaan osittaisdifferentiaaliyhtälöistä, on edullista kehittää kuormitus Fourier-sarjoiksi. Ottamalla mukaan riittävä määrä termejä saadaan jatkuva funktio, joka vastaa kuormitusotaksun melko hyvin. Kuormitus voidaan näin ollen kirjoittaa yleisesti

$$(4) \quad p(x) = \sum_n a_n \cdot \varphi_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Jos kuvassa (1) esitetty kuormitus kehitetään Fourier-sarjaksi jakson pituuden L ollessa $2a$, saadaan

$$(4a) \quad p(x) = \frac{2pa}{\pi c} \cdot \sum_n \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi c}{a} \cdot \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Jos jakson pituudeksi L otetaan levyn kaksinkertainen pituus $4a$, saadaan kuormitusfunktioiksi

$$(4b) \quad p(x) = \frac{4pa}{\pi c} \cdot \sum_n \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi c}{2a} - \frac{a-c}{a} \right) \cdot \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

5. Seinälevyn reunaehdot

Seinälevyä käsitellään olettaen sen liittyvän kattolevyyn ja lattialaataan nivelellisenä, kuten edellä on selostettu. Päätyreunat otaksutaan vapaiksi. Lattialaattaa pidetään laskelmissa kuormittamattomana levyinä; kuorma vaikuttaa ainoastaan seinälevyn tasossa.

Edellisten otaksujen mukaan seinälevylle saadaan reunaehdot (5). Koska päätyreunoissa ei ole kuormitusta, häviävät niissä normaalijännitys σ_x ja leikkausjännitys τ_{xy} (kuva 1). Siis

$$(5a) \quad (\sigma_x)_{x=\pm a} = 0$$

$$(5b) \quad (\tau_{xy})_{x=\pm a} = 0$$

Yläreunoilla saadaan seuraavat reunaehdot.

$$(5c) \quad (\sigma_y)_{y=b} = 0$$

$$(5d) \quad (\tau_{xy})_{y=b} = \sum_n \phi_n \sin a_n x \\ a_n = \frac{n\pi}{2a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (L = 4a)$$

ϕ_n on toistaiseksi tuntematon suure, joka määräytyy seinälevyn ja kattolevyn yhteistoiminnan perusteella. Alareunalla saadaan reunaehdot seuraavasti. Koska alareunalla vaikuttaa ulkoinen kuormitus $p(x)$ ja reunan paksuus on h , on voimassa yhtälö

$$(5e) \quad (\delta_y)_{y=b} = 1/h \cdot p(x)$$

Leikkausjännitys lausutaan tuntemattoman suureen ψ_n avulla, joka saadaan seinä- ja lattialevyjen yhteistoiminnan perusteella yhtälöstä

$$(5f) \quad (\tau_{xy})_{y=\pm b} = \sum_n \psi_n \sin a_n x, \quad a_n = \frac{n\pi}{2a} \quad (n=1,3,5, \dots)$$

Laskelmat ovat kuitenkin hyvin monimutkaisia yleisessä tapauksessa ja johtavat suuriin ja hankaliin yhtälöryhmiin. Siksi on edullista jakaa kuormitus symmetriseen ja antimetriseseen osaan ja ratkaista nämä tapaukset erikseen. Lopullinen ratkaisu saadaan superponoimalla em. tapaukset (kuva 2c).

Symmetrisessä tapauksessa (kuva 2a) kuormituksena on sekä ylä- että alareunalla normaalivoima $\frac{1}{2} p(x)$, sekä tämän lisäksi yläreunalla leikkausjännitys $\tau_{xy} = \sum_n \frac{\phi_n - \psi_n}{2} \sin a_n x$ ja alareunalla leikkaus-

jännitys $\tau_{xy} = - \sum_n \frac{\phi_n + \psi_n}{2} \sin a_n x$. Antimetrisessä kuormitustapauksessa (kuva 2b) on kuormituksena normaalivoima $- \frac{1}{2} p(x)$ yläreunalla ja alareunalla $+ \frac{1}{2} p(x)$, sekä tämän lisäksi molemmilla leikkausjännitys $\tau_{xy} = - \sum_n \frac{\phi_n + \psi_n}{2} \sin a_n x$.

