HELSINGIN TEKNILLINEN KORKEAKOULU
TIETOTEKNIIKAN OSASTO
MEKANIIKAN LABORATORIO
02150 ESPOO

MEKANIIKAN KÄSITTEITÄ JA KAAVOJA

VERSIO 1

Eero-Matti Salonen

Opintomoniste No 6

Lecture notes

1987

TEKNISKA HÖGSKOLAN I HELSINGFORS
DATATEKNISKA AVDELNINGEN
LABORATORIET FÖR MEKANIK
SF-02150 ESBO, FINLAND

HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
LABORATORY OF MECHANICS
SF-02150 ESPOO, FINLAND

harmaa kansilehti
75 % (keskella)

SISÄLLYSLUETTELO

Lukijalle

1 JOHDANTO

2 PARTIKKELIMEKANIIKKA
2.1 Partikkelimekaniikan aksioomat 2.1.1
2.2 Kinematiikka 2.2.1
2.2.1 Yleistä 2.2.1
2.2.2 Jäykän kappaleen liike 2.2.3
2.2.3 Suhteellinen liike 2.2.7
2.3 Kinetiikka 2.3.1
2.3.1 Yleistä 2.3.1
Partikkelisysteemi 2.3.1
Rajoitteet ja yleistetyt koordinaatit 2.3.2
Voimien luokittelua 2.3.6
2.3.2 Liikeyhtälöt 2.3.18
2.3.3 Liikemäärä 2.3.20
2.3.4 Liikemäärämomentti 2.3.21
2.3.5 Työ ja energia 2.3.23
Voiman tekemä työ 2.3.23
Liike-energia 2.3.27
Tilafunktio 2.3.29
Mekaanisen energian tase 2.3.30
Konservatiiviset voimat 2.3.31
2.3.6 Hitausvoima-ajattelu 2.3.35
2.3.7 Virtuaalinen työ 2.3.37
Voiman tekemä virtuaalinen työ 2.3.37
Variaatiolaskenta 2.3.37
Virtuaalisen työn periaate 2.3.40
Rajoitteet ja virtuaalinen siirtymä 2.3.44
Yleistetyt voimat 2.3.46
Monogeenisten voimien tekemä virtuaalinen työ 2.3.56
Konservatiivisten voimien tekemä virtuaalinen
työ 2.3.57
Loppuhuomautuksia 2.3.57

2.3.8 Lagrangen yhtälöt 2.3.59
2.3.9 Hamiltonin periaate 2.3.67
2.3.10 Virtuaalinen työ statiikassa 2.3.70
2.3.11 Suhteellinen liike 2.3.75

3 YLEINEN KONTINUUMIMEKANIIKKA
3.1 Yleistä 3.1.1
3.2 Kontinuumimekaniikan aksioomat 3.2.1
3.3 Kinematiikka 3.3.1
3.3.1 Yleistä 3.3.1
3.3.2 Lagrangen esitystapa 3.3.2
Yleistä 3.3.2
Ainederivaatta 3.3.2
Siirtymä, nopeus ja kiihtyvyys 3.3.4
Muodonmuutos 3.3.6
Infinitesimaalinen venymä ja rotaatio 3.3.13
Tilavuusintegraalin ainederivaatta 3.3.21
3.3.3 Eulerin esitystapa 3.3.24
Yleistä 3.3.24
Nopeus 3.3.25
Ainederivaatta 3.3.27
Kiihtyvyys 3.3.29
Deformaationopeus ja kulmanopeus 3.3.31
Tilavuusintegraalin ainederivaatta 3.3.39
Yhteenveto 3.3.47
3.4 Kinetiikan yleiset perusteet 3.4.1
3.4.1 Yleistä 3.4.1
3.4.2 Massan säilyminen 3.4.3
Makroskooppinen ja mikroskooppinen tarkastelutapa 3.4.3
Massan säilymisen periaate 3.4.4
3.4.3 Liikemäärän tase 3.4.6
Ulkoiset voimat 3.4.6
Jännitys 3.4.8
Liikemäärän taseen periaate 3.4.17
3.4.4 Liikemäärämomentin tase 3.4.19

3.4.5 Energian tase 3.4.20
Yleistä 3.4.20
Ulkoisten voimien teho 3.4.20
Liike-energia 3.4.21
Lämpöteho 3.4.21
Sisäenergia 3.4.23
Energian taseen periaate 3.4.23
Termodynamiikkaa 3.4.26

4 KIINTEÄN AINEEN MEKANIIKKA
4.1 Yleistä 4.1.1
4.2 Kiinteiden aineiden konstitutiivisia yhteyksiä 4.2.1
Yleistä 4.2.1
Tiheys
Kokoonpuristuvuus ja lämpölaajeneminen 4.2.2
Jännitys-venymä 4.2.3
Lämpökapasiteetti 4.2.17
Sisäenergia 4.2.17
Lämmönjohtavuus 4.2.21
Ainevakioita 4.2.23
4.3 Massan säilyminen 4.3.1
Jatkuvuusyhtälö 4.3.1
4.4 Liikemäärän tase 4.4.1
4.4.1 Pienet siirtymät 4.4.1
Cauchyn liikeyhtälöt 4.4.1
Navierin liikeyhtälöt 4.4.8
Traktio-jännitysyhteys 4.4.9
4.4.2 Suuret siirtymät 4.4.11
Toinen Piola-Kirchhoffin jännitys 4.4.11
Cauchyn liikeyhtälöt 4.4.12
Traktio-jännitysyhteys 4.4.16
4.5 Liikemäärämomentin tase 4.5.1
4.5.1 Pienet siirtymät 4.5.1
4.5.2 Suuret siirtymät 4.5.1
4.6 Energian tase 4.6.1
4.6.1 Pienet siirtymät 4.6.1

Yleistä 4.6.1
Mekaanisen energian tase 4.6.1
Energian taseen periaate 4.6.6
Energiayhtälön erityismuotoja 4.6.6
Lämpövirran tiheys - lämpövuoyhteys 4.6.8
4.6.2 Suuret siirtymät 4.6.10
Yleistä 4.6.10
Mekaanisen energian tase 4.6.10
4.7 Reuna-, alku- ja jatkuvuusehdot 4.7.1
4.7.1 Yleistä 4.7.1
4.7.2 Mekaaniset reunaehdot 4.7.4
Perustapaus 4.7.4
Ensimmäinen yleistys 4.7.7
Toinen yleistys 4.7.8
4.7.3 Termiset reunaehdot 4.7.12
Perustapaus 4.7.12
Yleistys 4.7.13
4.7.4 Alkuehdot 4.7.18
4.7.5 Jatkuvuusehdot 4.7.21
4.8 Yhteenveto 4.8.1
Yleistä 4.8.1
Kenttäyhtälöt 4.8.1
Reuna- ja alkuehdot 4.8.4
Yleistyksiä 4.8.6
4.9 Virtuaalinen työ 4.9.1
4.9.1 Pienet siirtymät 4.9.1
Yleistä 4.9.1
Virtuaalisen työn periaate 4.9.1
Rajoitteet ja virtuaalinen siirtymä 4.9.11
Terminologiaa 4.9.13
Loppuhuomautuksia 4.9.25
4.9.2 Suuret siirtymät 4.9.27
Yleistä 4.9.27
Virtuaalisen työn periaate 4.9.27
4.10 Potentiaalienergian stationaarisuus 4.10.1
4.11 Energiayhtälön heikko muoto 4.11.1

4.11.1 Pienet siirtymät 4.11.1
Yleistä 4.11.1
Heikko muoto 4.11.1
Reunaehtojen käsittely 4.11.2
Lisämerkintöjä 4.11.3
Eräs variaatioperiaate 4.11.4

5 NESTEMEKANIIKKA
5.1 Yleistä 5.1.1
5.2 Nesteiden konstitutiivisia yhteyksiä 5.2.1
Yleistä 5.2.1
Tilanyhtälö 5.2.1
Kokoonpuristuvuus ja lämpölaajeneminen 5.2.4
Deviaatiojännitys - deformaationopeus 5.2.8
Lämpökapasiteetti 5.2.14
Sisäenergia 5.2.15
Lämmönjohtavuus 5.2.17
Höyrynpaine 5.2.18
Pintajännitys 5.2.18
Ainevakioita 5.2.21
5.3 Massan säilyminen 5.3.1
Jatkuvuusyhtälö 5.3.1
5.4 Liikemäärän tase 5.4.1
Cauchyn liikeyhtälöt 5.4.1
Navier-Stokesin liikeyhtälöt 5.4.6
Eulerin liikeyhtälöt 5.4.7
Traktio-jännitysyhteys 5.4.8
5.5 Liikemäärämomentin tase 5.5.1
5.6 Energian tase 5.6.1
5.6.1 Mekaanisen energian tase 5.6.1
Yleistä 5.6.1
Mekaanisen energian taseen periaate 5.6.8
5.6.2 Energian taseen periaate 5.6.11
Energiayhtälö 5.6.11
Energiayhtälön erityismuotoja 5.6.13
Lämpövirran tiheys - lämpövuoyhteys 5.6.15

5.7 Reuna-, alku- ja jatkuvuusehdot 5.7.1
5.7.1 Yleistä 5.7.1
5.7.2 Mekaaniset reunaehdot 5.7.3
Perustapaus 5.7.3
Ensimmäinen yleistys 5.7.5
Esimerkkejä ja lisäyleistyksiä 5.7.8
5.7.3 Termiset reunaehdot 5.7.16
Perustapaus 5.7.16
Yleistys 5.7.17
5.7.4 Alkuehdot 5.7.18
5.7.5 Jatkuvuusehdot 5.7.19
5.8 Yhteenveto 5.8.1
Yleistä 5.8.1
Kenttäyhtälöt 5.8.1
Reuna- ja alkuehdot 5.8.2
Yleistyksiä 5.8.6
5.9 Virtuaalinen teho 5.9.1
Yleistä 5.9.1
Virtuaalisen tehon periaate 5.9.1
Rajoitteet ja virtuaalinen nopeus 5.9.5
Eräs variaatioperiaate 5.9.7
5.10 Jatkuvuusyhtälön heikko muoto 5.10.1
5.11 Energiayhtälön heikko muoto 5.11.1

6 SEKALAISTA
6.1 Kiinteän aineen mekaniikan erikoistapauksia 6.1.1
6.1.1 Yleistä 6.1.1
6.1.2 Tasojännitystila 6.1.13
6.1.3 Tasomuodonmuutostila 6.1.17
6.1.4 Pyörähdyssymmetrinen tapaus 6.1.20
Sylinterikoordinaatisto 6.1.20
Pyörähdyssymmetria 6.1.23
6.1.5 Nivelsauva 6.1.27
6.1.6 Palkki 6.1.38
Korkea palkki 6.1.38
Hoikka palkki 6.1.47

6.1.7 Jännitetty lanka 6.1.53
6.1.8 Levy 6.1.57
6.1.9 Laatta 6.1.61
Paksu laatta 6.1.61
Ohut laatta 6.1.68
6.1.10 Jännitetty kalvo 6.1.72
6.1.11 Yhdistetyt rakenteet 6.1.76
6.1.12 Energiayhtälön erikoistapauksia 6.1.77
Yleistä 6.1.77
Tasotapaus 6.1.78
Levy 6.1.79
Pyörähdyssymmetrinen tapaus 6.1.85
6.2 Nestemekaniikan erikoistapauksia 6.2.1
6.2.1 Yleistä 6.2.1
6.2.2 Tasovirtaus 6.2.3
6.2.3 Pyörähdyssymmetrinen virtaus 6.2.4
Sylinterikoordinaatisto 6.2.4
Pyörähdyssymmetria 6.2.9
6.3 Nopeuspotentiaali ja virtafunktio 6.3.1
Pyörteetön kokoonpuristumaton virtaus 6.3.1
Nopeuspotentiaali 6.3.3
Virtafunktio 6.3.6
Pyörähdyssymmetrinen virtaus 6.3.10
6.4 Bernoullin yhtälö 6.4.1
Otaksumaluettelo 6.4.1
Bernoullin yhtälö (muoto 1) 6.4.7
Bernoullin yhtälö (muoto 2) 6.4.12
6.5 Pyörteisyys ja sirkulaatio 6.5.1
Lisää pyörteisyydestä 6.5.1
Sirkulaatio 6.5.3
Sirkulaation ainederivaatta 6.5.6
Kelvinin sirkulaatiolause 6.5.9
Ideaalivirtaus ja nostovoima 6.5.11
Pyörteisyyden kuljetusyhtälö 6.5.16
6.6 Turbulenssi 6.6.1
Yleistä 6.6.1
Jatkuvuusyhtälö 6.6.7

Liikeyhtälöt	6.6.9
Energiayhtälö	6.6.17
6.7 Pintojen kinematiikkaa	6.7.1
Yleistä	6.7.1
Ainepinnan liike	6.7.4
6.8 Yleinen konvektio-diffuusioyhtälö	6.8.1
6.8.1 Yleistä	6.8.1
6.8.2 Peclet'n luku ja reunaehdot	6.8.9
Yleistä	6.8.9
Puhdas konvektioyhtälö	6.8.10
Puhdas diffuusioyhtälö	6.8.13
Konvektio-diffuusioyhtälö	6.8.16
Epästationaarisuus	6.8.18
6.8.3 Heikko muoto	6.8.20
Yleistä	6.8.20
Jatkuvat painofunktiot	6.8.21
Epäjatkuvat painofunktiot	6.8.23
Kontrollialuekeino	6.8.27
Puhtaan stationaarisen diffuusioyhtälön variaatioperiaate	6.8.28
6.9 Kokoonpuristuva virtaus	6.9.1
6.9.1 Yleistä	6.9.1
6.9.2 Lisää termodynamiikkaa	6.9.2
Entropia	6.9.2
Sisäenergia, entalpia ja lämpökapasiteetit	6.9.7
Ihannekaasu	6.9.9
6.9.3 Lisää energiayhtälöstä ja Bernoullin yhtälöstä	6.9.12
Energiayhtälö	6.9.12
Bernoullin yhtälö	6.9.16
6.9.4 Vallitsevat yhtälöt	6.9.20
Virtauksen kuvailua	6.9.20
Yhtälöiden perusmuotoja	6.9.23
Yhtälöiden erityismuotoja	6.9.26
6.9.5 Akustinen värähtely	6.9.29
Yleistä	6.9.29
Eulerin esitys	6.9.29
Lagrangen esitys	6.9.34

6.10 Rajakerrosvirtaus 6.10.1
6.10.1 Virtaus seinämän läheisyydessä 6.10.1
Yleistä 6.10.1
Tasovirtaus 6.10.1
Kolmidimensioinen virtaus 6.10.7
Kitkaton virtaus 6.10.10
Kappaleeseen vaikuttavat nestevoimat 6.10.14
6.10.2 Rajakerrosyhtälöt 6.10.18
Yleistä 6.10.18
Liikeyhtälöt 6.10.19
Energiayhtälö 6.10.25
Loppuhuomautuksia 6.10.27
6.11 Voiteluvirtaus 6.11.1
Yleistä 6.11.1
Jatkuvuusyhtälö 6.11.3
Liikeyhtälöt 6.11.5
Reynoldsin yhtälö 6.11.8
Kokoonpuristuvuus ja huokoiset seinämät 6.11.11
Kantovoima ja kitka 6.11.13
Voitelukalvon paksuuden epäjatkuvuuskohdat 6.11.15
Painetaskut 6.11.17
Viskositeetti 6.11.19
Kaarevat voitelukalvot 6.11.20
Loppuhuomautuksia 6.11.24
6.12 Matalan veden virtaus 6.12.1
Yleistä 6.12.1
Boussinesq-approksimaatio 6.12.3
Jatkuvuusyhtälö 6.12.5
Liikeyhtälöt 6.12.6
Energiayhtälö 6.12.17
Reunaehdot 6.12.19
Eräs analogia 6.12.21
6.13 Seosten virtaus 6.13.1
Yleistä 6.13.1
Eräitä käsitteitä 6.13.1
Diffuusio 6.13.4
Jatkuvuusyhtälöt 6.13.7

Fickin diffuusiolaki 6.13.10
Loppuhuomautuksia 6.13.13
6.14 Suotovirtaus 6.14.1
6.14.1 Puhdas suotovirtaus 6.14.1
Yleistä 6.14.1
Eräitä käsitteitä 6.14.2
Jatkuvuusyhtälö 6.14.5
Darcyn laki 6.14.6
Lopulliset yhtälöt 6.14.9
6.14.2 Konsolidaatio 6.14.13
Yleistä 6.14.13
Jatkuvuusyhtälö 6.14.15
Raerungon tasapainoyhtälö 6.14.18
Lopulliset yhtälöt 6.14.19
Alkuehdot 6.14.22
Loppuhuomautuksia 6.14.25

KIRJALLISUUTTA

LIITE
L.1 Koordinaatiston kierto L.1.1
L.1.1 Vektorit L.1.1
L.1.2 Tensorit L.1.7
L.2 Matematiikkaa L.2.1
L.2.1 Lineaarimuoto ja neliömuoto L.2.1
L.2.2 Gaussin lause L.2.3
L.2.3 Stokesin lause L.2.5
L.2.4 Leibnitzin sääntö L.2.6

Lukijalle

Moniste on tarkoitettu tukiaineistoksi mekaniikan laboratorion kontinuumimekaniikan opetukseen erityisesti elementtimenetelmän sovellutuksia silmälläpitäen. Tavoitteena on ollut esitys, joka antaisi erilaiset taustat omaaville henkilöille tarvittaessa mahdollisuuden täydentää kontinuumimekaniikan tietojensa aukkokohtia kohtuullisen nopeasti ilman, että heidän täytisi välttämättä tutustua alan eri oppikirjoihin. Pintapuolisessa käytössä moniste voinee toimia myös tietynlaisena kaavastona.

Tekstissä käsitellään aluksi verrattain paljon partikkelimekaniikkaa, vaikkakaan elementtimenetelmää ei yleensä sovelleta sen yhteydessä. Syyt tähän valintaan ovat mm. seuraavia:

- Elementtimenetelmästä kiinnostuneet henkilöt ovat suurella todennäköisyydellä tutustuneet jossain vaiheessa vähintään partikkelimekaniikkaan. Partikkelimekaniikan kertaus tuo tällöin nopeasti esille yksinkertaisessa muodossa käsitteitä, jotka laajenevat sitten melko helposti kontinuumin yhteydessä käytettäviksi.
- Partikkelimekaniikassa suoritetut tietyt johdot ja manipulaatiot toistuvat analogisina kontinuumimekaniikassa. Tämän korostaminen ja muistaminen merkitsee ajatuksen ekonomiaa.
- Aine ei ole todellisuudessa jatkuvaa, kuten kontinuumimalli edellyttää, vaan muodostuu suunnattomasta määrästä molekyylejä. Molekyylit eivät ole tarkasti ottaen partikkeleita, sillä niillä on tietty koko ja ne jakautuvat pienempiin, yhtä monimutkaisemmin kuvattavissa oleviin osasiin, joiden käsittelyssä klassillinen mekaniikka ei enää riitä. Kuitenkin soveltamalla partikkelisysteemimallin antamia tuloksia sopivasti kontinuumin yhteydessä voidaan useita kontinuumimekaniikan — etenkin termomekaniikkaan liittyviä — käsitteitä lisävalaista kvalitatiivisesti.
- On mielenkiintoista todeta, että diskretointi muuntaa kontinuumia koskevat yhtälöt usein partikkelimekaniikan yhtälöiden kaltaisiksi.

Kiinteän aineen mekaniikkaa ja nestemekaniikkaa koskevat luvut 4 ja 5 on pyritty kirjoittamaan kohta kohdalta samantyyppisi-

nä toisiinsa tukeutuvina rinnakkaisina esityksinä. Sopivin tekstin seuraamisjärjestys ei olekaan välttämättä aina sivunumeron mukaan kasvava, koska jotkin aiheet on helpompi käsitellä aloittamalla nestemekaniikassa käytetystä Eulerin esitystavasta. Lagrangen ja Eulerin esitystapojen sisällön ja erojen ymmärtäminen onkin aivan oleellista monisteen muiden osien seuraamiseksi.

Tensorimerkintöjä on harrastettu vain niukalti ja Einsteinin summeeraustapaa ei ollenkaan. Kontinuumimekaniikkaan tutustuttavissa esityksissä ei liene psykologisesti kovin suotavaa tyrmistyttävää lukijaa samanaikaisella fysiikan ja tensorimanipulaatioiden käsittelyllä, vaan fysikaalisten seikkojen kunnolliseen ymmärtämiseen on pantava aluksi pääpaino. Täten en ole hävennyt käyttää joskus pitkähköjä ja ehkä myös hieman naiiveja esimerkkejä ja selittelyjä kohdissa, jotka saattavat olla vaikeita omaksua.

Kaavojen esittämisessä on pitäydytty lähinnä karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa. Elementtimenetelmässähän monimutkainen geometria hoidetaan luonteenomaisesti siten, ettei tarvetta yleisten käyräviivaisten koordinaattien avulla esitettyihin mekaniikan yhtälöihin tavallisesti synny. Useille kaavoille on kirjoitettu vektorimuotoisten (tai tensorimuotoisten) sekä komponenttimuotoisten esitysten lisäksi matriisimerkinnöin varustetut versiot, koska näitä käytetään paljon elementtimenetelmässä.

Etenkin virtausmekaniikan kirjallisuudessa on usein tapana kehitellä lausekkeita elegantisti ja lyhyesti $\vec{\nabla}$-operaattoriin liittyvien moninaisten yhteyksien avulla. Kokemus on kuitenkin osoittanut, että näin suoritetut johdot jäävät epähavainnollisiksi henkilöille, joille vektorianalyysin pitemmälle menevät kaavat eivät ole pysyviä tuttavuuksia. Tämän vuoksi ja koska on tärkeämpää ymmärtää kuin osata, esityksen tiiveyspyrkimyksistä on pitkälti luovuttu.

On ilmeistä, että mekaniikan opetuksen tulee painottua jatkossa entistä voimakkaammin mm. seuraavaan kahteen aiheeseen: heikot muodot ja reunaehdot. Modernit numeeriset menetelmät käyttävät nimittäin lähtökohtinaan differentiaaliyhtälöformulaatioiden sijasta yhä yleisemmin ns. heikkoja muotoja kuten virtu-

aalisen työn periaatetta. Toiseksi markkinoille tulee jatkuvasti uusia yhä hienostuneempia insinööriprobleemien ratkaisemiseen tarkoitettuja ohjelmistoja. Niiden antamat tulokset ovat kuitenkin arvottomia, mikäli soveltajan systeemilleen valitsemat reunaehdot ovat epärealistiset. Monisteessa on käsitelty melko paljon näitä kahta aihepiiriä.

Tekstin kaavojen, kuvien,sivujen ja lähdeviittausten numeroinnissa on käytetty tapaa, joka rajaa myöhempien korjausten ja muutosten säteilyvaikutukset verrattain pienelle alueelle. Huomautukset virheistä ja muutosehdotukset otetaan kiitollisuudella vastaan.

Lopuksi haluan kiittää voimallisesti laboratoriomme toimistosihteeriä Tuula Aaltoa, joka on suurta ammattitaitoa, nopeutta ja pitkämielisyyttä osoittaen suorittanut tekstin puhtaaksikirjoituksen.

1 JOHDANTO

Mekaniikka on fysiikan haara, joka tutkii kappaleiden liikettä voimien vaikutuksen alaisena. Applied Mechanics Reviews-lehden (v. 1982) käyttämä luokittelu antaa kuvan ns. sovelletun mekaniikan käsittelemistä alueista:

FOUNDATION AND BASIC METHODS IN MECHANICS

Continuum mechanics
Finite element methods
Finite difference methods
Other methods in computational mechanics
Modeling
Experimental system analysis

DYNAMICS AND VIBRATION

Kinematic and dynamics
Vibrations of solids (basic)
Vibrations (structural elements)
Vibrations (structures)
Wave motions in solids
Impact on solids
Wave motion in incompressible fluids
Wave motion in compressible fluids
Solid-fluid interaction
Astronautics (celestial and orbital mechanics)
Explosions and ballistics
Acoustics

AUTOMATIC CONTROL

Systems theory and design
Optimal control systems
Systems and control (applications)
Robotics

MECHANICS OF SOLIDS

Elasticity
Viscoelasticity
Plasticity and viscoplasticity
Composite material mechanics
Cables, ropes, beams, etc.
Plates, shells, and membranes
Structural stability (buckling, postbuckling)
Electromagneto solid mechanics
Soil mechanics (basic)
Soil mechanics (applied)

Rock mechanics
Material processing
Fracture processes
Fracture mechanics
Experimental stress analysis
Material test techniques
Structures (basic)
Structures (ground)
Structures (ocean and coastal)
Structures (mobile)
Structures (containment)
Friction and wear
Machine elements
Machine design
Fastening and joining

MECHANICS OF FLUIDS

Rheology
Hydraulics
Incompressible flow
Compressible flow
Rarefied flow
Multiphase flows
Wall layers (including boundary layers)
Internal flow (pipe, channel, Couette)
Internal flow (inlets, nozzles, diffusers, and cascades)
Free shear layers (mixing layers, jets, wakes, cavities, and plumes)
Flow stability
Turbulence
Electromagneto fluid and plasma dynamics
Naval mechanics
Aerodynamics
Machinery fluid dynamics
Lubrication
Flow measurements and visualization

THERMAL SCIENCES

Thermodynamics
Heat transfer (one phase convection)
Heat transfer (two phase convection)
Heat transfer (conduction)
Heat transfer (radiation and combined modes)
Heat transfer (devices and systems)
Thermomechanics of solids
Mass transfer with and without heat transfer
Combustion
Prime movers and propulsion devices (systems and applications)

EARTH SCIENCES

Micromeritics

Porous media
Geomechanics
Earthquake mechanics
Hydrology, oceanography, and meteorology

ENERGY SYSTEMS AND ENVIRONMENT

Fossil fuels
Nuclear systems
Geothermal systems
Solar systems
Wind energy systems
Ocean energy systems
Energy distribution and storage systems
Environmental fluid mechanics
Mechanics of hazardous waste containment and disposal

BIOSCIENCES

Biomechanics
Human factors engineering
Rehabilitation engineering
Sports mechanics

Aihepiirin nähdään olevan tavattoman laaja. Tekniikassa tarvittavan ns. teknillisen mekaniikan (engl. engineering mechanics) alue on myös pitkälti sama kuin sovelletun mekaniikan.

Mekaniikka jaotellaan mm. siinä käytettyjen ainemallien mukaan. Aineen voidaan esimerkiksi ajatella muodostuvan partikkeleista tai se voidaan kuvitella kontinuumiksi.

Partikkeli (engl. particle), massapiste, hiukkanen vastaa geometrian pisteen käsitettä massalla varustettuna.

Kontinuumissa (engl. continuum) eli jatkuvan aineen mallissa aineen ajatellaan olevan nimensä mukaisesti jatkuvasti jakautunutta.

Kumpikaan näistä malleista ei vastaa täysin todellisuutta, mutta niillä on silti omat tärkeät sovellutusalueensa. Etenkin kontinuumimallia käyttävän mekaniikan eli ns. kontinuumimekaniikan (engl. continuum mechanics) pätemisalue on laaja ja käytännön kannalta tärkeä.

Kontinuumimekaniikan yleiset aksioomat eri peruslait eli luonnonlait antavat osan vallitsevista yhtälöistä. Niitä ei tarvitse yleensä epäillä. Ne eivät kuitenkaan riitä, vaan lisäksi tarvi-

taan ns. konstitutiivisia yhteyksiä (engl. constitutive relations), jotka pyrkivät kuvaamaan (enemmän tai vähemmän hyvin) eri tapauksissa kulloinkin esiintyvien materiaalien käyttäytymistä. Esimerkkejä: Hooken laki, ihannekaasun tilanyhtälö. Aksioomien ja konstitutiivisten yhteyksien matemaattinen esittäminen vaatii esivalmisteluna ajasta riippuvan geometrian eli kinematiikan käsitteiden hallintaa.

On syytä korostaa termien kinematiikka ja kinetiikka eroa.

Kinematiikka (engl. kinematics) tutkii liikettä geometrisena ilmiönä ottamatta huomioon liikkeen syitä.

Kinetiikka (engl. kinetics) tutkii liikettä ottaen huomioon liikkeen syyt eli voimat.

Tietokoneiden ja numeeristen menetelmien kehitys on synnyttänyt tilanteen, jossa laskenta-algoritmit lähtevät liikkeelle yhä enemmän suoraan mekaniikan perusyhtälöistä ilman analyyttisten ja käsilaskentamenetelmien aikaisemmin vaatimia lukuisia tapauksesta riippuvia yksinkertaistuksia. Tämä suuntaus merkitsee, että soveltajan on hallittava hyvin mekaniikan itse asiassa harvat perusperiaatteet ja niihin liittyvä fysiikka. Vain tällöin hän pystyy käyttämään järkevästi ja luotettavasti hyväkseen insinööriprobleemien ratkaisuun kehitettyjä yhä enemmän vaihtoehtoja tarjoavien ohjelmistojen antamia mahdollisuuksia.

2 PARTIKKELIMEKANIIKKA

Käsittely kohdistuu partikkelisysteemeihin (engl. system of particles) eli siis useista partikkeleista muodostuviin systeemeihin. Syntyvät lauseet pätevät sitten erikoistapauksina myös yhdelle partikkelille tai jäykälle kappaleelle (engl. rigid body) tai useiden jäykkien kappaleiden muodostamille systeemeille. Jäykän kappaleen mallissa otaksutaan, että sen kaikkien partikkelien väliset etäisyydet pysyvät vakioina systeemin liikkuessa. Jäykän kappaleen voidaan myös ajatella olevan kontinuumi, jossa kaikki muodonmuutokset häviävät.

2.1 Partikkelimekaniikan aksioomat

Ns. klassillinen mekaniikka eli Newtonin mekaniikka, jolla tarkoitetaan tässä samaa kuin partikkelimallin käyttöön liittyvää mekaniikkaa, perustuu esimerkiksi lähteessä [2.1] esitetyn teorian mukaan kolmeen aksioomaan eli peruslakiin:

(1) Liikelaki (engl. law of motion), Newtonin II laki, dynamiikan peruslaki. Voiman $\vec{F}$ vaikutuksen alainen partikkeli, jonka massa on m, liikkuu yhtälön

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad (2.1.1)$$

Kuva 2.1.1 Voima, massa ja kiihtyvyys.

mukaisesti, jossa $\vec{a}$ on partikkelin kiihtyvyys.

(2) Voiman ja vastavoiman laki (engl. law of action and reaction). Kun kaksi partikkelia vaikuttavat voimilla toisiinsa, nämä voimat ovat suuruudeltaan yhtä suuria ja suunnaltaan vastakkaisia ja vaikuttavat partikkelien yhdistyssuoralla.

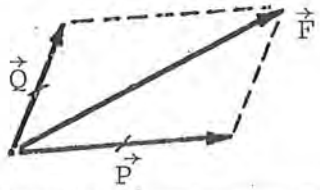
Kuvan 2.1.2 merkinnöin saadaan kaava

$$\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij} \qquad (2.1.2)$$

Kuva 2.1.2 Parittaiset voimat.

joka ei vielä täysin kuvaa lain (2) sisältöä, vaan lisäksi on mainittava tieto voimien vaikutussuorasta; joskus sanotaan, että kyseessä on kuvan 2.1.2 esittämässä tapauksessa voiman ja vastavoiman lain vahva muoto.

(3) Voimien suunnikaslaki (engl. law of the parallelogram of forces). Kun kaksi voimaa $\vec{P}$ ja $\vec{Q}$ vaikuttavat partikkeliin, niiden vaikutus on sama kuin yhden voiman



$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}\ , \qquad (2.1.3)$$

Kuva 2.1.3 Voimat $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ja $\vec{F}$.

jossa vektorisumma on määritelty suunnikassäännön avulla.

Huomautus 1. Liikelaki on voimassa vain ns. inertiaalikehyksessä (engl. inertial frame of reference, Newtonian frame), se on koordinaatistossa, joka on enintään tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä absoluuttisessa levossa olevan koordinaatiston suhteen.

— — —

Huomautus 2. Liikelaki on esitetty lähteessä [2.1] aluksi muodossa $\vec{F} = km\vec{a}$, jossa k on positiivinen vakio, jonka arvo riippuu vain valituista voiman, massan, pituuden ja ajan yksiköistä.

Fysiikan lakien muoto riippuu siitä, mitkä suureet on valittu ns. perussuureiksi (engl. primitive quantity). Yleensä kaikki suureet tietenkin pyritään määrittelemään esimerkiksi matemaattisilla yhtälöillä, kuten partikkelin liikemäärä $\vec{p} = m\vec{v}$, jossa m on

partikkelin massa ja $\vec{v}$ partikkelin nopeus. Tässä on kaikki hyvin niin kauan, kuin m ja $\vec{v}$ ovat jo aikaisemmin määriteltyjä suureita. Mutta teorian rakentaminen on aloitettava aina ottaen tietyt suureet ilman määrittelyä, koska aluksi ei ole mitä panna määrittely-yhtälön oikealle puolelle. Näitä ilman määrittelyä jääviä suureita nimitetään perussuureiksi. Perussuureisiin liitetään vain kuvailua sekä ns. operatiivinen määrittely: kuinka näiden suureiden arvoja mitataan.

Perussuureet ja niiden lukumäärä voidaan valita tarkoituksesta riippuen eri tavoin. Teorian rakenne riippuu myös siitä, miten siinä operoidaan luonnonlaeilla. Näitä asioita käsitellään ns. dimensioanalyysin (engl. dimensional analysis) teoriassa. Jos liikeyhtälö kirjoitetaan muodossa $\vec{F} = km\vec{a}$, se on luonnonlaki (aksiooma), jossa k on universaalinen vakio, joka on määritettävä kokeellisesti. Jos liikeyhtälö kirjoitetaan muodossa $\vec{F} = m\vec{a}$, sitä voidaankin pitää pelkästään voiman määritelmänä eikä aksioomana. Edellisessä tapauksessa perussuureina voisivat olla voima, massa, pituus ja aika sekä jälkimmäisessä vain massa, pituus ja aika. Tätä jälkimmäistä tulkintaa on kritisoitu voimakkaasti ja todettu, että sitä käyttäen mekaniikka ei ole enää kuin tautologiaa [2.2, s.7]. Esimerkiksi statiikassa ei voitaisi käsitellä erillisiä voimia, koska $\vec{a} = \vec{0}$ kullekin partikkelille.

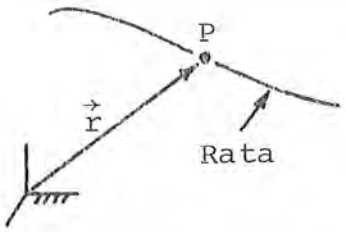
Kun SI-järjestelmässä operoidaan partikkelimekaniikassa perussuureiden massa m ([m] = kg) pituus l ([l] = m) ja aika t ([t] = s) avulla ja käytetään liikelakia yleisesti muodossa (2.1.1) voiman yksikön $N = kgms^{-2}$ määrittelyyn, syntyy siis tiettyjä ajatuksellisia ongelmia. Eräs tapa kiertää ne on ajatella edelleen tarvittaessa myös voima perussuureeksi. Sitä voitaisiin mitata vaikka sen tiettyyn standardijouseen aiheuttaman venymän perusteella. Voiman yksikkö sovitettaisiin sitten suuruudeltaan sellaiseksi, että kaavassa $\vec{F} = km\vec{a}$ k tulisi lukuarvoltaan ykköseksi.

Todettakoon vielä, että suunnikaslakiaksiooma sanoo vain, että voima on vektorisuure. Voitaisiin ajatella, että tämä tulos seuraa suoraan yhtälöstä (2.1.1), koska siinä määritellään $\vec{a}$ partikkelin paikkavektorin toisena aikaderivaattana. Asia on kuitenkin mutkikkaampi, ks. esimerkiksi [2.3].

2.2 Kinematiikka

2.2.1 Yleistä

Tärkeimmät kinematiikan käsitteet ovat partikkelin rata (engl. path), asema (engl. position), nopeus (engl. velocity) ja kiihtyvyys (engl. acceleration):



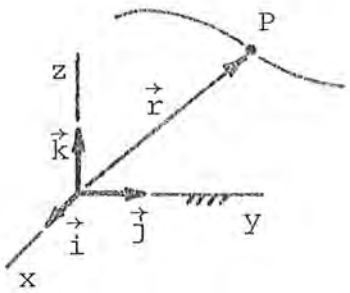
Asema	$\vec{r} = \vec{r}(t)$,
Nopeus	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$,
Kiihtyvyys	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

(2.2.1)

Kuva 2.2.1 Kinematiikan suureita.

Suureen ( ) derivaattaa ajan t suhteen merkitään Newtonin käyttöönottamalla tavalla $(\dot{\ }) \equiv d(\ )/dt$. Kuvan 2.2.1 suureiden yksiköt ovat $[\vec{r}] = m$, $[\vec{v}] = ms^{-1}$, $[\vec{a}] = ms^{-2}$.

Karteesisessa suorakulmaisessa xyz-koordinaatistossa saadaan

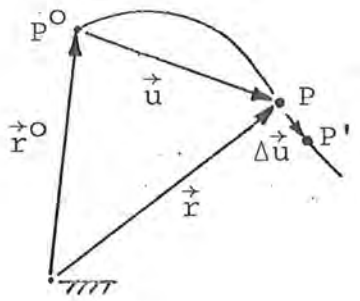


$$\left.\begin{aligned}
\vec{r} &= r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} \\
&= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \\
\vec{v} &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \\
&= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\,, \\
\vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\
&= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.2)$$

Kuva 2.2.2 Karteesinen suorakulmainen koordinaatisto.

Nopeuden ja kiihtyvyyden arvot eivät muutu, vaikka partikkelin paikkavektori on mitattu origon sijasta mielivaltaisen koordinaatistossa olevan kiinteän pisteen suhteen. Kiinteän aineen meka-

niikassa partikkelin radan yhtälö $\vec{r} = \vec{r}(t)$ sekä nopeus ja kiihtyvyys esitetäänkin yleensä kaavojen (2.2.1) sijasta seuraavasti



$$\left.\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}^{\,o} + \vec{u}(t) \,, \\
\vec{u} &= u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \\
&= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \,, \\
\vec{v} &= \dot{\vec{u}} = \dot{u}\vec{i} + \dot{v}\vec{j} + \dot{w}\vec{k} \,, \\
\vec{a} &= \ddot{\vec{u}} = \ddot{u}\vec{i} + \ddot{v}\vec{j} + \ddot{w}\vec{k} \,.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3)$$

Kuva 2.2.3 Siirtymä $\vec{u}$.

Tässä $\vec{u}$ ($[\vec{u}]$ = m) on partikkelin <u>siirtymä</u> (engl. displacement) partikkelille valitun ns. referenssitilan tai alkutilan (viittaus yläviitteellä o) suhteen. Alkutilaksi valitaan tavallisesti kappaleen asema hetkellä t = 0, kun tarkastelun alaiset kuormitukset eivät vielä vaikuta kappaleeseen.

Kuvassa 2.2.3 esitetylle siirtymän muutokselle $\overrightarrow{PP'} = \Delta\vec{r} = \Delta\vec{u}$ käytetään myös usein nimitystä siirtymä. Siirtymä-käsitteen kulloinenkin merkitys selviää täten täsmällisesti vasta mainitsemalla erikseen ko. siirtymään liittyvä alku- ja lopputila.

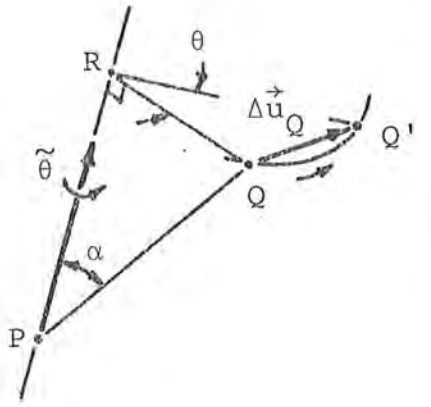
2.2.2 Jäykän kappaleen liike

Jäykän kappaleen siirtymän kuvaamiseen käytetään mm. käsitteitä translaatio ja rotaatio.

Translaatio (engl. translation) eli etenemisliike on jäykän kappaleen liikettä, jossa kappaleen suuntautuneisuus ei muutu. Kaikki jäykän kappaleen partikkelit saavat translaatiossa saman siirtymän. Translaatio-sanalla tarkoitetaan usein paitsi itse ko. liikettä myös vastaavaa siirtymää. Täten jäykän kappaleen yhden mielivaltaisen partikkelin P siirtymä $\overrightarrow{PP'} = \Delta\vec{u}_P$ ilmaisee täysin kappaleen translaation.

Rotaatio (engl. rotation) eli pyörimisliike eli kiertoliike kiinteän suoran — ns. rotaatioakselin — ympäri on jäykän kappaleen liikettä, jossa tällä suoralla olevat partikkelit pysyvät paikoillaan.

Kuvassa 2.2.4 on tarkasteltu rotaatiota pisteen P kautta kulkevan rotaatioakselin PR ympäri. Partikkeli, joka on alkuasemassa pisteessä Q, siirtyy pitkin ympyränkaarta (säde = $|\vec{r}_{Q/P}|\sin\alpha$) loppuasemaan Q'. Käsitteellä kulmasiirtymä (engl. angular displacement) tai myös rotaatio tarkoitetaan suuntaisjanaa (engl. directed line segment) $\tilde{\theta}$ ($[\tilde{\theta}]$ = rad), jonka pituus on kiertymiskulman θ suuruus ja joka on rotaatioakselin PR suuntainen siten, että suunta on oikeakätisen ruuvin etenemissuunnan mukainen.



Kuva 2.2.4 Rotaatio $\tilde{\theta}$.

Suure $\tilde{\theta}$ ei ole vektori, jonka takia ei ole käytetty merkintää $\vec{\theta}$. Jos esimerkiksi suoritetaan kaksi perättäistä rotaatiota pisteen P kautta kulkevien erisuuntaisten rotaatioakselien ympäri, on helppo todeta, että jäykän kappaleen loppuasema riippuu rotaatioiden suoritusjärjestyksestä. Tämä merkitsee, että rotaatiot eivät toteuta vektorilaskennan summan vaihdantalakia koskevaa aksioomaa, joten rotaatioita ei voida pitää vektoreina, mikäli vektori määritellään kuten matematiikassa yleensä on tapana.

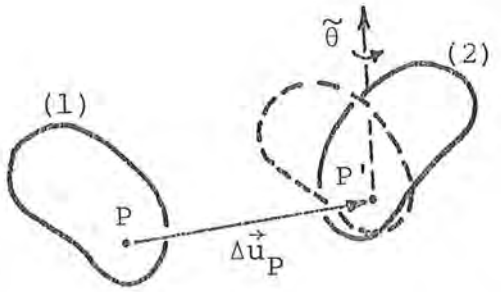
(Joissakin esityksissä kuten esimerkiksi lähteessä [1] rotaatiota nimitetään vektoriksi.)

Voidaan osoittaa, että mitä pienempiä rotaatiot ovat, sitä vähemmän kappaleen loppuasema riippuu rotaatioiden suoritusjärjestyksestä. Infinitesimaalista eli differentiaalista rotaatiota voidaankin pitää vektorina ja sille tullaan käyttämään tunnusta $\vec{\theta}$. Kuvaa 2.2.4 tarkastelemalla ei ole vaikea osoittaa ristitulon määritelmää apuna käyttäen, että rotaatiota $\vec{\theta}$ vastaava pisteessä Q olevan partikkelin infinitesimaalinen eli differentiaalinen siirtymä saadaan yksinkertaisesta kaavasta

$$d\vec{u}_Q = \vec{\theta}\times\vec{r}_{Q/P} \ . \qquad (2.2.4)$$

(Kun siirtymät ovat infinitesimaalisia, vektorin $\vec{r}_{Q/P}$ tai $\vec{r}_{Q'/P}$ käytöllä tässä kaavassa ei ole eroa.) Äärellisen rotaation yhteydessä vastaavasta lausekkeesta tulee huomattavasti monimutkaisempi.

Ns. Chasles'n lauseen mukaan



Jäykän kappaleen yleinen siirtymä on samanarvoinen kuin siirtymä, joka aikaansaadaan suorittamalla ensin translaatio ja sitten rotaatio siirtopisteen kautta kulkevan suoran ympäri.

Kuva 2.2.5 Jäykän kappaleen siirtymä.

Siirtopisteellä tarkoitetaan jäykän kappaleen mielivaltaista partikkelia (kuvassa 2.2.5 partikkeli P), jonka avulla translaatio ajatellaan konstruoiduksi, siten että ko. partikkeli siirtyy alkuasemasta (1) loppuasemaan (2). Translaation $\Delta\vec{u}_P$ osuus riippuu yleensä siirtopisteen P valinnasta, mutta vaadittavan rotaation $\tilde{\theta}$ suuruus ja suunta on siitä riippumaton.

Chasles'n lause voidaan lausua myös muodossa, jossa suoritetaan ensin rotaatio ja sitten translaatio tai molemmat samanaikaisesti.

Kun tarkastellaan pientä ajan väliä, kappaleen liike on vähäistä ja erityisesti Chasles'n lauseeseen liittyvä vaadittu rotaatio $\tilde{\theta}$ on pieni. Differentiaalisen ajan välin dt yhteydessä se muuttuu tietyksi differentiaaliseksi rotaatioksi $\vec{\theta}$. (Tässä ei ole haluttu käyttää usein esiintyvää merkintää $d\vec{\theta}$. On nimittäin huomattava, että yleiseen jäykän kappaleen liikkeeseen ei voida liittää jonkinlaista kappaleen suuntautuneisuutta kuvaavaa vektoria $\vec{\theta} = \vec{\theta}(t)$, siten että sen differentiaali ajan muutoksen dt johdosta antaisi vastaavan differentiaalisen rotaation arvon. Tasoliikkeessä tällainen vektori voidaan kuitenkin määritellä.) Lisäämällä rotaatiosta johtuvaan yleisen partikkelin Q differentiaaliseen siirtymään (2.2.4) translaatiosta johtuva differentiaalinen siirtymä $d\vec{u}_P$ saadaan tulos

$$\boxed{d\vec{u}_Q = d\vec{u}_P + \vec{\theta}\times\vec{r}_{Q/P} \; .} \qquad (2.2.5)$$

Kun siis tunnetaan jäykän kappaleen yhden partikkelin differentiaalinen siirtymä ja jäykän kappaleen differentiaalinen kulmasiirtymä, jäykän kappaleen jokaisen muun partikkelin differentiaalinen siirtymä voidaan laskea kaavan (2.2.5) avulla. Tätä kaavaa käytetään ns. pienten siirtymien teoriassa hyvin yleisesti vastaavana pieniä äärellisiä siirtymiä koskevana. Usein käytännössä esimerkiksi jonkin koneen alustarakenne voi olla mitoiltaan luokkaa muutamia metrejä kun taas siirtymät voivat olla luokkaa muutamia millimetrejä. Jos alusta voidaan käsitellä jäykkänä, kaavat (2.2.5) ovat tällöin vielä äärellisiä siirtymiä koskevinakin erittäin tarkkoja.

Jäykän kappaleen <u>kulmanopeus</u> (engl. angular velocity) $\vec{\omega}$ ($[\vec{\omega}]$ = rads^{-1}) määritellään kullakin hetkellä suhteena

$$\boxed{\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\tilde{\theta}}{\Delta t} = \frac{\vec{\theta}}{dt} \; ,} \qquad (2.2.6)$$

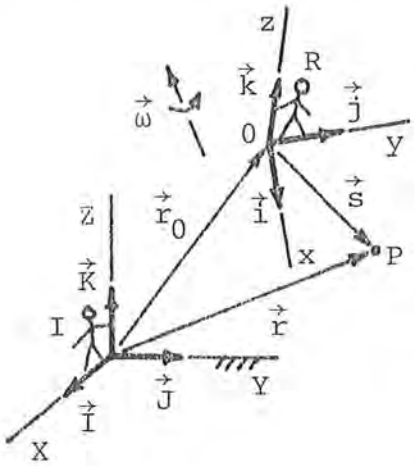
jossa $\vec{\theta}$ on ajan differentiaalia dt vastaava differentiaalinen kulmasiirtymä.

Jakamalla yhtälö (2.2.5) ajan differentiaalilla dt saadaan jäykän kappaleen partikkelien nopeuksia koskeva yleinen tulos

$$\boxed{\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega}\times\vec{r}_{Q/P} \; .} \qquad (2.2.7)$$

2.2.3 Suhteellinen liike

Kuvan 2.2.6 esittämät kaksi koordinaatistoa ovat liikkeessä toistensa suhteen. Voidaan osoittaa, että havaitsijoiden I ja R mittaamien partikkelin P kiihtyvyyksien $\vec{a}$ ja $\vec{a}_r$ välillä on yhteys



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{s} + \\ + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{s}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r\ ,\end{aligned}} \qquad (2.2.8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{a} &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_I = \ddot{X}\vec{I} + \ddot{Y}\vec{J} + \ddot{Z}\vec{K}\ ,\\
\vec{a}_r &= \left(\frac{d^2\vec{s}}{dt^2}\right)_R = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\ ,\\
\vec{a}_0 &= \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right)_I = \ddot{X}_0\vec{I} + \ddot{Y}_0\vec{J} + \ddot{Z}\vec{K}\ ,\\
\vec{v}_r &= \left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.9)$$

Kuva 2.2.6 Kaksi koordinaatistoa.

Käytettyjen tunnusten merkitys lienee ilmeinen. Suure $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}_{R/I}$) on xyz-koordinaatiston kulmanopeus XYZ-koordinaatiston suhteen. Suure $\dot{\vec{\omega}}$ ($\dot{\vec{\omega}}_{R/I}$) = $(d\vec{\omega}/dt)_I$ on vastaava kulmakiihtyvyys. Kaavalla (2.2.8) on käyttöä mm., kun liikettä tarkastellaan koordinaatistossa, joka ei ole inertiaalikehys (ks. kohta 2.3.11).

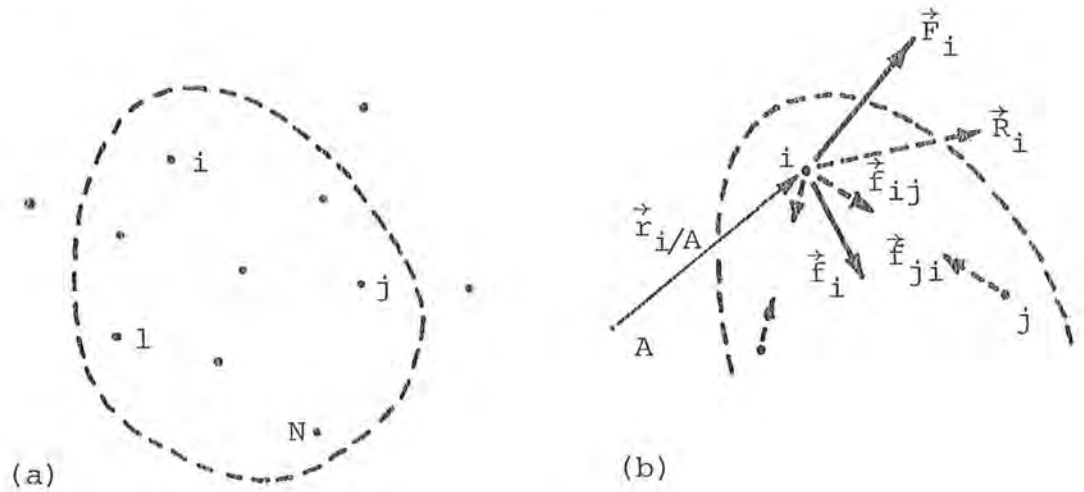
Huomautettakoon, että tietyn koordinaatiston määrittely vaatii käytännössä jonkin enemmän tai vähemmän — mieluummin enemmän — jäykän kappaleen olemassaoloa. Kuvan 2.2.6 yhteydessä mainittu koordinaatiston kulmanopeus tarkoittaa itse asiassa sen jäykän kappaleen kulmanopeutta, johon ko. koordinaatisto on ajateltu kiinnitetyksi.

2.3 Kinetiikka

2.3.1 Yleistä

Tässä kohdassa esitetään joitakin yleisiä käsitteitä, joista osa kuuluisi itse asiassa kinematiikkaan, mutta jotka on otettu tähän lähemmäksi tulevia sovellutuksiaan.

Partikkelisysteemi. Termi kappale (engl. body, material body) on mekaniikassa yleisnimitys tietylle koko ajan samoista ainehiukkasista muodostuvalle systeemille. Siis esimerkiksi tiettyä nestemäärää pidetään tässä mielessä kappaleena. Partikkelimallin yhteydessä puhutaan kappaleen sijasta usein partikkelisysteemistä. Kuvassa 2.3.1 (a) on esitetty tässä partikkelisystee-



$\vec{F}_i$ = partikkeliin i vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti

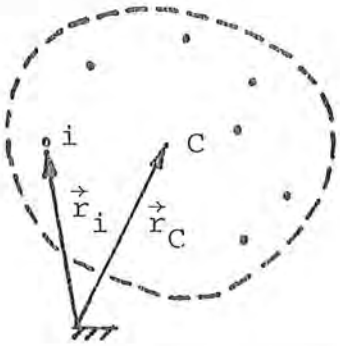
$\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{f}_{ij}$ = partikkeliin i vaikuttavien sisäisten voimien resultantti

$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i$ = partikkeliin i vaikuttavien voimien resultantti

Kuva 2.3.1 (a) Partikkelisysteemi. (b) Partikkelisysteemiin vaikuttavia voimia.

min numeroinnissa ja kuvassa (b) vaikuttavien voimien merkinnöissä käytettäviä tunnuksia. Jatkossa pelkkä summamerkki Σ tulee tarkoittamaan summaa kaikkien systeemin partikkelien yli.

Partikkelisysteemille johdetuissa lauseissa esiintyy usein systeemin ns. massakeskiö (engl. center of mass) C — käytetään myös huonompaa nimitystä painopiste —, jonka paikkavektori origon suhteen määritellään kaavalla



$$\boxed{m\dot{\vec{r}}_C = \Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_i} \qquad (2.3.1)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} mx_C &= \Sigma\, m_i x_i\,, \\ my_C &= \Sigma\, m_i y_i\,, \\ mz_C &= \Sigma\, m_i z_i\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1')$$

Kuva 2.3.2 Massakeskiö.

jossa m_i on partikkelin i massa ja

$$m = \Sigma\, m_i \qquad (2.3.2)$$

systeemin kokonaismassa.

Rajoitteet ja yleistetyt koordinaatit. Systeemin partikkelit eivät ole yleensä täysin vapaita liikkumaan, vaan tietyt kinemaattiset ehdot eli side-ehdot eli rajoitusehdot eli rajoitteet (engl. constraint) vähentävät liikemahdollisuuksia. Vastaavasti puhutaan systeemin ns. sidotusta liikkeestä (engl. constrained motion).

Tässä tullaan tarkastelemaan vain ns. holonomisia (engl. holonomic) systeemeitä, joissa rajoitteet ovat sellaisia, että partikkelien asema voidaan esittää lopuksi muodossa

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)\,,} \qquad i = 1,2,\ldots,N \qquad (2.3.3)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ , \\ y_i &= y_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ , \\ z_i &= z_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.3')$$

Riippumattomia suureita $q_1,q_2,\ldots,q_n$, jotka siis määrittävät systeemin aseman, nimitetään <u>yleistetyiksi koordinaateiksi</u> (engl. generalized coordinate) tai usein myös <u>vapausasteiksi</u> (engl. degree of freedom). Systeemin vapausasteiden lukumäärä n on kullekin systeemille ominainen vakio; sen sijaan yleistetyt koordinaatit voidaan valita periaatteessa äärettömän monella tavalla.

Yleistetyt koordinaatit q ovat ajan t funktioita $q = q(t)$, mutta aika voi lisäksi esiintyä eksplisiittisesti koordinaattien lausekkeissa (2.3.3); tätä tapausta nimitetään <u>reonomiseksi</u> (engl. rheonomic). Käytännössä ns. <u>skeleronominen</u> (engl. scleronomic) tapaus, jossa eksplisiittinen riippuvuus ajasta t häviää lausekkeista (2.3.3) on tavallisempi.

Etenkin rakenteiden mekaniikassa, jossa partikkelien koordinaattien arvot eivät yleensä liiku kovin laajalla alueella, käsitellään esityksen (2.3.3) sijasta siirtymiä (vrt. kuva (2.2.3):

$$\boxed{\vec{u}_i = \vec{u}_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ ,} \qquad i = 1,2,\ldots,N \qquad (2.3.4)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} u_i &= u_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ , \\ v_i &= v_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ , \\ w_i &= w_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.4')$$

Jos muoto (2.3.3) tunnetaan, muoto (2.3.4) seuraa välittömästi — ja kääntäen — , sillä esimerkiksi

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \vec{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) - \vec{r}_i^{\,o} \\ &= \vec{u}_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ . \end{aligned} \qquad (2.3.5)$$

Yleistettyjä koordinaatteja käytetään tavallisimmin jäykkien kappaleiden muodostamien systeemien yhteydessä. Koska jäykän kappaleen partikkelien lukumäärä on ääretön, partikkeleita ei voida identifioida numeroimalla, vaan tätä tarkoitusta varten tulee jokaiseen jäykkään kappaleeseen kiinnittää sopiva kappaleen mukana liikkuva paikallinen koordinaatisto — esimerkiksi koordinaatit a, b ja c —, jolloin tietyt koordinaattien arvot identifioivat partikkelin (vrt. Lagrangen esitystapa kohdassa 3.3.2 sekä esimerkki 2.3.1). Esimerkiksi kaava (2.3.4) kirjoitetaan tällöin muotoon

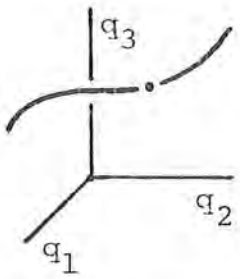
$$\vec{u} = \vec{u}(a,b,c;q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ . \tag{2.3.6}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} u &= u(a,b,c;q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ , \\ v &= v(a,b,c;q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ , \\ w &= w(a,b,c;q_1,q_2,\ldots,q_n,t) \ . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.6'}$$

Usein kuitenkin on tapana jättää parametrit a, b ja c merkintöjen yksinkertaistamiseksi pois muuttujaluettelosta.

Mielivaltaisen yleistettyjen koordinaattien avulla kuvatun systeemin liikkeen



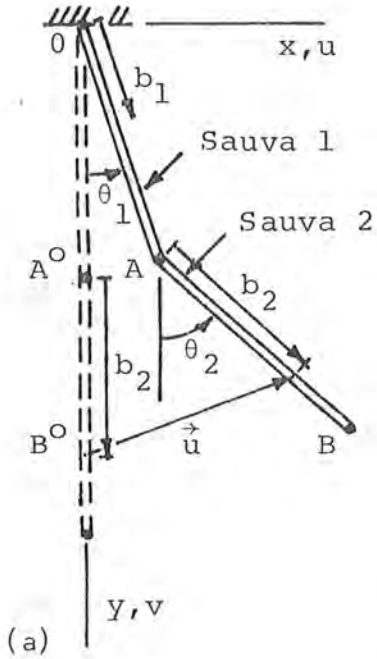
$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_1(t) \ , \\ q_2 &= q_2(t) \ , \\ &\ldots \\ q_n &= q_n(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.7}$$

Kuva 2.3.3 Konfiguraatioavaruus.

voidaan ajatella esittävän kuvitellun partikkelin liikettä kuvitellussa n-dimensioisessa avaruudessa — ns. <u>konfiguraatioavaruudessa</u> (engl. configuration space) —, jonka koordinaatteja ovat $q_1,q_2,\ldots,q_n$. Täten yleistettyjen koordinaattien käyttö muuntaa

mielivaltaisen systeemin liikkeen tarkastelun muodollisesti yhden partikkelin liikkeen tarkasteluksi.

Esimerkki 2.3.1 Kaksoisheiluri. Kuvan (a) esittämä systeemi muodostuu kahdesta hoikasta jäykästä sauvasta. Systeemissä on nivelet pisteissä O ja A ja liike on rajoitettu xy-tasoon. Tarkastellaan yleistettyjen koordinaattien valintaa.



(a)

Esimerkiksi ottamalla yleistetyiksi koordinaateiksi kulmat $\theta_1 = q_1$ ja $\theta_2 = q_2$ kaavojen (2.3.6) vastineiksi saadaan kuvaa tarkastelemalla (otetaan systeemin alkuasemaksi katkoviivoituksella esitetty asema)

$$\left.\begin{aligned} u &= b_1\sin\theta_1 \,, \\ v &= b_1\cos\theta_1 - b_1 \,, \end{aligned}\right\} \text{sauva 1} \qquad \text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= l\sin\theta_1 + b_2\sin\theta_2 \,, \\ v &= l\cos\theta_1 + b_2\cos\theta_2 - l - b_2 \,, \end{aligned}\right\} \text{sauva 2} \qquad \text{(b)}$$

jossa l on yhtä pitkiksi otaksuttujen sauvojen pituus sekä b_1 ja b_2 ovat valitut sauvakohtaiset paikalliset koordinaatit, jotka identifioivat ko. partikkelin.

Kyseessä on holonominen skleronominen kahden vapausasteen systeemi. Yleistetyiksi koordinaateiksi kelpaisivat myös esimerkiksi suureet x_A ja x_B tai x_A ja θ_2. Jos esimerkiksi tuelle O annettaisiin jokin ajasta eksplisiittisesti riippuva pakkoliike, systeemi muuttuisi reonomiseksi.

Pienten siirtymien tapauksessa $\sin\theta \approx \theta$ ja $\cos\theta \approx 1$ ja päästään yleistettyjen koordinaattien suhteen lineaariseen esitykseen

$$\left.\begin{aligned} u &= b_1\theta_1 \,, \\ v &= 0 \,, \end{aligned}\right\} \text{sauva 1} \qquad \text{(c)}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= l\theta_1 + b_2\theta_2 \,, \\ v &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \text{sauva 2} \qquad \text{(d)}$$

Differentiaalisille siirtymille saadaan lausekkeista (a) ja (b) esitykset

$$\left.\begin{aligned} du &= b_1\cos\theta_1\cdot d\theta_1 \,, \\ dv &= -b_1\sin\theta_1\cdot d\theta_1 \,, \end{aligned}\right\} \text{sauva 1} \qquad \text{(e)}$$

$$\left.\begin{aligned} du &= l\cos\theta_1\cdot d\theta_1 + b_2\cos\theta_2\cdot d\theta_2 \,, \\ dv &= -l\sin\theta_1\cdot d\theta_1 - b_2\sin\theta_2\cdot d\theta_2 \,. \end{aligned}\right\} \text{sauva 2} \qquad \text{(f)}$$

Voimien luokittelua. Systeemiin vaikuttavat voimat voidaan jaotella mekaniikassa tarkoituksesta riippuen usealla eri tavalla.

(1) Ulkoiset ja sisäiset voimat. Systeemin partikkeliin vaikuttavaa voimaa sanotaan sisäiseksi voimaksi (engl. internal force), jos sen synnyttää toinen systeemiin kuuluva partikkeli; muussa tapauksessa voima on ulkoinen (engl. external force).

On helppo osoittaa tärkeät yksinkertaiset tulokset (ks. kuva 2.3.1 (b))

$$\boxed{\begin{aligned} &\Sigma\, \vec{f}_i = \vec{0}\,, \\ &\Sigma\, \vec{r}_{i/A} \times \vec{f}_i = \vec{0} \end{aligned}} \qquad (2.3.8)$$

eli sisäisten voimien resultantti ja momentti mielivaltaisen pisteen suhteen ovat nollia; ts. sisäisten voimien muodostama voimasysteemi on ns. nollavoimasysteemi (engl. zero force system).

Edellisen perusteella saadaan kaavat

$$\left.\begin{aligned} &\vec{F} \equiv \Sigma\, \vec{R}_i = \Sigma\, \vec{F}_i + \cancel{\Sigma\, \vec{f}_i} = \Sigma\, \vec{F}_i\,, \\ &\vec{M} \equiv \Sigma\, \vec{r}_{i/A} \times \vec{R}_i = \Sigma\, \vec{r}_{i/A} \times \vec{F}_i + \cancel{\Sigma\, \vec{r}_{i/A} \times \vec{f}_i} = \Sigma\, \vec{r}_{i/A} \times \vec{F}_i \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.9)$$

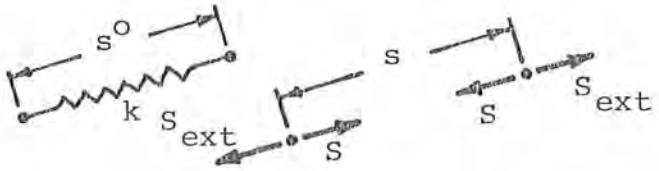
eli partikkelisysteemiin vaikuttavien voimien resultantti $\vec{F}$ on yhtä suuri kuin ulkoisten voimien resultantti ja voimien momentti $\vec{M}$ mielivaltaisen pisteen suhteen on yhtä suuri kuin ulkoisten voimien momentti tämän pisteen suhteen.

Esimerkkeinä ulkoisista voimista mainittakoon valitun systeemin ulkopuolisesta massasta johtuvat gravitaatiovoimat ja ulkopuolisten partikkelien synnyttämät kosketusvoimat. Samat esimerkkitapaukset pätevät myös sisäisinä voimina, kun ko. partikkelit kuuluvat systeemiin.

Systeemin voimien jako ulkoisiin ja sisäisiin voimiin on kaikkein tärkein voimien luokitteluperuste. Se tulee esille etenkin liikemäärän ja liikemäärämomentin periaatteiden yhteydessä. Jatkossa tullaan tarvittaessa merkitsemään ulkoisiin ja sisäisiin voimiin liittyviä suureita viitteillä ext ja int.

(2) Konstitutiiviset voimat ja rajoitevoimat. Kun systeemissä esiintyy kinemaattisia rajoitteita, kuhunkin rajoitteeseen täytyy ajatella liittyväksi tietty rajoitevoima (engl. force of constraint) eli pakkovoima eli reaktiovoima eli tukireaktio, joka pakoittaa systeemin liikkeen aina sellaiseksi, että rajoitteet toteutuvat. Rajoitevoimat poikkeavat systeemin muista voimista siinä suhteessa, että niiden arvoja ei voida laskea tietyn ns. konstitutiivisen yhteyden (engl. constitutive equation) avulla, vaan ne täytyy määrittää — mikäli yleensä mahdollista — partikkelien liike- tai tasapainoyhtälöistä, kun partikkelien kiihtyvyydet ja muut systeemiin vaikuttavat voimat ovat selvillä. Tässä tullaan nimittämään muita kuin rajoitevoimia eli siis konstitutiivisia yhteyksiä noudattavia voimia lyhyesti konstitutiivisiksi voimiksi. (Nimitys ei ole yleisessä käytössä.)

Vakiopainovoimakentän otaksuman mukainen, massan m omaavaan partikkeliin vaikuttava voima $m\vec{g}$ ($\vec{g}$ on putoamiskiihtyvyys) on yksinkertaisin esimerkki konstitutiivisesta voimasta. Tämä voima ei riipu lainkaan partikkelin asemasta tai liiketilasta. Otetaan toiseksi esimerkiksi kimmoisen massattoman lineaarisen jousen (engl. linear spring) mallin mukaiseksi otaksuttu kahden partikkelin välillä vaikuttavan voiman S lauseke



$$\boxed{S = k(s-s^{o})\ .} \qquad (2.3.10)$$

Kuva 2.3.4 Lineaarinen jousi.

Tässä k ($[k] = Nm^{-1}$) on jousen ns. jousivakio (engl. spring constant) ja $s-s^{o}$ jousen venymä. Kun partikkelien asemat ovat selvillä, venymä ja siis voiman S arvo voidaan aina laskea. Jos sen sijaan asetetaan jäykän kappaleen mallin mukainen ehto: etäisyys on vakio = s^{o}, voimaa S ei saada enää lasketuksi kaavasta (2.3.10). Rajoite voitaisiin ajatella aikaansaaduksi antamalla jousivakion arvon lähestyä ääretöntä, jolloin venymä lähestyy nollaa ja kaava (2.3.10) antaa voimalle S epämääräisen arvon $\infty \cdot 0$.

Rajoitevoimat liittyvät aina käytetyn mallin liioiteltuun jäykkyyteen, joka ei vastaa todellisuutta. Esimerkiksi tapausta jäykkä pallo vierii jäykällä alustalla ei ole todellisuudessa olemassa, vaan pallo painuu tietyn matkan alustaan muuttaen itsekin muotoaan ja alustasta palloon kohdistuva voima muodostuu läheisten molekyylien välisistä tiettyjä konstitutiivisia yhteyksiä noudattavista voimista. Jäykkien mallien käyttö merkitsee kuitenkin tässä palloon kohdistuvan kosketuskohdassa vaikuttavan tuntemattoman rajoitevoiman otaksumista.

Rajoitevoimien erityisen luonteen vuoksi mekaniikan tehtävissä syntyvät yhtälöt pyritään yleensä mikäli mahdollista muotoilemaan siten, että tuntemattomat rajoitevoimat eivät esiinny niissä. Tämä tapahtuu systemaattisesti virtuaalisen työn periaatteen avulla.

(3) Konservatiiviset ja epäkonservatiiviset voimat. Systeemin partikkeliin vaikuttavaa voimaa sanotaan konservatiiviseksi voimaksi (engl. conservative force), jos sen systeemiin tekemä työ riippuu vain systeemin alku- ja lopputilasta eikä systeemin näiden tilojen välillä kulkemasta tiestä; muussa tapauksessa voima on epäkonservatiivinen (engl. nonconservative).

Jos voima syntyy ns. voimakentän johdosta, voima $\vec{F}$ on konservatiivinen, jos on olemassa pelkästään voiman vaikutuspisteen paikan $\vec{r}$ funktio $V(\vec{r})$ siten, että

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}V \ ,} \tag{2.3.11}$$

jossa $\vec{\nabla}V$ on funktion V gradientti. Funktiota V ([V] = J) nimitetään voiman $\vec{F}$ potentiaalienergiaksi (engl. potential energy). Miinusmerkki kaavassa (2.3.11) ei ole oleellinen, mutta on vakiintunut käyttöön. Karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa kaavan (2.3.11) vastine on

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \ .} \tag{2.3.11'}$$

Potentiaalienergian lausekkeeseen voidaan lisätä mielivaltainen vakio ilman, että voiman $\vec{F}$ arvo muuttuu. Pistettä, jossa

V:n arvo kiinnitetään — otetaan tavallisesti arvo nolla — nimitetään usein vertailupisteeksi (engl. datum).

Jos operoidaan rakenteiden mekaniikassa käytetyn tavan mukaan partikkelin paikkavektorin $\vec{r}$ sijasta partikkelin siirtymän $\vec{u}$ avulla,

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,o} + \vec{u} \tag{2.3.12}$$

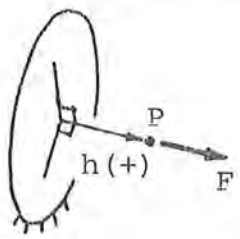
eli

$$x = x^o + u \ , \quad y = y^o + v \ , \quad z = z^o + w \ . \tag{2.3.12'}$$

Potentiaalienergia $V(\vec{r})$ on sijoituksen (2.3.12) jälkeen siirtymän $\vec{u}$ funktio $V = V(\vec{u}) = V(u,v,w)$. Suureiden x, y ja z roolit korvautuvat suureilla u, v, w. Esimerkiksi kaavat (2.3.11') saavat muodon

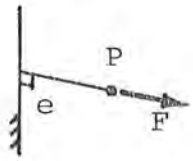
$$\boxed{F_x = -\frac{\partial V}{\partial u} \ , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial v} \ , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial w} \ .} \tag{2.3.13}$$

Yleisimmät konservatiiviset kenttävoimat ja niiden potentiaalienergian lausekkeet sisältyvät seuraaviin tapauksiin:



(1) Voima $\vec{F}$ on kohtisuorassa kiinteää tasoa vastaan ja voiman skalaariarvo riippuu vain (merkillä varustetusta) etäisyydestä h:F = F(h). Potentiaalienergia

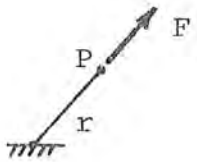
$$V(h) = -\int F(h)\,dh \ . \tag{2.3.14}$$



(2) Voiman $\vec{F}$ vaikutussuora leikkaa kiinteän suoran kohtisuoraan ja voiman skalaariarvo riippuu vain etäisyydestä h:F = F(e). Potentiaalienergia

$$V(e) = -\int F(e)\,de \ . \tag{2.3.15}$$

Kuva 2.3.5 jatkuu



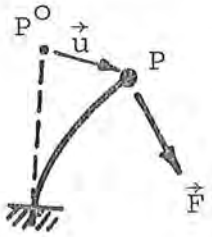
(3) Keskeisvoiman $\vec{F}$ skalaariarvo riippuu vain etäisyydestä r:$F = F(r)$. Potentiaalienergia

$$V(r) = -\int F(r)\,dr \ . \qquad (2.3.16)$$

Kuva 2.3.5 Potentiaalienergian lausekkeita.

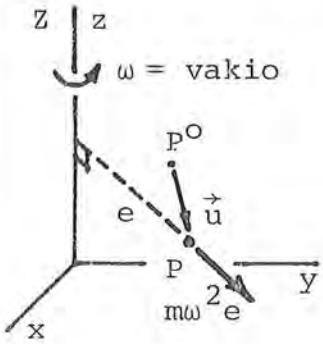
Esiintyvät integraalit tarkoittavat funktioiden $F(h)$, $F(e)$ ja $F(r)$ integraalifunktioita. Kun potentiaalienergian lausekkeisiin sijoitetaan lopuksi tilanteesta riippuvat yhteydet $h = h(x,y,z)$ tai $h = h(u,v,w)$ jne., päästään niin haluttaessa esitykseen $V = V(x,y,z)$ tai $V = V(u,v,w)$ jne.

Kuvassa 2.3.6 on esitetty kolmen usein esiintyvän konservatiivisen voiman potentiaalienergian kaavat siirtymien avulla lausuttuina ottaen vertailupisteeksi partikkelin asema alkutilassa.



(1) Vakiovoima $\vec{F}$. Tarkemmin siis suunnaltaan ja suuruudeltaan vakioarvoisen voiman potentiaalienergia

$$V = -(F_x u + F_y v + F_z w) \ . \qquad (2.3.17)$$



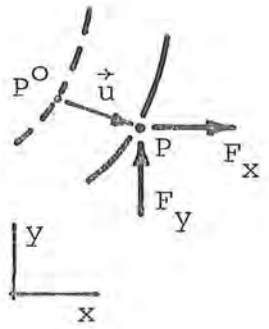
(2) Keskipakovoima $\vec{F} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ eli

$$F_x = m\omega^2(x^o+u) \approx m\omega^2 x^o \ ,$$
$$F_y = m\omega^2(y^o+v) \approx m\omega^2 y^o \ , \qquad (2.3.18)$$

jossa likimääräiset muodot liittyvät pienten siirtymien teoriaan. Potentiaalienergia

$$V = -m\omega^2(x^o u + \tfrac{1}{2}u^2 + y^o v + \tfrac{1}{2}v^2)$$
$$\approx -m\omega^2(x^o u + y^o v) \ . \qquad (2.3.19)$$

Kuva 2.3.6 jatkuu



(3) Lineaarinen palautusvoima $\vec{F}$ tasotapauksessa eli

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad (2.3.20)$$

eli

$$\{F\} = -[k]\{u\} \ , \qquad (2.3.20')$$

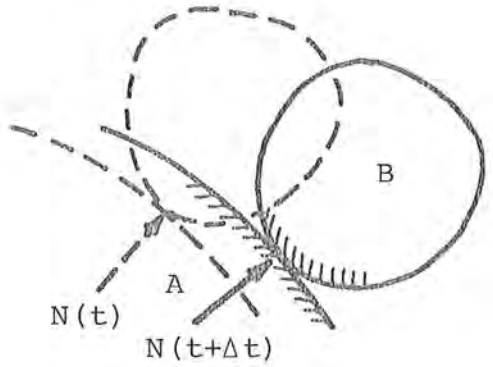
jossa [k] on symmetrinen. Potentiaalienergia

$$V = \frac{1}{2}\{u\}^T[k]\{u\} \ . \qquad (2.3.21)$$

Kuva 2.3.6 Konservatiivisia voimia.

Lausekkeet saadaan kuvan 2.3.5 tulosten erikoistapuksina. Tapauksen (3) yleistys kolmeen dimensioon on ilmeinen.

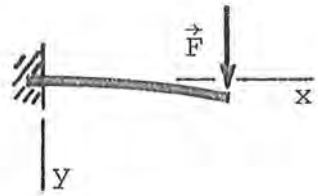
Systeemissä vaikuttaa yleensä myös (makroskooppisia) voimia, joita ei voida esittää voimakentän avulla, vaan sen sijaan nämä voimat voidaan määritellä vain tietyn kappaleen tai kappaleiden yhteydessä. Näitä ovat mm. rajoitevoimat. Tämäntyyppiset voimat ovat konservatiivisia, jos niiden tekemä työ on aina nolla, koska silloin niiden tekemä työ ei selvästikään riipu systeemin kulkemasta tiestä. Rajoitevoimat ovat tavallisesti tässä mielessä konservatiivisia. Kuitenkin jos rajoitteet ovat eksplisiittisesti ajasta riippuvia — reonominen tapaus — vastaavien rajoitevoimien tekemän työn ei tarvitse hävitä, joten tällöin rajoitevoimat ovat epäkonservatiivisia. Esimerkki:



Jäykkä kappale B — on tässä tarkasteltava kappale — vierii tai liukuu pitkin annetussa pakkoliikkeessä olevaa jäykkää kappaletta A. Rajoitevoiman N kappaleeseen B tekemä työ on nollasta eroava paitsi, jos kappaleen A liike häviää.

Kuva 2.3.7 Epäkonservatiivinen rajoitevoima.

Kuvassa 2.3.8 on esitetty lisäesimerkkejä epäkonservatiivisista voimista. Ajasta eksplisiittisesti riippuvat voimat ovat aina epäkonservatiivisia. Nopeudesta riippuvat voimat — kuten



(1) Harmoninen voima

$$\vec{F} = \hat{F}\sin\omega t\vec{j} \ . \qquad (2.3.22)$$

Voiman amplitudi $\hat{F}$ ja kulmataajuus ω ovat vakioita.

(2) Seuraajavoima $\vec{F}$ (engl. follower force, slave force). Voiman suunta yhtyy sauvan akselin suuntaan sauvan pään kohdalla.

(3) Vastusvoima

$$R = \alpha v \quad \text{tai} \quad R = \beta v^2 \ , \qquad (2.3.23)$$

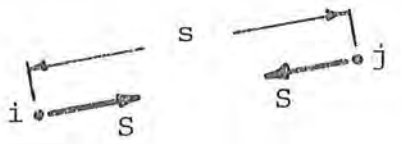
Suureet α ja β ovat positiivisia kertoimia ja v on partikkelin vauhti.

Kuva 2.3.8 Epäkonservatiivisia voimia.

esimerkiksi kitka- ja vastusvoimat — ovat melkein aina epäkonservatiivisia. Ns. gyroskooppiset voimat (engl. gyroscopic force) [2.4], jotka ovat aina kohtisuorassa liikesuuntaa vastaan, ovat ainoita nopeudesta riippuvia konservatiivisia voimia, sillä niiden tekemä työ häviää todellisessa liikkeessä. Tavallisin esimerkki gyroskooppisesta voimasta on Coriolisvoima $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r$, kun toimitaan rotaatiossa olevassa koordinaatistossa.

Edellä on käsitelty lähinnä yhteen partikkeliin vaikuttavia konservatiivisia tai epäkonservatiivisia voimia. Sama käsittely pätee luonnollisesti myös partikkelisysteemin kuhunkin partikkeliin vaikuttavien ulkoisten voimien suhteen. Sisäiset parittain esiintyvät voimat vaativat lisätarkastelua.

Parittaiset sisäiset voimat $\vec{f}_{ij}$ ja $\vec{f}_{ji}$ ovat konservatiivisia, jos on olemassa pelkästään partikkelien i ja j välisen etäisyyden s funktio $V_{ij}(s)$ — ns. sisäinen potentiaalienergia — siten, että



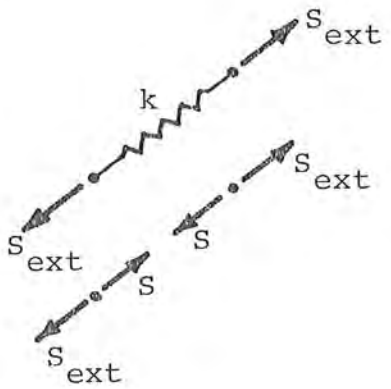
$$\boxed{S = \frac{dV_{ij}}{ds}\,,} \qquad (2.3.24)$$

Kuva 2.3.9 Konservatiivinen sisäinen voima S.

jossa S on ko. parittaisten voimien skalaariarvo siten, että positiivinen arvo vastaa "vetoa". Tämä tarkoittaa toisin sanottuna, että <u>voimat ovat konservatiivisia, jos voima S on pelkästään etäisyyden s funktio</u>, sillä potentiaalienergia V_{ij} saadaan tällöin funktion S(s) integraalifunktiona. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi suureita S ja s ei ole varustettu tässä indekseillä. Jos suureen S merkki määritellään päinvastoin kuin tässä, kaava (2.3.24) on varustettava vastaavasti miinusmerkillä.

Jos S on jäykän kappaleen malliin ($s = s^o$) liittyvä rajoitevoima, voimat $\vec{f}_{ij}$ ja $\vec{f}_{ji}$ ovat selvästi konservatiivisia, koska niiden yhteensä tekemä työ on aina nolla (ks. esimerkki 2.3.2).

Kuvassa 2.3.10 on esitetty lineaarisen jousen mallin mukaiseen sekä gravitaatiovoiman mukaiseen tapaukseen liittyvät sisäisen



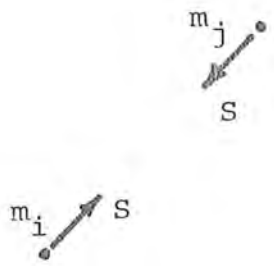
(1) Lineaarinen jousi. Voima

$$S = k(s-s^o)\,, \qquad (2.3.25)$$

jossa $s-s^o$ on jousen venymä ja k jousen jousivakio. Sisäinen potentiaalienergia

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\,k(s-s^o)^2\,.} \qquad (2.3.26)$$

Kuva 2.3.10 jatkuu



(2) Kahden partikkelin välinen gravitaatiovoima. Voima

$$S = \gamma \frac{m_i m_j}{s^2} , \qquad (2.3.27)$$

jossa γ on yleinen gravitaatiovakio. Sisäinen potentiaalienergia

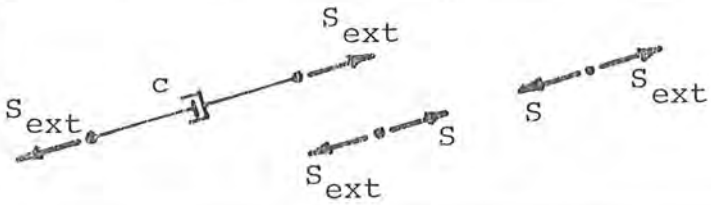
$$\boxed{V = -\gamma \frac{m_i m_j}{s} .} \qquad (2.3.28)$$

Kuva 2.3.10 Konservatiivisia sisäisiä voimia.

potentiaalienergian lausekkeet. Vertailutilaksi, jossa potentiaalienergia on nolla, on otettu jousen tapauksessa jousen lepopituus s^o — siis pituus, jossa jousivoima häviää — ja gravitaatiovoiman tapauksessa tila $s = \infty$.

Rakenteiden mekaniikassa puhutaan sisäisen potentiaalienergian sijasta tavallisesti kimmoenergiasta tai muodonmuutosenergiasta (engl. strain energy).

Ns. lineaarinen vaimennin (engl. linear damper), jossa



$$\boxed{S = c\dot{s}} \qquad (2.3.29)$$

Kuva 2.3.11 Lineaarinen vaimennin.

ja jossa $\dot{s} = d(s-s^o)/dt$ on jousen venymänopeus ja c ($[c] = Nm^{-1}s$) on jousen ns. vaimennusvakio (engl. coefficient of viscous damping) on esimerkki epäkonservatiivisesta sisäisestä voimasta. Huomautettakoon, että tavalliset jousen ja vaimentimen mallit voidaan ajatella kahden massattoman partikkelin systeemeiksi,

joissa symbolinen jousen tai mäntä-sylinterin kuva ilmaisee partikkelien välillä vallitsevan vuorovaikutuksen tyypin. Tämän ajattelun korostamiseksi on tietyt voimat varustettu kuvissa viitteellä ext ($S_{ext} = S$).

Konservatiivisia (epäkonservatiivisia) voimia ja niihin liittyviä suureita tullaan merkitsemään tarvittaessa viitteillä c(n). Konservatiivisilla voimilla on hyödyllisiä ominaisuuksia energiaperiaatteen ja virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä.

(4) Monogeeniset ja epämonogeeniset voimat. Se seikka, että aika ajatellaan pysäytetyksi virtuaalisen työn periaatteessa, merkitsee, että voidaan määritellä konservatiivista voimaa yleisempi voimatyyppi — ns. monogeeninen (engl. monogenic) voima [2.5] —, jolla on virtuaalisen työn periaatteen kannalta samat edulliset ominaisuudet kuin konservatiivisella voimalla.

Ulkoinen voima $\vec{F}(\vec{r},t)$ tai kahden partikkelin i ja j välinen sisäinen voima S(s,t) on monogeeninen, jos on olemassa funktio $V'(\vec{r},t)$ tai $V'_{ij}(s,t)$ siten, että

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V' \tag{2.3.30}$$

tai

$$S = \frac{\partial V'_{ij}}{\partial s} . \tag{2.3.31}$$

Voima eroaa siis konservatiivisesta voimasta siinä, että se saa riippua eksplisiittisesti ajasta. Funktiota V' nimitetään tässä paremman puutteessa "ajasta riippuvaksi potentiaalienergiaksi". Jos voima ei ole monogeeninen, sitä nimitetään tässä epämonogeeniseksi (engl. polygenic) [2.5]. Esimerkiksi kaavan (2.3.22) esittämä harmoninen pakkovoima on monogeeninen ja sen ajasta riippuvan potentiaalienergian lauseke

$$V' = -\hat{F}\sin\omega t\cdot v . \tag{2.3.32}$$

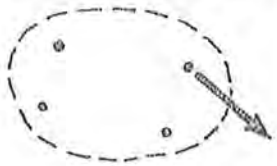
(5) Aktiiviset ja passiiviset voimat. Tässä nimitetään voimia, joiden tekemä virtuaalinen työ on nolla systeemin jokaisessa kinemaattisesti luvallisessa virtuaalisessa siirtymässä, passiivi-

siksi; muut voimat ovat aktiivisia. Samaa jaottelua voidaan käyttää tarvittaessa myös todellisen työn suhteen. Rajoitevoimat ovat tärkeimpiä passiivisia voimia. Aktiivisia (passiivisia) voimia sekä niihin liittyviä suureita tullaan merkitsemään tarvittaessa viitteillä a(p).

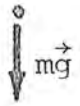
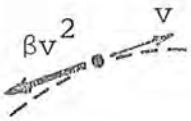
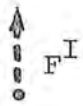
(6) Todelliset voimat ja näennäisvoimat. Partikkeliin vaikuttavaa voimaa nimitetään tässä todelliseksi voimaksi, jos voima syntyy jonkin toisen massan johdosta eli siis voimalla on olemassa voiman ja vastavoiman lain mukainen vastavoima. Mekaniikassa on usein tapana määritellä puhtaasti laskennallisesti suureita, joilla on voiman laatu eli ns. näennäisvoimia (engl. apparent force, pseudo force), jotka eivät siis synny toisen massan johdosta ja joilla ei ole vastavoimaa. Systeemin kannalta näennäisvoimat on siis luokiteltava ulkoisiksi voimiksi. Esimerkkinä todellisesta voimasta on gravitaatiovoima ja näennäisvoimasta hitausvoima ja Coriolisvoima. Näennäisvoimia ja niihin liittyviä suureita tullaan merkitsemään tarvittaessa viitteellä A. Kuitenkin erityisesti hitausvoimien yhteydessä käytetään viitettä I.

Taulukossa 2.3.1 näkyy vielä kertaalleen edellä esitetyt voimien luokittelut varustettuna joillakin huomautuksilla ja havainnollistavilla kuvilla.

Taulukko 2.3.1 Eri voimatyyppejä

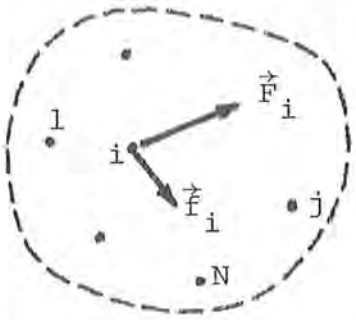
Ulkoinen voima 	Sisäinen voima	Sisäiset voimat eivät esiinny liikemäärän ja liikemäärämomentin periaatteissa.
Konstitutiivinen voima	Rajoitevoima	Rajoitevoima syntyy mallin liioitellun jäykkyyden johdosta.

Taulukko 2.3.1 jatkuu

Konservatiivinen voima 	Epäkonservatiivinen voima	Konservatiivisilla voimilla on käyttöä energiaperiaatteen ja virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä.
Monogeeninen voima	Epämonogeeninen voima 	Monogeenisilla voimilla on käyttöä virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä.
Aktiivinen voima	Passiivinen voima	Rajoitevoimat ovat aina virtuaalisen työn suhteen passiivisia. Skleronomisella systeemillä rajoitevoimat ovat myös todellisen työn suhteen passiivisia.
Todellinen voima	Näennäisvoima 	Näennäisvoimat syntyvät laskennallisesti määrittelemällä. Niillä ei ole vastavoimaa. Systeemin kannalta ne ovat ulkoisia voimia.

2.3.2 Liikeyhtälöt

Yleisen systeemin partikkelien <u>liikeyhtälöt</u> (engl. equations of motion) ovat



$$\boxed{\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \,,} \qquad (2.3.33)$$

$$i = 1,2,\ldots,N \,.$$

Kuva 2.3.12 Partikkeliin i vaikuttavat voimat.

Ulkoinen voima $\vec{F}_i$ on yleisesti funktio ainakin partikkelin i asemasta, nopeudesta ja vielä eksplisiittisesti ajasta: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_i,\vec{v}_i,t)$. Parittaiset sisäiset voimat $\vec{f}_{ij}$ ja $\vec{f}_{ji}$ ovat yleisesti funktioita ainakin partikkelien i ja j välisestä etäisyydestä s, etäisyyden muutosnopeudesta $\dot{s}$ ja vielä eksplisiittisesti ajasta. Voima $\vec{f}_i$ on siis yleisesti funktio systeemin kaikkien partikkelien asemista, nopeuksista ja ajasta: $\vec{f}_i = \vec{f}_i(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_N,t)$. Esimerkkinä olkoon partikkelisysteemiksi käsitetty ristikkorakenne, jossa ristikon massa on ajateltu keskitetyksi ristikon nurkkapisteisiin, jolloin ristikon kukin sauva ilmaisee aina partikkeliparin, jonka välillä vallitsee sisäisiä voimia. Sauvojen vaikutus voidaan esittää likimäärin esimerkiksi lineaaristen jousten ja vaimentimien avulla.

Jokainen yhtälöistä (2.3.33) on vektoriyhtälö, joten kysymyksessä on 3N:n tavallisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yhtälöryhmä. Ratkaisu $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t),\ldots,\vec{r}_N(t)$ tai $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\ldots$, $\vec{u}_N(t)$ sisältää 6N integroimisvakiota, jotka määräytyvät esimerkiksi alkuehdoista $\vec{r}_1(t_o)$, $\vec{v}_1(t_o),\ldots,\vec{r}_N(t_o)$, $\vec{v}_N(t_o)$ tai $\vec{u}_1(t_o)$, $\vec{v}_1(t_o),\ldots,\vec{u}_N(t)$, $\vec{v}_N(t_o)$ ovat annettuja. Ratkaisun löytäminen suljetussa muodossa on ymmärrettävästi yleensä mahdotonta. Tavallisesti systeemin liike on tavalla tai toisella sidottua ja rajoitevoimat muodostavat oman tuntemattomien suureiden joukon.

Staattisessa tai ns. kvasistaattisessa (engl. quasistatic) tapauksessa — se on tapauksessa, jossa liike voi riippua ajasta, mutta liike on niin hidasta, että termi $m\vec{a}$ liikeyhtälöissä voidaan jättää muiden termien rinnalla huomiotta — systeemiä koskevat yhtälöt (2.3.33) muuttuvat ns. tasapainoyhtälöiksi (engl. equations of equilibrium)

$$\boxed{\vec{F}_i + \vec{f}_i = \vec{0}\ ,} \qquad i = 1,2,\ldots,N\ . \tag{2.3.34}$$

Nämä ovat tavallisesti tuntemattomien $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N$ tai $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_N$ suhteen algebrallisia yhtälöitä ja siis paljon helpommin ratkaistavissa kuin yhtälöt (2.3.33).

Kaikki partikkelimekaniikan tehtävät ratkeavat periaatteessa liikeyhtälöiden (2.3.33) avulla. Mekaniikassa on kuitenkin tapana operoida useilla lisäsuureilla kuten liikemäärä, työ, liike-energia, virtuaalinen työ jne. sekä näitä koskevilla lauseilla eli periaatteilla. On syytä korostaa, ettei mitään uusia aksioomia oteta enää käyttöön. Johdettuja periaatteita voidaan soveltaa usein edullisesti eri tehtävien ratkaisuissa. Samat tulokset saataisiin myös aina lähtien liikkeelle perusaksioomista. Periaatteiden merkitys on siinä, että tarvittavat manipulaatiot on suoritettu valmiiksi yleisessä muodossa, jolloin käsittely eri sovellutuksissa lyhenee.

2.3.3 Liikemäärä

Partikkelisysteemin <u>liikemäärä</u> (engl. momentum, linear momentum) $\vec{p}$ ($[\vec{p}] = \mathrm{kgms}^{-1}$) määritellään kaavalla

$$\vec{p} = \Sigma\, m_i v_i \,. \tag{2.3.35}$$

Lasketaan systeemin partikkelien liikeyhtälöt

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i \tag{2.3.36}$$

yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\Sigma\, \vec{F}_i + \cancel{\Sigma\, \vec{f}_i} = \Sigma\, m_i \dot{\vec{v}}_i \,,$$

$$\Sigma\, \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\, \Sigma\, m_i \vec{v}_i \,,$$

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} \,.} \tag{2.3.37}$$

Tämä on ns. <u>liikemäärän (taseen) periaate</u> (engl. principle of (balance) of momentum) eli systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on yhtä suuri kuin systeemin liikemäärän muutosnopeus.