Reunaehdot ovat symmetrisessä tapauksessa seuraavat.

$$(6a) \quad (\sigma_x)_{x=\pm a} = 0$$

$$(6b) \quad (\tau_{xy})_{x=\pm a} = 0$$

$$(6c) \quad (\sigma_y)_{y=\pm b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot p(x)$$

$$(6d) \quad (\tau_{xy})_{y=\pm b} = \pm \sum_n \frac{\phi_n - \psi_n}{2} \sin a_n x \quad (n=1,3,5, \dots)$$

Antimetrisessä tapauksessa saadaan reunaehdoiksi

$$(7a) \quad (\sigma_x)_{x=\pm a} = 0$$

$$(7b) \quad (\tau_{xz})_{x=\pm a} = 0$$

$$(7c) \quad (\sigma_y)_{y=\pm b} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot p(x)$$

$$(7d) \quad (\tau_{xy})_{y=\pm b} = \sum_n \frac{\phi_n + \psi_n}{2} \sin a_n x \quad (n=1,3,5, \dots)$$

6. Airy'n jännitysfunktio seinälevylle

Ratkaisun löytämiseksi muodostetaan jännitysfunktio

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} F_s = & \sum_n \frac{1}{a_n^2} (A_n \cosh a_n y + a_n y B_n \sinh a_n y + \\ & + C_n \sinh a_n y + a_n y D_n \cosh a_n y) \cos a_n x + \\ & + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2} (\bar{A}_m \cosh \beta_m x + \beta_m x \bar{B}_m \sinh \beta_m x) \sin \beta_m y + \\ & + \frac{1}{\beta_m^2} (\bar{C}_m \cos \beta_m x + \beta_m x \bar{D}_m \sin \beta_m x) \cos \beta_m y \end{aligned} \right.$$

Jaksoksi on otettu x -suunnassa $L_x = 4a$ ja y -suunnassa $L_y = 4b$ tai $\bar{L}_y = 2b$. Lisäksi on käytetty merkintöjä

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} a_n = & \frac{n\pi}{2a} & ; & n=1,3,5 \dots \\ \beta_m = & \frac{m\pi}{2b} & ; & m=1,3,5 \dots \\ \bar{\beta}_m = & \frac{m\pi}{b} & ; & m=1,2,3 \dots \end{aligned} \right.$$

A_n, B_n, C_n ja D_n ovat n :n arvosta riippuvia vakioita ja $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m$ ja \bar{D}_m riippuvat m :n arvosta. Jännitysfunktio F_s on muodostettu niin, että se on symmetrinen y -akselin suhteen, mutta täysin mielivaltainen x -akselin suhteen.

Jos kuormitus on symmetrinen myös x -akselin suhteen, jännitysfunktio voidaan kirjoittaa muotoon

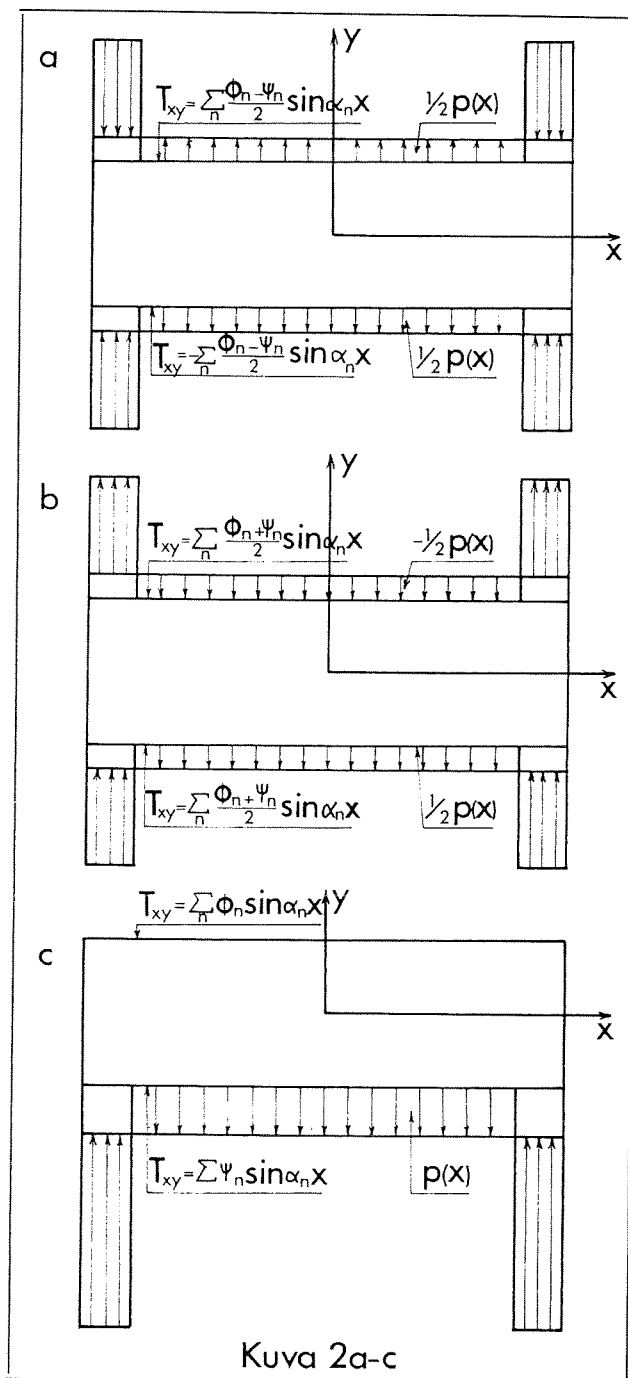
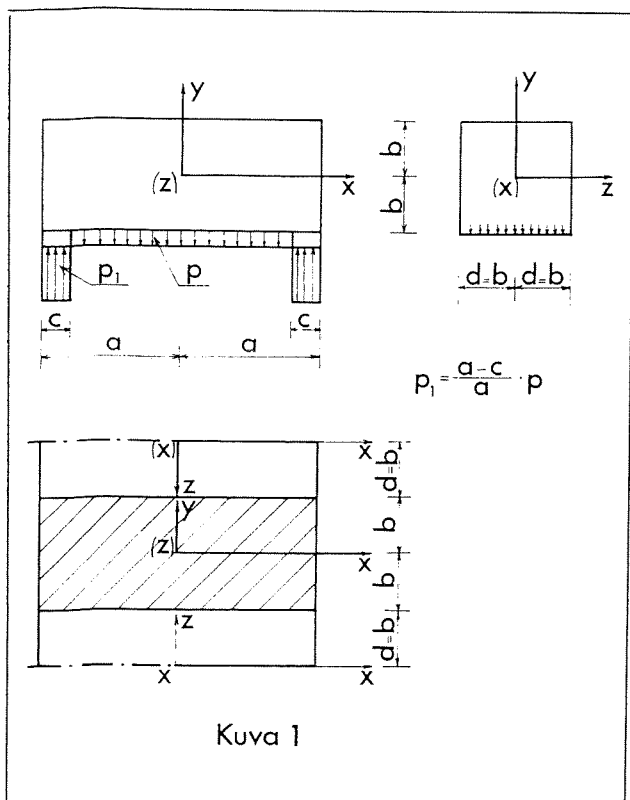
$$F_{s,s} = \sum_n \frac{1}{a_n^2} (A_n \cosh a_n y + a_n y B_n \sinh a_n y)$$

$$(10) \quad \cos a_n x + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2} (\bar{C}_m \cosh \beta_m x + \beta_m x \bar{D}_m \sinh \beta_m x) \cos \beta_m y$$

Jos kuormitus on antimetrisen x -akselin suhteen, saadaan

$$F_{s,a} = \sum_n \frac{1}{a_n^2} (C_n \sinh a_n y + a_n y D_n \cosh a_n y)$$

$$(11) \quad \cos a_n x + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2} (\bar{A}_m \cosh \beta_m x + \beta_m x \bar{B}_m \sinh \beta_m x) \sin \beta_m y$$



Kuva 1. Seinälevyjen mitat ja kuormitusotaksuma
The dimensions and loading assumption for the wall plates of container

Kuva 2. Kuormituksen jakaminen symmetriseen ja antimetriseseen osaan
The symmetric and antimetric cases of loading

Jos pystytään määrittämään arvot A_n, \dots, D_n ja $\bar{A}_m, \dots, \bar{D}_m$ niin, että reunaehdot toteutuvat, voidaan jännitysfunktion F_s avulla laskea jännitykset seinälevylle lausekkeiden (2) mukaan.