Derivoimalla massakeskiön määrittely-yhtälö (2.3.1) ajan suhteen havaitaan, että liikemäärän lauseke voidaan esittää muodossa

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_C \,.} \tag{2.3.38}$$

Sijoittamalla tämä liikemäärän periaatteeseen saadaan ns. <u>massakeskiön liikelaki</u>

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_C} \tag{2.3.39}$$

eli systeemin massakeskiö liikkuu kuten partikkeli, jonka massa on yhtä suuri kuin systeemin kokonaismassa ja johon vaikuttaa systeemin ulkoisten voimien resultantti.

2.3.4 Liikemäärämomentti

Partikkelisysteemin liikemäärämomentti eli kulmaliikemäärä eli dralli (engl. moment of momentum, angular momentum, saks. Drall, m.) $\vec{L}$ ($[\vec{L}] = \mathrm{kgm^2s^{-1}}$) origon suhteen määritellään kaavalla

$$\vec{L} = \Sigma\, \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \,. \tag{2.3.40}$$

Kerrotaan systeemin kunkin partikkelin liikeyhtälö

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i \tag{2.3.41}$$

vasemalta vektorilla $\vec{r}_i$ (ristitulo) ja lasketaan näin saadut yhtälöt yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\Sigma\, \vec{r}_i \times F_i + \cancel{\Sigma\, \vec{r}_i \times \vec{f}_i} = \Sigma\, \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i \,,$$

$$\Sigma\, \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\, \Sigma\, \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \cancel{\Sigma\, \dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i} \,,$$

$$\boxed{\vec{M} = \dot{\vec{L}} \,.} \tag{2.3.42}$$

Tämä on ns. liikemäärämomentin (taseen) periaate (engl. principle of (balance of) moment of momentum) eli systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien momentti on yhtä suuri kuin systeemin kulmaliikemäärän muutosnopeus.

Liikemäärämomentin periaatteessa täytyy siis valita tietty piste — ns. peruspiste eli referenssipiste eli momenttipiste —, jonka suhteen momentti ja liikemäärä lasketaan. Yhtälö (2.3.42) johdettiin pitäen origoa peruspisteenä, mutta on helppo osoittaa, että yhtälö on voimassa edelleen, jos peruspiste on mielivaltainen koordinaatiston suhteen kiinteä piste A, jolloin

$$\vec{M} = \Sigma\, \vec{r}_{i/A} \times \vec{F}_i \,, \qquad \vec{L} = \Sigma\, \vec{r}_{i/A} \times m_i \vec{v}_i \tag{2.3.43}$$

tai jos peruspiste yhtyy jatkuvasti systeemin massakeskiöön C, jolloin

$$\vec{M} = \Sigma\, \vec{r}_{i/C} \times \vec{F}_i \,, \qquad \vec{L} = \Sigma\, \vec{r}_{i/C} \times m_i \vec{v}_i \,. \tag{2.3.44}$$

Tarvittaessa $\vec{M}$ ja $\vec{L}$ varustetaan peruspistettä kuvaavalla viitteellä O, A, C jne.

2.3.5 Työ ja energia

Voiman tekemä työ. Partikkeliin vaikuttavan voiman $\vec{F}$ tekemä differentiaalinen työ (engl. differential work, elementary work) $đW$ määritellään lausekkeenä

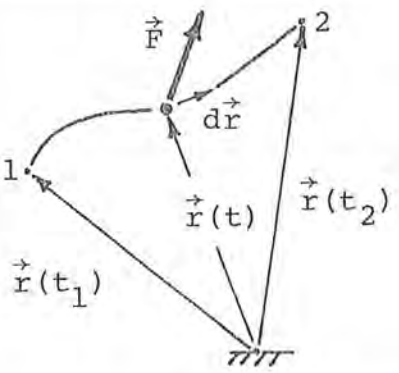
$$đW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}dt = Pdt \ , \tag{2.3.45}$$

jossa $d\vec{r} = \vec{v}dt$ on partikkelin differentiaalinen siirtymä ja

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \tag{2.3.46}$$

on ns. teho (engl. power) ([P] = W) eli tehty työ aikaa kohti.

Kun partikkeli siirtyy ajan muuttuessa arvosta t_1 arvoon t_2 pisteestä 1 pisteeseen 2, voiman $\vec{F}$ tekemä työ (engl. work) W ([W] = J) määritellään tänä aikana tehtyjen differentiaalisten töiden summana eli



$$\left.\begin{aligned} W &= \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} \ , \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}dt \ , \\ &= \int_{t_1}^{t_2} Pdt \ . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.47}$$

Kuva 2.3.13 Voiman tekemä työ.

Tässä ensimmäinen muoto on siis viivaintegraali pitkin partikkelin rataa ja kaksi jälkimmäistä muotoa ovat tavallisia integraaleja pitkin aika-akselia.

Partikkelisysteemiin vaikuttavien voimien tekemä differentiaalinen työ määritellään summana

$$đW = \Sigma\, đW_i = \Sigma\, \vec{R}_i\cdot d\vec{r}_i = \Sigma\, \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i + \Sigma\, \vec{f}_i\cdot d\vec{r}_i \tag{2.3.48}$$

ja vastaavasti tehty työ määritellään summana

$$W = \Sigma\, W_i = \Sigma \int_1^2 \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i = \Sigma \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Sigma \int_1^2 \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i \,, \qquad (2.3.49)$$

jossa indeksit 1 ja 2 viittaavat kullakin partikkelilla ko. radan päätepisteisiin.

Differentiaalinen työ $đW$ muodostuu siis ulkoisten voimien tekemästä differentiaalisesta työstä $đW_{ext}$ ja sisäisten voimien tekemästä differentiaalisesta työstä $đW_{int}$ eli

$$\boxed{đW = đW_{ext} + đW_{int} \,,} \qquad (2.3.50)$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} đW_{ext} &= \Sigma\, \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \,, \\ đW_{int} &= \Sigma\, \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = -\Sigma_{ij}\, S ds \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.51)$$

Viimeisen kaavan viimeinen muoto johdetaan esimerkissä 2.3.2.

Vastaavasti partikkelisysteemiin vaikuttavien voimien tekemä työ W muodostuu siis ulkoisten voimien tekemästä työstä W_{ext} ja sisäisten voimien tekemästä työstä W_{int} eli

$$\boxed{W = W_{ext} + W_{int} \,,} \qquad (2.3.52)$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} W_{ext} &= \Sigma \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt \\ &= \int_{t_i}^{t_2} (\Sigma\, \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i) dt = \int_{t_1}^{t_2} P_{ext} dt \,, \\ W_{int} &= \Sigma \int_1^2 \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma\, \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i) dt = \int_{t_1}^{t_2} P_{int} dt \,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.53)$$

Näissä kaavoissa on huomattava, että aikaintegraalimuodoissa rajat ovat kaikilla partikkeleilla samat, joten summamerkki voidaan siirtää integraalimerkin sisäpuolelle.

Kokonaisteho muodostuu samoin ulkoisten ja sisäisten voimien yhteisestä tehosta eli

$$\boxed{P = P_{ext} + P_{int} \, ,} \tag{2.3.54}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} P_{ext} &= \Sigma \, \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \, , \\ P_{int} &= \Sigma \, \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i = -\sum_{ij} S\dot{s} \, . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.55}$$

Viimeisen kaavan viimeinen muoto johdetaan esimerkissä 2.3.2.

<u>Esimerkki 2.3.2</u> Parittaisten sisäisten voimien tekemä työ. Tarkastellaan kuvan (a) esittämää tilannetta.

Kuvien (a) ja (b) merkintöjen perusteella

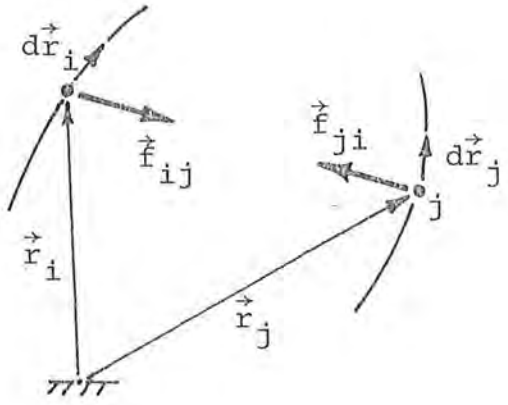
$$\vec{r}_{j/i} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \, , \tag{a}$$

josta seuraa differentioimalla

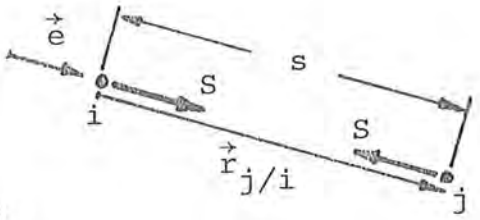
$$d\vec{r}_{j/i} = d\vec{r}_j - d\vec{r}_i \, . \tag{b}$$

Voimien $\vec{f}_{ij}$ ja $\vec{f}_{ji}$ yhteensä tekemä työ dW_{ij}^{int} saadaan seuraavasti

$$\begin{aligned} dW_{ij}^{int} &= \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \\ &= -\vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \\ &= \vec{f}_{ji} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) \\ &= \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{j/i} \, . \end{aligned} \tag{c}$$



(a)



(b)

Tämän lausekkeen edelleen kehittämiseksi merkitään vielä

$$\vec{r}_{j/i} = s\vec{e} \ , \quad \vec{f}_{ji} = -S\vec{e} \ , \tag{d}$$

jossa $\vec{e}$ on pisteestä i pisteeseen j suunnattu yksikkövektori. Lausekkeesta (c) tulee

$$đW_{ij}^{int} = -S\vec{e}\cdot d(s\vec{e}) = -S\vec{e}\cdot(ds\vec{e}+sd\vec{e}) = -Sds\vec{e}\cdot\vec{e} - \cancel{Ss\vec{e}\cdot d\vec{e}} \tag{e}$$

eli

$$đW_{ij}^{int} = -Sds \ . \tag{f}$$

Tuloksen saamisessa on käytetty hyväksi sitä tunnettua seikkaa, että itseisarvoltaan vakioavoisen vektorin (kuten $\vec{e}$) differentiaali on kohtisuorassa vektoria vastaan tai nolla.

Jakamalla yhtälö (f) ajan differentiaalilla dt saadaan parittaisten voimien $\vec{f}_{ij}$ ja $\vec{f}_{ij}$ yhteisen tehon P_{ij}^{int} lausekkeeksi vastaavasti

$$P_{ij}^{int} = -S\dot{s} \ . \tag{g}$$

Koska systeemin kaikkien sisäisten voimien yhteensä tekemä differentiaalinen työ $đW_{int}$ ja samoin niiden yhteinen teho P_{int} saadaan ilmeisestikin aikaan laskemalla yhteen kaikkien systeemin partikkeliparien antamat osuudet, voimme kirjoittaa tulokset

$$đW_{int} = -\sum_{ij} Sds \tag{h}$$

ja

$$P_{int} = -\sum_{ij} S\dot{s} \ . \tag{i}$$

Merkintä $\sum_{ij}$ tarkoittaa tässä ja jatkossa summaa yli kaikkien partikkeliparien (kukin pari vain kerran). Merkintöjen keventämiseksi suureita S ja s ei ole varustettu indekseillä, mutta tämä ei synnyttäne sekaannusta.

Saadut lausekkeet ovat huomattavasti havainnollisemmat kuin kaavoissa (2.3.51) ja (2.3.55) esiintyvät keskimmäiset muodot.

Havaitaan ensinnäkin, että <u>sisäisten voimien tekemä työ ja niiden teho ei riipu koordinaatiston valinnasta</u>, sillä partikkeliparien välisten etäisyyksien muutokset ds ja muutosnopeudet $\dot{s}$ ovat luonnollisesti samoja (ne riippuvat vain systeemin muodon muuttumisesta) mitattuina eri koordinaatistoissa. Sen sijaan ulkoisten voimien tekemä työ riippuu selvästi yleensä koordinaatiston valinnasta, mikäli koordinaatistot ovat liikkeessä toistensa suhteen. Levossa toistensa suhteen olevissa koordinaatistoissa myös ulkoisten voimien tekemä työ ja teho pysyvät samoina.

Lisäksi voidaan heti todeta, että <u>jäykässä kappaleessa sisäisten voimien tekemä työ ja niiden teho häviävät</u>, koska jäykän kappaleen mallin mukaisesti partikkeliparien väliset etäisyydet pysyvät vakioina. Äskeinen tulos on eräs tärkeä jäykän kappaleen mallin etu eri sovellutuksissa. Toisaalta ymmärretään, että jäykän kappaleen mallin käyttö johtaa epärealistisiin tuloksiin tapauksissa, joissa sisäisten voimien tekemä työ on

todellisuudessa huomattava. Näin käy mm. sysäystehtävissä, joissa kappaleiden kosketuskohtiin synyy kovin suuria jännityksiä.

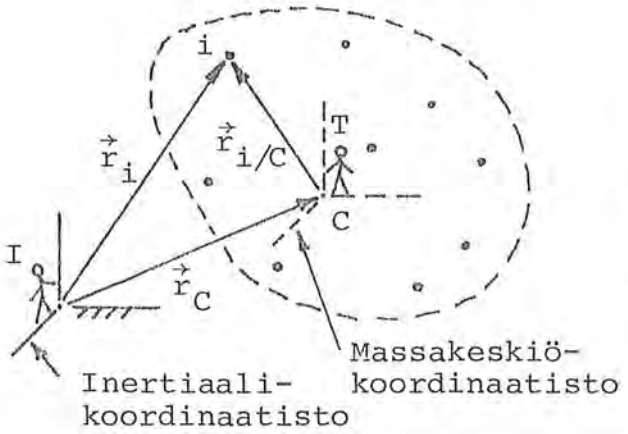
Liike-energia. Partikkelisysteemin liike-energia eli kineettinen energia (engl. kinetic energy) K ([K] = J) määritellään lausekkeena

$$K = \Sigma K_i = \frac{1}{2} \Sigma m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 \qquad (2.3.56)$$

Tässä $v_i = |\vec{v}_i|$ on partikkelin i nopeuden itseisarvo eli ns. vauhti (engl. speed).

Liike-energia on siis ei-negatiivinen suure. Sen arvo on nolla vain, jos systeemin kaikkien partikkelien nopeudet häviävät. Liike-energian arvo riippuu koordinaatiston valinnasta, mikäli koordinaatistot ovat liikkeessä toistensa suhteen.

Liike-energialle voidaan johtaa massakeskiön määritelmän avulla ns. Koenigin lauseen (engl. Koenig's theorem) mukainen esitys



$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v_C^2 + K_r ,} \qquad (2.3.57)$$

$$K_r = \frac{1}{2} \Sigma m_i |\dot{\vec{r}}_{i/C}|^2 . \qquad (2.3.58)$$

Kuva 2.3.14 Massakeskiökoordinaatisto ja Koenigin lause.

On otettu käyttöön ns. massakeskiökoordinaatisto (engl. center of mass frame of reference). Sillä tarkoitetaan koordinaatistoa, jonka origo yhtyy koko ajan systeemin massakeskiöön ja joka liikkuu puhtaassa translaatioliikkeessä ilman rotaatiota inertiaalikoordinaatiston suhteen (kuva 2.3.14). Näistä sanoista seuraavat myös tunnukset kuvan havaitsijoille I ja T. Koeningin lauseen

mukaan havaitsijan I mittaama liike-energian K voidaan ajatella muodostuvan massakeskiön mukana liikkuvan kuvitellun partikkelin, jonka massa on yhtä suuri kuin systeemin kokonaismassa, liike-energiasta plus havaitsijan T oman koordinaatistonsa suhteen mittaamasta ns. suhteellisesta liike-energiasta K_r.

Esimerkki 2.3.3 Massakeskiökoordinaatisto. Johdetaan Koenigin lause ja eräitä muita massakeskiöön liittyviä tuloksia.

Kuvan 2.3.14 perusteella

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{i/C} \ . \tag{a}$$

Kerrotaan tämä partikkelin massalla m_i ja lasketaan näin saadut yhtälöt yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\Sigma\, m_i \vec{r}_i = \Sigma\, m_i \vec{r}_C + \Sigma\, m_i \vec{r}_{i/C} \ ,$$

$$\Sigma\, m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_C + \Sigma\, m_i \vec{r}_{i/C} \ , \tag{b}$$

joten kaavan (2.3.1) perusteella seuraa tulos

$$\Sigma\, m_i \vec{r}_{i/C} = \vec{0} \ . \tag{c}$$

Lauseketta $\Sigma\, m_i \vec{r}_{i/A}$ nimitetään yleisesti systeemin ns. lineaariseksi momentiksi (engl. linear moment) pisteen A suhteen. Tulos (c) sanoo siis, että partikkelisysteemin lineaarinen momentti massakeskiön suhteen on nolla.

Derivoimalla yhtälöt (a) ja (c) saadaan vastaavasti yhtälöt

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \dot{\vec{r}}_{i/C} \ , \tag{d}$$

$$\Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C} = \vec{0} \ . \tag{e}$$

Sijoitetaan esitysmuoto (d) liike-energian lausekkeeseen (2.3.56):

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\, \Sigma\, m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \\
&= \frac{1}{2}\, \Sigma\, m_i (\vec{v}_C + \dot{\vec{r}}_{i/C}) \cdot (\vec{v}_C + \dot{\vec{r}}_{i/C}) \\
&= \frac{1}{2}\, \Sigma\, m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C} \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C} \cdot \dot{\vec{r}}_{i/C} \\
&= \frac{1}{2}\, (\Sigma\, m_i) \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + (\cancel{\Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C}}) \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C} \cdot \dot{\vec{r}}_{i/C} \\
&= \frac{1}{2}\, m v_C^2 + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m_i |\dot{\vec{r}}_{i/C}|^2 \ .
\end{aligned} \tag{f}$$

Tämä on Koenigin lause.

Todettakoon, että analogisesti liikemäärän lauseke

$$\vec{p} = \Sigma\, m_i \vec{v}_i$$

$$= \Sigma\, m_i (\vec{v}_C + \vec{r}_{i/C})$$

$$= \Sigma\, m_i \vec{v}_C + \cancel{\Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C}}$$

$$= (\Sigma\, m_i)\vec{v}_C + \vec{0}$$

$$= m\vec{v}_C + \vec{0}\ . \qquad \text{(g)}$$

Tämä tulos oli esillä jo kaavana (2.3.38).

Vastaavasti liikemäärämomentti

$$\vec{L} = \Sigma\, \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$= \Sigma(\vec{r}_C + \vec{r}_{i/C}) \times m_i (\vec{v}_C + \dot{\vec{r}}_{i/C})$$

$$= \Sigma \times \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_C + \Sigma\, \vec{r}_C \times m_i \dot{\vec{r}}_{i/C} + \Sigma\, \vec{r}_{i/C} \times m_i \vec{v}_C + \Sigma\, \vec{r}_{i/C} \times m_i \dot{\vec{r}}_{i/C}$$

$$= \vec{r}_C \times (\Sigma\, m_i)\vec{v}_C + \vec{r}_C \times \cancel{\Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C}} + (\cancel{\Sigma\, m_i \vec{r}_{i/C}}) \times \vec{v}_C + \Sigma\, \vec{r}_{i/C} \times m_i \dot{\vec{r}}_{i/C}$$

$$= \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \Sigma\, \vec{r}_{i/C} \times m_i \dot{\vec{r}}_{i/C}\ . \qquad \text{(h)}$$

Kaavojen johdossa on käytetty hyväksi skalaaritekijän siirtosääntöä sekä otettu huomioon, että $\vec{r}_C$ ja $\vec{v}_C$ ovat summeerauksen suhteen vakioita ja voidaan siirtää summamerkin ulkopuolelle.

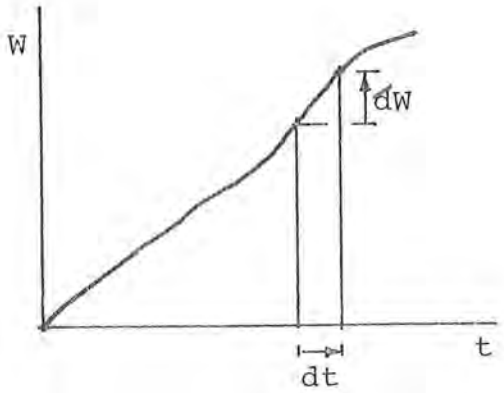
Kaavoille (g) ja (h) saadaan Koenigin lauseen kanssa analogisia tulkintoja. Havaitsijan T koordinaatistossaan mittaama ns. suhteellinen liikemäärä $\vec{p}_r = \Sigma\, m_i \dot{\vec{r}}_{i/C}$ on kaavan (e) mukaan nolla. Vastaavasti lausekkeen (h) jälkimmäisen termin nähdään esittävän havaitsijan T mittaamaa suhteellista liikemäärämomenttia $\vec{L}_r$.

<u>Tilafunktio</u>. Termodynamiikan sanastoa [2.6] käyttäen työ W ei ole ns. <u>tilafunktio</u> (engl. state function, dependent state variable). Partikkelisysteemillä systeemin ns. <u>tilamuuttujia</u> (engl. independent state variable) olisivat yksinkertaisimmillaan esimerkiksi sen partikkelien asemat ja nopeudet. Ne määrittävät systeemin ns. <u>tilan</u> (engl. state) ja niitä pidetään tällöin systeemin riippumattomina muuttujina. Tilafunktiot ovat siten tilamuuttujien funktioita. Esimerkiksi systeemin liike-energia K riippuu vain systeemin partikkelien nopeuksista (systeemin partikkelien massat ovat kiinnitetyt systeemin valinnalla), joten K on tilafunktio.

Systeemiin tehty työ riippuu yleensä systeemin kulkemasta reitistä eikä systeemin tilasta, joten työ ei ole tilasuure. Vastaavasti voimme sanoa, että systeemin liike-energian arvo tietyllä hetkellä on se ja se mutta emme, että systeemin työn arvo on se ja se.

Tähän liittyy käytetty merkintä $đW$ ja nimitys differentiaalinen työ (eikä työn differentiaali), joka korostaa, että kyseessä ei ole yleensä funktion W differentiaali sen argumenttien differentiaalisten muutosten johdosta vaan pelkästään ns. infinitesimaalinen lauseke [2.5] (engl. infinitesimal expression). Joskus termistä $đW$ näkyy käytettävän myös merkintöjä δW ja $\overline{dW}$ sekä pelkästään dW.

Tarkastellaan lisäselityksenä vielä kuvaa 2.3.15. Se esittää tiettyyn systeemiin vaikuttavien voimien tekemää työtä W tietystä alkuhetkestä lähtien mitattuna ajan t funktiona. On syytä korostaa, että partikkelimekaniikassa ainoa todella riippumaton muuttuja on aika. Mikä hyvänsä partikkelimekaniikan suure voidaan ajatella esitetyksi kuvan 2.3.15 tapaan ajan funktiona tietyssä tapahtumassa eli termodynamiikan sanaston mukaan tilan muutoksessa eli prosessissa (engl. change of state, process). Kun edellä puhuttiin tilamuuttujista riippumattomina muuttujina, tällä tarkoitettiin tarkastelua systeemin tilan kannalta. Kuvan 2.3.15 esityksessä muutos $đW$ olisi funktion $W = W(t)$ kokonaisdifferentiaali, mutta koska yhteys $W = W(t)$ riippuu prosessin valitsemasta tiestä, yhteys on etukäteen tuntematon eikä tällä tulkinnalla ole käyttöä.



Kuva 2.3.15 Systeemiin tehty työ ajan funktiona.

Mekaanisen energian tase. Kerrotaan systeemin kunkin partikkelin liikeyhtälö

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i \qquad (2.3.59)$$

skalaarisesti vektorilla $\vec{v}_i$ ja lasketaan kaikki näin saadut yhtälöt yhteen:

$$\Sigma\, \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \Sigma\, \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i = \Sigma\, m_i \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i \ ,$$

$$P_{ext} + P_{int} = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\,\Sigma\, m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \ ,$$

$$\boxed{P = \dot{K}\ .} \qquad (2.3.60)$$

Tämä on ns. <u>energian periaate</u> (engl. priciple of energy) eli systeemiin vaikuttavien ulkoisten ja sisäisten voimien yhteinen teho on yhtä suuri kuin systeemin liike-energian muutosnopeus.

Kun yhtälö (2.3.60) integroidaan ajan välin (t_1, t_2) ylitse, saadaan yhtälö

$$\int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{K} dt = \Big|_{t_1}^{t_2} K = K(t_2) - K(t_1) \ ,$$

$$\boxed{W = \Delta K} \qquad (2.3.61)$$

eli systeemiin vaikuttavien ulkoisten ja sisäisten voimien yhteensä tekemä työ on yhtä suuri kuin systeemin liike-energian muutos. Tällä kaavalla — samoin kuin kaavalla (2.3.60) — on useita vaihtoehtoisia nimiä kuten työn ja liike-energian periaate, työperiaate, energiaperiaate, liike-energian laki ja myös energian periaate.

<u>Konservatiiviset voimat</u>. Konservatiivisten voimien tekemä työ poikkeaa oleellisesti yleisestä tapauksesta.

Partikkeliin i vaikuttavan ulkoisen konservatiivisen voiman $\vec{F}_i$ tekemä differentiaalinen työ

$$đW_i^{ext} = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\vec{\nabla} V_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i = -\left(\frac{\partial V_i^{ext}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial V_i^{ext}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial V_i^{ext}}{\partial z_i} dz_i\right)$$

(2.3.62)

eli

$$\boxed{đW_i^{ext} = -dV_i^{ext} \ .} \tag{2.3.63}$$

Täten konservatiivisen voiman tekemä differentiaalinen työ on yhtä suuri kuin voiman potentiaalienergian $V_i(\vec{r}_i)$ miinusmerkkinen kokonaisdifferentiaali argumentin muutoksen $d\vec{r}_i$ johdosta eikä vain eräs infinitesimaalinen lauseke.

Vastaavasti voiman F_i tekemä työ

$$W_i^{ext} = \int_1^2 \vec{F}_i \, d\vec{r}_i = -\int_1^2 dV_i^{ext} = -\left[V_i^{ext}(\vec{r}_{i2}) - V_i^{ext}(\vec{r}_{i1})\right] \tag{2.3.64}$$

eli

$$\boxed{W_i^{ext} = -\Delta V_i^{ext} \ .} \tag{2.3.65}$$

Täten konservatiivisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin voiman potentiaalienergian miinusmerkkinen muutos.

Jos parittaiset sisäiset voimat $\vec{f}_{ij}$ ja $\vec{f}_{ji}$ ovat konservatiivisia, niiden tekemä differentiaalinen työ

$$đW_{ij}^{int} = -S ds = -\frac{dV_{ij}^{int}}{ds} ds \tag{2.3.66}$$

eli

$$\boxed{đW_{ij}^{int} = -dV_{ij}^{int} \ .} \tag{2.3.67}$$

Vastaavasti

$$W_{ij}^{int} = -\int_1^2 S ds = -\int_1^2 dV_{ij}^{int} = -\left[V_{ij}^{int}(s_2) - V_{ij}^{int}(s_1)\right] \tag{2.3.68}$$

eli

$$\boxed{W_{ij}^{int} = -\Delta V_{ij}^{int} \ .} \tag{2.3.69}$$

Kaavojen (2.3.67) ja (2.3.69) sanallinen tulkinta on vastaava

kuin ulkoisen voiman tapauksessa. Huomautettakoon, että edellä on tarkasteltu vain sellaisia konservatiivisia voimia, jotka voidaan esittää voimakentän avulla. Mutta koska muuntyyppisten konservatiivisten voimien (kuten rajoitevoimien) tekemä työ on nolla, kaavat pätevät yleisesti.

Jos kaikki systeemiin vaikuttavat ulkoiset ja sisäiset voimat ovat konservatiivisia, niiden yhteensä tekemä työ

$$W = W_{ext} + W_{int} = -\Sigma\, \Delta V_i^{ext} - \sum_{ij} \Delta V_{ij}^{int} = -\Delta\Sigma\, V_i^{ext} - \Delta \sum_{ij} V_{ij}^{int}$$

$$= -\Delta(\Sigma\, V_i^{ext} - \sum_{ij} V_{ij}^{int}) \qquad (2.3.70)$$

eli

$$\boxed{W = -\Delta V\ ,} \qquad (2.3.71)$$

jossa V on <u>systeemin</u> (kokonais) <u>potentiaalienergia</u>

$$\left.\begin{aligned} V &= V_{ext} + V_{int}\ , \\ V_{ext} &= \Sigma\, V_i^{ext}\ , \\ V_{int} &= \sum_{ij} V_{ij}^{int}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.72)$$

Suure V_{ext} on systeemin <u>ulkoisten voimien potentiaalienergia</u> ja V_{int} on systeemin sisäisten voimien potentiaalienergia eli <u>kimmoenergia</u> eli <u>muodonmuutosenergia</u>. Kullekin potentiaalienergialle V_i^{ext} tai V_{ij}^{int} voidaan valita mielivaltainen vertailutila, jossa potentiaalienergialla on tietty arvo; esimerkiksi arvo nolla.

Jos systeemiin vaikuttavat kaikki voimat ovat konservatiivisia, systeemiä sanotaan <u>konservatiiviseksi systeemiksi</u>. Yleisestä yhtälöstä (2.3.61) saadaan tällöin ns. <u>mekaanisen energian säilymisen periaate</u> (engl. principle of conservation of mechanical energy)

$$\boxed{\Delta(K+V) = 0} \qquad (2.3.73)$$

eli konservatiivisessa systeemissä ns. <u>mekaaninen energia</u>

$$K + V \tag{2.3.74}$$

säilyy.

Jos vain osa systeemin voimista on konservatiivisia, yleinen yhtälö (2.3.61) voidaan kirjoittaa muotoon

$$W^n = \Delta(K+V) \ . \tag{2.3.75}$$

Tässä W^n on systeemiin vaikuttavien epäkonservatiivisten voimien tekemä työ ja V on systeemin konservatiivisten voimien potentiaalienergia.

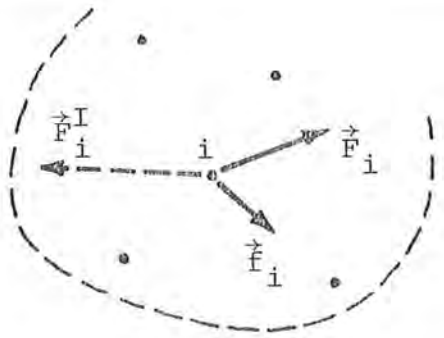
Huomautettakoon, että nimitys konservatiivinen voima johtuu juuri edellä esitetystä tähän käsitteeseen liittyvästä ns. säilymislaista (engl. conservation law, conserve = säilöä, säilyttää) (2.3.73). Lisäksi todettakoon, että kaikenlaatuisia työhän ja energiaan liittyviä kaavoja nimitetään usein lyhyesti energiayhtälöiksi. Kontinuumimekaniikassa eräs tällainen yhtälö on aksiooma, ns. energian taseen periaate. Koska taas tässä käsitellyt energiayhtälöt on saatu pelkästään partikkelimekaniikan liikeyhtälöitä manipuloimalla, on kohdan otsikko varustettu nimellä mekaanisen energian tase. Sana mekaaninen korostaa sitä seikkaa, että mm. käsite lämpö ei esiinny lainkaan tässä yhteydessä.

2.3.6 Hitausvoima-ajattelu

Kirjoitetaan systeemin kunkin partikkelin liikeyhtälö

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \tag{2.3.76}$$

muotoon



$$\boxed{\vec{F}_i + \vec{f}_i + \vec{F}_i^I = \vec{0}\ ,} \tag{2.3.77}$$

Kuva 2.3.16 Partikkeliin i vaikuttavat voimat.

jossa näennäisvoimaa

$$\vec{F}_i^I = -m_i \vec{a}_i \tag{2.3.78}$$

nimitetään partikkeliin i vaikuttavaksi <u>hitausvoimaksi</u> (engl. inertia force). Yhtälöä (2.3.77) nimitetään usein <u>hitausvoimaperiaatteeksi</u> eli partikkelisysteemi on tasapainotilassa todellisten ulkoisten voimien, sisäisten voimien ja kuviteltujen hitausvoimien muodostaman voimasysteemin alaisena.

Hitausvoima-ajattelu palauttaa dynamiikan probleeman muodollisesti statiikan probleemaksi. Koska yhtälöt (2.3.77) esittävät alkuperäisiä differentiaaliyhtälöitä (2.3.76) valepuvussa, hitausvoimaperiaatteen käytöstä voi olla hyötyä korkeintaan vallitsevien yhtälöiden muodostamisessa, mutta ei niiden ratkaisemisessa. Mahdollista statiikan tehtävien käsittelyssä kertynyttä rutiinia voidaan siis hyödyntää täydentämällä vain tuttuja kaavoja hitausvoimien antamilla osuuksilla.

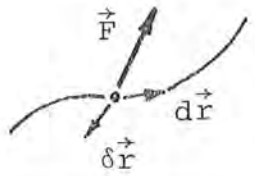
Hitausvoimat esitetään vapaakappalekuvioissa joskus katkoviivoitettuina (vrt. kuva 2.3.16), jotta ne erottautuisivat todellisista voimista.

Teknillisen mekaniikan kirjallisuudessa hitausvoima-ajattelusta käytetään toisinaan myös nimitystä d'Alembertin periaate. Analyyttisessä mekaniikassa tällä tarkoitetaan kuitenkin hieman syvällisempää ajatusta, kuin vain tietyn termin siirtämistä yhtälön toiselle puolelle ja sen varustamista uudella nimellä.

Todettakoon terminologian suhteen vielä seuraavaa. Partikkelisysteemin sanotaan statiikassa yleensä olevan tasapainotilassa tai tasapainossa (engl. in equilibrium), kun systeemin jokainen partikkeli on tasapainossa, jolla tarkoitetaan, että partikkeliin vaikuttavien voimien resultantti on nolla. Joissakin määritelmissä edelliseen liitetään vielä vaatimus (jatkuvasta) lepotilasta (engl. state of rest), jolla tarkoitetaan, että partikkelin nopeudenkin koordinaatiston suhteen tulee hävitä. Dynaamisissa tapauksissa, kun partikkeleilla on nopeuksia, sanontaan tasapainotila ei voida tietenkään enää sisällyttää vaatimuksia jatkuvasta lepotilasta.

2.3.7 Virtuaalinen työ

Voiman tekemä virtuaalinen työ. Partikkeliin vaikuttavan voiman $\vec{F}$ tekemä ns. virtuaalinen työ (engl. virtual work) δW ($[\delta W] = J$) määritellään lausekkeena

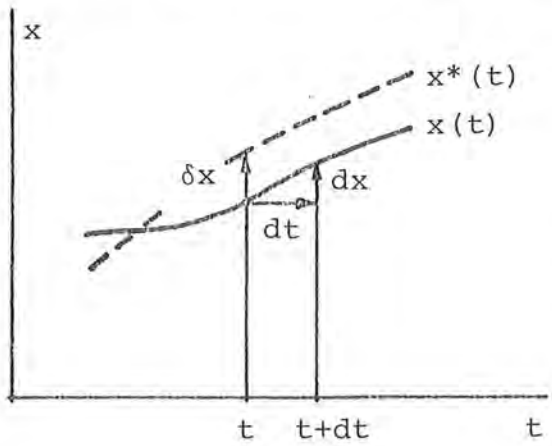


$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} \ , \qquad (2.3.79)$$

Kuva 2.3.17 Todellinen differentiaalinen siirtymä $d\vec{r}$ ja virtuaalinen siirtymä $\delta\vec{r}$.

jossa $\delta\vec{r}$ on partikkelin ns. virtuaalinen siirtymä (engl. virtual displacement). Se on infinitesimaalinen suure, jossa δ-merkkiä käytetään d-merkin sijasta ilmaisemaan, että kyseessä on virtuaalinen, oletettu, kuviteltu siirtymä. Virtuaalisen siirtymän ajatellaan tapahtuvan ilman ajan kulumista. Virtuaalista työtä laskettaessa $\vec{F}$ on todelliseen liikkeeseen ko. ajan hetkellä kuuluva voima, joka säilyttää suuntansa ja suuruutensa virtuaalisen siirtymän "tapahtuessa".

Variaatiolaskenta. Tunnusta δ käytetään yleisesti ns. variaatiolaskennassa (engl. calculus of variations). Tarkastellaan hieman variaatiolaskennan ajattelutapaa partikkelimekaniikkaan sovellettuna. Esittäköön kuvan 2.3.18 käyrä x(t) esimerkiksi jonkin partikkelin x-koordinaatin riippuvuutta ajasta t jossain tapahtumassa. Funktio x voi saada kahdenlaatuisia muutoksia. Funktion infinitesimaalinen muutos dx (differentiaali) johtuu riippumattoman muuttujan t muutoksesta dt. Funktion infinitesimaalinen muutos δx (variaatio) on sen sijaan muutos, joka syntyy siirryttäessä käyrältä x(t) toisel-



Kuva 2.3.18 Differentiointi ja variointi.

le äärettömän läheiselle käyrälle $x^*(t) = x(t) + \delta x(t)$. Variaatiolaskennassa käsitellään jälkimmäisentyyppisiä muutoksia.

Variaatiotunnusta δ käytetään erottamaan muutos δx muutoksesta dx. Suuretta δx nimitetään funktion x variaatioksi (engl. variation) ja uutta funktiota x^* nimitetään varioiduksi funktioksi tai vertailufunktioksi tai modifioiduksi funktioksi (engl. modified function). Varioidun funktion muodostaminen merkitsee eräänlaisen matemaattisen kuvitellun kokeilun suorittamista vertailutulosten saamiseksi. Edellä käsitelty virtuaalinen siirtymä $\delta\vec{r}$ on siis toisin sanoen paikkavektorin $\vec{r}$ variaatio. Todettakoon, että staattisessa tapauksessa kuvan 2.3.18 käyrä $x(t)$ olisi vaakasuora viiva.

Jonkin suureen variaation muodostamista nimitetään varioinniksi, vrt. differentiaali ja differentiointi. Lausekkeet, joissa esiintyy suureita, joiden arvoja varioidaan, muuttavat myös arvojaan ja vastaavia infinitesimaalisia muutoksia nimitetään edelleen variaatioiksi. Suorittamatta johtoa annettakoon seuraava toimintaohje: Funktion variaatio voidaan laskea vastaavasti kuin funktion kokonaisdifferentiaali; lisäksi on riippumattoman muuttujan ( ) (partikkelimekaniikassa aika t) differentiaalia $d(\ )$ vastaava termi $\delta(\ )$ asetettava nollaksi.

Otetaan tästä esimerkkinä jokin funktio $f(x(t), y(t), z(t), t)$, jossa x, y ja z ovat esimerkiksi tietyn partikkelin koordinaatit. Funktion kokonaisdifferentiaali

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \qquad (2.3.80)$$

ja funktion variaatio

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z\ . \qquad (2.3.81)$$

Kokonaisdifferentiaali antaa funktion arvon muutoksen todellisessa liikkeessä ajan arvon saadessa muutoksen dt. Vastaavat paikan differentiaalit dx, dy ja dz on siis vielä ajateltava lasketuiksi lausekkesta $dx = dx/dt \cdot dt$ jne. Variaatio antaa sitä vastoin funktion arvon muutoksen argumenttien x, y ja z variaatioiden eli virtuaalisten muutosten δx, δy ja δz johdosta ajan arvon pysyessä muuttumattomana.

Varioinnin suhteen pätevät differentiaalilaskennasta tutut funktioiden summia, tuloja, potenssifunktioita yms. koskevat laskusäännöt. Joitakin tavallisimmin tarvittavia kaavoja on esitetty oheisessa taulukossa.

Taulukko 2.3.2 Varioinnin laskusääntöjä.

$\delta(f_1+f_2) = \delta f_1 + \delta f_2$	(1)	Summan variaatio
$\delta(kf) = k\delta f$	(2)	Vakion siirtosääntö
$\delta(f_1 \cdot f_2) = \delta f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot \delta f_2$	(3)	Tulon variaatio
$\delta(f^n) = nf^{n-1}\delta f$	(4)	Potenssifunktion variaatio
$\delta \frac{df}{dt} = \frac{d(\delta f)}{dt}$	(5)	Derivaatan variaatio
$\delta \int fdt = \int \delta fdt$	(6)	Määrätyn integraalin variaatio

Nämä laskusäännöt pätevät vastaavina myös, kun riippumattomia muuttujia on enemmän kuin yksi.

Kaavassa (2.3.79) virtuaaliselle työlle on käytetty merkintää δW sen korostamiseksi, että kyseessä ei ole funktion W variaatio vaan eräs infinitesimaalinen lauseke. Selitys tälle on vastaava, kuin mitä esitettiin kohdassa 2.3.5 merkinnän $đW$ yhteydessä. Koska työ ei ole yleensä tilafunktio, sen variaatiota ei siis voida laskea. Merkintää δW käytetään kylläkin silti melko paljon alan kirjallisuudessa. Muita tavallisia tunnuksia ovat mm. $\delta' W$, $\overline{\delta W}$ ja W^*.

Huomautettakoon vielä, että eräs ero todellisen työn ja virtuaalisen työn käsitteiden välillä näkyy siinä, että todellinen äärellinen työ saadaan summeeraamalla kaikki differentiaalisten töiden dW osuudet yhteen, mutta että virtuaalisen työn yhteydessä vastaavanlaista summeerattua työkäsitettä ei ollenkaan tarvita.

Virtuaalisen työn periaate. Kirjoitetaan tyypillinen liikeyhtälö muotoon

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i - m_i\vec{a}_i = \vec{0} \ , \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{2.3.82}$$

eli muotoihin

$$\left.\begin{aligned} (F_i)_x + (f_i)_x - m_i(a_i)_x &= 0 \ , \\ (F_i)_y + (f_i)_y - m_i(a_i)_y &= 0 \ , \\ (F_i)_z + (f_i)_z - m_i(a_i)_z &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.82'}$$

Kerrotaan yhtälö (2.3.82) skalaarisesti mielivaltaisella vektorilla $\vec{w}_i = (w_i)_x\vec{i} + (w_i)_y\vec{j} + (w_i)_z\vec{k}$ ja lasketaan syntyvät yhtälöt yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\Sigma(\vec{F}_i+\vec{f}_i-m_i\vec{a}_i)\cdot\vec{w}_i = 0 \ . \tag{2.3.83}$$

Vastaava tulos seuraa kertomalla yhtälöt (2.3.82') mielivaltaisilla skalaareilla $(w_i)_x$, $(w_i)_y$ ja $(w_i)_z$ ja laskemalla saadut 3N yhtälöä yhteen:

$$\begin{aligned} &[(F_1)_x+(f_1)_x-m_1(a_1)_x](w_1)_x + [(F_1)_y+(f_1)_y-m_1(a_1)_y](w_1)_y + \\ &+ [(F_1)_z+(f_1)_z-m_1(a_1)_z](w_1)_z + \ldots + [(F_N)_z+(f_N)_z-m_N(a_N)_z](w_N)_z \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.3.83'}$$

Koska vektorit $\vec{w}$ eli niiden komponentit w_x, w_y ja w_z ovat täysin mielivaltaisia, yhtälö (2.3.83) on täysin samanarvoinen yhtälöiden (2.3.82) kanssa. Voidaan nimittäin tehdä ensin esimerkiksi valinta: $(w_1)_x \neq 0$, muut komponentit = 0, josta seuraa yhtälö $(F_1)_x + (f_1)_x - m_1(a_1)_x = 0$ jne.

Yhtälön (2.3.83) voidaan ajatella esittävän tietynlaista painotettua liikeyhtälöä koko systeemille suureiden $\vec{w}$ toimiessa painoina. Yhtälön havainnollisuus lisääntyy, jos suureet $\vec{w}$ valitaan siten, että niillä on tietty fysikaalinen merkitys. Otetaan

$$\vec{w}_i = \delta\vec{r}_i \ , \tag{2.3.84}$$

jossa $\delta\vec{r}_i$ on funktion $\vec{r}_i(t)$ variaatio eli partikkelin i virtuaalinen siirtymä. Yhtälö (2.3.83) saa muodon

$$\Sigma\ \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \Sigma\ \vec{f}_i\cdot\delta\vec{r}_i - \Sigma\ m_i\vec{a}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \tag{2.3.85}$$

eli

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} + \delta W^I = 0 \tag{2.3.86}$$

eli vielä

$$\boxed{\delta W^* = 0\ .} \tag{2.3.87}$$

Tämä on ns. <u>virtuaalisen työn periaate</u> (engl. principle of virtual work) eli systeemiin vaikuttavien voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ on nolla jokaisen virtuaalisen siirtymätilan suhteen. Yhtälöä (2.3.87) nimitetään joskus myös virtuaalisten siirtymien periaatteeksi.

Edellä systeemiin vaikuttavien voimien tekemä virtuaalinen työ δW^* koostuu siis ulkoisten voimien tekemästä virtuaalisesta työstä δW_{ext}, sisäisten voimien tekemästä virtuaalisestä työstä δW_{int} ja hitausvoimien tekemästä virtuaalisesta työstä δW^I eli

$$\delta W^* = \delta W_{ext} + \delta W_{int} + \delta W^I \ , \tag{2.3.88}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \Sigma\ \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i \ , \\ \delta W_{int} &= \Sigma\ \vec{f}_i\cdot\delta\vec{r}_i = -\Sigma_{ij}\ S\delta s \ , \\ \delta W^I &= -\Sigma\ m_i\vec{a}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \Sigma\ \vec{F}_i^I\cdot\delta\vec{r}_i \ . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.89}$$

Sisäisten voimien virtuaalisen työn jälkimmäinen lauseke on se muoto, jota aina tavallisesti käytetään. Se johdetaan esimerkissä 2.3.4.

Staattisessa tapauksessa virtuaalisen työn periaate yksinkertaistuu hitausvoimien tekemän virtuaalisen työn δW^I hävitessä ja saadaan muoto

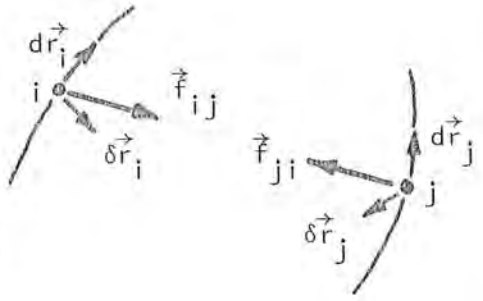
$$\boxed{\delta W = 0 \ ,} \tag{2.3.90}$$

jossa

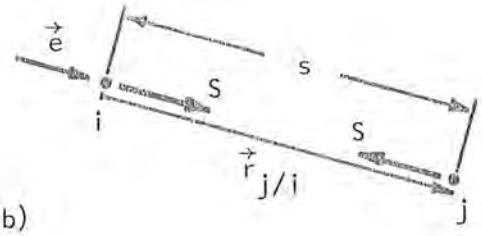
$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} \ . \tag{2.3.91}$$

Edellä on käytetty yläviitettä * muistuttamaan siitä, että virtuaalisen työn periaatetta sovelletaan tässä ja jatkossa dynaamisessa tapauksessa hitausvoima-ajattelua käyttäen. Näin virtuaalinen työyhtälö saadaan elementtimenetelmän kannalta sopivaan standardimuotoon: jotain yhtälön vasemmalla puolella = 0.