7. Vakioiden A_n, \dots, D_n ja $\bar{A}_m, \dots, \bar{D}_m$ määrittäminen

7.1. Symmetrinen tapaus

Lausekkeiden (2) ja (10) sekä reunaehtojen (6) perusteella voidaan kirjoittaa yhtälöryhmä

$$(12) \quad \begin{cases} (\sigma_x)_{x=a} = \frac{\partial^2 F_s(a,y)}{\partial y^2} = 0 \\ (\tau_{xy})_{x=a} = -\frac{\partial^2 F_s(a,y)}{\partial x \partial y} = 0 \\ (\sigma_y)_{y=b} = \frac{\partial^2 F_s(x,b)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot p(x) = \frac{1}{2h} \cdot \sum_n a_n \cdot \cos a_n x \\ (\tau_{xy})_{y=b} = -\frac{\partial^2 F_s(x,b)}{\partial x \partial y} = \sum_n \frac{\phi_n - \psi_n}{2} \cdot \sin a_n x \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmän (12) ensimmäinen ja toinen rivi ovat voimassa kaikilla y :n arvoilla sekä kolmas ja neljäs rivi kaikilla x :n arvoilla, saadaan yhtä monta yhtälöä kuin tuntemattomia (A_n, B_n, \bar{C}_m ja \bar{D}_m). Kaikki nämä vakiot ovat funktioita ϕ_n :stä ja ψ_n :stä, joten voidaan yleisesti kirjoittaa

$$(13) \quad \begin{cases} A_n = A_n(\phi_n, \psi_n), \quad \bar{C}_m = \bar{C}_m(\phi_n, \psi_n) \\ B_n = B_n(\phi_n, \psi_n), \quad \bar{D}_m = \bar{D}_m(\phi_n, \psi_n) \end{cases}$$

7.2. Antimetrisen tapaus

Vastaavalla tavalla kuten symmetrisessä tapauksessa voidaan lausekkeiden (2) ja (11) sekä reunaehtojen (7) perusteella kirjoittaa yhtälöryhmä

$$(14) \quad \begin{cases} (\sigma_x)_{x=a} = \frac{\partial^2 F_s(a,y)}{\partial y^2} = 0 \\ (\tau_{xy})_{x=a} = -\frac{\partial^2 F_s(a,y)}{\partial x \partial y} = 0 \\ (\sigma_y)_{y=b} = \frac{\partial^2 F(x,b)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot p(x) = -\frac{1}{2h} \cdot \sum_n a_n \cos a_n x \\ (\tau_{xy})_{y=b} = -\frac{\partial^2 F(x,b)}{\partial x \partial y} = \sum_n \frac{\phi_n + \psi_n}{2} \sin a_n x \end{cases}$$

Koska ensimmäinen ja toinen rivi yhtälöryhmässä (14) ovat voimassa kaikilla y :n arvoilla sekä kolmas ja neljäs rivi kaikilla x :n arvoilla, saadaan yhtä monta yhtälöä kuin tuntemattomia (C_n, D_n, \bar{A}_m ja \bar{D}_m). Kaikki nämä vakiot ovat funktioita ϕ_n :stä ja ψ_n :stä, joten voidaan yleisesti kirjoittaa

$$(15) \quad \begin{cases} C_n = C_n(\phi_n, \psi_n), \quad \bar{A}_m = \bar{A}_m(\phi_n, \psi_n) \\ D_n = D_n(\phi_n, \psi_n), \quad \bar{D}_m = \bar{D}_m(\phi_n, \psi_n) \end{cases}$$

8. Reunaleikkausjännityssuureiden ϕ_n ja ψ_n laskeminen

Suureet ϕ_n ja ψ_n ovat, kuten aikaisemmin on mainittu, riippuvaisia seinälevyn yhteistoiminnasta katto- ja lattialevyn kanssa. Käsitellään kattoa ja lattiaa levyinä ja muodostetaan niille jännitysfunktiot niin, että ne ovat symmetrisiä sekä x - että y -akselin suhteen. Tällöin saadaan kattolevylle

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_k = \sum_n \frac{1}{a_n^2} (E_n \cosh a_n z + a_n z F_n \sinh a_n z) \\ \cos a_n x + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2} (\bar{E}_m \cosh \beta_m x + \\ + \beta_m \times F_m \sinh \beta_m x) \cdot \cos \beta_m z \end{array} \right.$$

ja lattialevyille

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_l = \sum_n \frac{1}{a_n^2} (G_n \cosh a_n z + a_n z H_n \sinh a_n z) \\ - \cos a_n x + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2} (\bar{G}_m \cosh \beta_m x + \\ + \beta_m \times \bar{H}_m \sinh \beta_m x) \cdot \cos \beta_m z \end{array} \right.$$

E_n, F_n, G_n ja H_n ovat n :stä riippuvia vakioita ja $\bar{E}_m, \bar{F}_m, \bar{G}_m$ ja \bar{H}_m riippuvat m :stä. Jaksoiksi on otettu x -suunnassa $L_x = 4a$ ja z -suunnassa $L_z = 4b$.

Kattolevyn reunaehdot saadaan seuraavalla tavalla. Päätöreunoilla häviävät normaalijännitys σ_x sekä leikkausjännitys τ_{xy} . Tällöin

$$(18a) \quad (\sigma_x)_{x=0} = 0$$

$$(18b) \quad (\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

Kattolevy on xz -tasossa (kuva 1), joten y korvataan z :lla vastaavissa kattolevyn kaavoissa.

Kattolevyn ja seinälevyn yhtymäreunalla häviää normaalijännitys σ_z , koska siellä ei ole z -akselin suuntaista kuormitusta. Tällöin

$$(18c) \quad (\sigma_z)_{z=b} = 0$$

Tällä reunalla leikkausvoimien täytyy pitää toisensa tasapainossa. Ottamalla huomioon koordinaatiston sijainti saadaan

Edellisestä tasapainoehdosta saadaan edelleen

$$(18d) \quad (\tau_{xy})_{y=b} \cdot h \cdot dx + (\tau_{xz})_{z=b} \cdot h \cdot dx = 0$$

$$(\tau_{xz})_{z=b} = \sum_n (-\phi_n \sin a_n x)$$

Lattialevyille voidaan kirjoittaa reunaehdot samalla tavalla kuin kattolevyille

$$(19a) \quad (\sigma_x)_{x=0} = 0$$

$$(19b) \quad (\tau_{xz})_{x=0} = 0$$

$$(19c) \quad (\sigma_z)_{z=b} = 0$$

Leikkausvoimien tasapainoehdosta saadaan nyt ottamalla huomioon koordinaatiston sijainti

Tästä saadaan leikkausjännitykselle lauseke

$$(19d) \quad -(\tau_{xy})_{y=b} \cdot h \cdot dx + (\tau_{xz})_{z=b} \cdot 2h \cdot dx = 0$$

$$(\tau_{xz})_{z=b} = \sum_n (1/2 \cdot \psi_n \sin a_n x)$$

Samalla tavalla kuten seinälevyille voidaan edellä esitettyjen jännitysfunktioiden ja reunaehtojen sekä lausekkeiden (2) avulla laskea katto- ja lattialevyjen vakiot ϕ_n :n ja ψ_n :n funktioina. Yleisesti voidaan kirjoittaa kattolevyille

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_n = E_n(\phi_n, \psi_n), \bar{E}_m = \bar{E}_m(\phi_n, \psi_n) \\ F_n = F_n(\phi_n, \psi_n), \bar{F}_m = \bar{F}_m(\phi_n, \psi_n) \end{array} \right.$$

ja lattialevyille

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_n = G_n(\phi_n, \psi_n), \bar{G}_m = \bar{G}_m(\phi_n, \psi_n) \\ H_n = H_n(\phi_n, \psi_n), \bar{H}_m = \bar{H}_m(\phi_n, \psi_n) \end{array} \right.$$

Kinemaattiset reunaehdot antavat tarvittavan määrän lisäyhtälöitä ϕ_n :n ja ψ_n :n määrittämiseksi. Yläreunalla täytyy kattolevyn ja seinälevyn suhteellisten venymien olla yhtä suuria. Myös alareunalla seinälevyn ja lattialevyn suhteellisten venymien tulee olla samansuuruiset. Siis

$$(22a) \quad (\epsilon_x)_{z=b} = (\epsilon_x)_{y=b} \quad (\text{yläreunalla})$$

$$(22b) \quad (\epsilon_x)_{z=b} = (\epsilon_x)_{y=b} \quad (\text{alareunalla}).$$