Esimerkki 2.3.4 Parittaisten sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ. Käsittely on aivan vastaava kuin esimerkissä 2.3.2. Täten voidaan kirjoittaa välittömästi lausekkeet



(a)



(b)

$$\vec{r}_{j/i} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \ , \tag{a}$$

$$\delta\vec{r}_{j/i} = \delta\vec{r}_j - \delta\vec{r}_i \ , \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{ij}^{int} &= \vec{f}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_i + \vec{f}_{ji}\cdot\delta\vec{r}_j \\ &= -\vec{f}_{ji}\cdot\delta\vec{r}_i + \vec{f}_{ji}\cdot\delta\vec{r}_j \\ &= \vec{f}_{ji}\cdot(\delta\vec{r}_j - \delta\vec{r}_i) \\ &= \vec{f}_{ji}\cdot\delta\vec{r}_{j/i} \ , \end{aligned} \tag{c}$$

$$\vec{r}_{j/i} = s\vec{e} \ , \quad \vec{f}_{ji} = -S\vec{e} \ , \tag{d}$$

$$\delta W_{ij}^{int} = -S\vec{e}\cdot\delta(s\vec{e}) = -S\vec{e}\cdot(\delta s\vec{e} + s\delta\vec{e}) = -S\delta s\vec{e}\cdot\vec{e} - S\cancel{s\vec{e}\cdot\delta\vec{e}} \tag{e}$$

eli

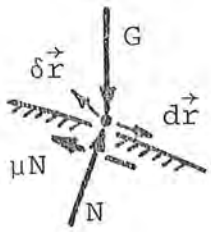
$$\delta W_{ij}^{int} = -S\delta s \ . \qquad (f)$$

Tässä δs on partikkelien i ja j etäisyyden s variaatio variaatioiden $\delta\vec{r}_i$ ja $\delta\vec{r}_j$ johdosta eli ns. virtuaalinen venymä.

Kaikkien systeemin sisäisten voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ saadaan siis kaavasta

$$\delta W^{int} = -\sum_{ij} S\delta s \ . \qquad (g)$$

Huomautus 1. Virtuaalisen työn periaatteen johtamistavasta käy selvästi ilmi, että periaatetta sovellettaessa aika on ajateltava "jäädytetyksi", sillä eihän johdossa tehtyyn matemaattinen manipulointiin, jolla muodostettiin vallitsevien liikeyhtälöiden lineaarikombinaatio, liity ajan kulumista. Samoin liikeyhtälöissä esiintyvien voimien suuruuksiin ja suuntiin ei saada ajatella mitään virtuaalisesta siirtymästä riippuvia muutoksia vaan voimilla täytyy olla tietty ko. ajan hetkeen liittyvä arvo. Tästä käyköön esimerkkinä kuvan 2.3.19 esittämä kitkallisella pinnalla painovoiman G alaisena liikkuva partikkeli. Vaikka virtuaalinen siirtymä otettaisiin sellaiseksi, että partikkeli irtoaa alustasta tai painuu sen sisään, rajoitevoiman N ja kitkavoiman μN ajatellaan siis säilyttävän ko. ajan hetkellä saavuttamansa arvot virtuaalista työtä laskettaessa. Todellisen työn suhteen tulos olisi aivan toinen. Jos $d\vec{r}$ olisi esimerkiksi pinnasta ulospäin suunnattu, voimat N ja μN lakkaisivat heti vaikuttamasta ja niiden differentiaalinen työ häviäisi.



Kuva 2.3.19 Kaltevalla pinnalla liikkuva partikkeli.

Joskus puhutaan virtuaalisen työn periaatteen sijasta virtuaalisen tehon periaatteesta ja virtuaalisten siirtymien sijasta vastaavasti virtuaalisista nopeuksista. Tällöin tulkinta (2.3.84) korvataan tulkinnalla $\vec{w}_i = \vec{v}_i^{virt}$, jossa $\vec{v}_i^{virt}$ on mielivaltainen oletettu, kuviteltu suure, jolla on nopeuden laatu eli ns. virtuaalinen nopeus. (Voidaan esimerkiksi ottaa $\vec{v}_i^{virt} = \delta\vec{r}/\delta t$, jossa

δt on jokin infinitesimaalinen aika; ei mikään variaatio.) Tällä tulkinnalla on se etu, että suureiden $\vec{v}_i^{virt}$ käyttö korostaa periaatteen koskevan systeemiä tietyllä hetkellä, kun ei tarvitse puhua virtuaalisten siirtymien "tapahtumisesta".

— — —

Huomautus 2. Virtuaalisen työn periaate tullaan kirjoittamaan tarvittaessa jatkossa mukavuussyistä myös muodossa (vrt. kaava (2.3.88))

$$\delta W^* \equiv \delta W^*_{ext} + \delta W_{int} = 0 \ , \tag{2.3.92}$$

jossa

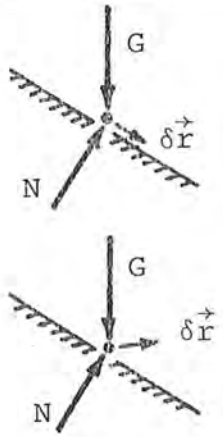
$$\left.\begin{aligned} \delta W^*_{ext} &= \Sigma\, \vec{F}^*_i \cdot \delta\vec{r}_i \ , \\ \vec{F}^*_i &= \vec{F}_i + \vec{F}^I_i \ . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.93}$$

Toisin sanoen yläviite * muistuttaa siitä, että hitausvoimat on merkitty mukaan samaan ulkoisten voimien ryhmään todellisten ulkoisten voimien kanssa.

— — —

Rajoitteet ja virtuaalinen siirtymä. Jos systeemin partikkelien liike on täysin vapaata, virtuaalisen työn periaatteesta ei ole paljonkaan hyötyä. Tilanne muuttuu, mikäli partikkelien liike on sidottua eli kun systeemissä on kinemaattisia rajoitteita kuten on tavallista.

Virtuaaliset siirtymät voidaan valita rajoitteiden kannalta kahdella tavalla:



Kinemaattisesti luvallinen virtuaalinen siirtymä (engl. virtual displacements satisfying the constraints),

Kinemaattisesti luvaton virtuaalinen siirtymä (engl. virtual displacements violating the constraints).

Kuva 2.3.20 Virtuaalisten siirtymien luokittelu.

Kinemaattisesti luvallisilla virtuaalisilla siirtymillä tarkoitetaan virtuaalisia siirtymiä, jotka toteuttavat todellisille differentiaalisille siirtymille asetetut rajoitteet. (Kun vielä mahdolliset ajan funktiona annetut liikkeet eli ns. pakkoliikkeet ajatellaan virtuaalisen työn periaatteen hengen mukaisesti pysäytetyiksi; aika on jäädytetty.) Kinemaattisesti luvattomilla virtuaalisilla siirtymillä tarkoitetaan taas virtuaalisia siirtymiä, jotka eivät toteuta asetettuja rajoitteita. Kuvaan 2.3.20 on piirretty symbolisiksi esimerkeiksi kaltevalla kiinteällä tasolla liikkuvan partikkelin kinemaattisesti luvallinen ja luvaton siirtymä.

Edelliseen jaotteluun liittyy tärkeä lause:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rajoitevoimien systeemiin tekemä virtuaalinen työ}\\ \text{häviää systeemin jokaisessa kinemaattisesti luval-}\\ \text{lisessa virtuaalisessa siirtymässä.}\end{array}\right\} \quad (2.3.94)$$

Tämä otetaan joissakin esityksissä jopa aksioomaksi (ks. esimerkiksi [2.5, s.76]). Tässä ei tehdä näin, vaan tulos todetaan aina tarvittaessa paikkansa pitäväksi tapaus tapaukselta. Esimerkiksi kuvan 2.3.20 esittämässä tilanteessa nähdään, että rajoitevoima N ei tee (tekee) virtuaalista työtä partikkeliin kinemaattisesti luvallisessa (luvattomassa) virtuaalisessa siirtymässä.

Tuntemattomat rajoitevoimat pyritään yleensä eliminoimaan syntyvistä liikeyhtälöistä. Lauseen (2.3.94) perusteella ymmärretään, että tämä voidaan saada aikaan valitsemalla virtuaaliset siirtymät kinemaattisesti luvallisiksi. (Aina näin ei kuitenkaan käy. Tavallisin poikkeus liittyy Coulombin kitkalain mukaiseen kitkavoimaan μN. Kitkavoima tekee yleensä nollasta eroavan virtuaalisen työn ja tätä kautta rajoitevoima N ilmestyy epäsuorasti virtuaaliseen työyhtälöön.)

Rajoitevoimien eliminoituminen voidaan selittää vielä toisella tavalla seuraavasti. Rajoitevoimat esiintyvät lineaarisina (ensimmäisessä potenssissa) systeemin partikkelien komponenttiliikeyhtälöissä (ks. esimerkki 2.3.5, yhtälöt (c)). Rajoitevoimien eliminoiminen tapahtuisi näitä yhtälöitä käyttäen kuten matematiikassa yleensäkin lineaarisia yhtälöryhmiä käsiteltäessä: muodostetaan sopivia yhtälöiden lineaarikombinaatioita. Mutta virtuaalisen työn periaatehan johdettiin muodostamalla komponenttiliikeyh-

tälöiden lineaarikombinaatioita. Kinemaattisesti luvallisia virtuaalisia siirtymiä käytettäessä saadaan juuri halutut kertoimet näihin kombinaatioihin.

Usein kun kirjallisuudessa puhutaan virtuaalista siirtymistä, niillä tarkoitetaan nimenomaan kinemaattisesti luvallisia siirtymiä. Kinemaattisesti luvattomia virtuaalisia siirtymiä sovelletaan taas erityisesti silloin, kun halutaan määrittää rajoitevoimien arvoja.

Kohdassa 2.3.1 esitetyllä voimien jaolla aktiivisiin ja passiivisiin voimiin on merkitystä sikäli, että virtuaalisen työn laskemisvaivaa voidaan vähentää, kun voidaan jättää heti alkuun passiivisten voimien osuus pois. Rajoitevoimat ovat tärkein passiivisten voimien ryhmä.

<u>Yleistetyt voimat</u>. Tarkastellaan nyt yleistettyjen koordinaattien käyttöä virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä. Rajoitutaan holonomiseen tapaukseen, jolloin lähtökohtana voidaan pitää yhtälöitä (2.3.3).

Varioimalla saadaan

$$\boxed{\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j\,,} \qquad i = 1,2,\ldots,N \qquad (2.3.95)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\,\delta q_j\,, \\ \delta y_i &= \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\,\delta q_j\,, \\ \delta z_i &= \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\,\delta q_j\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.95')$$

Voidaan todeta, että virtuaaliset siirtymät (2.3.95) ovat pakosti kinemaattisesti luvallisia, koska on sitouduttu esitykseen (2.3.3), joten yleistettyjen koordinaattien arvoja voidaan vaihdella vapaasti rajoitusehtoja rikkomatta.

Lauseketta (2.3.95) käytettäessä virtuaalinen työ (2.3.88) saa muodon

$$\boxed{\delta W^* = \sum_{j=1}^{n} Q_j^* \delta q_j \ ,} \tag{2.3.96}$$

jossa

$$Q_j^* = Q_j^{ext} + Q_j^{int} + Q_j^I \tag{2.3.97}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} Q_j^{ext} &= \Sigma\, \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ Q_j^{int} &= \Sigma\, \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{kl} S\, \frac{\partial s}{\partial q_j} \\ Q_j^I &= \Sigma\, \vec{F}_i^I \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.98}$$

Suureita Q_j nimitetään <u>yleistetyiksi voimiksi</u> (engl. generalized force). Tärkeä kaava (2.3.96) esittää siis erästä virtuaalisen työn lauseketta eikä sitä tule sekoittaa virtuaalisen työn periaatteeseen. Kaavaa voidaan pitää yleistettyjen voimien määrittelynä. Yleistetyllä voimalla ei tarvitse olla voiman dimensiota, sillä sen dimensio määräytyy siitä, että kullakin tulolla $Q_j^* \delta q_j$ tulee olla työn dimensio. Täten jos yleistetty koordinaatti on esimerkiksi kulma tai tilavuus, vastaavalla yleistetyllä voimalla on momentin tai paineen dimensio.

Toisen kaavan (2.3.98) viimeinen muoto seuraa toisesta kaavasta (2.3.89). (Voidaan kirjoittaa ensin $s = s(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$, joten $\delta s = \sum_{j=1}^{n} (\partial s/\partial q_j)\, \delta q_j$ jne. Summaa yli pisteparien on merkitty tunnuksella $\sum_{kl}$, koska j viittaa nyt yleistettyjen koordinaattien numerointiin.)

Todettakoon, että yleistetyt voimat Q^{ext} voidaan määrittää usein paitsi kaavaa (2.3.98) käyttäen vaihtoehtoisesti (ja havainnollisesti) hahmottelemalla systeemin virtuaalinen siirtymä erik-

seen kunkin variaation δq_j johdosta, määrittämällä kuvion perusteella tehty virtuaalinen työ δW^{ext}, jolloin $Q_j^{ext} = \delta W^{ext}/\delta q_j$ määritelmän (2.3.96) perusteella (ks. esimerkki 2.3.6).

Seuraava askel perustuu siihen, että virtuaaliset siirtymät ovat mielivaltaisia. Sijoitetaan esitys (2.3.96) virtuaaliseen työyhtälöön (2.3.87):

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j^* \delta q_j = 0 \ . \tag{2.3.99}$$

Yleistetyt koordinaatit ovat riippumattomia ja siten myös niiden variaatiot voidaan valita mielivaltaisella tavalla. Yhtälöstä (2.3.99) saadaan täten yhtälöt (asetetaan ensin esimerkiksi $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$, josta seuraa $Q_1^* = 0$ jne.)

$$\boxed{Q_j^* \equiv Q_j^{ext} + Q_j^{int} + Q_j^I = 0 \ ,} \qquad j = 1,2,\ldots,n \ . \tag{2.3.100}$$

Nämä ovat systeemin yleistetyissä koordinaateissa lausutut <u>liikeyhtälöt</u>.

<u>Staattisessa tapauksessa</u> hitausvoimat häviävät ja saadaan systeemin <u>tasapainoyhtälöt</u>

$$\boxed{Q_j \equiv Q_j^{ext} + Q_j^{int} = 0 \ ,} \qquad j = 1,2,\ldots,n \ . \tag{2.3.101}$$

On syytä muistaa, että yhtälöt (2.3.100) ja (2.3.101) on johdettu soveltaen kinemaattisesti luvallisia virtuaalisia siirtymiä. Täten passiivisten voimien ja erityisesti siis rajoitevoimien osuus voidaan jättää pois yleistettyjä voimia Q_j^{ext} ja Q_j^{int} määritettäessä.

<u>Huomautus 3</u>. Virtuaalista siirtymää on käsitelty edellä partikkelin paikkavektorin $\vec{r}(t)$ variaationa. Sama tulos saadaan myös lähtien partikkelin siirtymävektorin $\vec{u}(t)$ variaatiosta sillä esityksen $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i^{\,o} + \vec{u}_i(t)$ perusteella

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{u}_i \tag{2.3.102}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \delta u_i \ , \\ \delta y_i &= \delta v_i \ , \\ \delta z_i &= \delta w_i \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.102')$$

Kaavojen (2.3.95) tai (2.3.95') sijasta saadaan vastaavasti lähtien kaavoista (2.3.4) tai (2.3.4')

$$\delta \vec{u}_i = \Sigma \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial q_j} \delta q_j \ , \qquad (2.3.103)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \delta u_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \delta q_j \ , \\ \delta v_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \delta q_j \ , \\ \delta w_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \delta q_j \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.103')$$

ja lausekkeet (2.3.98) muuttuvat merkintöjen suhteen vastaavasti. Jos operoidaan siirtymien avulla, yleistettyjä koordinaatteja voidaan tällöin nimittää myös <u>yleistetyiksi siirtymiksi</u> (engl. generalized displacement.)

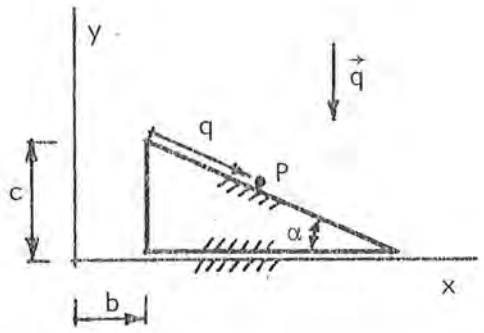
<u>Huomautus 4</u>. Jäykän kappaleen kinemaattisesti luvalliset virtuaaliset siirtymät saadaan kaavan (2.2.5) kanssa analogisesta kaavasta

$$\delta \vec{u}_Q = \delta \vec{u}_P + \vec{\theta}^{virt} \cdot \vec{r}_{Q/P} \ , \qquad (2.3.104)$$

jossa $\vec{\theta}^{virt}$ on jäykän kappaleen virtuaalinen kulmasiirtymä. Kinemaattisesti luvallisessa jäykän kappaleen virtuaalisessa siirtymässä kappaleen partikkelien väliset etäisyydet pysyvät muuttumat-

tomina ($\delta s = 0$) ja siis esimerkiksi keskimmäisen kaavan (2.3.89) perusteella saadaan tulos: Jäykän kappaleen sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ on nolla jäykän kappaleen kinemaattisesti luvallisessa virtuaalisessa siirtymässä. Tämä tulos on myös lauseen (2.3.94) mukainen, koska jäykän kappaleen mallissa sisäiset voimat ovat rajoitevoimia.

Esimerkki 2.3.5 Pakkoliikkeessä olevalla kaltevalla tasolla liikkuva partikkeli. Tarkastellaan virtuaaliseen työhön liittyviä käsitteitä kuvan (a) esittämän erittäin yksinkertaisen esimerkin avulla.



(a)

Systeeminä on partikkeli, joka liikkuu painovoiman alaisena tasoliikkeessä kitkattomalla kaltevalla tasolla. Kaltevan tason translaatiopakkoliikkeen ilmaisee asema b, joka on annettu muodossa

$$b = \hat{b}\sin\omega t \ , \qquad \text{(a)}$$

jossa $\hat{b}$ ja ω ovat vakioita. Kyseessä on yhden vapausasteen reonominen systeemi. Yleistetyksi koordinaatiksi q on valittu tässä partikkelin etäisyys tason yläreunasta. Kaavojen (2.3.3) vastineeksi saadaan

$$\vec{r} = (q\cos\alpha + \hat{b}\sin\omega t)\vec{i} + (c - q\sin\alpha)\vec{j} \qquad \text{(b)}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} x &= q\cos\alpha + \hat{b}\sin\omega t \ , \\ y &= c - q\sin\alpha \ . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b')}$$

Kirjoitetaan ensin liikeyhtälöt kuvan (b) vapaakappalekuvion avulla. Saadaan

(b)

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow\ & N\sin\alpha = m\ddot{x} \ , \\ \uparrow\ & N\cos\alpha - mq = m\ddot{y} \ . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Kinemaattisista yhteyksistä (b') seuraa kaksi kertaa derivoimalla

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{q}\cos\alpha - \hat{b}\omega^2\sin\omega t \ , \\ \ddot{y} &= -\ddot{q}\sin\alpha \ . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

Neljässä yhtälössä (c) ja (d) esiintyy vastaavasti neljä tuntematonta $x(t)$, $y(t)$, $q(t)$, $N(t)$. Eliminoidaan rajoitevoima N kertomalla ensimmäinen yhtälö (c) kertoimella $\cos\alpha$ ja toinen yhtälö kertoimella $-\sin\alpha$ ja laskemalla syntyvät yhtälöt yhteen:

$$mg\sin\alpha = m\ddot{x}\cos\alpha - m\ddot{y}\sin\alpha \ . \tag{e}$$

Kun tähän vielä sijoitetaan lausekkeet (d) ja sievennettään, saadaan lopuksi yhtä tuntematonta q koskeva differentiaaliyhtälö

$$\ddot{q} = g\sin\alpha + \hat{b}\omega^2\cos\alpha\sin\omega t \ . \tag{f}$$

Sen ratkaisu on

$$q = A + Bt + \frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2 - \hat{b}\cos\alpha\sin\omega t \ . \tag{g}$$

Integroimisvakiot A ja B määritetään asetettujen alkuehtojen perusteella. Muut tuntemattomat x, y ja N saadaan tämän jälkeen helposti yhtälöistä (b'), (d) ja (c) sijoitusten avulla. Todettakoon, että elementtimenetelmän terminologian mukaan yhtälöiden (c) ja (d) esittämä formulaatio on sekamenetelmän mukainen (tuntemattomina sekä voimia että siirtymiä) ja taas yhtälön (f) esittämä probleema on siirtymämenetelmän mukainen (tuntemattomina vain siirtymiä).

Tarkastellaan nyt tehtävää virtuaalisen työn periaatetta hyväksi käyttäen. Kaavan (2.3.95) vastine on ($\vec{r} = \vec{r}(q,t)$)

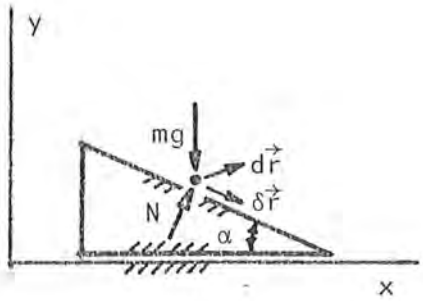
$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\,\delta q = (\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j})\,\delta q \ , \tag{h}$$

kun taas todellinen differentiaalinen siirtymä ($\vec{r} = \vec{r}(q,t)$)

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\,dq + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\,dt$$

$$= (\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j})\,dq + \hat{b}\omega\cos\omega t\cdot\vec{i}\,dt \tag{i}$$

Tulosten ero näkyy kuvassa (c). Todellisessa liikkeessä myös kalteva taso liikkuu pakkoliikkeen johdosta ajassa dt tietyn matkan ja partikkelin siirtymä $d\vec{r}$ ei ole yleensä tason suuntainen. Rajoitevoima N on täten todellisen liikkeen suhteen aktiivinen, nollasta eroavaa työtä tekevä voima. Se on siis myös epäkonservatiivinen (vrt. kuva 2.3.7). Siirtymän (h) havaitaan sen sijaan olevan tason suuntaisen ja rajoitevoima N on täten virtuaalisen työn suhteen passiivinen, virtuaalista työtä tekemätön voima kuten lause (2.3.94) väittää. Pakkoliikkeen osuus häviää, koska aika on ajateltu jäädytetyksi.



(c)

Partikkelin kiihtyvyys on kaavojen (d) mukaisesti

$$\vec{a} = (\ddot{q}\cos\alpha - \hat{b}\omega^2\sin\omega t)\vec{i} - \ddot{q}\sin\alpha\vec{j} \ . \qquad \text{(j)}$$

Muodostetaan kaavan (2.3.100) mukainen liikeyhtälö. Yleistetyt voimat ovat (ks. kaavat (2.3.98))

$$\left.\begin{aligned}
Q^{ext} &= \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} \\
&= [N\sin\alpha\vec{i} + (N\cos\alpha - mg)\vec{j}]\cdot(\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j}) \\
&= N\sin\alpha\cos\alpha - N\cos\alpha\sin\alpha + mg\sin\alpha \\
&= mg\sin\alpha \ , \\
Q^{int} &= 0 \ , \\
Q^{I} &= \vec{F}^{I}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} = -m\vec{a}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} \\
&= m[(\ddot{q}\cos\alpha - \hat{b}\omega^2\sin\omega t)\vec{i} - \ddot{q}\sin\alpha j]\cdot(\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j}) \\
&= -m(\ddot{q}\cos^2\alpha - \hat{b}\omega^2\cos\alpha\sin\omega t + \ddot{q}\sin^2\alpha) \\
&= -m(\ddot{q} - \hat{b}\omega^2\cos\alpha\sin\omega t) \ .
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(k)}$$

Ulkoisista voimista syntyvää yleistettyä voimaa Q^{ext} laskettaessa olisi voitu kirjoittaa suoraan $Q^{ext} = \vec{F}^a\cdot\partial\vec{r}/\partial q$, jossa $\vec{F}^a = -mg\vec{j}$. Tässä haluttiin kuitenkin näyttää, kuinka virtuaalinen siirtymä hoitaa automaattisesti rajoitevoiman N eliminoimisen (vrt. yhtälöiden (c) manipulointi edellä). Liikeyhtälö (2.3.100) on siis

$$Q^* \equiv mg\sin\alpha - m(\ddot{q} - \hat{b}\omega^2\cos\alpha\sin\omega t) = 0 \ , \qquad \text{(l)}$$

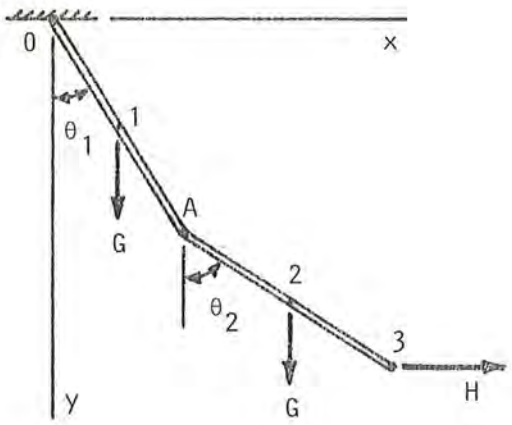
josta saadaan sieventämällä uudestaan edellä toisella tavalla johdettu yhtälö (f).

<u>Esimerkki 2.3.6</u> Kahden jäykän kappaleen systeemi. Tarkastellaan esimerkissä 2.3.1 esitettyä systeemiä. Nivelet 0 ja A ovat kitkattomia. Voimat G vaikuttavat sauvojen keskipisteisssä. Voimien suunnat säilyvät systeemin asemasta riippumatta. Sauvojen pituudet ovat l. Määritetään systeemin tasapainoasema virtuaalisen työn periaatteen avulla.

Systeemin ainoat aktiiviset voimat ovat ulkoiset voimat

$$\vec{F}_1 = G\vec{j} \ , \quad \vec{F}_2 = G\vec{j} \ , \quad \vec{F}_3 = H\vec{i} \ . \qquad \text{(a)}$$

Voimien vaikutuspisteiden 1, 2 ja 3 siirtymät ovat kaavojen (a) ja (b), esimerkki 2.3.1 perusteella



(a)

$$\left.\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \frac{l}{2}\sin\theta_1\vec{i} + \left(\frac{l}{2}\cos\theta_1 - \frac{l}{2}\right)\vec{j}\ ,\\
\vec{u}_2 &= \left(l\sin\theta_1 + \frac{l}{2}\sin\theta_2\right)\vec{i} +\\
&\quad + \left(l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2 - \frac{3}{2}l\right)\vec{j}\ ,\\
\vec{u}_3 &= (l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2)\vec{i} +\\
&\quad + (l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 - 2l)\vec{j}\ .
\end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Yleistetyt voimat ovat kaavojen (2.3.98) mukaisesti (ks. myös huomautus 3)

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 = Q_1^{ext} &= \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \theta_1}\\
&= G\vec{j}\cdot\left(\frac{l}{2}\cos\theta_1\vec{i} - \frac{l}{2}\sin\theta_1\vec{j}\right) +\\
&\quad + G\vec{j}\cdot(l\cos\theta_1\vec{i} - l\sin\theta_1\vec{j}) +\\
&\quad + H\vec{i}\cdot(l\cos\theta_1\vec{i} - l\sin\theta_1\vec{j})\\
&= -G\frac{l}{2}\sin\theta_1 - Gl\sin\theta_1 + Hl\cos\theta_1\\
&= -\frac{3}{2}Gl\sin\theta_1 + Hl\cos\theta_1\ .\\
Q_2 = Q_2^{ext} &= \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \theta_2}\\
&= \vec{G}\vec{j}\cdot(0) +\\
&\quad + G\vec{j}\cdot\left(\frac{l}{2}\cos\theta_2\vec{i} - \frac{l}{2}\sin\theta_2\vec{j}\right) +\\
&\quad + H\vec{i}\cdot(l\cos\theta_2\vec{i} - l\sin\theta_2\vec{j})\\
&= 0 - G\frac{l}{2}\sin\theta_2 + Hl\cos\theta_2\\
&= -\frac{l}{2}Gl\sin\theta_2 + Hl\cos\theta_2\ .
\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Tasapainoyhtälöt (2.3.101) ovat

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &\equiv -\frac{3}{2}\,Gl\sin\theta_1 + Hl\cos\theta_1 = 0\,, \\ Q_2 &\equiv -\frac{1}{2}\,Gl\sin\theta_2 + Hl\cos\theta_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

ja niiden ratkaisu on

$$\theta_1 = \arctan\frac{2H}{3G}\,, \qquad \theta_2 = \arctan\frac{2H}{G}\,. \qquad \text{(e)}$$

Tästä esimerkistä käy selvästi ilmi virtuaalisen työn periaatteen käyttökelpoisuus, kun ajatellaan vaihtoehtoista tapaa johtaa tasapainoyhtälöt muodostamalla ensin kummallekin kappaleelle vapaakappalekuviot ja näistä tarvittavat yhtälöt. Tällöin tuntemattomat nivelvoimat tulisivat mukaan ja ne täytyisi erikseen eliminoida jatkossa.

Toisaalta yhtälöt (d) voidaan tulkita fysikaalisesti seuraavasti. Jälkimmäinen yhtälö esittää selvästikin sauvaan 2 vaikuttavien voimien momenttitasapainoa nivelen A suhteen ja edellinen yhtälö taas sauvojen 1 ja 2 muodostamaan systeemiin vaikuttavien voimien momenttitasapainoa nivelen 0 suhteen. Synnyttämällä yhtälöt näin olisi siis myös päästy suoraan eroon rajoitevoimista ilman virtuaalisen työn periaatetta.

Yhtälöiden (d) muodostamisessa ei ole asetettu rajoituksia siirtymien suuruudelle. Yhtälöt ovat täten ns. suurten siirtymien teorian mukaisia ja epälineaarisia yleistettyjen siirtymien $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$ suhteen. Pienten siirtymien teoria syntyy tässä ottamalla $\sin\theta \approx \theta$ ja $\cos\theta \approx 1$, jolloin yhtälöt (d) saavat lineaarisen muodon

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &\equiv -\frac{3}{2}\,Gl\theta_1 + Hl = 0\,, \\ Q_2 &\equiv -\frac{1}{2}\,Gl\theta_2 + Hl = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f)}$$

eli

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}G & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ H \end{Bmatrix}. \qquad \text{(f')}$$

Vastaava ratkaisu on

$$\theta_1 = \frac{2}{3}\frac{H}{G}\,, \qquad \theta_2 = 2\,\frac{H}{G}\,. \qquad \text{(g)}$$

Linearisoinnin suorittamisen suhteen on oltava varovainen, sillä suorituspaikka voi vaikuttaa lopputulokseen. Jos esimerkiksi jo esitys (b) linearisoitaisiin, saataisiin

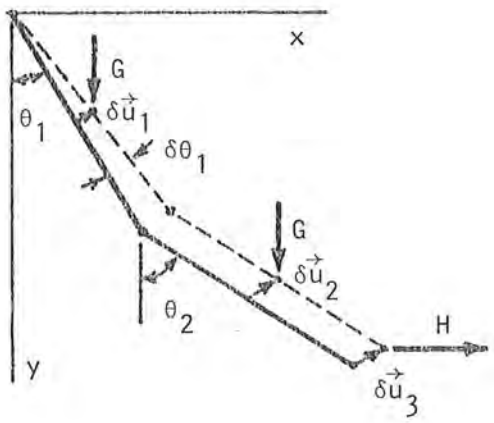
$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_1 &\approx \frac{1}{2}\,\theta_1\vec{i}\,, \\ \vec{u}_2 &\approx (l\theta_1 + \frac{1}{2}\,\theta_2)\vec{i}\,, \\ \vec{u}_3 &\approx (l\theta_1 + l\theta_2)\vec{i}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(h)}$$

Tämä johtaisi aivan virheellisiin tuloksiin, koska sitä varioitaessa voimien G virtuaalinen työ häviäisi kokonaan formulaatiosta. Konsistentin tuloksen saamiseksi olisi kaavoissa (b) käytettävä kehitelmiä $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, jolloin

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_1 &\approx \frac{l}{2}\,\theta_1\vec{i} - \frac{l}{4}\,\theta_1^2\vec{j}\,, \\ \vec{u}_2 &\approx (l\theta_1 + \frac{l}{2}\,\theta_2)\vec{i} + (-\frac{l}{2}\,\theta_1^2 - \frac{l}{4}\,\theta_2^2)\vec{j}\,, \\ \vec{u}_3 &\approx (l\theta_1 + l\theta_2)\vec{i} + (-\frac{l}{2}\,\theta_1^2 - \frac{l}{2}\,\theta_2^2)\vec{j} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(i)}$$

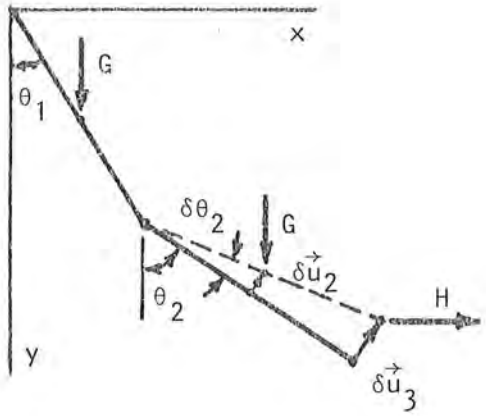
ja saadaan kaavojen (f) mukaiset yleistetyt voimat.

Kuvissa (b) ja (c) on esitetty graafisesti variaatioita $\delta\theta_1 \neq 0$ ja $\delta\theta_2 \neq 0$ vastaavat virtuaaliset siirtymät. Kuvista voidaan päätellä niiden vieressä esitetyt tulokset:



(b)

$$\left.\begin{aligned} \delta u_1 &= \frac{l}{2}\cos\theta_1\cdot\delta\theta_1\,, \\ \delta v_1 &= -\frac{l}{2}\sin\theta_1\cdot\delta\theta_1\,, \\ \delta u_2 &= l\cos\theta_1\cdot\delta\theta_1\,, \\ \delta v_2 &= -\,l\sin\theta_1\cdot\delta\theta_1\,, \\ \delta u_3 &= l\cos\theta_1\cdot\delta\theta_1\,, \\ \delta v_3 &= -\,l\sin\theta_1\cdot\delta\theta_1\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(j)}$$



(c)

$$\left.\begin{aligned} \delta u_1 &= 0\,, \\ \delta v_1 &= 0\,, \\ \delta u_2 &= \frac{l}{2}\cos\theta_2\cdot\delta\theta_2\,, \\ \delta v_3 &= -\frac{l}{2}\sin\theta_2\cdot\delta\theta_2\,, \\ \delta u_3 &= l\cos\theta_2\cdot\delta\theta_2\,, \\ \delta v_4 &= -\,l\sin\theta_2\cdot\delta\theta_2\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(k)}$$

Vastaavat ulkoisten voimien tekemien virtuaalisten töiden lausekkeet ovat siis

$$\left.\begin{aligned} \delta W^{ext} &= \left[G(-\tfrac{1}{2}\sin\theta_1)+G(-l\sin\theta_1)+Hl\cos\theta_1\right]\delta\theta_1 , \\ \delta W^{ext} &= \left[G\cdot 0+G(-\tfrac{1}{2}\sin\theta_2)+Hl\cos\theta_2\right]\delta\theta_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Näistä saadaan määritelmän (2.3.99) perusteella taas kaavojen (c) mukaiset lausekkeet.

<u>Monogeenisten voimien tekemä virtuaalinen työ</u>. Jos ulkoinen voima $\vec{F}_i$ on monogeeninen, sen tekemä virtuaalinen työ

$$\delta W_i^{ext} = \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = -\vec{\nabla}V_i'^{ext}\cdot\delta\vec{r}_i = -\delta V_i'^{ext} , \qquad (2.3.105)$$

jossa $\delta V_i'^{ext}$ on funktion $V_i'^{ext}(\vec{r}_i,t)$ variaatio argumentin $\vec{r}_i$ variaation $\delta\vec{r}_i$ johdosta.

Jos parittaiset sisäiset voimat $\vec{f}_{ij}$ ja $\vec{f}_{ji}$ ovat monogeenisia, niiden tekemä virtuaalinen työ

$$\delta W_{ij}^{int} = -S\delta s = -\frac{\partial V_{ij}'^{int}}{\partial s}\,\delta s = -\delta V_{ij}'^{int} , \qquad (2.3.106)$$

jossa $\delta V_{ij}'^{int}$ on funktion $V_{ij}'^{int}(s,t)$ variaatio argumentin s variaation δs johdosta.

On huomattava, että virtuaalisten siirtymien käsitteen mukaisesti aika on pidetty vakiona, jolloin on saatu kaavat (2.3.105) ja (2.3.106). Vastaavia todellisen differentiaalisen työn lausekkeita kuin (2.3.63) ja (2.3.67) ei voida johtaa funktioista $V_i'^{ext}$ ja $V_{ij}'^{int}$, koska todellisessa liikkeessä aika saa myös lisäyksen dt. Tällöin esimerkiksi $V_i'^{ext}$:n differentiaaliin $dV_i'^{ext}$ tulisi mukaan termi $(\partial V_i'^{ext}/\partial t)dt$, joka ei esitä tehtyä työtä.

Määritellään vastaavasti kuin kaavoissa (2.3.72) systeemin ajasta riippuva potentiaalienergia $V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,t)$ summana potentiaalienergioista $V_i'^{ext}$ ja $V_{ij}'^{int}$. Monogeenisten voimien tekemä virtuaalinen työ saadaan nyt muodossa

$$\boxed{\delta W = -\delta V' ,} \qquad (2.3.107)$$

jossa $\delta V'$ on funktion $V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,t)$ variaatio argumenttien

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ variaatioiden johdosta eikä vain eräs infinitesimaalinen lauseke.

Jos yleistetyt koordinaatit ovat käytettävissä, V':sta tulee kaavojen (2.3.3) kautta yleistettyjen koordinaattien ja ajan funktio

$$V' = V'(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \ . \tag{2.3.108}$$

Kaavan (2.3.107) oikea puoli voidaan esittää variaatioiden δq avulla, jolloin saadaan

$$\delta W = - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V'}{\partial q_j} \delta q_j \ . \tag{2.3.109}$$

Vertaamalla tätä yleistettyjen voimien määrittelykaavaan (2.3.96) nähdään, että monogeenisia voimia vastaavat yleistetyt voimat saadaan kaavoista

$$\boxed{Q_j = - \frac{V'}{q_j} \ ,} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{2.3.110}$$

<u>Konservatiivisten voimien tekemä virtuaalinen työ</u>. Koska konservatiivinen voima on monogeenisen voiman erikoistapaus siten, että eksplisiittinen riippuvuus ajasta häviää, kaavojen (2.3.107)... (2.3.110) vastineet tulevat olemaan

$$\boxed{\delta W = -\delta V \ ,} \tag{2.3.111}$$

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n) \ , \tag{2.3.112}$$

$$\delta W = - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \ , \tag{2.3.113}$$

$$\boxed{Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \ ,} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{2.3.114}$$

<u>Loppuhuomautuksia</u>. On syytä korostaa virtuaalisen työn periaatteen tärkeää asemaa mekaniikassa. Jatkossa käsiteltävät Lagrangen

yhtälöt, Hamiltonin periaate ja potentiaalienergian stationaarisuuden periaate ovat kaikki virtuaalisen työn periaatteen eriasuisia esityksiä. Virtuaalinen työyhtälö on vain näennäisesti yksi yhtälö. Koska virtuaaliset siirtymät ovat mielivaltaisia, työyhtälöstä voidaankin johtaa useita — systeemin vapausasteiden lukumäärää vastaava määrä — riippumattomia yhtälöitä. Sen sijaan todelliseen työhön liittyvä systeemin työyhtälö on todella vain yksi yhtälö, koska siinä siirtymät voidaan "valita" vain yhdellä tavalla: todellista tapahtumaa vastaaviksi.

2.3.8 Lagrangen yhtälöt

Dynaamisessa tapauksessa virtuaalisen työn periaatteella johdetut liikeyhtälöt (2.3.100) kirjoitettuina muodossa $Q_j^{ext} + Q_j^{int} = -Q_j^I$ eli vielä muodossa

$$Q_j = \Sigma\, m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,, \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{2.3.115}$$

vaativat kiihtyvyyksien $\ddot{\vec{r}}_i$ laskemista kaavoista (2.3.3): $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,t)$. Tämä voi olla melko hankala tehtävä, jos lausekkeet (2.3.3) ovat monimutkaisia. Yhtälöitä (2.3.115) nimitetään <u>Lagrangen yhtälöiksi</u>, kun niiden oikeat puolet on muunnettu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
Q_j &= \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\right) \right\} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right)
\end{aligned} \tag{2.3.116}$$

eli

$$\boxed{Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j}\,,} \qquad j = 1,2,\ldots,n\,. \tag{2.3.117}$$

Tässä on käytetty toisen ja kolmannen rivin välillä apuna oikeaksi todennettavissa olevia kaavoja

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} , \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} . \tag{2.3.118}$$

Lagrangen yhtälöissä (2.3.117) systeemin liike-energian K lausekkeen $K = \Sigma\ 1/2\ m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$ muodostamiseksi tarvitaan enää vain nopeuksien

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} , \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{2.3.119}$$

lausekkeet. Toisaalta K:n suhteen joudutaan vielä suorittamaan kaavan (2.3.117) esittämät lisäoperaatiot. Yleisesti K tulee olemaan muotoa

$$K = K(q_1,q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n,t) . \tag{2.3.120}$$

Suureita $\dot{q}_j$ nimitetään yleistetyiksi nopeuksiksi.

Jos systeemissä on monogeenisia tai konservatiivisia voimia, niitä vastaavat yleistetyt voimat voidaan laskea niin haluttaessa myös systeemin potentiaalienergian V' tai V avulla kaavoista (2.3.110) tai (2.3.114) ja Lagrangen yhtälöt saavat muodon

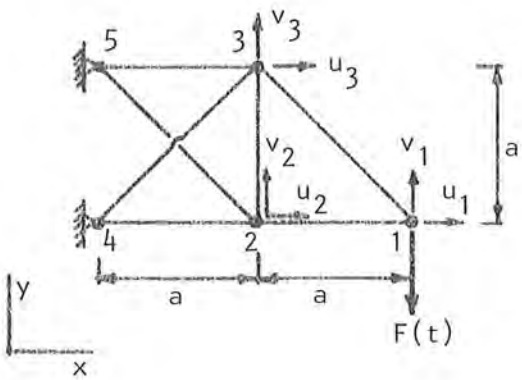
$$\boxed{Q_j^n = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} ,} \qquad j = 1,2,\ldots,n , \tag{2.3.121}$$

jossa

$$L = K - V' \quad (= K - V) \tag{2.3.122}$$

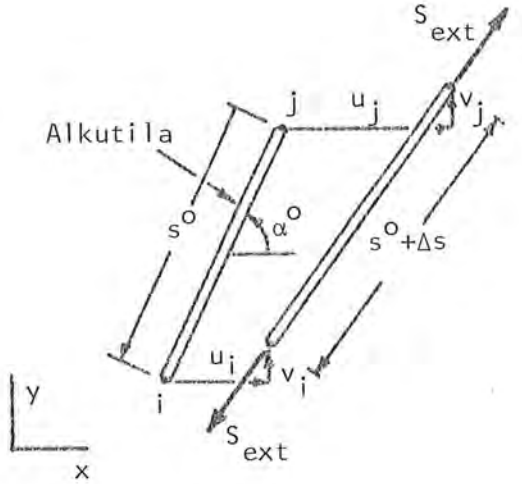
on ns. <u>Lagrangen funktio</u> ja Q_j^n on epämonogeenisista (epäkonservatiivisista) voimista muodostuva yleistetty voima. Muoto (2.3.121) nähdään oikeaksi, koska V' (V) ei ole yleistettyjen nopeuksien funktio. Jos kaikki systeemin voimat ovat monogeenisia (konservatiivisia), yhtälöiden (2.3.121) vasemmat puolet häviävät.

Esimerkki 2.3.7 Tasoristikko. Muodostetaan kuvassa (a) esitetyn nivelnurkkaisen tasoristikon liikeyhtälöt Lagrangen yhtälöiden avulla.



(a)

Ristikon sauvat otaksutaan kimmoisiksi. Sauvojen kimmokerroin on E ja poikkileikkauksen pinta-ala $A = A_o$ paitsi vinossa olevilla sauvoilla, joilla $A = \sqrt{2}A_o$. Siirtymäkomponentit u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 otaksutaan pieniksi ristikon mittoihin verrattuna. Otaksutaan, että alkutilassa, jossa ulkoista voimaa $\vec{F}_1(t) = -F\vec{j}$ ei ole ja jossa siirtymäkomponentit ovat nollia, sauvavoimat ovat myös nollia. Otaksutaan vielä ristikon massa keskitetyksi nurkkiin pistemassoiksi m_i. Ristikon nurkkiin vaikuttavat lisäksi muotoa $\vec{F}_i^d = -c_i\vec{v}_i$ olevat vaimennusvoimat, jossa c_i on vakio. Täten ristikosta on muodostettu viiden partikkelin partikkelisysteemimalli, jossa tiettyjen partikkeliparien välillä vallitsee sisäisiä voimia.



(b)

Johdetaan ensin kuvassa (b) esitetylle yleiselle nurkkia i ja j yhdistävälle sauvalle sauvan venymän Δs lauseke funktiona siirtymäkomponenteista u_i, v_i, u_j, v_j. Kun rajoitutaan pienten siirtymien teoriaan, Δs:n lauseke voidaan korvata likimain s:n differentiaalilla. Kuvasta saadaan sauvan pituudeksi $s = s^o+\Delta s$ mielivaltaisessa asemassa

$$s = [(x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(a)}$$

ja siis

$$\Delta s \approx \frac{\partial s}{\partial x_i}\Big|_o \Delta x_i + \frac{\partial s}{\partial x_j}\Big|_o \Delta x_j + \frac{\partial s}{\partial y_i}\Big|_o + \frac{\partial s}{\partial y_j}\Big|_o \Delta y_j$$

$$= -\frac{x_j-x_i}{s}\Big|_o \Delta x_i + \frac{x_j-x_i}{s}\Big|_o \Delta x_j - \frac{y_j-y_i}{s}\Big|_o \Delta y_i + \frac{y_j-y_i}{s}\Big|_o \Delta y_j$$

$$= -\cos\alpha^o u_i + \cos\alpha^o u_j - \sin\alpha^o v_i + \sin\alpha^o v_j$$

$$= \cos\alpha^o(-u_i+u_j) + \sin\alpha^o(-v_i+v_j) \ . \qquad \text{(b)}$$

Merkintä $(\ )|_o$ viittaa siihen, että ko. suure ( ) on laskettava alkutilassa. Kimmoteorian mukaan sauvavoiman S lauseke on

$$S = \frac{EA}{s^o}\,\Delta s \ , \qquad \text{(c)}$$

jossa S on siis määritelty positiiviseksi, kun sauvassa on vetoa. Sauvan muodonmuutosenergian eli kimmoenergian laskemiseksi havaitaan, että yhtälön (c) voidaan ajatella esittävän jousivakion $k = EA/s^o$ omaavan jousen jousivoiman lauseketta, joten kaavojen (2.3.25) ja (2.3.26) perusteella

$$V_{ij}^{int} = \frac{1}{2}\frac{EA}{s^o}\,[\cos\alpha^o(-u_i+u_j) + \sin\alpha^o(-v_i+v_j)]^2 \ . \qquad \text{(d)}$$

Koko systeemin muodonmuutosenergian laskeminen tapahtuu kolmannella kaavalla (2.3.72):

$$V_{int} = \sum_{ij} V_{ij}^{int} \ , \qquad \text{(e)}$$

mutta summaan otetaan nyt tietenkin mukaan vain ne pisteparit, joiden välillä vallitsee sisäisiä voimia; toisin sanoen sauvojen yhdistämät pisteparit eli ristikon seitsemän sauvaa. Laskemisen helpottamiseksi kaavan (d) käytössä tarvittavat

sauva i	j	EA	s^o	$\cos\alpha^o$	$\sin\alpha^o$
4	2	EA_o	a	1	0
2	1	EA_o	a	1	0
5	3	EA_o	a	1	0
2	3	EA_o	a	0	1
5	2	$\sqrt{2}EA_o$	$\sqrt{2}a$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
3	1	$\sqrt{2}EA_o$	$\sqrt{2}a$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
4	3	$\sqrt{2}EA_o$	$\sqrt{2}a$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$

(f)

suureet on kerätty oheiseen taulukkoon, jonka avulla saadaan

$$\begin{aligned} V_{int} = \frac{1}{2}\frac{EA_o}{a}\Big\{ & [1(-0+u_2) + 0]^2 + \\ & +[1(-u_2+u_1) + 0]^2 + \\ & +[1(-0+u_3) + 0]^2 + \\ & +[0 + 1(-v_2+v_3)]^2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} [\frac{1}{\sqrt{2}} (-0+u_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-0+v_2)]^2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} [\frac{1}{\sqrt{2}} (-u_3+u_1) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-v_3+v_1)]^2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} [\frac{1}{\sqrt{2}} (-0+u_3) + \frac{1}{\sqrt{2}} (-0+v_3)]^2 \Big\} , \qquad (g)$$

josta tulee kehittämällä

$$V_{int} = \frac{1}{2} \frac{EA_o}{a} [u_2^2 + (u_1-u_2)^2 + u_3^2 + (v_3-v_2)^2 + \frac{1}{2} (u_2-v_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (u_1-u_3+v_3-v_1)^2 + \frac{1}{2} (u_3+v_3)^2] . \qquad (h)$$

Nurkassa 1 vaikuttava kuormitus $\vec{F}$ muuttuu suuruudeltaan annetulla tavalla ajan funktiona (esim. $F = \hat{F}\sin\omega t$), mutta säilyttää suuntansa. Tällöin $\vec{F}$:llä on ajasta riippuva potentiaalienergia (vrt. kaava (2.3.2))

$$V'_{ext} = F(t)v_1 . \qquad (i)$$

Vaimennusvoimat

$$\vec{F}_i^d = -c_i\dot{u}_i\vec{i} - c_i\dot{v}_i\vec{j} \qquad (j)$$

ovat epämonogeenisia ja niistä syntyvät yleistetyt voimat Q_j^n ovat ensimmäistä kaavaa (2.3.98) (ks. myös huomautus 3, s. 2.3.49) soveltamalla

$$Q_j^n = \Sigma \vec{F}_i^d \cdot \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial q_j} = -\Sigma (c_i\dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial q_j} + c_i\dot{v}_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j}) . \qquad (k)$$

Kun otetaan vielä huomioon, että $q_1 = u_1$, $q_2 = v_1$, jne. saadaan

$$Q_1^n = -c_1\dot{u}_1 , \quad Q_2^n = -c_1\dot{v}_1 , \quad \text{jne.} \qquad (l)$$

Systeemin liike-energia

$$K = \frac{1}{2} m_1(\dot{u}_1^2+\dot{v}_1^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot{u}_2^2+\dot{v}_2^2) + \frac{1}{2} m_3(\dot{u}_3^2+\dot{v}_3^2) . \qquad (m)$$

Liikeyhtälöt saadaan esimerkiksi kaavojen (2.3.121) avulla, joissa

$$L = K - V' = K - V_{int} - V'_{ext}$$

$$= \frac{1}{2} m_1(\dot{u}_1^2+\dot{v}_1^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot{u}_2^2+\dot{v}_2^2) + \frac{1}{2} m_3(\dot{u}_3^2+\dot{v}_3^2) +$$

$$- \frac{1}{2} \frac{EA_o}{a} [u_2^2 + (u_1-u_2)^2 + u_3^2 + (v_3-v_2)^2 + \frac{1}{2} (u_2-v_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (u_1-u_3+v_3-v_1)^2 + \frac{1}{2} (u_3+v_3)^2] - F(t)v_1 \ . \qquad (n)$$

Ensimmäinen yhtälö tulee olemaan

$$-c_1\dot{u}_1 = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} m_1 2\dot{u}_1) + \frac{1}{2} \frac{EA_o}{a} [2(u_1-u_2) + \frac{1}{2} 2(u_1-u_3+v_3-v_1)] \qquad (o)$$

eli

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + \frac{EA_o}{a} [\frac{3}{2} u_1 - \frac{1}{2} v_1 - u_2 + 0v_2 - \frac{1}{2} u_3 + \frac{1}{2} v_3] = 0 \ . \qquad (p)$$

Muut yhtälöt muodostetaan vastaavasti ja koko yhtälöryhmä tulee olemaan seuraava:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \frac{EA_o}{a} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (q)$$

Tarkastellaan tehtävää vielä matriisimerkintöjen kannalta. Jos kirjoitetaan $\{q\} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$ ja $\{Q^n\} = [Q_1^n, Q_2^n, \ldots, Q_n^n]^T$, Lagrangen yhtälöt (2.3.121) voidaan esittää muodossa

$$\{Q^n\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \{\dot{q}\}} - \frac{\partial L}{\partial \{q\}} \ , \qquad (r)$$

kun käytetään liitteessä L.2 esitettyjä merkintätapoja. Tässä on käsitelty

tehtävää, jossa kimmoenergian V_{int} lauseke (h) on yleistettyjen koordinaattien neliömuoto, ulkoisten voimien (ajasta riippuvan) potentiaalienergian V'_{ext} lauseke (i) on yleistettyjen koordinaattien lineaarinen muoto ja liike-energian K lauseke (m) on yleistettyjen nopeuksien neliömuoto. Täten voidaan kirjoittaa

$$\left.\begin{aligned} V_{int} &= \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\} , \\ V'_{ext} &= -\{R\}^T\{q\} , \\ K &= \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M]\{\dot{q}\} . \end{aligned}\right\} \qquad (s)$$

Yhtälöiden (r) termejä laskettaessa saadaan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\{\dot{q}\}} &= \frac{\partial K}{\partial\{\dot{q}\}} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial\{\dot{q}\}}} = [M]\{\dot{q}\} , \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\{\dot{q}\}} &= [M]\{\ddot{q}\} , \\ -\frac{\partial L}{\partial\{q\}} &= -\cancel{\frac{\partial K}{\partial\{q\}}} + \frac{\partial V}{\partial\{q\}} = \frac{\partial V_{int}}{\partial\{q\}} + \frac{\partial V'_{ext}}{\partial\{q\}} \\ &= [K]\{q\} - \{R\} . \end{aligned}\right\} \qquad (t)$$

Täten päädytään ensin yhtälöihin

$$\{Q^n\} = [M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} - \{R\} , \qquad (u)$$

joista saadaan vielä pystyvektorin $\{Q^n\}$ lauseke huomioonottaen yhtälösysteemi (q) matriisimuodossa:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{R\} . \qquad (v)$$

Tämä on lineaarinen vakiokertoiminen tavallinen differentiaaliyhtälöryhmä, jonka ratkaisemiseksi on vielä annettava $\{q\}$ ja $\{\dot{q}\}$ alkuhetkellä.

Todettakoon, että kun kontinuumia analysoidaan siirtymäformulaatiota käyttäen diskreetein menetelmin, siirtymille otetaan usein esitys

$$\underset{3\times1}{\{u(x,y,z)\}} \approx \underset{3\times n}{[N(x,y,z)]}\underset{n\times1}{\{a(t)\}} . \qquad (w)$$

Esimerkiksi Fourier kehitelmissä matriisin [N] alkiot ovat sini- ja kosinifunktioita ja pystyvektorin {a} alkiot vielä määräämättömiä kertoimia. Elementtimenetelmässä vastaavia termejä nimitetään muotofunktioiksi ja solmumuuttujiksi. Joka tapauksessa esitys (w) merkitsee, että kontinuumi (äärettömän monta vapausastetta) on muunnettu likimääräiseksi malliksi, jolla on n vapausastetta. Suureet {a} ovat mallin yleistettyjä koordinaatteja. Mallin liike- ja mahdolliset potentiaalienergiat voidaan lausua yleistettyjen koordinaattien ja yleistettyjen nopeuksien avulla. Lineaa-

risessa probleemassa saadaan kaavojen (s) mukaiset esitykset, joissa massamatriisi [M] ei ole enää yleensä diagonaalinen. Edellisen perusteella ymmärretään, että esimerkiksi elementtimenetelmään liittyvät diskreetit yhtälöt voidaan johtaa niin haluttaessa ilman mitään erityistä uutta teoriaa klassillisten Lagrangen yhtälöiden erikoistapauksena.

Esimerkiksi kaava (e) taas viittaa siihen, kuinka tietyt termit syntyvät summeeraamalla eri osuuksista ja ymmärretään kuinka Lagrangen yhtälöt voitaisiin synnyttää myös elementtimenetelmän tyyppisellä kokoamisprosessilla. Tämä kaikki perustuu luonnollisesti siihen yksinkertaiseen tosiasiaan, että virtuaalinen työ on summeerautuva suure: Koko systeemiin vaikuttavien voimien tekemä virtuaalinen työ on summa systeemin osiin vaikuttavien voimien tekemistä virtuaalista töistä. Kaikki fysiikan suureet eivät ole summeerautuvia. Esimerkiksi vakiolämpötilassa olevan kappaleen lämpötila ei ole sen osien lämpötilojen summa.

Liikeyhtälöitä (q) johdettaessa nurkkien 4 ja 5 yhtälöt jätettiin kirjoittamatta, koska liike oli estetty näissä nurkissa. Kun yhtälöiden (q) ratkaisu on selvillä, tuntemattomat tukireaktiot (rajoitevoimat) saadaan tarvittaessa nurkkien 4 ja 5 liikeyhtälöistä (tarkemmin tasapainoyhtälöistä), koska muut vaikuttavat voimat ovat nyt tunnettuja.

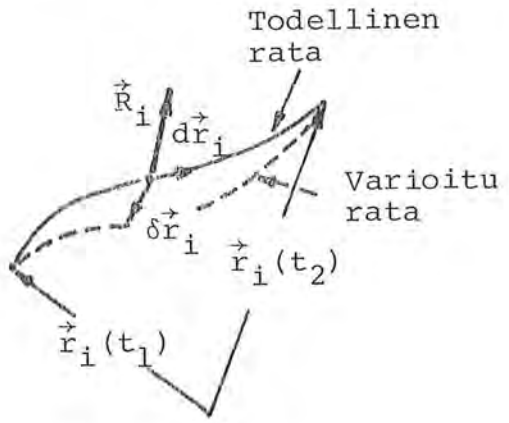
2.3.9 Hamiltonin periaate

Virtuaalisen työn periaatteen lähtökohtana oli yhtälö (2.3.83), jossa painoille $\vec{w}_i$ otettiin tulkinta $\vec{w}_i = \delta\vec{r}_i$. Tarkastelussa rajoituttiin tiettyyn kiinteään ajan hetkeen. Mikään ei estä ottamasta painoja ajan funktioiksi: $\vec{w}_i = \vec{w}_i(t)$. Kun yhtälö (2.3.83) integroidaan puolittain ajan suhteen ajan välin (t_1, t_2) ylitse, saadaan edelleen yhtälö ($\vec{R}_1 = \vec{F}_i + \vec{f}_i$)

$$\int_{t_1}^{t_2} [\Sigma(\vec{R}_i - m_i\vec{a}_i)\cdot\vec{w}_i]dt = 0 \ , \tag{2.3.123}$$

jossa suureet $\vec{w}_i(t)$ ovat täysin mielivaltaisia. Kun otetaan taas tulkinta $\vec{w}_i(t) = \delta\vec{r}_i(t)$, saadaan yksityiskohtaisemmin

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Sigma\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i - \Sigma m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i)dt = 0 \ . \tag{2.3.124}$$



Kuva 2.3.21 Partikkelin todellinen ja varioitu rata.

Partikkelin i todellisen radan $\vec{r}_i(t)$ lisäksi kuvitellaan siis, että partikkeli olisi voinut kulkea pitkin varioitua rataa $\vec{r}_i(t) + \delta\vec{r}_i(t)$, joka ajatellaan Hamiltonin periaatteessa sellaiseksi, että varioitu rata yhtyy todelliseen rataan ajan hetkillä t_1 ja t_2 (kuva 2.3.21), toisin sanoen valitaan

$$\delta\vec{r}(t_1) = \vec{0} \ , \quad \delta\vec{r}(t_2) = \vec{0} \ . \tag{2.3.125}$$

Termejä $\int_{t_1}^{t_2} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i dt$ voidaan muuntaa osittaisintegroinnilla seuraavasti (ks. kohta L.2.2)

$$-\int_{t_1}^{t_2} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i dt = -\Big|_{t_1}^{t_2} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \int_{t_1}^{t_2} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i \ , \tag{2.3.126}$$

jossa on käytetty hyväksi taulukon 2.3.2 sääntöä (5): $d/dt(\delta\vec{r}_i) = \delta(d\vec{r}_i/dt) = \delta\dot{\vec{r}}_i$. Lisäksi saadaan taulukon 2.3.2 sääntöjä (2) ja (3) soveltamalla

$$m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i = \delta(\frac{1}{2}\, m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i) = \delta K_i \ . \qquad (2.3.127)$$

Kun otetaan huomioon, että sijoitustermit lausekkeessa (2.3.126) häviävät ehtojen (2.3.125) perusteella, yhtälö (2.3.124) saa muodon

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K+\Sigma R_i\cdot\delta\vec{r}_i)dt = 0 \ . \qquad (2.3.128)$$

Jos systeemin voimat monogeenisia (konservatiivisia),

$$\delta W \equiv \Sigma\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i = -\delta V' \quad (= -\delta V) \qquad (2.3.129)$$

ja yhtälöstä (2.3.128) tulee <u>Hamiltonin periaate</u>

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \ ,} \qquad (2.3.130)$$

jossa L on Lagrangen funktio (2.3.122). Hamiltonin periaatteen mukaan systeemin todellinen liike tapahtuu siten, että funktionaali $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ saa stationaarisen arvon luvallisten funktioiden $\vec{r}_i(t)$ joukossa. Luvallisten funktioiden tulee toteuttaa asetetut kinemaattiset ehdot ja saada todellisia ratoja vastaavat arvot hetkillä t_1 ja t_2.

Kun käytetään yleistettyjä koordinaatteja, stationaarisuusehto antaa Lagrangen yhtälöt Eulerin yhtälöinä.

Jos systeemin kaikki voimat eivät ole monogeenisia (konservatiivisia), Hamiltonin periaatetta ei voida enää esittää puhtaana variaatioperiaatteena, vaan se saa muodon

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^n dt = 0 \ , \qquad (2.3.131)$$

jossa δW^n on systeemin epämonogeenisten (epäkonservatiivisten) voimien tekemä virtuaalinen työ.

Koska dynamiikan probleemat ovat ajan suhteen etenemis- eikä reuna-arvotehtäviä, Hamiltonin periaatteen vaatimus varioidun radan yhtymisestä tulevaisuudessa hetkellä t_2 todelliseen rataan on fysikaalisesti luonnoton. Se ei kuitenkaan estä käytännössä periaatteen soveltamista.

Termien funktionaali, stationaarinen arvo, luvallinen argumenttifunktio ja Eulerin yhtälöt merkityksien suhteen viitataan kohdan 4.10 huomautukseen 1.

2.3.10 Virtuaalinen työ statiikassa

Virtuaalisen työn periaate esiintyy etenkin statiikassa eri lähteissä niin moninaisissa muodoissa, että näitä on syytä käsitellä hieman myös tässä.

Virtuaalinen työyhtälö (2.3.90): $\delta W = 0$ eli yhtälö

$$\boxed{\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0} \qquad (2.3.132)$$

voidaan lausua yhtälön (2.3.87) erikoistapauksena ensinnäkin seuraavasti: Tasapainotilassa olevaan systeemiin vaikuttavien (todellisten) voimien tekemä virtuaalinen työ on nolla jokaisen virtuaalisen siirtymätilan suhteen.

Lause voidaan muotoilla myös käänteisenä: Jos systeemiin vaikuttavien (todellisten) voimien tekemä virtuaalinen työ on nolla jokaisen virtuaalisen siirtymätilan suhteen, systeemi on tasapainotilassa.

Tämä tulos seuraa vastaavasti kuin mitä on esitetty painojen $\vec{w}_i$ yhteydessä s. 2.3.40. Äskeiset tulokset voidaan yhdistää yhdeksi lauseeksi:

Systeemi on tasapainotilassa, jos ja vain jos systeemiin vaikuttavien voimien tekemä virtuaalinen työ on nolla jokaisen virtuaalisen siirtymätilan suhteen. (2.3.133)

Huomattakoon, että tämä ei tarkasti ottaen sano vielä mitään systeemin lepotilasta. Esimerkiksi vaakasuoralla kitkattomalla tasolla vakionopeudella liikkuva partikkeli on systeemi, joka toteuttaa lauseen (2.3.133).

Tavallisimmin operoidaan vain kinemaattisesti luvallisten virtuaalisten siirtymien avulla. Tällöin passiivisten voimien tekemä virtuaalinen työ $\delta W^p = 0$ ja jäljelle jää aktiivisten voimien tekemä virtuaalinen työ δW^a. Koska rajoitevoimat ovat tärkein passiivisten voimien ryhmä, lause (2.3.133) muuntuu muotoon

Systeemi on tasapainotilassa, jos ja vain jos systeemiin vaikuttavien konstitutiivisten voimien tekemä virtuaalinen työ on nolla jokaisen kinemaattisesti luvallisten virtuaalisen siirtymätilan suhteen. (2.3.134)

Tämä on se virtuaalisen työn periaatteen muoto, jota käytännössä normaalisti sovelletaan. Todettakoon, että termi konstitutiivinen voima rajoitevoiman vastakohtana on tämän kirjoittajan ehdotus. Tavanomaisia englanninkielisiä vastaavia termejä ovat applied force, impressed force, effective force. Mielestäni ne eivät ole erityisen osuvia, koska ne antavat vaikutelman annetusta ulkoisesta voimasta ja esimerkiksi sisäinen jousivoima tulisi kuitenkin olemaan "applied force".

Usein yhtälö (2.3.132) esiintyy kirjallisuudessa muodossa $\delta W_{ext} = \delta W_{int}$ ja sanotaan, että tasapainotilassa ulkoisten ja sisäisten voimien tekemät virtuaaliset työt ovat yhtä suuria. Tällöin sisäisille voimille on käytetty eri määritelmää kuin tässä esityksessä. Muoto $\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0$ on johdonmukaisempi.

Statiikassa virtuaalisen työn periaatetta sovelletaan usein vielä siten, että systeemin sisäiset voimat (kontinuumissa jännitykenttä) valitaan tarkoituksella todellisista poikkeaviksi. Staattisesti määräämättömälle rakenteelle voidaan esittää useita (= staattisen määräämättömyyden lukumäärä; kontinuumilla ääretön määrä) riippumattomia sisäisten voimien jakautumia, jotka muodostavat tasapainosysteemin annettujen ulkoisten voimien kanssa. Tällaisia sisäisiä voimasysteemeitä nimitetään tavallisesti <u>staattisesti luvallisiksi</u> (engl. statically admissible). Systeemin sisäisten voimien kulloistenkin konstitutiivisten yhteyksien johdosta on aina vain tietty staattisesti luvallinen voimasysteemi todellisuutta vastaava. Virtuaalisen työn periaatteen johtamistavan muistaen ymmärretään, että virtuaalinen työyhtälö voidaan kirjoittaa mielivaltaiselle voimasysteemille, mikäli se on vain tasapainosysteemi. Tämä ajattelu on lähtökohtana ns. virtuaalisten voimien periaatteessa ja siitä erikoistapauksena saadussa ns. komplementaarisen energian stationaarisuuden periaatteessa, joihin ei kuitenkaan puututa sen enempää tässä.

Äskeiseen ajatteluun perustuu myös ns. yksikkövoimamenettely (engl. unit dummy load method) systeemin eri pisteiden lineaarisen teorian mukaisten siirtymien määrittämiseksi, kun systeemin muodonmuutokset tunnetaan. Virtuaaliset siirtymät ja muodonmuutokset ajatellaan todellisten pienten siirtymien ja muodonmuutosten mukaisiksi. Halutussa siirtymäkomponentin määrittämiseksi asete-

taan ko. pisteeseen ko. suuntaan vaikuttamaan yksikön suuruinen ulkoinen voima. Määritetään mikä hyvänsä tämän voiman kanssa staattisesti luvallinen sisäinen voimasysteemi. Se voidaan valita esimerkiksi tekemällä systeemi ensin staattisesti määrätyksi ja määrittämällä tätä vastaava voimajakautuma. Yhtälössä (2.3.132) voidaan nyt laskea δW_{int} ja δW_{ext} tulee taas olemaan yksinkertaisesti yksi kertaa tuntematon siirtymä, joten siirtymä ratkeaa heti työyhtälöstä.

Konservatiivisten systeemien yhteydessä virtuaalisen työn periaate (2.3.134) voidaan muuntaa potentiaalienergian käsitteen avulla lausuttuun muotoon.

Jos systeemi on konservatiivinen, kaavan (2.3.111) mukaisesti $\delta W = -\delta V$ ja virtuaalisen työn periaate (2.3.134) saa muodon

$$\boxed{\delta V = 0} \qquad (2.3.135)$$

eli konservatiivinen systeemi on tasapainotilassa, jos ja vain jos sen potentiaalienergialla on stationaarinen arvo.

Yhtälöä (2.3.135) nimitetään yleensä potentiaalienergian stationaarisuuden periaatteeksi (engl. principle of stationary potential energy). Se on siis erikoistapaus virtuaalisen työn periaatteesta, kun systeemin voimat ovat konservatiivisia. Yhtälön johtamistavasta seuraa, että funktio V täytyy tässä ajatella aseman (tai siirtymien) funktioksi ja siirtymien variaatioiden tulee olla kinemaattisesti luvallisia.

Virtuaalisen työn tai potentiaalienergian stationaarisuuden periaate ei sano vielä mitään tasapainotilan luonteesta. Voidaan osoittaa [2.1, s. 194...196], että

$$\left.\begin{array}{l}\text{Konservatiivisen systeemin tasapainoasema on sta-}\\ \text{biili, jos ja vain jos potentiaalienergialla on}\\ \text{minimiarvo.}\end{array}\right\} \qquad (2.3.136)$$

Tätä tulosta nimitetään potentiaalienergian minimin periaatteeksi (engl. principle of minimum potential energy). Tasapainoaseman taas sanotaan yleensä olevan stabiili (engl. stable), jos pienet häiriöt eivät poikkeuta systeemiä kauaksi tasapainoasemastaan (tässä tasapainoasema ≡ pysyvä lepotila-asema). Muutoin tasapainoasema on epästabiili (engl. unstable).

Lauseen (2.3.136) johto perustuu siihen, että konservatiivisen systeemin mekaaninen energia K+V säilyy (kaava (2.3.73)) ja että systeemin liike-energia K on ei-negatiivinen suure.

Kun käytetään yleistettyjä koordinaatteja, $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ja variaatio

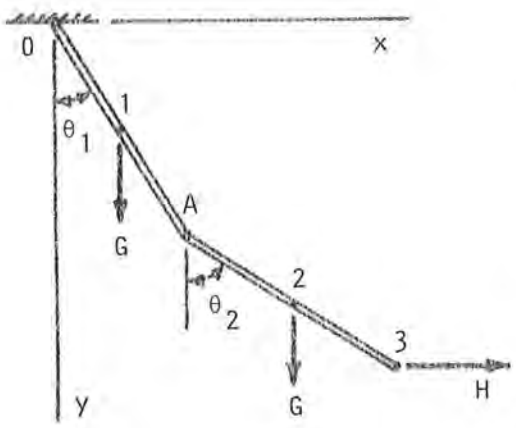
$$\delta V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \ . \qquad (2.3.137)$$

Koska variaation δV tulee hävitä tasapainotilassa ja koska variaatiot δq_j ovat mielivaltaisia, saadaan tasapainoehdot

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \ ,} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \ . \qquad (2.3.138)$$

Toisaalta sama tulos saadaan suoraan tasapainoyhtälöistä (2.3.101) ottamalla huomioon yleistettyjen voimien lausekkeet (2.3.114) konservatiivisessa tapauksessa. Samoin voidaan yhtälöt (2.3.138) ajatella vielä Lagrangen yhtälöiden erikoistapauksiksi staattisessa (K = 0) ja konservatiivisessa tapauksessa.

Esimerkki 2.3.8 Kahden jäykän kappaleen systeemi. Käsitellään esimerkin 2.3.6 esittämä tehtävä potentiaalienergian stationaarisuuden periaatteen avulla.



(a)

Koska voimat G ja H (kuva (a)) ovat suunnaltaan ja suuruudeltaan vakioarvoisia, niiden potentiaalienergia

$$V_{ext} = -Gy_1 - Gy_2 - Hx_3$$

$$= -Gv_1 - Gv_2 - Hu_3 \ . \qquad (a)$$

Tässä on sovellettu lausekkeita (2.3.17). Kitkaa ei oteta huomioon, joten systeemi on konservatiivinen ja lisäksi sisäisten voimien potentiaalienergia V_{int} on nolla. Täten systeemin kokonaispotentiaalienergia on lausekkeen (a) mukainen.

Siirrytään vielä käyttämään yleistettyjä koordinaatteja (tai siirtymiä) θ_1 ja θ_2, jolloin saadaan lausekkeiden

(a) ja (b), esimerkki 2.3.1 avulla

$$V(\theta_1,\theta_2) = -G\,\frac{l}{2}\cos\theta_1 - G(l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2) + \\ -H(l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2)\ . \qquad \text{(b)}$$

Tasapainoyhtälöiksi (2.3.138) saadaan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial\theta_1} &\equiv G\,\frac{l}{2}\sin\theta_1 + Gl\sin\theta_1 - Hl\cos\theta_1 = 0\ , \\ \frac{\partial V}{\partial\theta_2} &\equiv G\,\frac{l}{2}\sin\theta_2 - Hl\cos\theta_2 = 0\ . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Nämä ovat vastaavat kuin virtuaalisen työn periaatteen avulla aikaisemmin johdetut yhtälöt (d), esimerkki 2.3.6.

Vastaavan ratkaisun

$$\theta_1 = \arctan\frac{2H}{3G}\ , \qquad \theta_2 = \arctan\frac{2H}{G} \qquad \text{(d)}$$

määrittämän tasapainoaseman mahdollisen stabiiliuden toteamiseksi lauseke (b) olisi ensin kehitettävä Taylorin sarjaksi toisen asteen termit mukaan ottaen kehityskeskuksena arvot (d). Mahdollinen minimiarvo olisi sitten pääteltävissä tämän kehitelmän avulla.

2.3.11 Suhteellinen liike

Liikelaissa esiintyvä kiihtyvyys $\vec{a}$ on inertiaalikoordinaatiston eli inertiaalikehyksen suhteen mitattu kiihtyvyyden arvo. Ns. astronominen koordinaatisto, jonka origo on aurinkokunnan massakeskiössä ja jonka akselit ovat suunnatut kiintotähtiin, on suurella tarkkuudella inertiaalikehys. Tekniikassa voidaan myös maahan kiinnitettyä koordinaatistoa pitää yleensä riittävällä tarkkuudella inertiaalikehyksenä, mutta tietyissä ilmiöissä on otettava huomioon maan pyörimisliikkeestä oman akselinsa sekä auringon ympäri johtuvat korjaustermit. Esimerkkinä tästä mainittakoon laajojen ilma- tai vesimassojen virtaukset (Coriolisvoiman vaikutus).

Usein on myös hyödyllistä käsitellä tiettyä liikettä tarkoituksella ei-inertiaalikehyksessä. Esimerkiksi pyörivän turbiinin siiven värähtelyjä tutkittaessa voidaan koordinaatisto kiinnittää turbiinin akseliin, jolloin siiven liike tämän suhteen muodostuu vain pienehköistä siiven kimmoisista muodonmuutoksista johtuvista termeistä eikä rajusta rotaatiosta.

Johdetaan liikelain ei-inertiaalikehyksessä saama muoto. Partikkelisysteemin tyypillisessä liikeyhtälössä

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i\vec{a}_i \tag{2.3.139}$$

kiihtyvyys $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ on inertiaalikehyksessä mitattu ns. inertiaalikiihtyvyys ja $\vec{F}_i$ on systeemin ulkopuolisen massan johdosta syntyvä ns. todellinen ulkoinen voima. Tarkastellaan kuvaa 2.2.6 pitäen XYZ-koordinaatistoa inertiaalikehyksenä. Kaava (2.2.8) antaa tällöin inertiaalikiihtyvyyden $\vec{a}$ ja ei-inertiaalikehyksessä xyz mitatun ns. suhteellisen kiihtyvyyden $\vec{a}_r$ välisen yhteyden:

$$\vec{a}_i = (\vec{a}_i)_r + \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{s}_i + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{s}_i) + 2\vec{\omega}\times(\vec{v}_i)_r \tag{2.3.140}$$

Sijoittamalla lauseke (2.3.140) yhtälöön (2.3.139) nähdään, että se voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\boxed{\vec{F}_i + \vec{F}_i^A + \vec{f}_i = m_i(\vec{a}_i)_r\ ,} \tag{2.3.141}$$

jossa on käytetty lyhennysmerkintää

$$\vec{F}_i^A = - m_i\vec{a}_0 - m_i\dot{\vec{\omega}}\times\vec{s}_i - m_i\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{s}_i) - 2m_i\vec{\omega}\times(\vec{v}_i)_r \ , \qquad (2.3.142)$$

jolle on annettu nimi näennäisvoima (engl. apparent force, pseudo force). Kaavan (2.3.141) tulkinta on seuraava: Jos liikeyhtälö kirjoitetaan siten, että inertiaalikiihtyvyyden sijasta siinä esiintyy suhteellinen kiihtyvyys, todellisiin voimiin on lisättävä näennäisvoima $\vec{F}_i^A$.

Näennäisvoima on kuviteltu voima siinä mielessä, että sillä ei ole voiman ja vastavoiman lain edellyttämää vastavoimaa. Termistä $-m_i\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{s}_i)$ käytetään nimitystä keskipakovoima (engl. centrifugal force) ja termistä $-2m_i\vec{\omega}\times\vec{v}_{i_r}$ nimitystä Coriolisvoima. Havaitsijan kannalta näennäisvoima voi tuntua hyvinkin "todelliselta", koska hän ei pysty huomaamaan fysiologisesti eroa sille, aiheuttaako tietyn voiman toinen massa tai kehyksen liike. Tästä käy esimerkkinä keskipakovoiman vaikutus havaitsijaan, joka on kiinnittänyt koordinaatistonsa liikkuvaan ajoneuvoon.

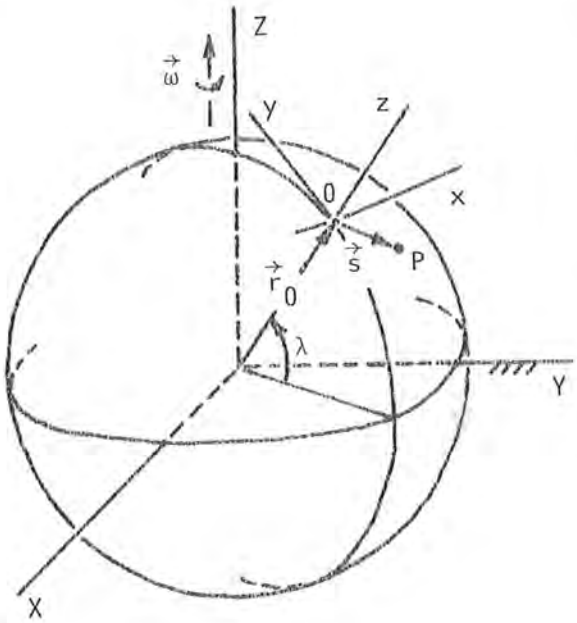
Kaikki edellä johdetut yleiset lauseet ja periaatteet on saatu manipuloimalla liikeyhtälöitä (2.3.139) eri tavoin. Täten vastaavat periaatteet saadaan myös aivan samoin ei-inertiaalikehyksessä toimittaessa täydentämällä todelliset voimat sekä niihin liittyvät termit näennäisvoimilla ja niiden antamilla osuuksilla. Systeemin kannalta näennäisvoimat on luokiteltava ulkoisiksi voimiksi, koska niillä ei ole systeemin sisällä vastavoimia. Niillä ei ole kylläkään vastavoimia systeemin ulkopuolellakaan, josta juuri seurasi nimitys näennäisvoima.

Kohdassa 2.3.6 esitetyt hitausvoimat ovat myös laskennallisesti määriteltyjä näennäisvoimia. Ne saatiin vain hieman erilaisella ajattelutavalla, koska ne synnytettiin toimimalla koko ajan inertiaalikehyksessä. Yhden partikkelin liikettä tarkasteltaessa voidaan valita ei-inertiaalikoordinaatisto, jonka origo liikkuu koko ajan partikkelin mukana. Tällöin partikkeli on pysyvässä lepotilassa ko. liikkuvan koordinaatiston suhteen ja kaavassa (2.3.142) $\vec{a}_0 = \vec{a}$, $\vec{s} = \vec{0}$, $\vec{v}_r = \vec{0}$, joten $\vec{F}^A = -m\vec{a}_0 = \vec{F}^I$.

Todettakoon vielä, että myös yhtälöön (2.3.141) voidaan soveltaa vielä lisäksi hitausvoima-ajattelua siirtämällä termi $m_i(\vec{a}_i)_r$

merkkiä vaihtaen yhtälön vasemmalle puolelle ja nimittämällä sitä esimerkiksi suhteelliseksi hitausvoimaksi.

Esimerkki 2.3.9 Maan pyörimisliikkeen vaikutus. Tarkastellaan maahan kiinnitetyn koordinaatiston vaatimien näennäisvoimien lausekkeita.



(a)

Kuva (a) esittää koordinaatistojen valintaa. Inertiaalikoordinaatiston XYZ origo on maan keskipisteessä. Z-akseli kulkee pohjoisnavan kautta ja osoittaa pohjantähteen. X- ja Y-akselit ovat samoin suunnatut kiintotähtiin ja XY-taso kulkee siis koko ajan päiväntasaajan kautta. (Tässä tarkastelussa käsitellään vain maan pyörimisliikettä oman akselinsa ympäri ja jätetään maan liike auringon ympäri huomioonottamatta.) Leveysasteen arvoa λ vastaava paikallinen, maahan kiinnitetty koordinaatisto on valittu siten, että sen origo on maanpinnassa, x-akseli osoittaa itään, y-akseli pohjoiseen ja z-akseli ylöspäin.

Maa ja siis myös siihen kiinnitetty xyz-akseli pyörivät kulmanopeudella $\vec{\omega} \approx (2\pi\text{rad/vrk})\vec{K}$ XYZ-koordinaatiston suhteen. Tarkempi arvo on kirjallisuuden mukaan

$$\vec{\omega} \approx 7{,}29\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,\vec{K} \qquad \text{(a)}$$

ja lisäksi pätee suurella tarkkuudella

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}\,, \qquad \text{(b)}$$

koska maan pyörimisliikkeen tiedetään hidastuvan hyvin hitaasti.

Maa ajatellaan ensimmäisenä approksimaationa pallosymmetriseksi palloksi jonka ulkosäde $|\vec{r}_0| \equiv r_0 \approx 6370$ km. Kuvasta (a) havaitaan, että tällöin liikkuvan koordinaatiston origon paikkavektori

$$\vec{r}_0 = r_0\vec{k}\,. \qquad \text{(c)}$$

Origo suorittaa tasaista ympyräliikettä (säde = $r_0\cos\lambda$) Z-akselin ympäri. Vastaava kiihtyvyyden itseisarvo $|\vec{a}_0| = \omega^2 r_0\cos\lambda$, jossa $\omega = |\vec{\omega}|$ ja jossa itse kiihtyvyysvektori $\vec{a}_0$ osoittaa Z-akseliin päin ja leikkaa sen kohtisuoraan. Ei ole vaikea osoittaa, että tämä kiihtyvyys voidaan kirjoittaa muotoon

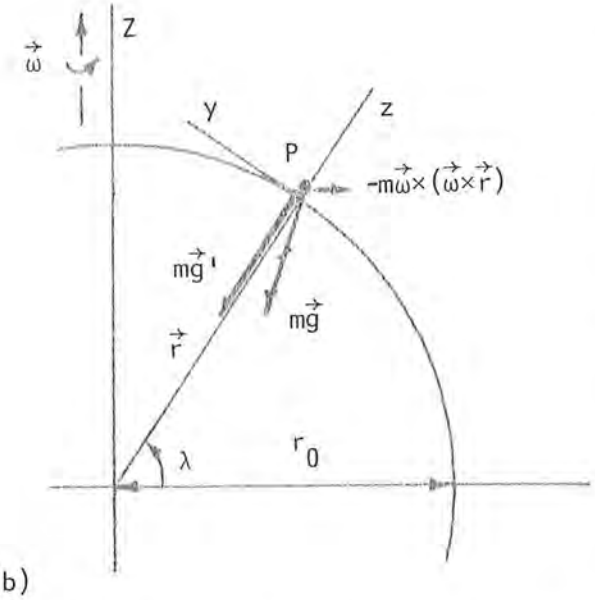
$$\vec{a}_0 = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_0) \ . \qquad \text{(d)}$$

Yleisen näennäisvoiman lausekkeen (2.3.142) perusteella saadaan siis tässä tyypilliselle partikkelille (kuva (a)) tulos

$$\begin{aligned}\vec{F}^A &= -m\vec{a}_0 - 0 - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{s}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r \\ &= -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_0) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{s}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r \\ &= -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_0+\vec{\omega}\times s) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r \\ &= -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r \ . \qquad \text{(e)}\end{aligned}$$

Coriolisvoima $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ vaikuttaa vain, mikäli partikkeli on liikkeessä maanpinnan suhteen. Keskipakovoima $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ vaikuttaa myös maanpinnan suhteen levossa olevaan partikkeliin. (Tässä on käytetty nimitystä keskipakovoima eri termistä kuin kaavan (2.3.142) yhteydessä. Nyt sillä on tarkoitettu partikkelin käyräviivaiseen liikkeeseen liittyvänä termiä massa kertaa keskeiskiihtyvyys miinusmerkkisenl. Kumpiakin nimen keskipakovoima tulkintoja esiintyy kirjallisuudessa.)

Kuvassa (b) näkyy partikkelin P kautta kulkeva meridiaanitaso. Keskipakovoima on tässä tasossa, se on kohtisuorassa Z-akselia vastaan ja vaikuttaa siitä poispäin. Keskipakovoima on esitetty kuvassa liioiteltuna, sillä sen maksimiarvo maanpinnalla (joka vallitsee päiväntasaajalla) on vain n. 0,35 % maan vetovoiman eli gravitaatiovoiman $m\vec{g}'$ itseisarvosta. Maan vetovoiman ja keskipakovoiman $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times r)$ resultantti on ns. painovoima $m\vec{g}$. Juuri tämä voima eikä tarkasti ottaen vetovoima mitataan kappaleen punnityksessa. Luotiviiva osoittaa painovoiman suuntaan ja levossa olevan nesteen vapaa pinta asettuu kohtisuoraan painovoimaa vastaan.



(b)

Keskipakovoima on kaavan (2.3.18) perusteella konservatiivinen ja koska gravitaatiovoima on tunnetusti (ks. kaava (2.3.28)) samoin konservatiivinen, myös painovoima on konservatiivinen. Keskipakovoiman vaikutus tulee automaattisesti mukaan laskelmiin, kun vain käytetään tarvittaessa paikallista putoamiskiihtyvyyden $\vec{g}$ arvoa. Lisäksi paikallinen pystysuora suunta määritellään tarkasti ottaen luonnollisesti kuvan (b) esittämästä z-akselin suunnasta poiketen luotinuoran suunnan avulla.

Liikkeessä olevaa partikkelia käsiteltäessä on otettava lisäksi huomioon Coriolisvoiman vaikutus. Kuvan (b) avulla voidaan päätellä, että kulmanopeus

$$\vec{\omega} = \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k} = \omega\cos\lambda\vec{j} + \omega\sin\lambda\vec{k} \ . \qquad (f)$$

Kun vielä merkitään

$$\vec{v}_r = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \ , \qquad (g)$$

saadaan

$$-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r = -2m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega\cos\lambda & \omega\sin\lambda \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= -2m\omega[(\cos\lambda\cdot v_z - \sin\lambda\cdot v_y)\vec{i} + \sin\lambda\cdot v_x\vec{j} - \cos\lambda\cdot v_x\vec{k}] \ . \qquad (h)$$

Kun tarkastellaan vaakaliikettä, $v_z = 0$, ja Coriolisvoiman vaakakomponentti on

$$2m\omega\sin\lambda(v_y\vec{i} - v_x\vec{j}) \ . \qquad (i)$$

Tämä voima vaikuttaa pohjoisella (eteläisellä) pallonpuoliskolla liikesuuntaan katsottuna oikealle (vasemmalle) päin.

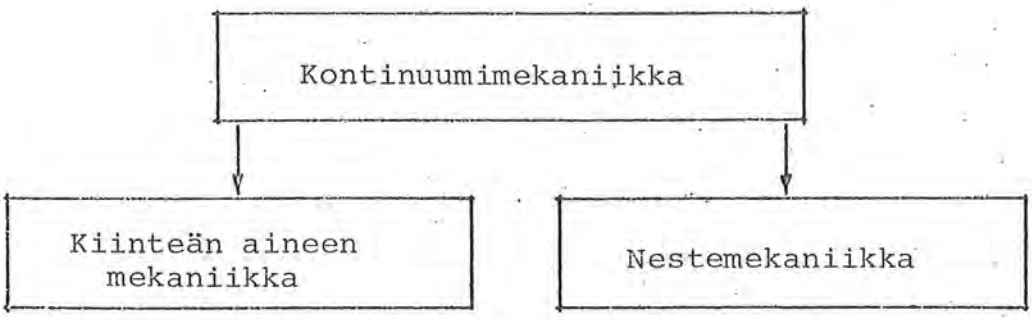
Coriolisvoiman arvo on yleensä häviävän pieni painovoimaan verrattuna. Esimerkiksi kun partikkelin vauhti maanpinnan suhteen on 100 km/h, Coriolisvoiman maksimiarvo on n. 0,04 % painovoimasta. Meteorologiassa ja oseanografiassa Coriolisvoimalla on kuitenkin oleellinen merkitys, koska se on paine-erojen aiheuttamien vaakavoimien kanssa usein samaa suuruusluokkaa ja sen vaikutus näkyy siten voimakkaana syntyvien virtauksien käyttäytymisessä.

2.3.80

3 YLEINEN KONTINUUMIMEKANIIKKA

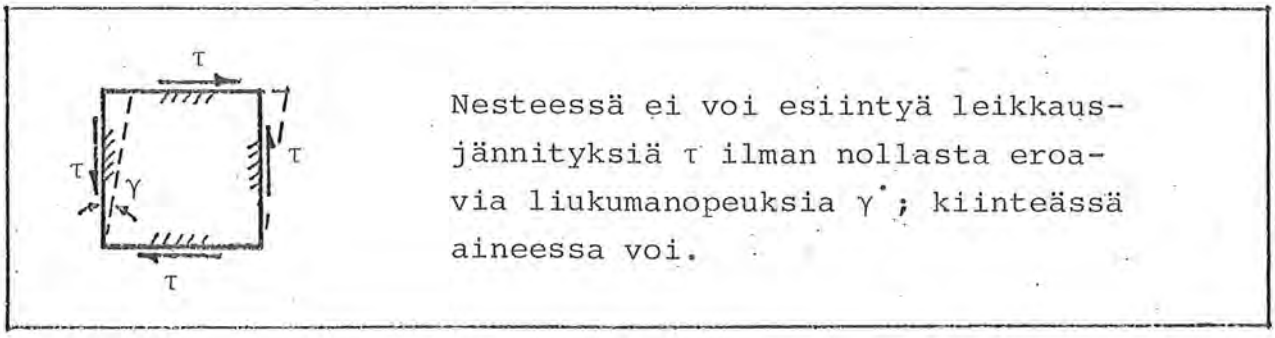
3.1 Yleistä

Ns. jatkuvan aineen mekaniikka eli kontinuumimekaniikka jaetaan tarkasteltavan kappaleen aineen olomuodon perusteella kuvan 3.1.1 mukaisesti kiinteän aineen mekaniikkaan (engl. solid mechanics) ja nestemekaniikkaan (engl. fluid mechanics) eli nesteiden mekaniikkaan. Tässä yhteydessä nesteellä (engl. fluid)



Kuva 3.1.1 Kontinuumimekaniikan pääjako.

tarkoitetaan paitsi ns. "varsinaista" nestettä (engl. liquid) myös "kaasumaista" nestettä eli kaasua (engl. gas). Yleisnimen fluid suomenkieliseksi vastineeksi on ehdotettu mm. termiä fluidi, mutta tässä tullaan kuitenkin käyttämään edelleen sanontaa neste. Mekaniikan kannalta aineen luokittelu joko kiinteäksi aineeksi

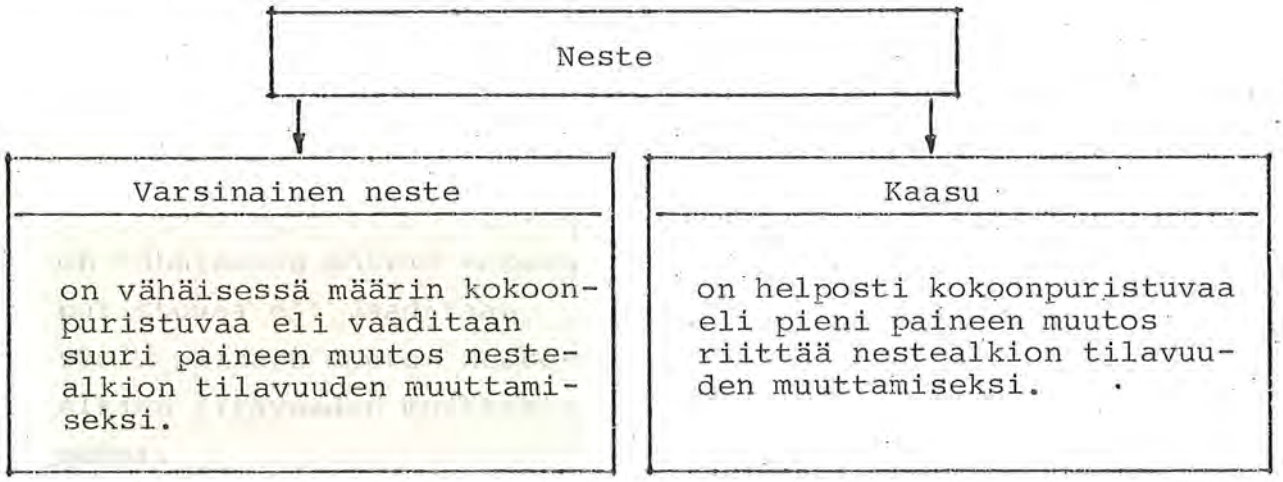


Kuva 3.1.2 Kiinteän aineen ja nesteen ero.

tai nesteeksi tapahtuu tavallisesti kuvan 3.1.2 esittämällä perusteella. Täten siis leikkausjännitykset häviävät jatkuvassa lepotilassa olevassa nesteessä, sillä siinä kaikki muodonmuutosnopeuskomponentit ≡ 0. Rajatapauksissa sama aine voi olla käytännön

kannalta eri tilanteissa kiinteää ainetta tai nestettä riippuen tarkasteltavasta aikavälistä ja käytetystä mittaustarkkuudesta. Esimerkiksi piki käyttäytyy suurten muodonmuutosnopeuksien yhteydessä kuten kiinteä aine hajoten hauraasti vasaran iskun johdosta, mutta toisaalta se valuu oman painonsa vaikutuksesta astian sivussa olevasta reiästä ulos pitkän aikavälin kuluessa. Mekaniikan haaraa, joka liikkuu kiinteän aineen mekaniikan ja nestemekaniikan välimaastossa nimitetään reologiaksi (engl. rheology). Esimerkiksi betonin, puun ja muovien sekä korkeissa lämpötiloissa olevien metallien pitkäaikaiskäyttäytyminen liittyy läheisesti reologiaan. Eräs reologian alue on ns. viskokimmoisuus- eli viskoelastisuusteoria.