Kun Hooken laki on voimassa ja v :tä pidetään pienenä sekä kimmokerrointa E samana kaikille levyille, saadaan ehdoista (22)

$$(23a) \quad (\sigma_x)_{z=b} = (\sigma_x)_{y=b} \quad (\text{yläreunalla})$$

$$(23b) \quad (\sigma_x)_{z=b} = (\sigma_x)_{y=b} \quad (\text{alareunalla}).$$

Jännitysfunktioiden F_s , F_k ja F_l sekä lausekkeen (2a) avulla voidaan ehdot (23) kirjoittaa muotoon

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F_s(x,b)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_k(x,b)}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 F_s(x,-b)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_l(x,b)}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

Koska yhtälöiden (24) täytyy olla voimassa kaikilla x :n arvoilla, voidaan edellä olevista yhtälöistä ratkaista B_n ja D_n F_n :n ja H_n :n funktioina

$$(25) \quad \begin{cases} B_n = B_n(F_n, H_n) \\ D_n = D_n(F_n, H_n) \end{cases}$$

Sijoittamalla B_n :n, D_n :n, F_n :n ja H_n :n arvot [(13), (15), (20) ja (21)] lausekkeisiin (25), voidaan määrittää ϕ_n :n ja ψ_n :n arvot.

ϕ_n :n ja ψ_n :n ratkaiseminen edellä selostetulla tavalla johtaa suuriin yhtälöryhmiin varsinkin, jos vaadittujen termien lukumäärä on suuri, so. suhde c/a (kuva 1) on pieni. ϕ_n :t ja ψ_n :t voidaan kuitenkin laskea likimäärin, kuten edellä, muodostamalla sellainen huomattavasti edellistä (8) yksinkertaisempi jännitysfunktio F_s , joka täyttää kaikki vaakasuorien sivujen reunaehdot, sekä toisen pystysuorien sivujen reunaehdoista [(5a) tai (5b)]. Jos on kysymys pelkästä levystä, joka ei ole kiinnitetty katto- ja lattialevyyn, niin $\phi_n = \psi_n = 0$.

9. Lopulliset jännitykset

Kun vakioiden A_n, \dots, D_n ja $\bar{A}_m, \dots, \bar{D}_m$ arvot tunnetaan, on jännitysfunktio F_s määrätty. Lausekkeiden (2) avulla voidaan tämän jälkeen laskea jännityskomponenttien arvot mielivaltaisessa pisteessä (x, y) .

10. Laskuesimerkki

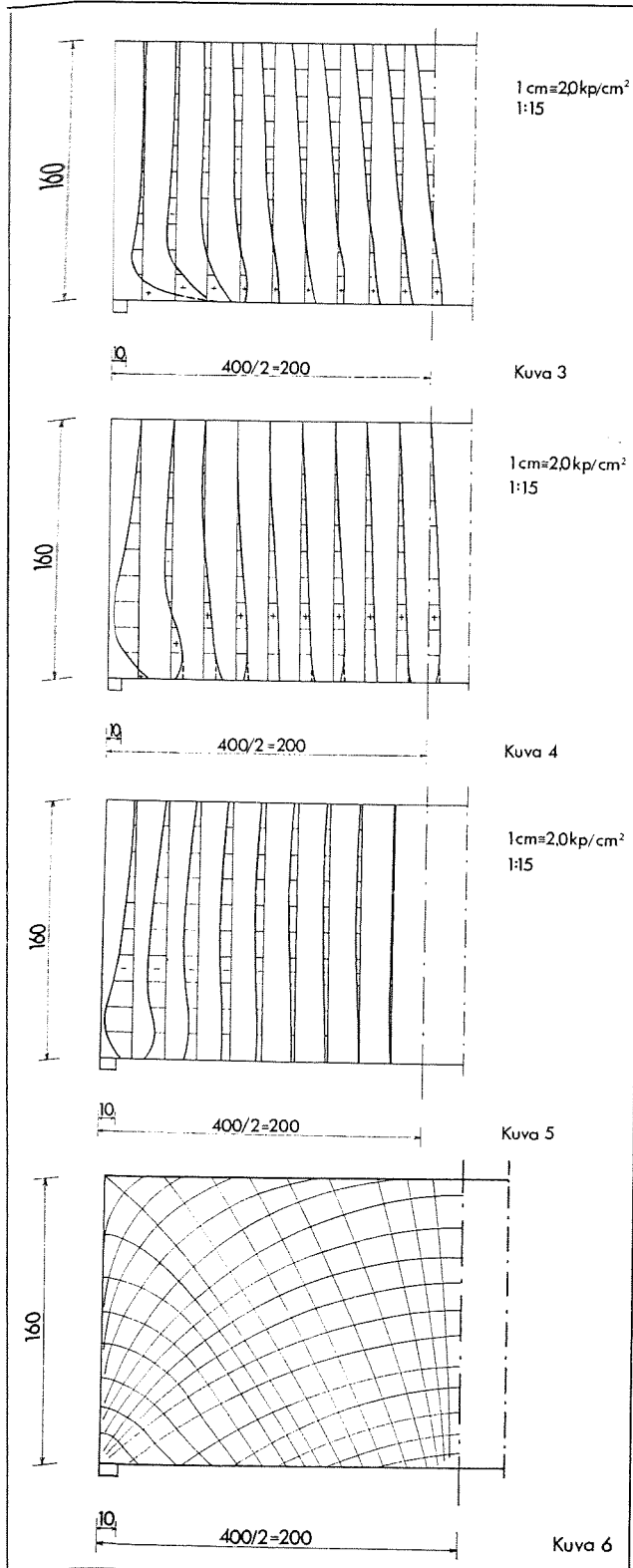
Laskelmat on suoritettu levyille, jonka mitat ovat $a = 200$ cm, $b = 80$ cm, $c = 10$ cm ja $h = 1$ cm. Kuormitus $p = 1$ kg/cm. Laskuesimerkki on ohjelmoitu Elliot-Algol-kielellä siten, että ohjelmat voidaan ajaa mielivaltaisilla seinälevyn mitoilla ja kuormituksella. Jännityskomponentit on laskettu jokaisessa levyn korkeuden $1/10$ sekä pituuden $1/20$ pisteissä. Tulokset on esitetty graafisesti kuvissa 3—5. Kuvassa 6 on esitetty jännitystrajektoriat seinälevylle. Laskuissa on käytetty arvoja 1, 3, \dots , 53 n:lle, 1, 3, \dots , 19 m:lle sekä 1, 2, \dots , 10 m:lle.