Varsinaisen nesteen ja kaasun mekaaninen ero ilmenee niiden kokoonpuristuvuudessa (kuva 3.1.3).



Kuva 3.1.3 Varsinaisen nesteen ja kaasun ero.

Vaikka kontinuumimekaniikan peruslait ovat kontinuumin aineominaisuuksista riippumattomia, lopulliset vallitsevat yhtälöt tulevat olemaan yleensä huomattavan erilaisia kiinteän aineen mekaniikassa ja nestemekaniikassa. Ero syntyy paitsi kiinteän aineen ja nesteen erilaisista konstitutiivisista yhteyksistä myös ennen kaikkea siitä, että kiinteän aineen kinematiikassa käytetään yleensä ns. Lagrangen esitystapaa ja nesteen kinematiikassa taas yleensä ns. Eulerin esitystapaa.

3.2 Kontinuumimekaniikan aksioomat

Kontinuumimekaniikan yhtälöitä johdettiin aiemmin käsittelemällä mielivaltaista kontinuumin differentiaalista massa-alkiota dm partikkelimekaniikan avulla. Nykyään on tavallisempaa, että kontinuumimekaniikan perustaksi esitetään joukko aksioomia, joista sitten johdetaan tarvittavat yhtälöt. Tässä esityksessä tarvittavat kontinuumimekaniikan aksioomat eli peruslait ovat:

(1) Massan säilymisen periaate (engl. principle of conservation of mass). Kappaleen massa

$$m = \text{vakio} \tag{3.2.1}$$

eli

$$\boxed{m^{\cdot} = 0\ .} \tag{3.2.2}$$

(2) Liikemäärän taseen periaate (engl. principle of balance of momentum). Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti $\vec{F}$ on yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän $\vec{p}$ muutosnopeus eli

$$\boxed{\vec{F} = \vec{p}^{\cdot}\ .} \tag{3.2.3}$$

(3) Liikemäärämomentin taseen periaate (engl. principle of balance of moment of momentum). Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien momentti $\vec{M}$ kiinteän pisteen suhteen on yhtä suuri kuin kappaleen saman kiinteän pisteen suhteen lasketun liikemäärämomentin $\vec{L}$ muutosnopeus eli

$$\boxed{\vec{M} = \vec{L}^{\cdot}\ .} \tag{3.2.4}$$

(4) Energian taseen periaate (engl. principle of balance of energy). Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien tekemä työ W_{ext} plus kappaleen saama lämpö W_Q on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian K ja sisäenergian E muutos eli

$$W_{ext} + W_Q = \Delta K + \Delta E \tag{3.2.5}$$

eli

$$\boxed{P_{ext} + P_Q = K^{\cdot} + E^{\cdot} .} \tag{3.2.6}$$

Näiden lisäksi on olemassa mm. entropian kasvun periaate (engl. principle of entropy growth) sekä joukko konstitutiivisia yhteyksiä koskevia periaatteita. Lait (2), (3) ja (4) pätevät vain inertiaalikehyksessä, joten jos niitä sovelletaan mielivaltaisessa koordinaatistossa, kohdassa 2.3.11 esitettyjen näennäisvoimien antamat termit on otettava mukaan. Periaatteet (2) ja (3) ovat olleet jo esillä kohdassa 2.3 partikkelimekaniikan aksioomeista johdettuina lauseina. Niitä nimitetään joskus myös Eulerin ensimmäiseksi ja toiseksi laiksi. Tässä ne siis otetaan kääntäen aksioomiksi. Täysin yleisessä muodossaan yhtälön (3.2.5) tai (3.2.6) vasen puoli on täydennettävä muilla mahdollisilla kappaleen ulkopuoleltaan saamillaan energia- tai teho-osuuksilla; esimerkiksi sähköenergian osuus. Periaate (4) kulkee myös nimellä energian häviättömyyden laki tai termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö (engl. the first law of thermodynamics). Aksioomien yksityiskohtiin palataan tarkemmin myöhemmin.

Aksioomat ovat voimassa mielivaltaisesta aineesta olevalle kappaleelle ja ovat täten perustana sekä kiinteän aineen mekaniikassa että nestemekaniikassa. Koska aksioomissa puhutaan kappaleesta, ne on siis muotoiltu koskemaan ns. suljettua systeemiä eli koko ajan samoista partikkeleista muodostunutta kokonaisuutta; vrt. kohta 3.4.2.

Peruslait koskevat äärellisen kokoisia kappaleita (ei partikkeleita) ja näin ollen niistä kustakin saadaan johdettua yhtälö, jota nimitetään ko. lain integraalimuodoksi tai äärelliseksi muodoksi (engl. integral form, finite form, global form). Tiettyjen matemaattisten manipulaatioiden avulla kustakin äärellisestä muodosta saadaan lisäksi jokaista kontinuumin alkiota koskeva ko. lain differentiaaliyhtälömuoto eli paikallinen muoto (engl. local form). Paikallinen muoto voidaan myös johtaa vaihtoehtoisella

tavalla soveltamalla peruslakeja suoraan differentiaaliseen kontinuumialkioon. Tässä esityksessä tullaan keskittymään paikallisiin muotoihin.

Olisi tietenkin loogista pitää esimerkiksi aksioomia (1), (2) ja (3) myös partikkelimekaniikan perustana, jolloin tultaisiin toimeen vain yhdellä aksioomajoukolla. Huomattakoon, että esimerkiksi voiman ja vastavoiman laki (tietyssä yleisemmässä muodossa kuin yhtälönä (2.1.2)) voidaan johtaa aksioomien (2) ja (3) seurauksena. Näyttääkin siltä, että myös alkeismekaniikan esitykset alkavat siirtyä yhä enenevässä määrin kohti tässä luvussa mainittujen aksioomien käyttöä. Niin kauan kuin koulufysiikan opetuksessa vielä operoidaan lähinnä Newtonin laeilla, sallittakoon kuitenkin pedagogisista syistä tilanne, jossa partikkelimekaniikassa on pehmeänä laskuna omat aksioomansa.

3.3 Kinematiikka

3.3.1 Yleistä

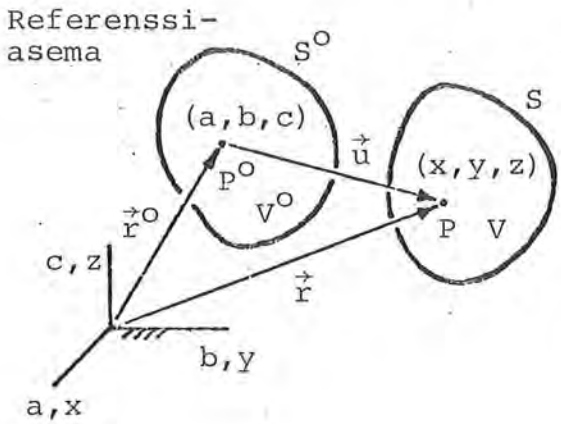
Kuten edellä on jo todettu, kiinteän aineen mekaniikassa käytetään yleensä Lagrangen esitystapaa ja nestemekaniikassa Eulerin esitystapaa. Nämä esitykset poikkeavat riippumattomien muuttujien valinnan suhteen oleellisesti toisistaan ja tähän liittyvien seikkojen omaksuminen on jatkon ymmärtämisen kannalta ratkaisevaa.

Kontinuumimekaniikan kinematiikka eroaa partikkelimekaniikan kinematiikasta siinä, että erillisten partikkelien liikkeen sijasta tarkastellaankin äärettömän tiheässä sijaitsevien partikkelien liikkeitä. Tämä merkitsee riippumattomien muuttujien lukumäärän kasvua arvosta yksi (aika) arvoon neljä (kolme paikkakoordinaattia plus aika).

Huomautettakoon, että kontinuumimekaniikassa partikkelikäsitteellä tarkoitetaan kuitenkin eri asiaa kuin partikkelimekaniikan partikkelilla, jolla ajateltiin olevan tietty massa, vaikkei kokoa. Kontinuumin partikkeliin ei voida ajatella liitetyksi äärellistä massaa, koska massatiheys olisi tällöin ääretön. Partikkelilla tarkoitetaan nimenomaan kappaleen ainepistettä (engl. material point) eli kontinuumialkiota eli ns. fysikaalista pistettä erotuksena avaruuden pisteestä eli ns. spatiaalipisteestä (engl. spatial point). Kukin kontinuumialkio sisältää vielä — ollakseen käytännössä mielekkäästi määriteltävissä — suunnattoman määrän toisenlaisia "partikkeleita", ts. molekyylejä. Kappale muodostuu koko ajan samoista partikkeleista. Tätä korostettaessa sanotaan, että kyseessä on suljettu systeemi (engl. closed system). Kappaleen liikkuessa sen partikkelien koordinaattien arvot muuttuvat.

3.3.2 Lagrangen esitystapa

Yleistä. Lagrangen esitystavassa eli ns. aineellisessa esitystavassa (engl. Lagrangian description, material description) riippumattomina muuttujina ovat ns. ainekoordinaatit (engl. material coordinate) eli Lagrangen koordinaatit a, b, c ja aika t. Suureet a, b ja c ovat kappaleen partikkelin koordinaatit kappaleelle valitussa alku- eli referenssiasemassa (engl. reference configuration) (kuva 3.3.1). Viittaus referenssitilan suureisiin tapahtuu tässä tarvittaessa yläviitteellä o. Useimmiten referenssiasemaksi otetaan kappaleen asema hetkellä t = 0.



Kuva 3.3.1 Kappaleen liike.

Yhteys

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}^o, t)} \qquad (3.3.1)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t) \ , \\ y &= y(a,b,c,t) \ , \\ z &= z(a,b,c,t) \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.2)$$

antaa kappaleen aseman mielivaltaisella ajan hetkellä. Esitys (3.3.1) vastaa partikkelimekaniikan esitystä $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$. Koska kuitenkin kontinuumissa on ääretön määrä partikkeleita, niitä ei voida identifioida käytännössä varustamalla ne numeroilla. Sen sijaan partikkelin identifioivat tietyt arvot a, b ja c. Kaavat siis sanovat, että partikkelilla, jolla oli referenssiasemassa koordinaatit a, b ja c, on ajan hetkellä t koordinaatit x, y ja z.

Ainederivaatta. Tarkastellaan mielivaltaista Lagrangen esitystavan mukaista paikan ja ajan funktiota $f(\vec{r}^o, t)$. Esimerkkinä voisi olla vaikka kontinuumin tiheys $\rho(\vec{r}^o, t)$. Funktion f arvon muutos on (käytetään tässä karteesista suorakulmaista koordinaatistoa, jolloin $f = f(a,b,c,t)$)

$$df = \frac{\partial f}{\partial a}\,da + \frac{\partial f}{\partial b}\,db + \frac{\partial f}{\partial c}\,dc + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \qquad (3.3.3)$$

riippumattomien muuttujien a, b, c ja t muutosten da, db, dc ja dt johdosta. Mekaniikassa ollaan kiinnostuneita aina tietyn ainealkion kokemista muutoksista. Esimerkiksi tietyn ainealkion saamasta tiheyden muutoksesta voidaan päätellä tätä ainealkiota koskevan konstitutiivisen yhteyden perusteella vastaava paineen muutos. Täten muutosta laskettaessa on tarkasteltava tiettyä partikkelia ja pidettävä a, b ja c kiinteinä eli siis asetettava kaavassa (3.3.3)

$$da = 0\ , \quad db = 0\ , \quad dc = 0\ . \qquad (3.3.4)$$

Jakamalla yhtälö (3.3.3) vielä puolittain ajan differentiaalilla dt ja merkitsemällä lisäksi $d \to D$ saadaan funktion f muutosnopeuden lauseke

$$\boxed{f^{\bullet} \equiv \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}\ .} \qquad (3.3.5)$$

Termiä $D(\ )/Dt \equiv (\ )^{\bullet}$ nimitetään ns. <u>aineelliseksi aikaderivaataksi</u> tai vielä lyhyemmin <u>ainederivaataksi</u> (engl. material time derivative, material derivative, total derivative, substantial derivative, derivative following the particle ym.). Kuten esitetyt nimitykset antavat ymmärtää, <u>tämä derivaatta mittaa aina tietyn ainealkion (tai suljetun systeemin) kokemana jonkin tähän alkioon (tai systeemiin) liittyvän suureen muutosnopeuden</u>.

Sanoin lausuttuna <u>funktion ainederivaatta saadaan Lagrangen esityksessä funktion osittaisderivaattana ajan suhteen</u>. Tulos on voimassa myös vektori- tai tensoriarvoiselle funktiolle. Operaattorimuodossa saadaan kaava

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\ . \qquad (3.3.6)$$

Kaavan (3.3.5) avulla on helppo osoittaa, että ainederivaatalle pätevät tavanomaiset derivointilaskusäännöt kuten $D(f_1+f_2)/Dt = Df_1/Dt + Df_2/Dt$, $D(f_1 f_2)/Dt = Df_1/Dt \cdot f_2 + f_1 \cdot Df_2/Dt$ jne.

Huomautettakoon, että useissa kontinuumimekaniikkaa käsittelevissä teoksissa ainederivaatalle käytetään myös pelkkää tunnusta

d/dt. Kuitenkin tämä tavanomainen yhden muuttujan funktioiden derivoimistunnus sovellettuna usean muuttujan funktioon saattaa aiheuttaa sekaannusta. Täten etenkin Eulerin esityksessä erikoistunnuksen D/Dt (joskus myös D/dt) käyttö on hyvin yleistä, joten tässäkin tullaan toimimaan tämän käytännön mukaisesti. Huomautettakoon lisäksi, että tavanomaisen lyhennysmerkinnän $(\dot{\ }) \equiv d(\ )/dt$ sijasta käytetään nyt merkintää $(\ )^{\bullet} \equiv D(\ )/Dt$. Merkintätapa $(\ )^{\bullet}$ ei ole kovin yleisesti käytössä. Sillä halutaan tässä kuitenkin korostaa eroa merkintään $(\dot{\ })$, joka on varattu pelkästään yhden muuttujan (ajan t) funktioiden yhteydessä käytettäväksi.

<u>Siirtymä, nopeus ja kiihtyvyys</u>. Tietyn partikkelin rata saadaan yhteydestä (3.3.1) tai (3.3.2) pitämällä $\vec{r}^{\,o}$ eli a, b ja c kiinteinä ja antamalla vain ajan t muuttua. Täten nopeus $\vec{v}$ saadaan aseman $\vec{r}$ ainederivaattana eli

$$\boxed{\vec{v} = \vec{r}^{\,\bullet} = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{\partial \vec{r}(\vec{r}^{\,o},t)}{\partial t} \ .} \qquad (3.3.7)$$

Todettakoon vielä, että kaavojen (3.3.2) tunnukset a, b, c ja x, y, z voisivat tarkoittaa mitä hyvänsä koordinaatteja, jotka määrittäisivät kappaleen partikkelien asemat. Jatkossa niillä tarkoitetaan kuitenkin karteesisia suorakulmaisia koordinaatteja siten, että vastaavasti a- ja x-akseli jne. yhtyvät, kuten on jo esitetty kuvassa 3.3.1. Kun vastaavat yksikkökantavektorit ovat $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$, saadaan siis lausekkeet

$$\vec{r}^{\,o} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \qquad (3.3.8)$$

ja

$$\vec{r} = x(a,b,c,t)\vec{i} + y(a,b,c,t)\vec{j} + z(a,b,c,t)\vec{k} \ . \qquad (3.3.9)$$

Koska kantavektorit ovat ajan suhteen muuttumattomia, nopeudelle saadaan myös esitys

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= x^{\bullet}\vec{i} + y^{\bullet}\vec{j} + z^{\bullet}\vec{k} = \frac{\partial x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{k} \ , \\ &= v_a\vec{i} + v_b\vec{j} + v_c\vec{k} \ , \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.7')$$

jossa siis v_a, v_b ja v_c ovat nopeuden skalaarikomponentit a-(x-) akselille jne.

<u>Kiihtyvyys</u> $\vec{a}$ saadaan taas nopeuden ainederivaattana eli

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}(\vec{r}^{\,o},t)}{\partial t} = \ddot{\vec{r}} = \frac{D^2\vec{r}}{Dt^2} = \frac{\partial^2\vec{r}(\vec{r}^{\,o},t)}{\partial t^2}} \qquad (3.3.10)$$

tai vielä

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\vec{k}\ , \\ &= a_a\vec{i} + a_b\vec{j} + a_c\vec{k}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.10')$$

Tavallisesti esitykset (3.3.1) tai (3.3.2) kirjoitetaan muotoihin

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,o} + \vec{u}(\vec{r}^{\,o},t) \qquad (3.3.11)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} x &= a + u_a(a,b,c,t)\ , \\ y &= b + u_b(a,b,c,t)\ , \\ z &= c + u_c(a,b,c,t)\ , \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.12)$$

joissa vektori

$$\vec{u} = u_a\vec{i} + u_b\vec{j} + u_c\vec{k} \qquad (3.3.13)$$

on siirtymä. Koska vektorin $\vec{r}^{\,o}$ ainederivaatta häviää — $\vec{r}^{\,o}$ ei riipu ajasta — nopeudelle ja kiihtyvyydelle saadaan siis myös esitykset

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{u}} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}(\vec{r}^{\,o},t)}{\partial t}} \qquad (3.3.14)$$

tai

$$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{u}_a\vec{i} + \dot{u}_b\vec{j} + \dot{u}_c\vec{k} = \frac{\partial u_a}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial u_b}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial u_c}{\partial t}\vec{k}\ ,\\ &= v_a\vec{i} + v_b\vec{j} + v_c\vec{k}\end{aligned}\right\} \qquad (3.3.14')$$

sekä

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{\vec{u}} = \frac{D^2\vec{u}}{Dt^2} = \frac{\partial^2\vec{u}(\vec{r}^{\,o},t)}{\partial t^2}} \qquad (3.3.15)$$

tai

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{u}_a\vec{i} + \ddot{u}_b\vec{j} + \ddot{u}_c\vec{k} = \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}\vec{k}\ ,\\ &= a_a\vec{i} + a_b\vec{j} + a_c\vec{k}\ .\end{aligned}\right\} \qquad (3.3.15')$$

<u>Muodonmuutos</u>. Tarkastellaan referenssitilassa olevan differentiaalisen ainealkion muodon muutoksia eli deformaatiota liikkeen johdosta. Esitystä (3.3.1) tai (3.3.11) tai vielä suorakulmaista karteesista koordinaatistoa käytettäessä esitystä

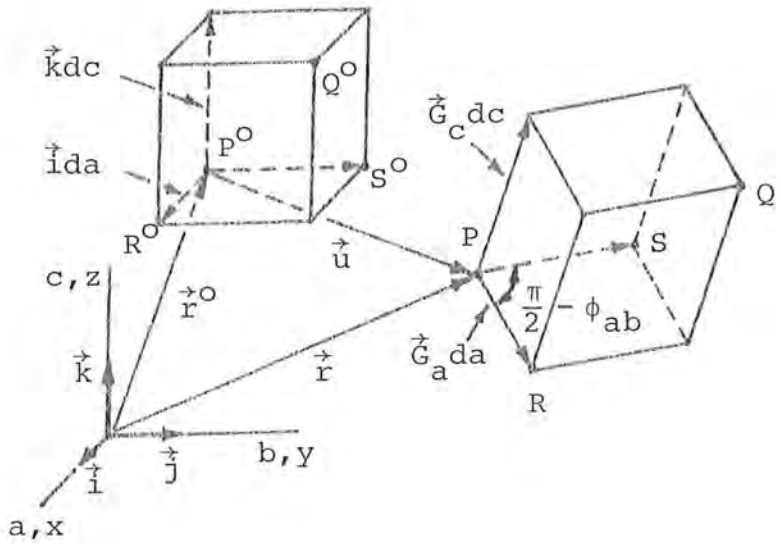
$$\vec{r} = (a+u_a)\vec{i} + (b+u_b)\vec{j} + (c+u_c)\vec{k} \qquad (3.3.16)$$

voidaan ajatella kuvauksena, joka kuvaa referenssialueen V^o pisteet alueen V pisteiksi. Kaksi mielivaltaista referenssitilassa olevaa äärettömän läheistä partikkelia P^o ja Q^o kuvautuvat alueen V pisteiksi P ja Q (kuva 3.3.2). Kun pisteen Q^o paikkavektori pisteen P^o suhteen on referenssitilassa

$$d\vec{r}^{\,o} = da\vec{i} + db\vec{j} + dc\vec{k}\ , \qquad (3.3.17)$$

on pisteen Q paikkavektori pisteen P suhteen kokonaisdifferentiaali

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial a}da + \frac{\partial\vec{r}}{\partial b}db + \frac{\partial\vec{r}}{\partial c}dc \qquad (2.3.18)$$



Kuva 3.3.2 Ainealkion liike.

eli

$$\left.\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial a}\,da + \frac{\partial x}{\partial b}\,db + \frac{\partial x}{\partial c}\,dc \\
&= \left(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}\right)da + \frac{\partial u_a}{\partial b}\,db + \frac{\partial u_a}{\partial c}\,dc\,, \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial a}\,da + \frac{\partial y}{\partial b}\,db + \frac{\partial y}{\partial c}\,dc \\
&= \frac{\partial u_b}{\partial a}\,da + \left(1+\frac{\partial u_b}{\partial b}\right)db + \frac{\partial u_b}{\partial c}\,dc\,, \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial a}\,da + \frac{\partial z}{\partial b}\,db + \frac{\partial z}{\partial c}\,dc \\
&= \frac{\partial u_c}{\partial a}\,da + \frac{\partial u_c}{\partial b}\,db + \left(1+\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)dc\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3.18')$$

On huomattava, että tässä tarkastellaan vain funktion $\vec{r}$ alkutilan paikasta riippuvaa muuttumista tietyllä hetkellä t, joten $\vec{r}$:n differentiaalia laskettaessa otetaan dt = 0.

Tarkastellaan edellisen erikoistapauksena referenssitilan differentiaalisen suorakulmaisen ainealkion vektoriaalisten särmien

$\vec{i}da$, $\vec{j}db$ ja $\vec{k}dc$ liikettä. Ne kuvautuvat vektoreiksi $(\partial\vec{r}/\partial a)da = \vec{G}_a da$, $(\partial\vec{r}/\partial b)db = \vec{G}_b db$ ja $(\partial\vec{r}/\partial c)dc = \vec{G}_c dc$, jossa siis on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\left.\begin{aligned}
\vec{G}_a &\equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial a} = (1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\vec{i} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\vec{j} + \frac{\partial u_c}{\partial a}\vec{k}\ , \\
\vec{G}_b &\equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial b} = \frac{\partial u_a}{\partial b}\vec{i} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\vec{j} + \frac{\partial u_c}{\partial b}\vec{k}\ , \\
\vec{G}_c &\equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial c} = \frac{\partial u_a}{\partial c}\vec{i} + \frac{\partial u_b}{\partial b}\vec{j} + (1+\frac{\partial u_c}{\partial c})\vec{k}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3.19)$$

Vektorit $\vec{G}_a$, $\vec{G}_b$ ja $\vec{G}_c$ eivät ole yleensä kohtisuorassa toisiaan vastaan eivätkä yksikkövektoreita paitsi jäykän kappaleen liikkeessä. Referenssitilan alkio muuttuu siis suuntaissärmiön muotoiseksi alkioksi.

Pyritään johtamaan viiva-alkioiden pituuden muutoksia ja viiva-alkioiden välisten kulmien muutoksia kuvaavia yhteyksiä. Referenssitilan viiva-alkion $\overrightarrow{P^oQ^o}$ pituuden neliö on kaavan (3.3.17) perusteella

$$(ds^o)^2 = d\vec{r}^o \cdot d\vec{r}^o = dada + dbdb + dcdc\ . \qquad (3.3.20)$$

Deformoituneen tilan viiva-alkion $\overrightarrow{PQ}$ eli

$$d\vec{r} = \vec{G}_a da + \vec{G}_b db + \vec{G}_c dc \qquad (3.3.21)$$

pituuden neliö on

$$\begin{aligned}
(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = {} & G_{aa}dada + G_{ab}dadb + G_{ac}dadc + \\
& + G_{ba}dbda + G_{bb}dbdb + G_{bc}dbdc + \\
& + G_{ca}dcda + G_{cb}dcdb + G_{cc}dcdc\ , \qquad (3.3.22)
\end{aligned}$$

jossa käytetyt lyhennysmerkinnät ovat

$$G_{aa} = \vec{G}_a\cdot\vec{G}_a\ , \quad G_{ab} = G_{ba} = \vec{G}_a\cdot\vec{G}_b\ , \text{ jne.} \qquad (3.3.23)$$

Kun käytetään matriisimerkintöjä

$$\left.\begin{aligned} d\vec{r}^{\,o} &\triangleq \{dr^o\} = [da\ db\ dc]^T , \\ d\vec{r} &\triangleq \{dr\} = [dx\ dy\ dz]^T , \\ [I] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [G] &= \begin{bmatrix} G_{aa} & G_{ab} & G_{ac} \\ G_{ba} & G_{bb} & G_{bc} \\ G_{ca} & G_{cb} & G_{cc} \end{bmatrix} , \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.24)$$

kaavat (3.3.20) ja (3.3.22) saavat muodot (neliömuotoja)

$$\left.\begin{aligned} (ds^o)^2 &= \{dr^o\}^T\{dr^o\} = \{dr^o\}^T[I]\{dr^o\} , \\ (ds)^2 &= \{dr\}^T\{dr\} = \{dr^o\}^T[G]\{dr^o\} . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.25)$$

[G] on <u>Greenin deformaatiomatriisi</u>. Jälkimmäisen kaavan (3.3.25) yleinen muoto on $(ds)^2 = d\vec{r}^{\,o}\cdot\overleftrightarrow{G}\cdot d\vec{r}^{\,o}$, jossa $\overleftrightarrow{G}$ on ns. Greenin deformaatiotensori (engl. Green deformation tensor).

Tarkastellaan termin G_{aa} geometrista merkitystä. Viiva-alkion P^oR^o pituudet alkutilassa ja muodonmuutoksen jälkeen ovat vastaavasti

$$(ds^o)^2 = (da)^2 , \qquad (ds)^2 = G_{aa}(da)^2 , \qquad (3.3.26)$$

Täten suhteellinen pituudenmuutos

$$\frac{ds-ds^o}{ds^o} = \sqrt{G_{aa}} - 1 . \qquad (3.3.27)$$

Suureiden G_{bb} ja G_{cc} tulkinta saadaan analogisesti.

Seuraavaksi tarkastellaan viiva-alkioita P^oR^o ja P^oS^o, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ennen muodonmuutosta. Kun alkioiden PR ja PS välistä kulmaa muodonmuutoksen jälkeen merki-

tään suureella $\pi/2 - \phi_{ab}$ (ϕ_{ab} on siis suoran kulman pienenemistä osoittava kulma), saadaan

$$\vec{G}_a da \cdot \vec{G}_b db = |\vec{G}_a||\vec{G}_b| da db \cos(\frac{\pi}{2} - \phi_{ab}) \tag{3.3.28}$$

eli

$$G_{ab} da db = \sqrt{G_{aa}}\sqrt{G_{bb}} da db \sin\phi_{ab} , \tag{3.3.29}$$

joten

$$G_{ab} = G_{ba} = \sqrt{G_{aa} G_{bb}} \sin\phi_{ab} . \tag{3.3.30}$$

Tämä antaa G_{ab}:n geometrisen merkityksen. Suureiden G_{bc} ja G_{ca} merkitys saadaan analogisesti.

Deformaatiomatriisin [G] kuusi riippumatonta alkiota määrittävät siis täydellisesti vääristyneen suuntaissärmiön geometrian. Varsinaiset muodonmuutos- eli venymäkomponentit ${}^g\varepsilon_{aa}$, ${}^g\varepsilon_{ab}$,... määritellään matriisin $[{}^g\varepsilon]$ alkioina, jossa

$$(ds)^2 - (ds^o)^2 = 2\{dr^o\}^T[{}^g\varepsilon]\{dr^o\} . \tag{3.3.31}$$

Vertaaminen kaavoihin (3.3.25) osoittaa, että

$$[{}^g\varepsilon] = \frac{1}{2}([G]-[I]) . \tag{3.3.32}$$

$[{}^g\varepsilon]$:n alkioiksi saadaan kaavojen (3.3.19) avulla

$$\left.\begin{aligned}
{}^g\varepsilon_{aa} &= \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u_a}{\partial a})^2 + (\frac{\partial u_b}{\partial a})^2 + (\frac{\partial u_c}{\partial a})^2\right] , \\
{}^g\varepsilon_{bb} &= \frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u_a}{\partial b})^2 + (\frac{\partial u_b}{\partial b})^2 + (\frac{\partial u_c}{\partial b})^2\right] , \\
{}^g\varepsilon_{cc} &= \frac{\partial u_c}{\partial c} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u_a}{\partial c})^2 + (\frac{\partial u_b}{\partial c})^2 + (\frac{\partial u_c}{\partial c})^2\right] , \\
{}^g\varepsilon_{bc} &= {}^g\varepsilon_{cb} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b} + \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial u_a}{\partial c} + \frac{\partial u_b}{\partial b}\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}\frac{\partial u_c}{\partial c}\right) ,
\end{aligned}\right| \tag{3.3.33}$$

$$\left.\begin{aligned} {}^{g}\varepsilon_{ca} = {}^{g}\varepsilon_{ac} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_c}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial c} + \frac{\partial u_a}{\partial c}\frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial c}\frac{\partial u_b}{\partial a} + \frac{\partial u_c}{\partial c}\frac{\partial u_c}{\partial a}\right) , \\ {}^{g}\varepsilon_{ab} = {}^{g}\varepsilon_{ba} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial a}\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{\partial u_c}{\partial a}\frac{\partial u_c}{\partial b}\right) . \end{aligned}\right|$$

Suureita ${}^{g}\varepsilon_{aa}$, ${}^{g}\varepsilon_{ab}$, jne. ([${}^{g}\varepsilon_{aa}$] = 1) nimitetään Green-Lagrangen tai Lagrangen äärellisiksi venymäkomponenteiksi. Venymäkomponentit ovat siis Lagrangen esityksessä siirtymien suhteen epälineaarisia.

Kaavan (3.3.31) yleinen muoto on $(ds)^2 - (ds^o)^2 = 2d\vec{r}^o \cdot {}^{g}\overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot d\vec{r}^o$, jossa ${}^{g}\overleftrightarrow{\varepsilon}$ on ns. Green-Lagrangen tai Lagrangen äärellinen venymätensori (engl. Lagrangian finite-strain tensor).

Kaavoista (3.3.32) seuraa

$$G_{aa} = 1 + 2{}^{g}\varepsilon_{aa} , \quad G_{ab} = 2{}^{g}\varepsilon_{ab} , \quad \text{jne.} \tag{3.3.34}$$

Jos venymäkomponentit ovat pieniä (${}^{g}\varepsilon_{aa}$, ${}^{g}\varepsilon_{ab}$, ... << 1), kaavoista (3.3.27) ja (3.3.30) saadaan likimääräiset lausekkeet

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds-ds^o}{ds^o} &= \sqrt{1+2{}^{g}\varepsilon_{aa}} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2}(2{}^{g}\varepsilon_{aa}) - 1 = {}^{g}\varepsilon_{aa} , \\ \phi_{ab} &= \arcsin \frac{{}^{g}\varepsilon_{ab}}{\sqrt{1+2{}^{g}\varepsilon_{aa}}\sqrt{1+2{}^{g}\varepsilon_{bb}}} \approx \arcsin(2{}^{g}\varepsilon_{ab}) \approx 2{}^{g}\varepsilon_{ab} . \end{aligned}\right| \tag{3.3.35}$$

Täten ns. pienten muodonmuutosten teoriassa (engl. small deformation theory) termit ${}^{g}\varepsilon_{aa}$, ${}^{g}\varepsilon_{bb}$ ja ${}^{g}\varepsilon_{cc}$ esittävät alkuaan a-, b- ja c-akselien suuntaisten viiva-alkioiden suhteellisia pituudenmuutoksia eli ns. venymiä (engl. normal strain, unit extension). Termit $2{}^{g}\varepsilon_{ab}$, $2{}^{g}\varepsilon_{bc}$ ja $2{}^{g}\varepsilon_{ca}$ taas esittävät alkuaan kohtisuorassa toisiaan vastaan olleiden viiva-alkioiden välisiä kulmanmuutoksia; ns. liukumia eli leikkausmuodonmuutoksia (engl. shearing strain).

On huomattava, että (paikalliset) muodonmuutokset voivat pysyä pieninä vaikka kappale saisi melko suuriakin siirtymiä ja muodonmuutoksia kokonaisuutena (vrt. kellon jousen siirtymät kelloa vedettäessä). Insinöörirakenteissa muodonmuutoksia voidaan pitää useimmiten pieninä. Esimerkiksi teräkselle venymät $\lesssim 1/1000$, jotta pysyttäisiin kimmoisella alueella.

Ns. infinitesimaalisten tai pienten siirtymien teoriassa (engl. small displacement theory) lausekkeisiin (3.3.33) jätetään mukaan vain lineaariset termit ja usein käytetään merkintöjä

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\partial u_a}{\partial a}, & \gamma_{bc} &= \gamma_{cb} = \frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}, \\ \varepsilon_b &= \frac{\partial u_b}{\partial b}, & \gamma_{ca} &= \gamma_{ac} = \frac{\partial u_c}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial c}, \\ \varepsilon_b &= \frac{\partial u_c}{\partial c}, & \gamma_{ab} &= \gamma_{ba} = \frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}. \end{aligned}} \qquad (3.3.36)$$

Samoin itse suureista ${}^g\varepsilon_{aa}$, ${}^g\varepsilon_{ab}$, jne. käytetään monasti kirjallisuudessa merkintöjä ε_a, $\gamma_{ab}/2$, jne. Suureet (3.3.36) ovat Lagrangen infinitesimaaliset venymäkomponentit (engl. Lagrangian infinitesimal strain component). Kaavat (3.3.36) saadaan kaavoista (3.3.38) otaksumalla, että kaikki derivaatat $\partial u_a/\partial a$, $\partial u_a/\partial b$, jne. $\ll 1$, jolloin derivaattojen tulot voidaan jättää itse derivaattojen rinnalla pieninä suureina pois.

Suureita ε_a, γ_{bc} jne. nimitetään joskus myös insinöörivenymäkomponenteiksi, koska niitä käytetään paljon teknillisessä kirjallisuudessa. Liukumat γ tulee jakaa kakkosella, jotta termit esittäisivät tensorin komponentteja.

Huomautus 1. Englanninkielisten kinematiikan termien kuten displacement, deflection, deformation, strain, stretch, unit extension, shearing strain suomenkielisten sopivien vastineiden löytäminen ei ole aina helppoa. Terminologia ei ole täysin vakiintunut. Tässä on pyritty seuraavaan käytäntöön.

Displacement = siirtymä lähinnä vektorimielessä.

Deflection = taipuma tai siirtymä lähinnä skalaarimielessä.

Deformation, strain = deformaatio, muodonmuutos yleisenä kappaleen muodon muuttumista kuvaavana tarkoin määrittelemättä jäävänä käsitteenä.

Deformation (tensor, component) = deformaatio (tensori, komponentti) täsmällisemmin lausekkeeseen $(ds)^2 = d\vec{r}^{\,o} \overleftrightarrow{G}\, d\vec{r}^{\,o}$ tai vastaavaan liitettynä käsitteenä.

Strain (tensor, component) = muodonmuutos tai venymä (tensori,

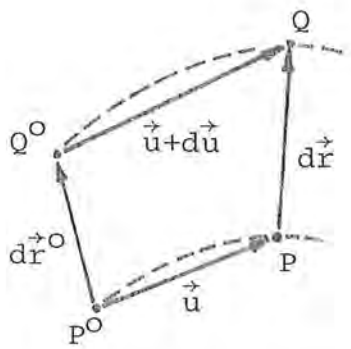
komponentti) täsmällisemmin lausekkeeseen $(ds)^2 - (ds^o)^2 = 2d\vec{r}^o \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot d\vec{r}^o$ tai vastaavaan liitettynä käsitteenä. Tässä tullaan useimmiten käyttämään lyhyempää venymä-sanaa. Sen haittapuolena on mielikuva pelkästä pituuden muutoksesta. Termi yleistetty venymä kuten yleistetty voima olisi kuvaavampi mutta turhan pitkä. Tavallisin suomenkielinen termi tässä yhteydessä lienee muodonmuutos.

Stretch = venytys ds/ds^o.

Unit extension = suhteellinen pituudenmuutos, venymä $(ds-ds^o)/ds^o$. Voitaisiin myös ehdottaa termin normaalijännitys analogisena vastineena termiä normaalivenymä?

Shearing strain = leikkausmuodonmuutos, liukuma, liukukulma γ. Voitaisiin myös ehdottaa termin leikkausjännitys analogisena vastineena termiä leikkausvenymä?

<u>Infinitesimaalinen venymä ja rotaatio</u>. Insinöörivenymät ilmestyvät kuvaan myös seuraavan, edellisestä poikkeavan käsittelyn yhteydessä, joka antaa lisävalaistusta aikaisempiin kaavoihin.



Kuva 3.3.3 Suhteellinen siirtymä $d\vec{u}$ liioiteltuna.

Tarkastellaan tietyllä hetkellä kahta äärettömän läheistä ainepistettä P ja Q, jotka ovat sijainneet referenssitilassa pisteissä P^o ja Q^o (kuva 3.3.3). Vastaavat siirtymät ovat $\vec{u}$ ja $\vec{u}+d\vec{u}$. Partikkelin Q suhteellinen siirtymä $d\vec{u}$ pisteen P suhteen saadaan kokonaisdifferentiaalina

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial a}\, da + \frac{\partial \vec{u}}{\partial b}\, db + \frac{\partial \vec{u}}{\partial c}\, dc \qquad (3.3.37)$$

eli

$$\{du\} = [\partial u/\partial r^o]\{dr^o\} \qquad (3.3.37')$$

eli

$$\begin{Bmatrix} du_a \\ du_b \\ du_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_a}{\partial a} & \frac{\partial u_a}{\partial b} & \frac{\partial u_a}{\partial c} \\ \frac{\partial u_b}{\partial a} & \frac{\partial u_b}{\partial b} & \frac{\partial u_b}{\partial c} \\ \frac{\partial u_c}{\partial a} & \frac{\partial u_c}{\partial b} & \frac{\partial u_c}{\partial c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} da \\ db \\ dc \end{Bmatrix} . \qquad (3.3.37'')$$

Matriisia $[\partial u/\partial r^o]$ voidaan nimittää <u>siirtymägradienttimatriisiksi</u>. Sen tensorivastine on vektorin $\vec{u}$ gradientti $\vec{u}\overleftarrow{\nabla}$ ([3.1, s. 130]). On huomattava, että tässä kohdassa tarkastellaan vain siirtymäkentän paikasta riippuvaa muuttumista, joten vektorin $\vec{u}$ differentiaalia laskettaessa otetaan dt = 0.

Jaetaan matriisi $[\partial u/\partial r^o]$ symmetriseen ja antisymmetriseen osaan:

$$[\partial u/\partial r^o] = [\varepsilon] + [\theta] , \qquad (3.3.38)$$

$$\left.\begin{aligned}
[\varepsilon] &\equiv \tfrac{1}{2}([\partial u/\partial r^o]+[\partial u/\partial r^o]^T) , \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_a}{\partial a} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_a}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial a}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_b}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial b}) & \frac{\partial u_b}{\partial b} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_c}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial c}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_c}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial c}) & \frac{\partial u_c}{\partial c} \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_{aa} & \varepsilon_{ab} & \varepsilon_{ac} \\ \varepsilon_{ba} & \varepsilon_{bb} & \varepsilon_{bc} \\ \varepsilon_{ca} & \varepsilon_{cb} & \varepsilon_{cc} \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_a & \frac{1}{2}\gamma_{ab} & \frac{1}{2}\gamma_{ac} \\ \frac{1}{2}\gamma_{ba} & \varepsilon_b & \frac{1}{2}\gamma_{bc} \\ \frac{1}{2}\gamma_{ca} & \frac{1}{2}\gamma_{cb} & \varepsilon_c \end{bmatrix} ,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3.39)$$

$$[\theta] \equiv \tfrac{1}{2}([\partial u/\partial r^o]-[\partial u/\partial r^o]^T) ,$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_a}{\partial b} - \frac{\partial u_b}{\partial a}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_a}{\partial c} - \frac{\partial u_c}{\partial a}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_b}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial b}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_b}{\partial c} - \frac{\partial u_c}{\partial b}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_c}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial c}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_c}{\partial b} - \frac{\partial u_b}{\partial c}) & 0 \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} \theta_{aa} & \theta_{ab} & \theta_{ac} \\ \theta_{ba} & \theta_{bb} & \theta_{bc} \\ \theta_{ca} & \theta_{cb} & \theta_{cc} \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\theta_c & \theta_b \\ \theta_c & 0 & -\theta_a \\ -\theta_b & \theta_a & 0 \end{bmatrix} .
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.3.40)
$$

Matriiseja $[\varepsilon]$ ja $[\theta]$ voidaan nimittää vastaavasti <u>infinitesimaaliseksi venymämatriisiksi</u> ja <u>infinitesimaaliseksi rotaatiomatriisiksi</u>. Niiden tensorivastineet ovat $\overleftrightarrow{\varepsilon} = 1/2\cdot(\vec{u}\overleftarrow{\nabla}+\vec{\nabla}\vec{u})$ ja $\overleftrightarrow{\theta} = 1/2\cdot(\vec{u}\overleftarrow{\nabla}-\vec{\nabla}\vec{u})$ [3.1, s.131].

Antisymmetrisessä matriisissa $[\theta]$ on vain kolme riippumatonta alkiota. Täten siihen voidaan assosioida eräs vektori, ns. <u>infinitesimaalinen rotaatio</u> (engl. infinitesimal rotation vector) ($[\vec{\theta}] = 1 = \text{rad}$)

$$\vec{\theta} = \theta_a\vec{i} + \theta_b\vec{j} + \theta_c\vec{k} \qquad (3.3.41)$$

ottamalla (eräs valinta)

$$
\left.
\begin{aligned}
\theta_a &= -\theta_{bc} = \theta_{cb} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_c}{\partial b} - \frac{\partial u_b}{\partial c}) , \\
\theta_b &= -\theta_{ca} = \theta_{ac} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_a}{\partial c} - \frac{\partial u_c}{\partial a}) , \\
\theta_c &= -\theta_{ab} = \theta_{ba} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_b}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial b}) .
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.3.41')
$$

Nämä merkinnät vastaavat kaavoihin (3.3.40) liittyviä määritelmiä.

Palataan hetkeksi jäykän kappaleen kinematiikkaan. Differentiaalisten siirtymien tapauksessa jäykän kappaleen mielivaltaisen partikkelin differentiaalinen siirtymä saadaan kaavasta (2.2.5): $d\vec{u}_Q = d\vec{u}_P + \vec{\theta}\times\vec{r}_{Q/P}$. Tämä pätee likikaavana myös pienille äärellisille siirtymille $\vec{u}_Q$ ja $\vec{u}_P$ ja rotaatioille $\vec{\theta}$. Jos otetaan siirtopiste P origoon, jäykän kappaleen pientä liikettä vastaava siirtymäkenttä voidaan esittää muodossa

$$\vec{u}(\vec{r}^{\,o},t) = \vec{u}_0(t) + \vec{\theta}(t)\times\vec{r}^{\,o} \ . \qquad (3.3.42)$$

Muodostamalla lauseke $\vec{\nabla}\times\vec{u}$ saadaan (samaan tapaan kuin esimerkiksi lähteessä [3.2, s.48]) tulos $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 2\vec{\theta}$ eli

$$\boxed{\vec{\theta} = \frac{1}{2}\,\vec{\nabla}\times\vec{u}} \qquad (3.3.43)$$

eli

$$\vec{\theta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial a} & \frac{\partial}{\partial b} & \frac{\partial}{\partial c} \\ u_a & u_b & u_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_c}{\partial b} - \frac{\partial u_b}{\partial a}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_a}{\partial c} - \frac{\partial u_c}{\partial a}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_b}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial b}\right)\vec{k}\right]. \qquad (3.3.43')$$

Täten jäykän kappaleen infinitesimaalisessa liikkeessä siirtymäkentän roottorin puolikas antaa jäykän kappaleen infinitesimaalisen rotaation. Tämä tulos on sikäli tärkeä, että sitä voidaan käyttää myös muotoaan muuttavien kappaleiden yhteydessä <u>määrittelemään kussakin pisteessä kontinuumin alkion infinitesimaalinen rotaatiovektori</u>, joka tulee siis olemaan yleensä paikasta riippuva päinvastoin kuin jäykän kappaleen tapauksessa.

Lausekkeiden (3.3.41') ja (3.3.43') vertailu selittää täten kaavassa (3.3.41) esiintyvälle vektorille annetun nimityksen.

Sovelletaan vielä kaavaa (2.2.5) jälleen muodossa: $\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\theta}\times\vec{r}_{Q/P}$ kuvan 3.3.3 esittämään tilanteeseen ja otetaan siten $\vec{r}_{Q/P} \to \vec{r}_{Q^o/P^o} = d\vec{r}^{\,o}$, jolloin saadaan tulos

$$d\vec{u} = \vec{\theta}\times d\vec{r}^{\,o} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \theta_a & \theta_b & \theta_c \\ da & db & dc \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(\theta_b dc-\theta_c db)\vec{i} + \\ &+(\theta_c da-\theta_a dc)\vec{j} + \\ &+(\theta_a db-\theta_b da)\vec{k} \end{aligned} \qquad (3.3.44)$$

eli vielä

$$\begin{Bmatrix} du_a \\ du_b \\ du_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_c & \theta_b \\ \theta_c & 0 & -\theta_a \\ -\theta_b & \theta_a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} da \\ db \\ dc \end{Bmatrix} . \qquad (3.3.44')$$

Vertaamalla kaavoja (3.3.40) ja (3.3.44') voidaan todeta seuraavaa. Jos kappale liikkuisi kuten jäykkä kappale, suhteellinen siirtymä olisi kaavan (3.3.44') mukainen eli $\{du\} = [\theta]\{dr^o\}$. Täten täydellisen lausekkeen $\{du\} = [\partial u/\partial r^o]\{dr^o\} = [\varepsilon]\{dr^o\} + [\theta]\{dr^o\}$ osuuden $[\varepsilon]\{dr^o\}$ täytyy esittää alkion muodon muuttumisesta johtuvia termejä. Matriisin $[\varepsilon]$ alkioiden fysikaalinen merkitys on ollut esillä jo edellä ja kuten silloin todettiin, alkiot liittyivät todella muodon muutoksiin.

Huomautettakoon, että vaikka kaavan (3.3.38) esittämä jako on aina suoritettavissa, matriisien $[\varepsilon]$ ja $[\theta]$ alkioiden fysikaalinen mielekkyys häviää suurten siirtymien yhteydessä.

Laskemalla voidaan osoittaa, että äärelliset venymät ovat esitettävissä pienten venymien ja rotaatioiden lausekkeiden avulla seuraavasti

$$^g\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\varepsilon_{mi}+\theta_{mi})(\varepsilon_{mj}+\theta_{mj}) . \qquad (3.3.45)$$

Tässä on siirrytty lyhyyden vuoksi indeksimerkintöihin $a \triangleq 1$, $b \triangleq 2$, $c \triangleq 3$.

Ns. taipuisten kappaleiden (engl. fexible body) kuten laattojen ja palkkien suurten siirtymien yhteydessä venymät ovat usein pieniä verrattuina rotaatioihin. Lausekkeita (3.3.45) voidaan tällöin approksimoida muodossa

$$^g\varepsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}\theta_{mi}\theta_{mj} . \qquad (3.3.46)$$

Jos vielä rotaatioitakin voidaan pitää pieninä, päädytään lopuksi pienten siirtymien teorian mukaiseen esitykseen

$$^{g}\varepsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij} \; . \tag{3.3.47}$$

Huomautus 2. Lagrangen esitystavassa operaattori

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial a} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial b} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial c} \; . \tag{3.3.48}$$

Toisin sanoen derivoinnit suoritetaan luonnollisesti Lagrangen esityksen riippumattomien paikkakoordinaattien a, b ja c suhteen. Tarvittaessa tätä voitaisiin korostaa merkitsemällä esimerkiksi $\vec{\nabla}_{r^o}$.

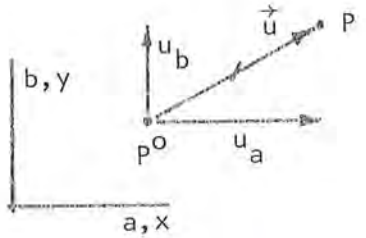
Eulerin esitystavassa taas vastaavasti operaattori

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \; . \tag{3.3.49}$$

Toisin sanoen derivoinnit suoritetaan Eulerin esityksen riippumattomien paikkakoordinaattien x, y ja z suhteen. Tarvittaessa tätä voitaisiin korostaa merkitsemällä esimerkiksi $\vec{\nabla}_r$.

Lähteessä [3.1] esiintyvä merkintä $\overleftarrow{\nabla}$ tarkoittaa, että operaattori kohdistuukin edellään olevaan suureeseen.

Esimerkki 3.3.1 Tasoliike. Tarkastellaan edellä esitettyjen kaavojen saamia muotoja havainnollisemman kuvan saamiseksi tasoliikkeessä.



(a)

Tasoliikkeessä tietyn tason, ns. liiketason, normaaleilla olevat partikkelit liikkuvat identtisesti ja liiketason suuntaisesti. Jos liiketaso otetaan xy-tasoksi (kuva (a)), saadaan siis $u_a = u_a(a,b)$, $u_b = u_b(a,b)$ ja $u_c \equiv 0$.

Äärellisten venymäkomponenttien lausekkeiden (3.3.33) nollasta eroavat termit ovat

$$\left.\begin{aligned} {}^{g}\varepsilon_{aa} &= \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_a}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_b}{\partial a}\right)^2\right] , \\ {}^{g}\varepsilon_{bb} &= \frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_a}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_b}{\partial b}\right)^2\right] , \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

$$ {}^{g}\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial a}\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial u_b}{\partial b}\right) . $$

Pienten venymäkomponenttien (3.3.36) nollasta eroavat termit ovat

$$ \left.\begin{aligned} \varepsilon_a &= \varepsilon_{aa} = \frac{\partial u_a}{\partial a} , \\ \varepsilon_b &= \varepsilon_{bb} = \frac{\partial u_b}{\partial b} , \\ \frac{\gamma_{ab}}{2} &= \varepsilon_{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\right) . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)} $$

Ainoa nollasta eroava rotaatio (3.3.41') on

$$ \theta_c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_b}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial b}\right) , \qquad \text{(c)} $$

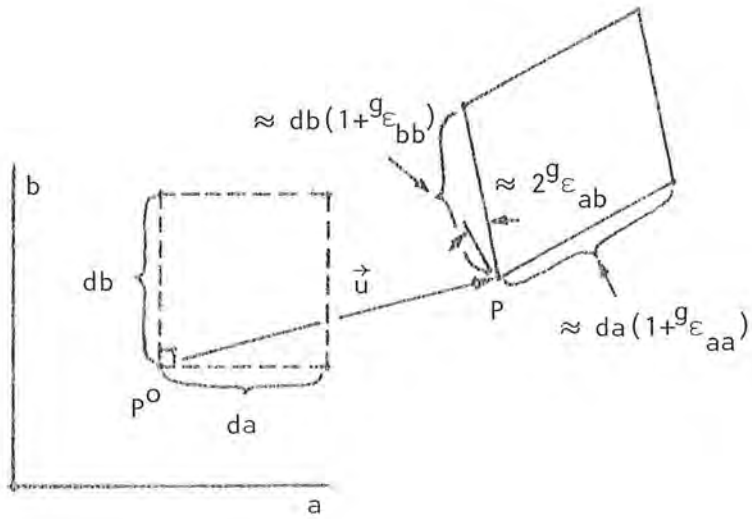
joten rotaatiovektori on tasoliikkeessä kohtisuorassa liiketasoa vastaan.

Kaavat (3.3.45) antavat

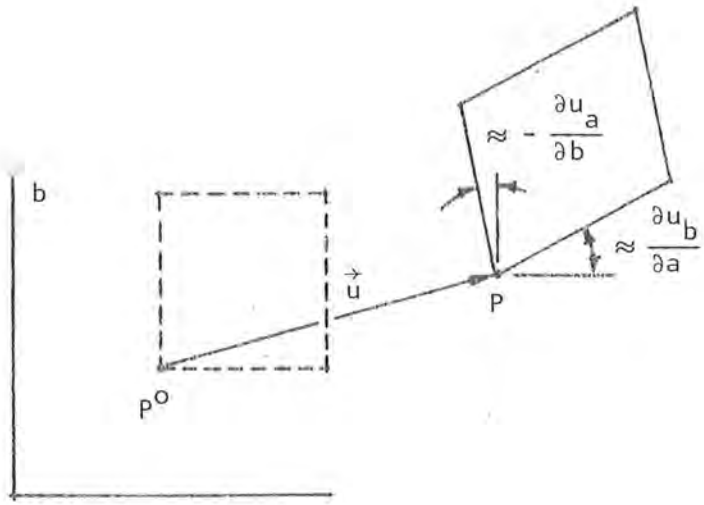
$$ \left.\begin{aligned} {}^{g}\varepsilon_{aa} &= \varepsilon_{aa} + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{aa}^2 + (\varepsilon_{ba}+\theta_c)^2\right] , \\ {}^{g}\varepsilon_{bb} &= \varepsilon_{bb} + \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_{ab}-\theta_c)^2 + \varepsilon_{bb}^2\right] , \\ {}^{g}\varepsilon_{ab} &= {}^{g}\varepsilon_{ba} = \varepsilon_{ab} + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{aa}(\varepsilon_{ab}-\theta_c) + (\varepsilon_{ba}+\theta_c)\varepsilon_{bb}\right] . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)} $$

Sijoittamalla näihin lausekkeet (b) ja (c) päädytään takaisin kaavoihin (a).

Kuvissa (b) ja (c) on pyritty havainnollistamaan termien ${}^{g}\varepsilon_{aa}$, ${}^{g}\varepsilon_{bb}$, ${}^{g}\varepsilon_{ab}$ ja θ_c fysikaalisia tulkintoja. Kuvan (c) ja kaavan (c) perusteella havaitaan, että rotaatio θ_c voidaan ajatella kahden alkuaan toisiaan vastaan kohtisuorassa olleiden ainejanojen rotaatioiden keskiarvoksi.



(b)



(c)

Tarkastellaan vielä yksityiskohtaisesti esimerkkitapausta, jossa liike on annettu yhtälöiden

$$x = a + \alpha b \ , \quad y = b + \alpha a \ , \tag{e}$$

kautta, joissa $\alpha(t)$ ja $\beta(t)$ ovat tunnettuja ajan funktioita ($\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$), joista lisää myöhemmin. Määritetään syntyvä nopeus-, kiihtyvyys- ja muodonmuutosjakautuma.

Siirtymäkomponentit ovat siis

$$u_a = \alpha(t)b \ , \quad u_b = \beta(t)a \tag{f}$$

ja kaavoja (3.3.14) ja (3.3.15') soveltamalla saadaan nopeuskomponentit

$$v_a = \frac{\partial u_a}{\partial t} = \dot{\alpha}b \ , \quad v_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = \dot{\beta}a \ , \tag{g}$$

sekä kiihtyvyyskomponentit

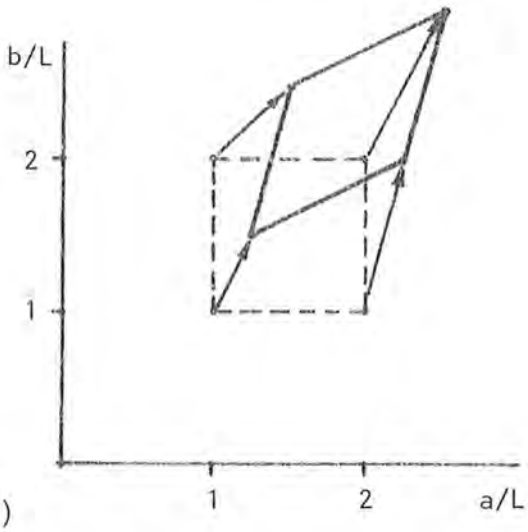
$$a_a = \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = \ddot{\alpha}b \ , \quad a_b = \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} = \ddot{\beta}a \ . \tag{h}$$

Otetaan jatkossa yksinkertaisuuden vuoksi tapaus $\beta = 2\alpha$, jolloin kaavoista (g) nähdään kunkin partikkelin nopeusvektorin suunnan pysyvän vakiona α:sta riippumatta ($v_b/v_a = 2a/b$), joten partikkelin radat ovat suoria. Kuvassa (d) on esitetty kaavojen (e) avulla laskettu, alkutilassa neliön muotoisen alueen muuttuminen suunnikkaaksi hetkellä, jolloin funktiolla α on arvo 1/4. Suure L on valittu mielivaltainen referenssipituus. Funktion α täsmällistä muotoa ei ole tässä tarpeen esittää.

Kuvan (d) esittämässä tapauksessa saadaan

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{aa} = \frac{\partial u_a}{\partial a} = 0 \ ,$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_b &= \varepsilon_{bb} = \frac{\partial u_b}{\partial b} = 0 \,, \\
\frac{\gamma_{ab}}{2} &= \varepsilon_{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\right) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \,, \\
\theta_c &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_b}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial b}\right) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \,.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(i)}$$



(d)

Äärelliset venymäkomponentit (d) ovat

$$\left.\begin{aligned}
{}^g\varepsilon_{aa} &= 0 + \frac{1}{2}\left[0^2 + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right)^2\right] = \frac{1}{8} = 0{,}125 \,, \\
{}^g\varepsilon_{bb} &= 0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right)^2 + 0^2\right] = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \,, \\
{}^g\varepsilon_{ab} &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\left[0\cdot\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right)\cdot 0\right] = \frac{3}{8} = 0{,}375 \,.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(j)}$$

Todellisiksi a- ja b-akselin suuntaisten ainejanojen suhteellisiksi pituudenmuutoksiksi $(ds-ds^o)/ds^o$ saadaan kuvan (d) avulla laskemalla arvot 0,118 ja 0,0308. Todellinen liukukulma $\phi_{ab} \approx 0{,}709$, kun taas $2\,{}^g\varepsilon_{ab} = 0{,}750$. Täten äärellisten venymäkomponenttien arvojen nähdään olevan melko lähellä vastaavia todellisia arvoja näinkin suurten muodonmuutosten tapauksessa. (Kyseessä eivät ole virheet, koska teoria ei edellytäkään täydellistä vastaavuutta paitsi pienten muodonmuutosten yhteydessä.) Infinitesimaalisten venymäkomponenttien lausekkeiden epärealistisuus näkyy sen sijaan tässä selvästi.

<u>Tilavuusintegraalin ainederivaatta</u>. Mekaniikassa joudutaan laskemaan paikan ja ajan funktioiden muutosnopeuksien lisäksi myös tiet-

tyjen tilavuusintegraalien muutosnopeuksia. Itse asiassa aksioomat (3.2.1)...(3.2.6) koskevat äärellisiä kappaleita ja aksioomissa esiintyvät tietyt suureet kuten massa, liikemäärä, liike-energia jne. esitetään tilavuusintegraaleina.

Kun Lagrangen esityksessä tehtävän matemaattisena määrittely-alueena on kappaleen eli suljetun systeemin referenssitilassa varaama avaruuden osa, integroimisalue ei riipu kappaleen liikkeestä ja tyypillinen integraali on siis muotoa

$$I(t) = \int_{V^o} f(\vec{r}^o,t)dV^o = \int_{V^o} f(a,b,c,t)dadbdc \ , \qquad (3.3.50)$$

jossa integraalimerkissä voidaan käyttää tunnusta V^o viittaamaan siihen, että integroimisalue on kiinteä eikä riipu ajasta. Esimerkkinä mainittakoon kappaleen kokonaismassa $m(t) = \int_{V^o} \rho(\vec{r}^o,t) \cdot J(\vec{r}^o,t)dV^o$, jossa ρ kontinuumin tiheys ja J kuvaukseen (3.3.2) liittyvä Jacobin determinantti, joihin palataan tarkemmin myöhemmin.

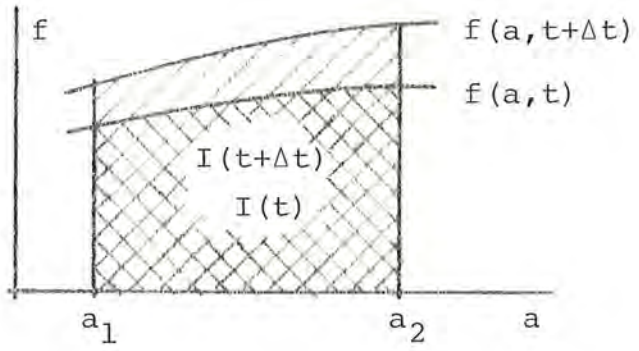
Kun ajatellaan vaadittava integrointi paikan suhteen suoritetuksi kullakin ajan hetkellä, integraalista nähdään tulevan pelkästään ajan funktio, $I = I(t)$. Täten yhden muuttujan funktion I tavanomainen derivaatta $\dot{I} \equiv dI/dt$ on tässä samalla kappaleeseen liittyvän suureen I kappaleen kokemana mitattu muutosnopeus eli ns. aineellinen aikaderivaatta eli lyhyemmin ainederivaatta ja siis pätee

$$I^{\bullet} \equiv \frac{DI}{Dt} = \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt} \ . \qquad (3.3.51)$$

Lausekkeen (3.3.50) derivoiminen muuttujan t suhteen kulkee matematiikassa nimellä määrätyn integraalin derivoiminen parametrin suhteen [3.3, s. 29] (Suuretta t voidaan nimittää tässä parametriksi siinä mielessä, että se ei ole integroimismuuttuja kuten a, b ja c.).

Tarkastellaan ensin yksidimensioista tapausta ja määrättyä integraalia

$$I(t) = \int_{a_1}^{a_2} f(a,t)da \ . \qquad (3.3.52)$$



Kuva 3.3.4 Integraali I pinta-alana.

Integraalin arvon muuttumista t:n muuttuessa on havainnollistettu kuvassa 3.3.4. Tunnetusti pätee

$$\frac{dI}{dt} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial f}{\partial t}\, da \ . \qquad (3.3.53)$$

eli derivoiminen saadaan kohdistaa suoraan integrandiin. Koska se taas on myös paikan a funktio, täytyy nyt kuitenkin käyttää osittaisderivaattamerkkiä.

Palataan integraaliin (3.3.50). Sen suhteen pätee vastaavasti tulos

$$\frac{d}{dt}\int_{V^o} f dV^o = \int_{V^o} \frac{\partial f}{\partial t}\, dV^o \ . \qquad (3.3.54)$$

Ottaen vielä huomioon kaavat (3.3.51) voidaan täten kirjoittaa yleisesti Lagrangen esityksessä

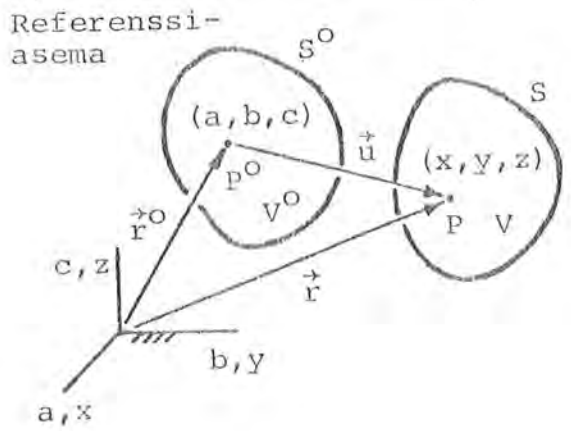
$$\boxed{I^{\cdot} \equiv \frac{DI}{Dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V^o} f dV^o = \int_{V^o} \frac{\partial f}{\partial t}\, dV^o \ .} \qquad (3.3.55)$$

Kaava pätee vastaavana myös vektori- tai tensoriarvoiselle funktiolle f. Termi $\partial f/\partial t$ on jälleen kirjoitettavissa niin haluttaessa myös muodoissa $f^{\cdot}$ tai Df/Dt. Integraalimerkkiin liitetty tunnus V^o voidaan usein jättää pois ilman sekaannusta, koska jo tunnus dV^o osoittaa tavallaan, mistä integroimisalueesta on kyse.

Huomautus 3. Edellisestä selviää, että aksioomissa esiintyneet merkinnät $(\ )^{\cdot}$ olisi voitu kirjoittaa yhtä hyvin myös muodoissa $(\dot{\ })$, koska ko. suureet ovat pelkästään ajan funktioita. Ainederivaatan merkin käyttö on ehkä kuitenkin paikallaan korostamassa suljetun systeemin käsitettä.

3.3.3 Eulerin esitystapa

Yleistä. Eulerin esitystavassa eli ns. spatiaalisessa esitystavassa (engl. Eulerian description, spatial description) riippumattomina muuttujina ovat ns. spatiaalikoordinaatit (engl. spatial coordinate) eli Eulerin koordinaatit x, y, z ja aika t. Suureet x, y, z ovat avaruuden pisteessä P hetkellä t sijaitsevan partikkelin koordinaatit (kuva 3.3.5).



Kuva 3.3.5 Kappaleen liike.

Ajatellaan yhteydet (3.3.1) tai (3.3.2) käännetyiksi, jolloin saadaan esitykset

$$\vec{r}^o = \vec{r}^o(\vec{r},t) \qquad (3.3.56)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} a &= a(x,y,z,t)\ , \\ b &= b(x,y,z,t)\ , \\ c &= c(x,y,z,t)\ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.56')$$

Nämä ilmaisevat kappaleen liikkeen muodossa: Partikkelilla, jonka koordinaatit ovat x, y ja z hetkellä t, on ollut referenssiasemassa koordinaatit a, b, c.

Eulerin esitystapa poikkeaa täysin partikkelimekaniikan ajattelusta, jossa huomio kiinnitettiin kunkin partikkelin rataan. Lagrangen esitystä voidaan sen sijaan pitää partikkelimekaniikan esityksen suorana yleistyksenä kontinuumiin ja tältä pohjolta Lagrangen esitys onkin paljon helpommin omaksuttavissa kuin Eulerin esitys. Matemaattisessa mielessä ero näkyy myös siinä, että Lagrangen esityksessä tehtävän määrittelyalue on koko ajan referenssiaseman alue V^o, kun taas Eulerin esityksessä määrittelyalueena on tietty (tavallisesti) kiinteä avaruuden osa, ns. kontrollialue, jonka läpi kontinuumi virtaa.

Eulerin esityksen yhteydessä käytetään usein jonkin suureen jakautumasta alueessa nimitystä kenttä (engl. field); esimerkiksi nopeuskenttä. Samaa nimitystapaa käytetään kyllä joskus myös Lagrangen esityksessäkin.

Nopeus. Tavallisesti Eulerin esityksen lähtökohtana on kuitenkin yhteyksien (3.3.56) sijasta nopeuden $\vec{v}$ eli ns. nopeuskentän esitys

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)} \tag{3.3.57}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(x,y,z,t) \ , \\ v_y &= v_y(x,y,z,t) \ , \\ v_z &= v_z(x,y,z,t) \ , \end{aligned}\right\} \tag{3.3.57'}$$

jolloin siis

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \ . \tag{3.3.57''}$$

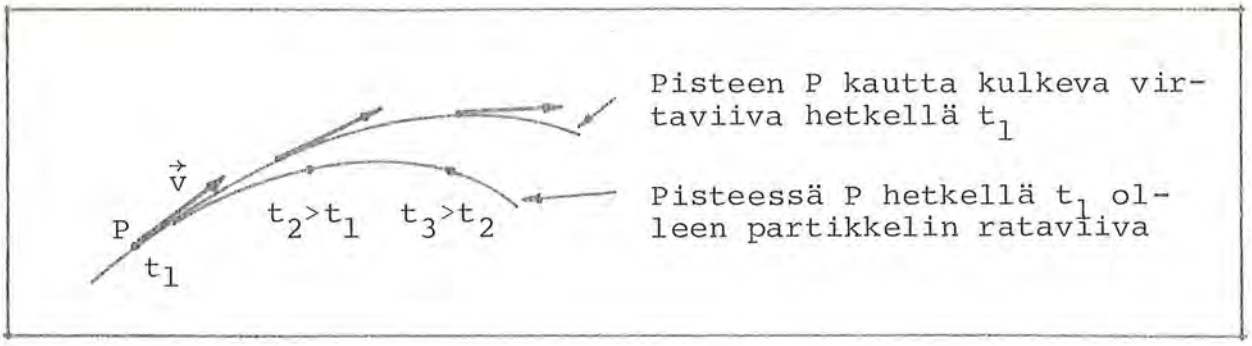
Nopeuskenttä saadaan periaatteessa selville mittaamalla tietyllä hetkellä kussakin avaruuden pisteessä siinä sillä hetkellä sijaitsevan kontinuumin partikkelin nopeus.

Lähteessä [3.4, s. 189] on annettu kaavojen (3.3.57) ja (3.2.3) eroa kuvaava vertaus: Tarkastellaan ajoneuvojen virtaa yksisuuntaisella kadulla, jolla on ohituskielto. Eulerin esitys vastaa havaintoja, joita liikennepoliisi tekee raportoidessaan ohikulkevien ajoneuvojen nopeuksia tietyillä kohdin. Lagrangen esitys taas vastaa havaintoja, joita ajajat tekevät raportoidessaan etenemistään kadulla.

Nopeuskenttään liittyen puhutaan virta-, rata- ja juovaviivoista.

Virtaviiva (engl. stream line) on viiva, jonka kuhunkin pisteeseen kuuluva nopeusvektori sivuaa tätä viivaa. Tämä on vektorianalyysissä yleiseen vektorikenttään liittyvän ns. kenttäviivakäsitteen sovellutus nopeuskenttään nähden [3.2, s. 37].

Rataviiva (engl. path line) eli ratakäyrä on tietyn ainepartikkelin kulkema rata. Kuva 3.3.6 pyrkii selittämään virta- ja rataviivan välistä eroa.



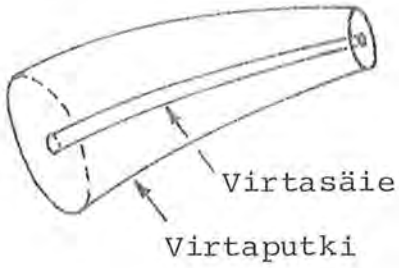
Kuva 3.3.6 Virtaviiva ja rataviiva.

Juovaviiva (engl. streak line) on viiva, jonka muodostavat tietyllä hetkellä tietyn kiinteän pisteen kautta aikaisemmin kulkeneet partikkelit.

Juovaviiva voidaan ajatella aikaansaaduksi päästämällä aineeseen ko. pisteen kautta jatkuvasti väriainetta. Virtaviivoja voidaan havainnollistaa ajattelemalla aineeseen sijoitetuksi sinne tänne "väritettyjä" partikkeleita. Tietyllä hetkellä otetussa valokuvassa kukin väritetty partikkeli näkyy lyhyenä viivana, jonka (todellinen, ei projisoitu) pituus on verrannollinen valotusaikaan ja partikkelin vauhtiin ja jonka suunta ilmaisee partikkelin nopeusvektorin suunnan. Näin syntyvän kuvan avulla voidaan sitten hahmotella eri virtaviivojen kulku (kuva 3.3.7). Ottamalla taas samaan kuvaan useita perättäisiä valotuksia saadaan hahmoteltua eri rataviivoja.

Kuva 3.3.7 Virtaviivoja.

Tietyn umpinaisen käyrän jokaisen pisteen kautta kulkevat virtaviivat määrittävät pinnan (kuva 3.3.8), jota nimitetään virtaputkeksi (engl. stream tube). Virtaputkea, jonka poikkileikkauspintaala on infinitesimaalinen, nimitetään joskus virtasäikeeksi (engl. stream filament). Virtaputken määritelmän perusteella putken pinnan läpi ei tapahdu aineen virtausta, koska aineen nopeus on pinnan jokaisessa pisteessä pinnan suuntainen.



Kuva 3.3.8 Virtaputki.

Ns. pysyvässä eli stationaarisessa virtauksessa (engl. steady flow) muuttuja t häviää esityksestä (3.3.57) ja tietyn pisteen kautta kulkevat virta-, rata- ja juovaviivat yhtyvät päinvastoin kuin yleensä epästationaarisessa tapauksessa. Samoin tietyn umpinaisen käyrän määrittämä virtaputki ei muuta asemaansa ajan muuttuessa pysyvässä virtauksessa.

Kun turbulenttisen virtauksen yhteydessä puhutaan virtaviivoista, virtaputkista jne., näillä käsitteillä tarkoitetaan tavallisesti keskimääräiseen nopeuteen $\bar{\vec{v}}$ liittyviä suureita.

Kirjallisuudessa virtausnopeuden karteesisille suorakulmaisille komponenteille käytetään hyvin yleisesti tunnuksia $v_x = u$, $v_y = v$, $v_z = w$.

Ainederivaatta. Tarkastellaan mielivaltaista Eulerin esitystavan mukaista paikan ja ajan funktiota $f(\vec{r},t)$. Esimerkkinä voisi olla vaikka kontinuumin tiheys $\rho(\vec{r},t)$. Funktion f arvon muutos on (käytetään tässä karteesista suorakulmaista koordinaatistoa, jolloin $f = f(x,y,z,t)$)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \qquad (3.3.58)$$

riippumattomien muuttujien x, y, z ja t muutosten dx, dy, dz ja dt johdosta. Kun tarkastellaan tiettyä ainealkiota, sen ajassa dt saamat siirtymäkomponentit ovat

$$dx = v_x dt\ , \quad dy = v_y dt\ , \quad dz = v_z dt\ . \qquad (3.3.59)$$

Sijoittamalla nämä lausekkeeseen (3.3.58) ja jakamalla yhtälö vielä puolittain ajan differentiaalilla dt sekä merkitsemällä lisäksi $d \to D$ saadaan funktion f muutosnopeuden lauseke

$$\boxed{f^{\cdot} \equiv \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial y}\ .} \qquad (3.3.60)$$

Tämä on juuri tietyn partikkelin mukana kulkevan havaitsijan mittaama aikaderivaatta eli siis jo kohdassa 3.3.2 määritelty ns. ainederivaatta, joka saa nyt vain Eulerin esityksessä eri ulkonäön — monimutkaisemman — kuin Lagrangen esityksessä. Ainederivaatan lauseke voidaan kirjoittaa vielä tiiviimpään koordinaatistosta riippumattomaan yleiseen muotoon

$$\boxed{f^{\cdot} \equiv \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f} \tag{3.3.61}$$

tai operaattoreilla esitettyyn muotoon

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} \ , \tag{3.3.62}$$

koska tässä

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla} = (v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})\cdot(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})$$

$$= v_x\,\frac{\partial}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial}{\partial z} \ . \tag{3.3.63}$$

Termiä $\partial f/\partial t$ nimitetään lokaaliseksi muutosnopeudeksi (engl. local rate of change) ja termiä $\vec{v}\cdot\vec{\nabla} f$ konvektiiviseksi muutosnopeudeksi (engl. convective rate of change; convective = virtaava, johtuva). Edellinen häviää pysyvässä virtauksessa ja jälkimmäinen ainakin kohdissa, joissa nopeus on nolla tai alueissa, joissa suureen f arvo ei riipu paikasta.

Kaavat (3.3.60), (3.3.61) ja (3.3.62) ovat voimassa myös vektori- tai tensoriarvoiselle funktiolle. Tällöin kuitenkin yleisessä tapauksessa konvektiivisen termin on ajateltava olevan muodossa $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{f}$ tai $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\overleftrightarrow{f}$, joissa $\vec{\nabla}\vec{f}$ on toisen kertaluvun tensori (vektorin gradientti) ja $\vec{\nabla}\overleftrightarrow{f}$ kolmannen kertaluvun tensori (tensorin gradientti) [3.1, s. 57]. Jos toimitaan vain karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa, konvektiivinen termi saadaan kuitenkin kirjoittaa edelleen yksinkertaisempaan muotoon $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\ ) = v_x\,\frac{\partial(\ )}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial(\ )}{\partial y} + v_y\,\frac{\partial(\ )}{\partial z}$.

Ei ole myöskään vaikea todistaa esimerkiksi kaavan (3.3.60) avulla, että ainederivaatalle pätevät tavanomaiset derivoimislaskusäännöt kuten $D(f_1+f_2)/Dt = Df_1/Dt + Df_2/Dt$, $D(f_1f_2)/dt =$

$Df_1/Dt \cdot f_2 + f_1 \cdot Df_2/Dt$ jne.

Esimerkki 3.3.2 Ainederivaatta. Pyritään havainnollistamaan Eulerin esityksen ainederivaatan käsitettä lähteessä [3.5, s. 73] esitettyä esimerkkiä seuraten.

Olkoon tarkasteltava suure $f(x,y,t)$ vaikkapa tietyssä joessa esiintyvä kalojen konsentraatio ($[f] = kg/m^3$), joka siis riippuu sekä paikasta että ajasta. Havaitsija on veneessä ja mittaa konsentraatiota suoraan alapuoleltaan. Otetaan kolme eri tapausta:

(1) Vene on kiinnitetty paikoilleen laituriin,
(2) Vene liikkuu joessa moottorin kuljettamana,
(3) Vene lipuu virran mukana.

Havaitsija ottaa näytteitä vedestä ja saa arvot f ja $f+\Delta f$ vastaavasti ajan hetkillä t ja $t+\Delta t$. Täten saatu muutosnopeus on periaatteessa $df/dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta f/\Delta t$.

Funktion f kokonaisdifferentiaali

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \,. \qquad \text{(a)}$$

(1) Ensimmäisessä tapauksessa havaitsijan asema ei muutu, joten $dx = dy = 0$ ja suureen f arvon muutosnopeudelle saadaan lausekkeesta (a) differentiaalilla dt jakamalla arvo

$$\frac{{}^1df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \,. \qquad \text{(b)}$$

(2) Olkoon veneen nopeus $\vec{v}^b = v_x^b \vec{i} + v_y^b \vec{j}$. Ajan muutoksen dt aikana havaitsija siirtyy määrät $dx = v_x^b dt$ ja $dy = v_y^b dt$. Täten muutosnopeudeksi saadaan lausekkeesta (a) differentiaalilla dt jakamalla arvo

$$\frac{{}^2df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x^b \frac{\partial f}{\partial x} + v_y^b \frac{\partial f}{\partial y} \,. \qquad \text{(c)}$$

(3) Kolmannessa tapauksessa veneen ja havaitsijan nopeus $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ on sama kuin ympäröivän nesteen. Edellisen perusteella voidaan heti kirjoittaa tulos

$$\frac{{}^3df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial y} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} \,. \qquad \text{(d)}$$

Saadut kolme muutosnopeuden arvoa tietyssä paikassa tietyllä hetkellä poikkeavat yleensä toisistaan. Lauseke (d) kuvaa tietyn nestealkion kokemaa muutosnopeutta, joten se on juuri mekaniikassa tarvittava ainederivaatta $\dot{f} \equiv Df/Dt$.

Kiihtyvyys. Ainealkion kiihtyvyys saadaan nopeuden ainederivaattana, koska kiihtyvyyshän kuvaa juuri tietyn ainealkion kokemaa nopeuden muutosnopeutta. Täten kaavan (3.3.61) perusteella kiih-

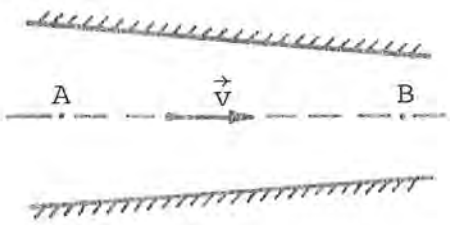
tyvyys

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}} \qquad (3.3.64)$$

eli

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= \dot{v}_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\,, \\
a_y &= \dot{v}_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\,, \\
a_z &= \dot{v}_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3.64')$$

Kiihtyvyyden yhteydessä puhutaan vastaavasti lokaalisesta ja konvektiivisesta kiihtyvyydestä. Kuva 3.3.9 havainnollistaa näiden termien merkitystä. Kyseessä on virtaus poikkileikkauspinta-alaltaan virtaussuunnassa pienenevässä uomassa. Virtausnopeus tietyllä hetkellä pisteessä B on ainakin kokoonpuristumattomalla nesteellä suurempi kuin pisteessä A, koska poikkileikkauspinta-ala pisteessä B on pienempi kuin pisteessä A. Täten nopeuden gradientti $\vec{\nabla}\vec{v}$ on nollasta eroava välillä AB ja siis samoin konvektiivinen kiihtyvyys on nollasta eroava pysyvässä virtauksessakin. Epästationaarisessa virtauksessa myös lokaalinen kiihtyvyys antaa oman lisänsä.

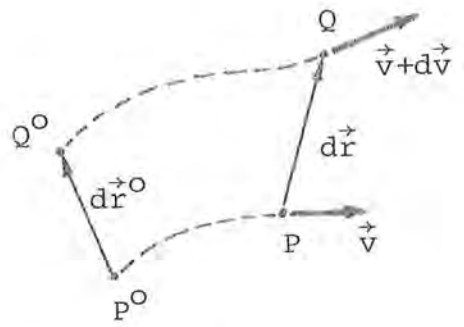


Kuva 3.3.9 Kapeneva uoma.

Kiihtyvyyden lausekkeiden (3.3.15) ja (3.3.64) vertailu osoittaa niiden välillä vallitsevan oleellisen eron. Lagrangen esityksessä on mukana toinen aikaderivaatta ja lauseke on lineaarinen $\vec{u}$:n suhteen. Eulerin esityksessä on mukana vain ensimmäinen aikaderivaatta ja lauseke on epälineaarinen (konvektiivinen osa on kvadraattinen) $\vec{v}$:n suhteen. Muodon (3.3.64) epälineaarisuus on turbulenssin ohella nestemekaniikan matemaattisten vaikeuksien päälähde.

Deformaationopeus ja kulmanopeus. Kun Eulerin esityksen lähtökohtana on nopeuskenttä, muodonmuutosten tarkastelu tulee hankalaksi. Koska nesteiden tavanomaisissa konstitutiivisissa yhteyksissä ei kuitenkaan tarvita itse muodonmuutoksia, vaan niiden muutosnopeuksia, keskitytäänkin jatkossa vain viimeksimainittuihin. Käsittely on pitkälti vastaava kuin kohdassa 3.3.2 esitetty osuus infinitesimaalinen venymä ja rotaatio.

Tarkastellaan tietyllä hetkellä kahta äärettömän läheistä avaruuden pistettä P ja Q, joissa olevien partikkelien nopeudet ovat vastaavasti $\vec{v}$ ja $\vec{v}+d\vec{v}$ (kuva 3.3.10). Pisteessä Q olevan partikkelin suhteellinen nopeus $d\vec{v}$ pisteessä P olevan partikkelin suhteen saadaan kokonaisdifferentiaalina



Kuva 3.3.10 Suhteellinen nopeus $d\vec{v}$ liioiteltuna.

$$d\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\,dz \qquad (3.3.65)$$

eli

$$\{dv\} = [\partial v/\partial r]\{dr\} \qquad (3.3.65')$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dv_x \\ dv_y \\ dv_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} . \qquad (3.3.65'')$$

Matriisia $[\partial v/\partial r]$ voidaan nimittää nopeusgradienttimatriisiksi. Sen tensorivastine on vektorin $\vec{v}$ gradientti $\vec{v}\vec{\nabla}$ [3.1, s.146]. On huomattava, että tässä kohdassa tarkastellaan vain nopeuskentän paikasta riippuvaa muuttumista, joten vektorin $\vec{v}$ differentiaalia laskettaessa otetaan dt = 0.

Jaetaan matriisi $[\partial v/\partial r]$ symmetriseen ja antisymmetriseen osaan:

$$[\partial v/\partial r] = [d] + [\omega] , \qquad (3.3.66)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
[d] &= \frac{1}{2}([\partial v/\partial r]+[\partial v/\partial r]^T) , \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} d_x & \frac{1}{2}\, g_{xy} & \frac{1}{2}\, g_{xz} \\ \frac{1}{2}\, g_{yx} & d_y & \frac{1}{2}\, g_{yz} \\ \frac{1}{2}\, g_{zx} & \frac{1}{2}\, g_{zy} & d_z \end{bmatrix} ,
\end{aligned}
\right\} \quad (3.3.67)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
[\omega] &= \frac{1}{2}([\partial v/\partial r]-[\partial v/\partial r]^T) , \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}) & 0 \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{bmatrix} , \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} .
\end{aligned}
\right\} \quad (3.3.68)
$$

Matriiseja [d] ja [ω] voidaan nimittää vastaavasti deformaationopeusmatriisiksi ja pyörrematriisiksi tai kulmanopeusmatriisiksi. Niiden tensorivastineet ovat $\overleftrightarrow{d} = 1/2\cdot(\vec{v}\overleftarrow{\nabla}+\overrightarrow{\nabla}\vec{v})$ ja $\overleftrightarrow{\omega} = 1/2\cdot(\vec{v}\overleftarrow{\nabla}-\overrightarrow{\nabla}\vec{v})$ [3.1, s.147]. Englanninkieliset termit ovat vastaavasti rate of deformation tensor tai velocity strain sekä spin tensor tai vorticity tensor.

Matriisin [d] alkioita d_{xx}, d_{xy} jne. tai seuraavia termejä

$$\boxed{\begin{aligned} d_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad g_{yz} = g_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, \\ d_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad g_{zx} = g_{xz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ d_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad g_{xy} = g_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{aligned}} \tag{3.3.69}$$

voidaan nimittää deformaationopeuskomponenteiksi tai lyhyemmin deformaationopeuksiksi (engl. rate of deformation components.) Tunnusten d ja g ($[d] = [g] = s^{-1}$) sijasta kirjallisuudessa käytetään usein tunnuksia ε ja γ, jotka ovat tässä kuitenkin jo varattu venymäkomponenttien merkeiksi.

Voidaan osoittaa [3.1, s.148], että termin $(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r}$ ainederivaatta saa muodon $\frac{D}{Dt}(ds)^2 = 2d\vec{r}\cdot\overleftrightarrow{d}\cdot d\vec{r}$. Tätä pidetään perustana termin deformaationopeus käytölle. Tensorin $\overleftrightarrow{d}$ komponenteista käytetään kyllä usein myös nimityksiä muodonmuutosnopeus tai venymänopeus.

Nämä jälkimmäiset nimitykset ovat perusteltavissa seuraavasti. Deformaationopeudet (3.3.69) ovat ulkonäöltään täysin analogisia Lagrangen pienten venymien (3.3.36) kanssa. Ottamalla jälkimmäisten ainederivaatat saadaan

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_a &= \frac{D\varepsilon_a}{Dt} = \frac{\partial\varepsilon_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_a}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}_a}{\partial a} = \frac{\partial v_a}{\partial a}, \\ \dot{\gamma}_{bc} &= \frac{D\gamma_{bc}}{Dt} = \frac{\partial\gamma_{bc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}\right) = \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial u_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial u_c}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \dot{u}_b}{\partial c} + \frac{\partial \dot{u}_c}{\partial b} = \frac{\partial v_b}{\partial c} + \frac{\partial v_c}{\partial b}, \\ &\text{jne.} \end{aligned}\right\} \tag{3.3.70}$$

Jos siirtymät ovat pieniä — kuten on aina asianlaita jos otetaan pieni ajan väli ja valitaan tarkastelun alkuhetki kulloinkin referenssitilaksi — voidaan asettaa likimain a = x, b = y ja c = z, jolloin vertailu lausekkeisiin (3.3.69) johtaa yhteyksiin

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_a &\approx d_x , & \dot{\gamma}_{bc} &\approx g_{yz} , \\ \dot{\varepsilon}_b &\approx d_y , & \dot{\gamma}_{ca} &\approx g_{zx} , \\ \dot{\varepsilon}_c &\approx d_z , & \dot{\gamma}_{ab} &\approx g_{xy} . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.71)$$

Saadaan fysikaaliset tulkinnat deformaationopeuskomponenteille. Termit d_x, d_y ja d_z esittävät x-, y- ja z-akselien suuntaisten aine-alkioiden suhteellisten pituudenmuutosten muutosnopeuksia. Termit g_{yz} jne. esittävät taas y- ja z-akselien jne. suuntaisten ainealkioiden välisten kulmanmuutosten muutosnopeuksia. Huomautettakoon vielä, että itse lausekkeet (3.3.69) ovat täysin yleispätevät ilman mitään siirtymiä koskevia rajoituksia.

Antisymmetrisessä matriisissa $[\omega]$ on vain kolme riippumatonta alkiota. Täten siihen voidaan assosioida eräs vektori, ns. <u>kulmanopeus</u> (engl. angular velocity) ($[\vec{\omega}] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$)

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \qquad (3.3.72)$$

ottamalla (siis eräs valinta)

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= -\omega_{yz} = \omega_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) , \\ \omega_y &= -\omega_{zx} = \omega_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) , \\ \omega_z &= -\omega_{xy} = \omega_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.72')$$

Nämä merkinnät vastaavat kaavoihin (3.3.68) liittyviä määritelmiä.

Palataan hetkeksi jäykän kappaleen kinematiikkaan. Jäykän kappaleen mukaisessa liikkeessä mielivaltaisen partikkelin nopeus saadaan kaavasta (2.2.7): $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \omega \times \vec{r}_{Q/P}$. Jos otetaan siirto-

piste P origoon, jäykän kappaleen liikettä vastaava nopeuskenttä voidaan esittää muodossa

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}_0(t) + \vec{\omega}(t)\times\vec{r} \ . \tag{3.3.73}$$

Muodostamalla lauseke $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ saadaan [3.2, s. 48] tulos $\vec{\nabla}\times\vec{v} = 2\vec{\omega}$ eli

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v} \ .} \tag{3.3.74}$$

eli

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right] \ . \tag{3.3.74'}$$

Täten jäykän kappaleen liikkeessä nopeuskentän roottorin puolikas antaa jäykän kappaleen kulmanopeuden. Tämä tulos on sikäli tärkeä, että sitä käytetään myös muotoaan muuttavien kappaleiden yhteydessä <u>määrittelemään kussakin pisteessä kontinuumin alkion kulmanopeus</u>, joka tulee siis olemaan yleensä paikasta riippuva päinvastoin kuin jäykän kappaleen tapauksessa.

Lausekkeiden (3.3.72') ja (3.3.74') vertailu selittää täten kaavassa (3.3.72) esiintyvälle vektorille annetun nimityksen.

Sovelletaan vielä jäykän kappaleen liikkeen kaavaa (2.2.7) $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega}\times\vec{r}_{Q/P}$ kuvan 3.3.9 esittämään tilanteeseen ja otetaan siten $\vec{r}_{Q/P} \to d\vec{r}$, jolloin saadaan tulos

$$d\vec{v} = \vec{\omega}\times d\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ dx & dy & dz \end{bmatrix} = (\omega_y dz - \omega_z dy)\vec{i} + (\omega_z dx - \omega_x dz)\vec{j} + (\omega_x dy - \omega_y dx)k \ . \tag{3.3.75}$$

eli vielä

$$\begin{Bmatrix} dv_x \\ dv_y \\ dv_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} . \qquad (3.3.75')$$

Vertaamalla kaavoja (3.3.68) ja (3.3.75') voidaan todeta seuraavaa. Jos kappale liikkuisi kuten jäykkä kappale, suhteellinen nopeus olisi kaavan (3.3.75') mukainen eli $\{dv\} = [\omega]\{dr\}$. Täten täydellisen lausekkeen $\{dv\} = [\partial v/\partial r]\{dr\} = [d]\{dr\} + [\omega]\{dr\}$ osuuden $[d]\{dr\}$ täytyy esittää alkion muodon muuttumisesta johtuvia termejä. Matriisin $[d]$ alkioiden fysikaalinen merkitys on ollut esillä jo edellä ja kuten silloin todettiin, alkiot liittyvät todella muodon muutoksiin.

Nestemekaniikan kirjallisuudessa operoidaan usein suureen $\vec{\omega}$ sijasta suureen $2\vec{\omega}$ avulla ja sitä nimitetään pyörteisyydeksi tai <u>pyörrevektoriksi</u> (engl. vorticity). Joskus myös itse suuretta $\vec{\omega}$ nimitetään pyörrevektoriksi. Kun kulmanopeus $\vec{\omega}$ häviää tietyssä alueessa eli kun

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{0}} \qquad (3.3.76)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= 0 , \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= 0 , \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.76')$$

virtauksen sanotaan olevan <u>pyörteetöntä</u> (engl. irrotational).

Johdetaan vielä eräs kiihtyvyyden yleinen lauseke, joka osoittautuu jatkossa hyödylliseksi. Tarkastellaan ensin vain kiihtyvyyden x-komponenttia

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} . \qquad (3.3.77)$$

Lisätään ja vähennetään termi $v_y \frac{\partial v_y}{\partial x}$ sekä termi $v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}$:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} +$$

$$+ v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2) + (\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}) v_z - (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) v_y \ . \tag{3.3.77'}$$

Ottamalla käyttöön kulmanopeusvektorin komponenttien merkinnät (3.3.71') saadaan siis

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2} + 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) \ , \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v^2}{2} + 2(\omega_z v_x - \omega_x v_z) \ , \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{v^2}{2} + 2(\omega_x v_y - \omega_y v_x) \ , \end{aligned}\right\} \tag{3.3.78}$$

jossa kaksi jälkimmäistä lauseketta voidaan johtaa aivan analogisesti. Kaavojen vektoriesityksen havaitaan olevan

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} \ .} \tag{3.3.79}$$

Tulos johdettiin karteesisen suorakulmaisen koordinaatiston avulla, mutta se pätee silti yleisesti koordinaatistosta riippumatta. Merkintä v tarkoittaa virtausvauhtia tai yhtä hyvin myös skalaarista virtausnopeutta.