Kuva 3. σ_x jännitykset
Normal stresses parallel to x

Kuva 4. σ_y jännitykset
Normal stresses parallel to y

Kuva 5. σ_{xy} jännitykset
Shearing stresses in xy coordinates

Kuva 6. Stress trajectories of the plate as an example



Tavallisimmat merkinnät

| | |
|--|---|
| σ | normaalijännitys |
| τ | leikkausjännitys |
| ε | suhteellinen venymä |
| $\alpha_n, \beta_m, \bar{\beta}_m$ | apumerkintöjä arvoille $\frac{n}{2a}, \frac{m}{2b}$ ja $\frac{m}{b}$ |
| ν | Poisson'in luku |
| ϕ_n, ψ_n | seinälevyn ylä- ja alareunan leikkausjännityksen apusuureita |
| a | puolet seinälevyn pituudesta |
| a_n | kuormituskehityksen parametri |
| b | puolet seinälevyn korkeudesta |
| c | tukipinnan pituus |
| h | seinä- ja kattolevyn paksuus tai puolet lattialelevyn paksuudesta |
| p | tasainen kuorma |
| $p(x)$ | kuormitusfunktio |
| x, y, z | suorakulmaisen koordinaatiston akselit |
| A_n, B_n, C_n, D_n | seinälevyn jännitysfunktion vakioita |
| $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m, \bar{D}_m$ | seinälevyn jännitysfunktion vakioita |
| E | kimmokerroin |
| $F(x, y)$ | jännitysfunktio |
| F_s, F_k, F_l | seinälevyn, kattolevyn ja lattialelevyn jännitysfunktioita |
| E_n, F_n | kattolevyn jännitysfunktion vakioita |
| \bar{E}_m, \bar{F}_m | kattolevyn jännitysfunktion vakioita |
| G_n, H_n | lattialelevyn jännitysfunktion vakioita |
| \bar{G}_m, \bar{H}_m | lattialelevyn jännitysfunktion vakioita |
| L | jakson pituus |

Kirjallisuusluettelo

1. *Girkmann, K.*, Flächentragwerke, Wien 1954.
2. *Ylinen, A.*, Kimmo- ja lujuusoppi I—II, Porvoo 1948, 1950.
3. *Grundfelt, B.*, Diplomityö. TKK 1967.

Björn Grundfelt, dipl.ins., Ins.tsto Kruus & Myllymäki, Helsinki.