<u>Esimerkki 3.3.3</u> Tasoliike. Tarkastellaan uudestaan esimerkissä 3.3.1 Lagrangen esitystavalla annettua tasoliikettä

$$x = a + \alpha(t)b \ , \quad y = b + \beta(t)a \tag{a}$$

nyt kuitenkin käyttäen Eulerin esitystä.

Yhteydet (a) ovat niin yksinkertaiset, että ne pystytään kääntämään – päinvastoin kuin yleensä – eksplisiittisesti ratkaisemalla ko. lineaarinen yhtälöryhmä. Saadaan Eulerin esitys

$$a = \frac{1}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y) \ , \quad b = \frac{1}{1-\alpha\beta}(y-\beta x) \ . \tag{b}$$

Esimerkissä 3.3.1 johdettiin nopeuden ja kiihtyvyyden komponenttien lausekkeet

$$v_a = \dot{\alpha} b \ , \quad v_b = \dot{\beta} a \tag{c}$$

ja

$$a_a = \ddot{\alpha} b \ , \quad a_b = \ddot{\beta} a \ . \tag{d}$$

Sijoittamalla näihin yhteydet (b) päästään Eulerin esityksen nopeus- ja kiihtyvyyskomponentteihin

$$v_x = \frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x) \ , \quad v_y = \frac{\dot{\beta}}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y) \tag{e}$$

ja

$$a_x = \frac{\ddot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x) \ , \quad a_y = \frac{\ddot{\beta}}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y) \ . \tag{f}$$

Kiihtyvyys saadaan vaihtoehtoisesti myös nopeuskentästä (e) soveltamalla kaavoja (3.3.64'). Esimerkiksi

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ &= \frac{\ddot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x)\frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(-\dot{\beta}x) - \frac{\dot{\alpha}(-\dot{\alpha}\beta-\alpha\dot{\beta})}{(1-\alpha\beta)^2}(y-\beta x) + \\ &\quad + \frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x)\frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(-\beta) + \frac{\dot{\beta}}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y)\frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta} \ , \end{aligned} \tag{g}$$

josta tulee kehittämällä lopuksi kaavan (f) mukainen tulos.

Nollasta eroavat deromaationopeuskomponentit (3.3.69) ovat

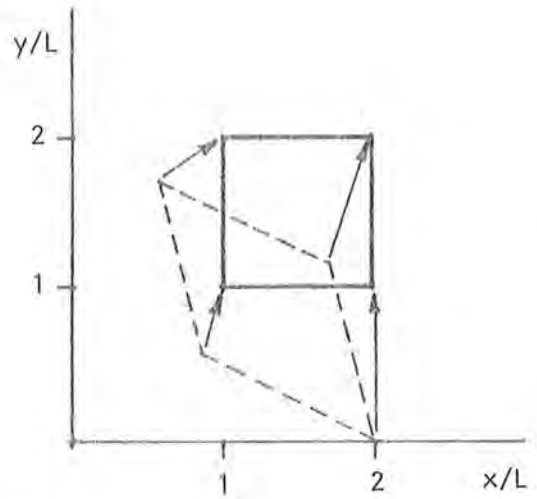
$$\left.\begin{aligned} d_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\dot{\alpha}\beta}{1-\alpha\beta} \ , \quad d_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\alpha\dot{\beta}}{1-\alpha\beta} \ , \\ g_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta} + \frac{\dot{\beta}}{1-\alpha\beta} = \frac{\dot{\alpha}+\dot{\beta}}{1-\alpha\beta} \ . \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

Pienten siirtymien teorian mukainen tilanne saadaan, kun α ja $\beta \ll 1$. Kaavojen (3.3.71) havaitaan pitävän paikkansa. Esimerkiksi ε_a oli identtisesti nolla, joten $\dot{\varepsilon}_a = 0$. Toisaalta kun $\alpha \approx 0$ ja $\beta \approx 0$, on myös kaavan (h) $d_x \approx 0$. Esimerkiksi $\gamma_{ab} = \alpha+\beta$, joten $\dot{\gamma}_{ab} = \dot{\alpha}+\dot{\beta}$. Toisaalta kun $\alpha \approx 0$ ja $\beta \approx 0$, kaavan (h) $g_{xy} \approx \dot{\alpha}+\dot{\beta}$.

Kulmanopeuden ainoa nollasta eroava komponentti

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\dot{\beta}-\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}\,, \qquad \text{(i)}$$



(a)

joten pyörrevektori on kohtisuorassa liiketasoa vastaan. Näin on aina tasoliikkeessä.

Kuvassa (a) on esitetty kaavojen (b) avulla laskettu ($\beta = 2\alpha$) tarkasteltavalla hetkellä ($\alpha = 1/4$) neliön muotoisen ainealueen sijainti alkutilassa; katkoviivoitettu suunnikas.

<u>Tilavuusintegraalin ainederivaatta</u>. Eulerin esityksessä joudutaan laskemaan tyyppiä

$$I(t) = \int_{V(t)} f(\vec{r},t)\,dV = \int_{V(t)} f(x,y,z,t)\,dxdydz \qquad (3.3.80)$$

olevien tilavuusintegraalien muutosnopeuksia. Esimerkkinä mainittakoon kappaleen kokonaismassa $m = \int_{V(t)} \rho(\vec{r},t)\,dV$. Integroimisalueen tunnukseen V on merkitty argumentiksi aika t muistuttamaan siitä, että kappaleen liikkeen johdosta sen täyttämä avaruuden osa V(t) muuttuu jatkuvasti. Kun ajatellaan vaadittava integrointi paikan suhteen suoritetuksi kullakin ajan hetkellä, integraalista nähdään tulevan pelkästään ajan funktio, $I = I(t)$. Täten yhden muuttujan funktion I tavanomainen derivaatta $\dot{I} \equiv dI/dt$ on tässä samalla kappaleeseen liittyvän suureen I kappaleen kokemana mitattu muutosnopeus eli ns. aineellinen aikaderivaatta tai lyhyemmin ainederivaatta ja siis pätee jälleen

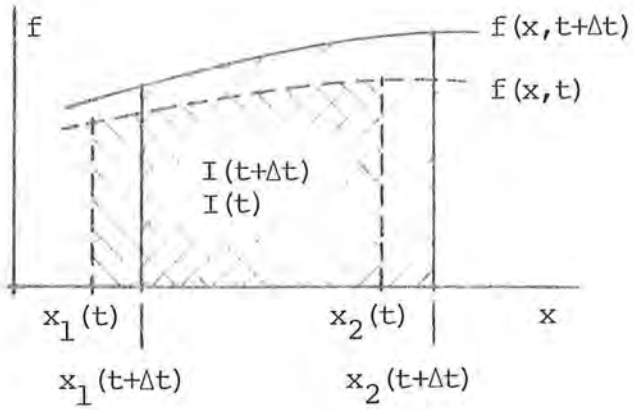
$$I^{\bullet} \equiv \frac{DI}{Dt} = \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt}\,. \qquad (3.3.81)$$

Käsittely on nyt hankalampi kuin Lagrangen esityksen yhteydessä, koska integroimisalue ei ole ajan suhteen vakio.

Derivaatan laskemisessa on kysymys matematiikasta tutun, usein ns. Leibnitzin säännön nimellä kulkevan kaavan yleistyksestä kolmeen dimensioon. Tarkastellaan ensin määrättyä integraalia

$$I(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t)dx \ , \tag{3.3.82}$$

jossa I on parametrin t funktio paitsi sen johdosta, että t esiintyy integroitavassa myös koska integroimisrajat x_1 ja x_2 ovat t:n funktioita. Integraalin arvon muuttumista t:n muuttuessa on havainnollistettu kuvassa 3.3.11. Leibnitzin säännön mukaan [3.3, s. 30]

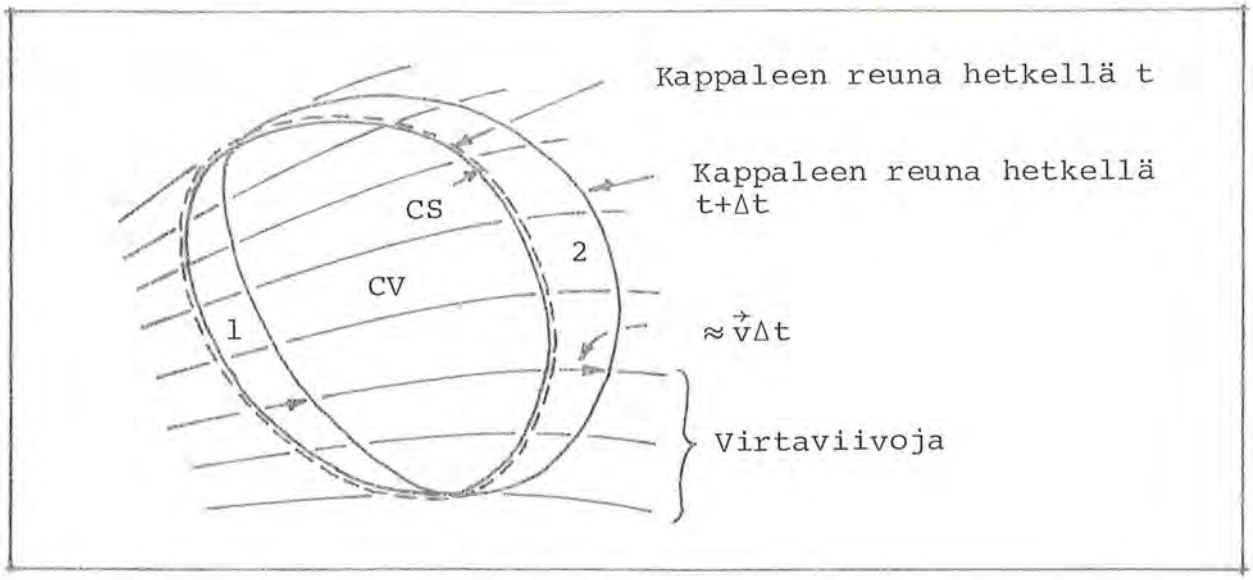


Kuva 3.3.11 Integraali I pinta-alana.

$$\frac{dI}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx + f\Big|_{x=x_2} \frac{dx_2}{dt} - f\Big|_{x=x_1} \frac{dx_1}{dt} \ . \tag{3.3.83}$$

Jos parametri t tulkitaan ajaksi, termit $dx_2/dt = \dot{x}_2$ ja $dx_1/dt = \dot{x}_1$ esittävät rajojen siirtymisnopeuksia. Kohdassa L.2.4 on esitetty hieman yleisempi Leibnitzin säännön muoto.

Siirrytään takaisin integraalin (3.3.80) käsittelyyn. Kappale on esitetty kuvassa 3.3.12 kahdella lähekkäisellä ajan hetkellä. Valitaan avaruudesta tietty umpinaisen pinnan rajaama alue CV, ns. kontrollialue (engl. control volume), joka otetaan tässä valitun koordinaatiston suhteen kiinteäksi. Kontrollialueen reunapintaa CS nimitetään kontrollipinnaksi (engl. control surface). Valitaan tarkasteltava suljettu systeemi eli kappale siten, että se muodostuu hetkellä t kontrollialueessa olevasta kappaleesta. Hetkellä t+Δt osa kappaleen partikkeleista on poistunut kontrollialueesta



Kuva 3.3.12 Kappaleen liike.

(alue 2) ja alueeseen on saapunut kappaleen ulkopuolisia partikkeleita (alue 1). Derivaatan määritelmän perusteella ja kuvaa 3.3.12 tarkastelemalla saadaan

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(I_2+I_{CV}-I_1)_{t+\Delta t} - (I_2+I_{CV}-I_1)_t]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(I_{CV})_{t+\Delta t} - (I_{CV})_t}{\Delta t} \quad \left[\begin{array}{c}\text{Kontrollialueen yli otetun} \\ \text{integraalin } I_{CV} = \int_{CV} f dV \\ \text{muutosnopeus} \\ \int_{CV} \frac{\partial f}{\partial t} dV\end{array}\right]$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(I_2)_{t+\Delta t} - \cancel{(I_2)_t}}{\Delta t}$$

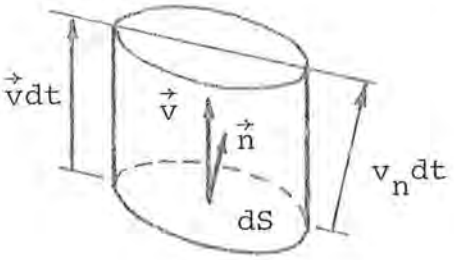
$$- \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(I_1)_{t+\Delta t} - \cancel{(I_1)_t}}{\Delta t} \quad , \quad \left[\begin{array}{c}\text{Kontrollialueesta poistuva} \\ \text{suureen I virta} \\ - \\ \text{Kontrollialueeseen saapuva} \\ \text{suureen I virta} \\ = \\ \text{Nettovirta ulos alueesta} \\ \int_{CS} v_n f dS\end{array}\right]$$

(3.3.84)

jossa esiintyvien merkintöjen sisältö lienee selvä. Jos luotetaan hakasuluissa annettuihin tulkintoihin, on siis saatu tulos (vrt. kaava (3.3.83))

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f dV = \int_{CV} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{CS} v_n f dS \ . \qquad (3.3.85)$$

Pintaintegraalitermin merkityksen selvittämiseksi tarkastellaan kuvaa 3.3.13, jossa näkyy kontrollipinnan pinta-alkio dS ja pinnan ulkoinen yksikkönormaalivektori $\vec{n}$. Ajassa dt pinta-alkion läpi virrannut aine muodostaa vinopohjaisen sylinterin, jonka pohjan pinta-ala on dS ja korkeus $\vec{n}\cdot\vec{v}dt = v_n dt$. Suure



Kuva 3.3.13 Vinopohjainen sylinteri.

$$v_n = \vec{n}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{n} \qquad (3.3.86)$$

on nopeuden <u>normaalikomponentti</u> tai lyhyemmin ns. normaalinopeus (engl. normal velocity). Täten sylinterin tilavuus $dV = v_n dt dS$ ja pinta-alkion läpi virranneen suureen I määrä on $f dV = f v_n dt dS$. Koko pinnan läpi ajassa dt virrannut suureen I määrä on siis $\int_{CS} v_n f dS$ ja tämä jaettuna kuluneella ajalla dt on ns. suureen I <u>virta</u> tai vuo (engl. flow rate, flow, flux) (yksikkö $[I]s^{-1}$)

$$\int_{CS} v_n f dS \qquad (3.3.87)$$

kontrollipinnan läpi alueesta ulos. Jos virtausta tapahtuu alueen sisään, $v_n = \vec{n}\cdot\vec{v}$ on negatiivinen, joten lauseke (3.3.87) kuvaa ns. nettovirtaa alueesta ulospäin. Termiä $v_n f$ (yksikkö $[I]s^{-1}m^{-2}$) voidaan nimittää ko. suureen I <u>virran tiheydeksi</u> (engl. flow rate density) ko. pinnalla.

Jätetään jatkossa kaavasta (3.3.85) integroimisalueita kuvaavat tunnukset yksinkertaisuuden vuoksi pois. On saatu tärkeä kaava, ns. <u>Reynoldsin kuljetuslause</u> (engl. Reynolds transport theorem) (muoto 1)

$$\boxed{I^{\cdot} \equiv \frac{DI}{Dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\int f dV = \int \frac{\partial f}{\partial t}\, dV + \int v_n f dS\ ,} \qquad (3.3.88)$$

joka antaa siis Eulerin esityksessä tarvittavan tilavuusintegraalin ainederivaatan lausekkeen. Pintaintegraali esiintyy usein mm. seuraavissa samanarvoisissa muodoissa:

$$\left.\begin{aligned} \int v_n f dS &= \int \vec{n}\cdot\vec{v} f dS = \int d\vec{S}\cdot\vec{v} f \\ &= \int (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) f dS\ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.89)$$

Soveltamalla yleistettyä Gaussin lausetta (kaava (L.2.9'), $f \to \vec{v}f$) kaavan (3.3.88) pintaintegraalin (3.3.89) muuntamiseksi tilavuusintegraaliksi saadaan <u>Reynoldsin lause</u> muodossa (muoto 2)

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\frac{D}{Dt}\int f dV = \frac{d}{dt}\int f dV = \int [\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}f)] dV\ ,} \\ &= \int\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (v_x f)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y f)}{\partial y} + \frac{\partial (v_z f)}{\partial z}\right] dV\ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.88')$$

Usein ainederivaatta lasketaan integraalista $\int \rho f dV$, jossa $\rho(\vec{r},t)$ on tiheys ja $f(\vec{r},t)$ on jokin suure massaa kohti. Kaavat (3.3.88)...(3.3.88') pätevät tietenkin edelleen ($f \to \rho f$), mutta eräs hyvin yksinkertainen muoto saadaan soveltamalla kaavaa (3.3.88') ja tulon derivoimissääntöä:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int \rho f dV &= \int\left[\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial(v_x \rho f)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y \rho f)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z \rho f)}{\partial z}\right] dV \\ &= \int\Big[\rho\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\rho\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\rho\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\rho\frac{\partial f}{\partial z} + \\ &\quad + f\frac{\partial \rho}{\partial t} + f\frac{\partial(v_x\rho)}{\partial x} + f\frac{\partial(v_y\rho)}{\partial y} + f\frac{\partial(v_z\rho)}{\partial z}\Big] dV \\ &= \int\Big\{\rho\left[\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}\right] + \\ &\quad + f\cancel{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v_x\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y\rho)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z\rho)}{\partial z}\right]}\Big\} dV\ . \end{aligned} \qquad (3.3.90)$$

Jälkimmäinen hakasulkulauseke häviää myöhemmin esitettävän massan säilymisen periaatteesta johtuvan ns. jatkuvuusyhtälön johdosta. Funktion ainederivaatan lausekkeen (3.3.10) perusteella saadaan siis tulos, Reynoldsin lause (muoto 3)

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\frac{D}{Dt}\int \rho f dV = \frac{d}{dt}\int \rho f dV = \int \rho \frac{Df}{Dt} dV ,} \\ &= \int \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}\right) dV . \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.88'')$$

Muistisääntö: Ajatellaan, että kaava saadaan muodollisesti siirtämällä operaattori D/Dt integraalimerkin sisäpuolelle ja otetaan huomioon, että termin $\rho dV = dm$ derivaatta on massan säilymisen periaatteen johdosta nolla.

Todettakoon vielä, että esitetyt Reynoldsin lauseen eri muodot pätevät myös vektori- tai tensoriarvoiselle funktiolle f.

Kaavaa (3.3.88) sovelletaan yleisten periaatteiden äärellisiä muotoja käytettäessä, koska tällöin pyritään siihen, että lausekkeissa esiintyisi mahdollisuuksien mukaan vain alueen reunalta kertyviä termejä, jotka ovat yleensä kohtuullisen helppoja arvioida tai mitata. Pysyvässä virtauksessa tilavuusintegraali $\int \partial f/\partial t \, dV$ häviää. Yleisten periaatteiden paikallisia muotoja johdettaessa sovelletaan taas kaavoja (3.3.88') ja (3.3.88''), joissa ei esiinny pintaintegraaliosuuksia.

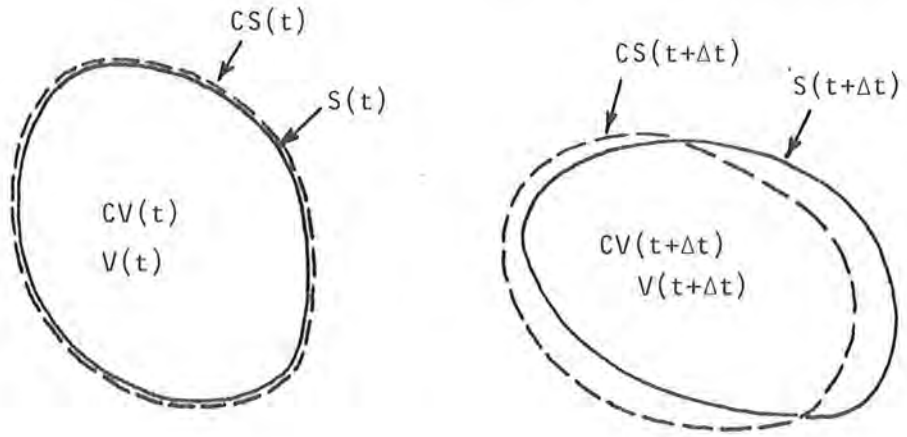
Tilavuusintegraalin ainederivaattojen lausekkeet ja Reynoldsin lauseen eri muodot esiintyvät kirjallisuudessa niin moninaisissa asuissa, että on syytä olla hyvin tarkkana niitä sovellettaessa. Eräs sekaannusta aiheuttava piirre on, että usein jo pelkällä merkinnällä d/dt tarkoitetaan ainederivaattaa. Mikä hyvänsä tilavuusintegraali — olipa sitten kyseessä kiinteä tai liikkuva alueen reuna — kun on integroimisen jälkeen korkeintaan ajan funktio. Merkinnän D/Dt käytön etuna on, että se ilmoittaa meille heti, että vastaavan integroimisalueen reunan tulee olla suljetun systeemin reuna eli kappaleen reuna eli vielä ns. ainepinta (engl. material surface). Ainepinta tarkoittaa koko ajan samoista kontinuumipartikkeleista muodostuvaa pintaa (vrt. kuva 3.4.5). Ainepinnan rajoittamasta alueesta voidaan vastaavasti

käyttää nimitystä ainetilavuus (engl. material volume).

On syytä korostaa, että suure $v_n = \vec{n}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{n}$ kaavassa (3.3.88) tarkoittaa kontrollialueessa ko. hetkellä olevan aineen virtausnopeuden normaalikomponenttia kontrollipinnan kohdalla; ei siis suinkaan itse kontrollipinnan nopeutta. Kontrollipintahan oletetaan tässä esityksessä yleensä kiinteäksi. Esimerkissä 3.3.4 selostetaan liikkuvan kontrollialueen käyttöä.

Esimerkki 3.3.4 Liikkuva kontrollialue. Joskus on tarpeen ottaa käyttöön myös liikkuva kontrollialue. Johdetaan kaavan (3.3.88) vastine tällaisessa tapauksessa.

Kuvan 3.3.12 sijasta saadaan tässä kuvan (a) esittämä asetelma. Kappale ja kontrollialue läheisillä hetkillä t ja t+Δt on esitetty piirroksen



(a)

selvyyden säilyttämiseksi vastaavasti erillään toisistaan. Kontrollialueen liike valitaan sopivalla tavalla tilanteesta riippuen.

Pidetään yhtälöä (3.3.85):

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f dV = \int_{CV} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{CS} v_n f dS \qquad \text{(a)}$$

lähtökohtana. Siitä saadaan välittömästi tulokset

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} f dV = \int_{(C)V} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{(C)S} v_n f dS \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{CV(t)} f dV = \int_{CV} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{CS} w_n f dS \ . \qquad \text{(c)}$$

Kaava (b) eli yhtälö (3.3.88) on vain yhtälö (a) uudestaan kirjoitettuna, kun on otettu huomioon, että V(t) on ainepinnan S(t) rajoittama alue, joten kyseessä on ainederivaatta. Kaava (c) taas saadaan yhtälöstä (a) käymällä läpi sen johto ja huomaamalla, että voimme tehdä muutokset $V(t) \to CV(t)$, $S(t) \to CS(t)$ ja $v_n \to w_n$. Suure w_n on kontrollipinnan siirtymisnopeus pinnan normaalin suunnassa. Tätä käsitettä on selostettu tarkemmin kohdassa 6.7. Kaavan (c) vasemmalla puolella oleva derivaatta tarkoittaa siis koko ajan kontrollialueen yli otetun integraalin $\int_{CV(t)} f dV$ — joka on pelkästään ajan funktio, mutta joka ei siis yleensä kuvaa mitään suljetun systeemin suuretta päin vastoin kuin integraali $\int_{V(t)} f dV$ — muutosnopeutta. Tunnukset CV ja CS ilman merkittyä riippuvuutta ajasta korostavat taas sitä, että vastaavat integraalit lasketaan aina tietyllä hetkellä. Vielä tarkemmin siis CV ja CS ovat alueiden CV(t) ja CS(t) tarkasteltavalla hetkellä määrittämät alueet. Kaavassa (b) voidaan tunnukset C jättää yhtä hyvin pois (ks. kuva (a)), johon viittaa niiden sulkuihin asettaminen. Useinhan integraalimerkkien yhteyteen ei merkitä kirjallisuudessa mitään integroimisalueen tunnusta, koska otaksutaan alueen ilmenevän yhteydestä.

Eliminoimalla yhtälöistä (b) ja (c) integraali alueen CV yli saadaan Reynoldsin kuljetuslauseen täysin yleinen muoto (muoto 4)

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} f dV = \frac{d}{dt}\int_{CV(t)} f dV + \int_{\{C\}S} (v_n - w_n) f dS \qquad \text{(d)}$$

Tämä on muodon (3.3.88) yleistys tapaukseen, jossa myös kontrollialue on liikkuva. Suure

$$v_n - w_n \qquad \text{(e)}$$

on virtauksen ns. suhteellinen normaalinopeus (engl. relative normal flow velocity). Se tarkoittaa siis kontrollipinnalla "istuvan" havaitsijan mittaamaa normaalin suuntaista nesteen nopeutta kontrollipinnan suhteen. Havaitaan, että jos kontrollialue on kiinteä, $w_n = 0$ ja derivointimerkki d/dt voidaan siirtää integraalimerkin sisäpuolelle: $d(\int f dV)/dt = \int (\partial f/\partial t) dV$. Tällöin joudutaan siis takaisin kaavaan (b).

Modifioidaan kaavaa (c) vielä erääseen kohdassa 5.7.5 tarvittavaan muotoon. Kirjoitetaan $w_n = v_n - (v_n - w_n)$, jolloin saadaan ensin yhtälö

$$\frac{d}{dt}\int_{CV(t)} f dV = \int_{CV} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{CS} v_n f dS - \int_{CS} (v_n - w_n) f dS \ . \qquad \text{(f)}$$

Tämän jälkeen muunnetaan ensimmäinen pintaintegraali yleistetyn Gaussin lauseen avulla tilavuusintegraaliksi samoin kuin tehtiin muotoa (3.3.88') johdettaessa. Saadaan yhtälö

$$\frac{d}{dt}\int_{CV(t)} f dV = \int_{CV}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v} f)\right] dV - \int_{CS} (v_n - w_n) f dS \ . \qquad \text{(g)}$$

Yhteenveto. Taulukossa 3.3.1 on esitetty lopuksi yhteenveto Lagrangen ja Eulerin esitystapojen mukaisista kinematiikan tärkeimmistä kaavoista.

Lisäksi taulukoissa 3.3.2 ja 3.3.3 on edelleen esitetty eräitä kaavoja jatkoa varten matriisimerkintöjä käyttäen.

Merkinnöissä kuten $[{}_{\varepsilon}\partial_{u}]$ on pyritty mnemotekniseen esitykseen. Täten tunnus ∂ viittaa siihen, että kyseessä on osittaisderivaattaoperaattori. Oikeanpuoleinen alaviite u osoittaa, että operaattori kohdistuu suureeseen, jonka tunnus on u. Vasemmanpuoleinen alaviite taas osoittaa, että tulokseksi saadaan suure, jonka tunnus on ε.

Operaattorimatriisien käytön yhteydessä on muistettava noudattaa tiettyä varovaisuutta matriisilaskusääntöjen kuten tulon transponoinnin ja kertomisjärjestyksen suorituksen suhteen, jotteivat operointien kohteena olevat suureet joutuisi vääriin paikkoihin.

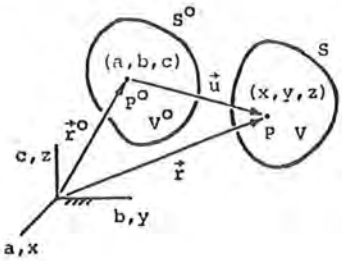
Taulukoita 3.3.2 ja 3.3.3 vertaamalla havaitaan mm., että Eulerin esityksen nopeusgradienttimatriisi voidaan ilmaista myös muodossa

$$[\frac{\partial v}{\partial r}] = (\{\nabla\}\{v\}^{T})^{T} \tag{3.3.90}$$

ja siis konvektiivinen kiihtyvyys

$$[\frac{\partial v}{\partial r}]\{v\} = (\{\nabla\}\{v\}^{T})^{T}\{v\} \ . \tag{3.3.91}$$

Taulukko 3.3.1 Lagrangen ja Eulerin esitystapojen kinematiikkaa.

Lagrangen esitystapa	Eulerin esitystapa
Lagrangen esitystavassa riippumattomina muuttujina ovat ainekoordinaatit $\vec{r}^o$ (eli a, b, c) ja aika t. Tämä esitys on tavallisin kiinteän aineen mekaniikassa. Tehtävän matemaattisena määrittelyalueena on paikan suhteen referenssialue V^o. Kappaleen liike: $\vec{r} = \vec{r}(r^o,t)$.	 Eulerin esitystavassa riippumattomina muuttujina ovat spatiaalikoordinaatit $\vec{r}$ (eli x,y,z) ja aika t. Tämä esitys on tavallisin nestemekaniikassa. Tehtävän matemaattisena määrittelyalueena on paikan suhteen kontrollialue V:ssä. Kappaleen liike periaatteessa: $\vec{r}^o = \vec{r}^o(\vec{r},t)$.
Funktion $f(\vec{r}^o,t)$ ainederivaatta $$f^{\cdot} \equiv \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} . \quad (1)$$	Funktion f(r,t) ainederivaatta $$\left.\begin{aligned} f^{\cdot} \equiv \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} . \end{aligned}\right\} \quad (1')$$
Tilavuusintegraalin $I(t) = \int_{V^o} f(\vec{r}^o,t)dV^o$ ainederivaatta $$I^{\cdot} \equiv \frac{DI}{Dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V^o} f dV^o = \int_{V^o} \frac{\partial f}{\partial t} dV^o . \quad (2)$$	Tilavuusintegraalin $I(t) = \int_{V(t)} f(\vec{r},t)dV$ ainederivaatta $$\left.\begin{aligned} I^{\cdot} \equiv \frac{DI}{Dt} &= \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V f dV \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int v_n f dS , \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) f dS , \end{aligned}\right\} \quad (2')$$ $$\left.\begin{aligned} &= \int \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}f)\right] dV , \\ &= \int \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (v_x f)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y f)}{\partial y} + \frac{\partial (v_z f)}{\partial z}\right] dV. \end{aligned}\right\} \quad (3')$$ $$\frac{D}{Dt}\int \rho f dV = \int \rho \frac{Df}{Dt} dV \quad (4')$$
Yllä olevat kaavat pätevät myös vektori- tai tensoriarvoiselle funktiolle f.	
Partikkelin rata ($\vec{r}^o$ on kiinteä, t muuttuu) $$\vec{r} = \vec{r}^o + \vec{u} \quad (5)$$	Ei yksinkertaista esitystä. Periaatteessa ratkaistavissa differentiaaliyhtälöstä $$\frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{v}(\vec{r},t) , \quad (5')$$ jossa $\vec{v}$ on annettu.
Siirtymäkenttä (tai $\vec{r}$) $$\left.\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}(\vec{r}^o,t) , \\ &= u_a\vec{i} + u_b\vec{j} + u_c\vec{k} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$ on Lagrangen esityksen lähtökohtana.	Ei yksinkertaista esitystä

Taulukko 3.3.1 jatkuu

Taulukko 3.3.1 Jatkoa

Lagrangen esitystapa	Eulerin esitystapa
Nopeus	Nopeuskenttä
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$, $= \frac{\partial u_a}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial u_b}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial u_c}{\partial t}\vec{k}$, $= v_a\vec{i} + v_b\vec{j} + v_c\vec{k}$. (7)	$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$, $= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ (7')
	on Eulerin esityksen lähtökohtana.
Kiihtyvyys	Kiihtyvyys
$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{u}} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$, $= a_a\vec{i} + a_b\vec{j} + a_c\vec{k}$, (8)	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$, $= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$, $= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, (8')
$a_a = \partial^2 u_a/\partial t^2$, $a_b = \partial^2 u_b/\partial t^2$, $a_c = \partial^2 u_c/\partial t^2$. (9)	$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial z} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$, $a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}$, $a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$. (9')
Venymäkomponentit (Green-Lagrange)	Ei yksinkertaista esitystä
$\overline{{}^g\varepsilon_{aa}} = \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u_a}{\partial a})^2 + (\frac{\partial u_b}{\partial a})^2 + (\frac{\partial u_c}{\partial a})^2\right]$, . . . ${}^g\varepsilon_{bc} = {}^g\varepsilon_{cb} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b} + \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial u_a}{\partial c} + \frac{\partial u_b}{\partial b}\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}\frac{\partial u_c}{\partial c}\right]$ . . . (10)	
Infinitesimaaliset rotaatiokomponentit	Kulmanopeuskomponentit
$\theta_a = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_c}{\partial b} - \frac{\partial u_b}{\partial c})$, $\theta_b = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_a}{\partial c} - \frac{\partial u_c}{\partial a})$, $\theta_c = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_b}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial b})$. (11)	$\omega_x = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z})$, $\omega_y = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x})$, $\omega_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})$. (11')
Infinitesimaaliset "insinööri"venymäkomponentit	Deformaationopeuskomponentit
$\varepsilon_a = \frac{\partial u_a}{\partial a}$, $\gamma_{bc} = \gamma_{cb} = \frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}$, $\varepsilon_b = \frac{\partial u_b}{\partial b}$, $\gamma_{ca} = \gamma_{ac} = \frac{\partial u_c}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial c}$, $\varepsilon_c = \frac{\partial u_c}{\partial c}$, $\gamma_{ab} = \gamma_{ba} = \frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}$. (12)	$d_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, $g_{yz} = g_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$, $d_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}$, $g_{zx} = g_{xz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}$, $d_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, $g_{xy} = g_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$. (12')

Jotta Lagrangen ja Eulerin esitysten välinen ero tulisi selvästi esille, on käytetty eri tunnuksia ainekoordinaateille a, b, c ja spatiaalikoordinaateille x, y, z. Kun toimitaan vain jommankumman koordinaatiston avulla, käytetään usein seuraavia tunnuksia

$a \to x$, $b \to y$, $c \to z$ $\qquad$ $v_x \to u$, $v_y \to v$, $v_z \to w$

$u_a \to u$, $u_b \to v$, $u_c \to w$ $\qquad$ $d_x \to \varepsilon_x$, $g_{yz} \to \gamma_{yz}$, ...

Taulukko 3.3.2 Kinematiikan kaavoja matriisimerkinnöin.

Lagrangen esitystapa	Eulerin esitystapa
Nopeus-siirtymä $\{v\} = \frac{\partial}{\partial t}\{u\}$ $\{u\} \equiv [u_a\ u_b\ u_c]^T$ $\{v\} \equiv [v_a\ v_b\ v_c]^T$	Kiihtyvyys-nopeus $\{a\} = \frac{\partial}{\partial t}\{v\} + [\frac{\partial v}{\partial r}]\{v\}$ $\{v\} \equiv [v_x\ v_y\ v_z]^T$ $\{a\} \equiv [a_x\ a_y\ a_z]^T$
Kiihtyvyys-siirtymä $\{a\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\}$ $\{a\} \equiv [a_a\ a_b\ a_c]^T$	$[\frac{\partial v}{\partial r}] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$
Venymä-siirtymä (infinitesimaalinen) $\{\varepsilon\} = [{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}$ $\{\varepsilon\} \equiv [\varepsilon_a\ \varepsilon_b\ \varepsilon_c\ \gamma_{bc}\ \gamma_{ca}\ \gamma_{ab}]^T$ $[{}_\varepsilon\partial_u] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial c} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial c} & \frac{\partial}{\partial b} \\ \frac{\partial}{\partial c} & 0 & \frac{\partial}{\partial a} \\ \frac{\partial}{\partial b} & \frac{\partial}{\partial a} & 0 \end{bmatrix}$	Deformaationopeus — nopeus $\{d\} = [{}_d\partial_v]\{v\}$ $\{d\} \equiv [d_x\ d_y\ d_z\ g_{yz}\ g_{zx}\ g_{xy}]^T$ $[{}_d\partial_v] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$

Taulukko 3.3.3 Operaattoreiden matriisivastineita.

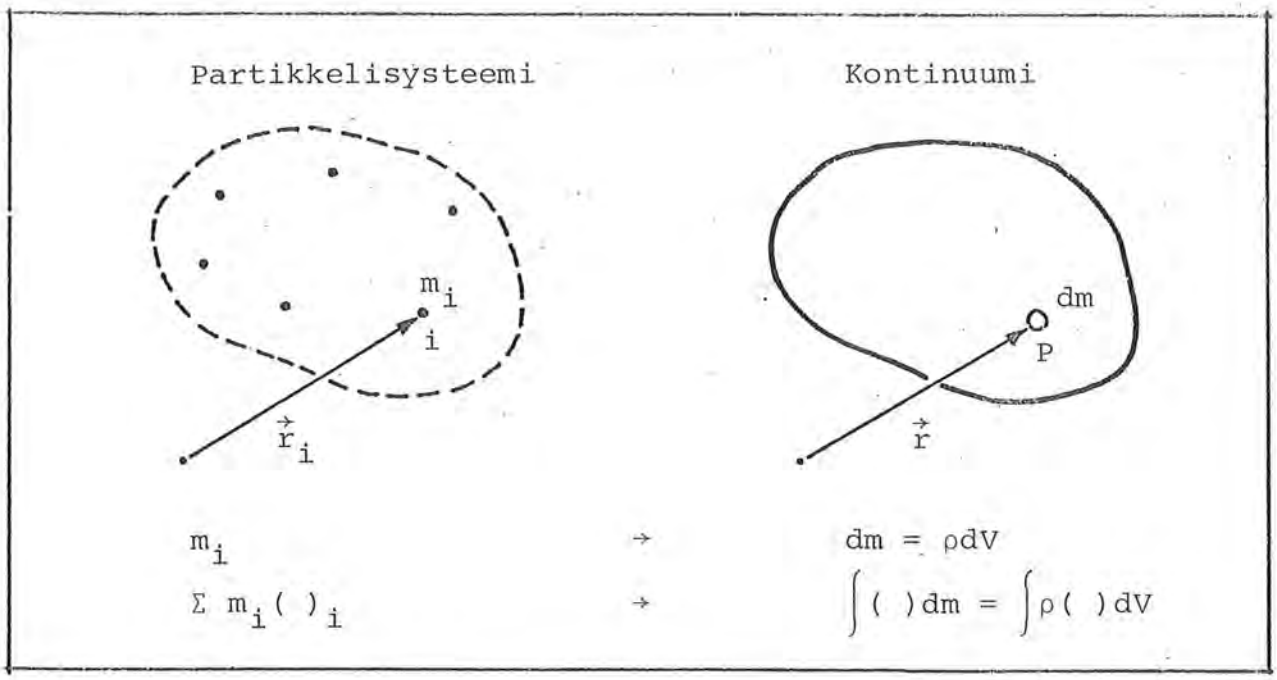
Lagrangen esitystapa	Eulerin esitystapa
Operaattoreiden	
$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial a} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial b} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial c}$	$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$
matriisivastineet ovat	
$\{\nabla\} = [\frac{\partial}{\partial a}\ \frac{\partial}{\partial b}\ \frac{\partial}{\partial c}]^T$	$\{\nabla\} = [\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}]^T$
Ja yhteys ilmaisee, kummasta tapauksesta on kysymys.	
Skalaarin f ainederivaatta	
$f^{\bullet} = \frac{\partial f}{\partial t}$.	$f^{\bullet} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{v\}^T(\{\nabla\}f)$ $= \frac{\partial f}{\partial t} + (\{\nabla\}^T f)\{v\}$.
Vektorin $\vec{f}$ ainederivaatan matriisivastineet ovat	
$\{f\}^{\bullet} = \frac{\partial}{\partial t}\{f\}$,	$\{f\}^{\bullet} = \frac{\partial}{\partial t}\{f\} +$ $+ (\{\nabla\}\{f\}^T)^T\{v\}$,
joissa	
$\{f\} = [f_a\ f_b\ f_c]^T$, $\frac{\partial}{\partial t}\{f\} = [\frac{\partial f_a}{\partial t}\ \frac{\partial f_b}{\partial t}\ \frac{\partial f_c}{\partial t}]^T$.	$\{f\} = [f_x\ f_y\ f_z]$, $\frac{\partial}{\partial t}\{f\} = [\frac{\partial f_x}{\partial t}\ \frac{\partial f_y}{\partial t}\ \frac{\partial f_z}{\partial t}]^T$.

3.4 Kinetiikan yleiset perusteet

3.4.1 Yleistä

Tässä tullaan tarkastelemaan kohdassa 3.2 esitettyjen aksioomien yksityiskohtia. Samalla esitellään tiettyjä käsitteitä, joita tarvitaan aksioomien yhteydessä. Tarkastelu suoritetaan lähinnä Eulerin esitystavan mukaisesti.

Todettakoon, että partikkelimekaniikassa saadut useat lausekkeet voidaan muuntaa kontinuumille päteviksi kuvassa 3.4.1 esitetyillä muodollisilla askelilla. Tyypillistä partikkelia i (massa = m_i) vastaa tyypillinen kontinuumialkio P (massa = dm = ρdV).



Kuva 3.4.1 Partikkelisysteemin ja kontinuumin vastinsuureita.

Summeerausta vastaa integrointi. Suure ρ on kontinuumin tiheys (ks. kohta 3.4.2). Mekaniikassa käytössä olevalla symbolisella merkinnällä $\int(\ )dm$ (usein myös $\Sigma(\ )dm$) tarkoitetaan sanoin lausuttuna suureen ( ) integraalia yli kappaleen massan. Käytännössä integraali lasketaan kuitenkin tilavuusintegraalina $\int\rho(\ )dV$ kappaleen ko. hetkellä täyttämän avaruuden osan V yli. Esimerkiksi kontinuumin liikemäärän lauseke $\vec{p} = \int\rho\vec{v}dV$ saadaan kuvan merkintöjen perusteella partikkelisysteemiä koskevasta lausekkeesta

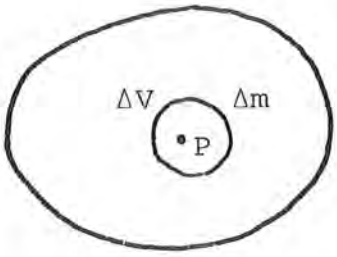
$\vec{p} = \Sigma m_i \vec{v}_i$ (( ) $\hat{=}$ $\vec{v}$).

Kontinuumin yhteydessä tulee esiintymään lisäksi kappaleen reunapinnan yli otettuja integraaleja (esimerkiksi pintavoimien vaikutus), joita vastaavia termejä ei esiinny partikkelisysteemeissä.

3.4.2 Massan säilyminen

Makroskooppinen ja mikroskooppinen tarkastelutapa. Tarkastellaan aluksi tiheyden määritelmää.

Tiheys (engl. density) ρ ($[\rho] = \mathrm{kgm}^{-3}$) eli ns. massatiheys (engl. mass density) tietyssä pisteessä P (kuva 3.4.2) tietyllä hetkellä määritellään periaatteessa raja-arvona

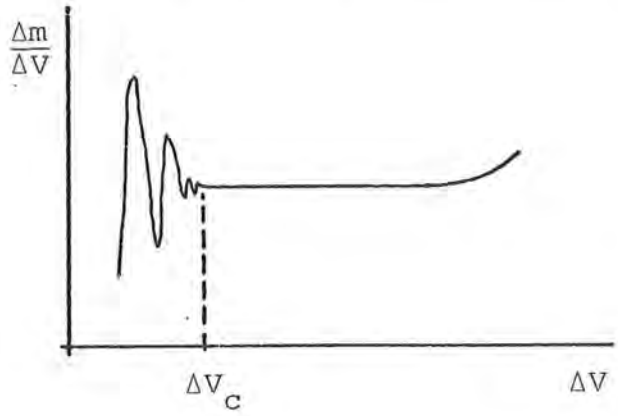


Kuva 3.4.2 Massa Δm ja tilavuus ΔV.

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} . \qquad (3.4.1)$$

Tässä ΔV on pienen, pistettä P ympäröivän kappaleen tilavuus ja Δm sen massa. Tilavuuden annetaan kutistua määritelmässä (3.4.1) kohti nollaa siten, että P pysyy koko ajan ΔV:n sisällä.

Määritelmää (3.4.1) tarkastelemalla saadaan havainnnollinen esimerkki kontinuumimekaniikassa käytetyn ns. makroskooppisen (makroskooppinen = paljain silmin näkyvä) tarkastelutavan, joka ei ota huomioon aineen sisäistä rakennetta (molekyylit, atomit, elektronit, ytimet jne.) ja ns. mikroskooppisen tarkastelutavan, joka ottaa sen huomioon, välille. Yksinkertaistetaan tässä ja jatkossa mikroskooppista tarkastelua ajattelemalla, että aine muodostuu massapisteistä, jotka noudattavat partikkelimekaniikan aksioomia ja joita nimitetään jatkossa hiukkasiksi. Ajatellaan, että suureet Δm ja ΔV voitaisiin mitata mikroskooppisella tarkastelulla. Tulos olisi kuvan 3.4.3 esittämän tyyppinen. Tilavuus ΔV sisältää yleensä suunnattoman määrän molekyylejä. Esimerkiksi yksi kuutiomillimetri ilmaa sisältää normaaliolosuhteissa $2{,}7 \cdot 10^{16}$ molekyyliä. Tästä johtuen suhde $\Delta m/\Delta V$ ei riipu ΔV:stä kun ΔV on riittävän pieni. Jos kui-



Kuva 3.4.3 Kriittinen tilavuus ΔV_c.

tenkin ajatellaan ΔV:n lähestyvän rajatta nollaa, saavutetaan lopulta tilanne, jossa yksittäisen molekyylin poisjättö tai mukaanotto Δm:ssä alkaa vaikuttaa suhteen arvoon. Jos siis halutaan liittää pisteeseen P tietty tiheyden ρ arvo, raja-arvoa ei saadakaan viedä arvoon 0 asti, vaan on pysähdyttävä johonkin enemmän tai vähemmän pieneen kriittiseen tilavuuteen ΔV_c. Vastaava pätee muidenkin makroskooppisten käsitteiden kuten nopeus, jännitys, lämpötila yms. suhteen.

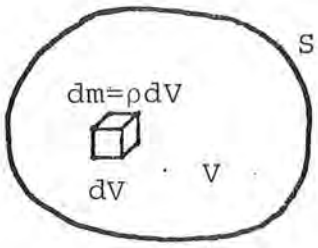
Kontinuumimekaniikan jatkuva ainemalli voi ilmeisesti osoittautua epäkelvoksi approksimaatioksi niissä harvinaisissa tapauksissa, joissa kriittistä tilavuutta ei voida enää pitää jossain mielessä pienenä. Esimerkkinä mainittakoon kaasun virtaus hyvin pienestä aukosta.

Todettakoon lisäksi seuraavaa. Ajattelemalla tiheyden tai yleensä makroskooppisesti määriteltyjen suureiden määrittämistä käytännössä mittaamalla, ymmärretään, että todellisuudessa voidaankin saada selville vain tiettyjä keskimääräisiä arvoja eikä tarkkoja kuviteltuja pisteettäisiä arvoja.

Klassillinen mekaniikka käsittelee kontinuumia makroskooppisesti. Siirtymällä aina välillä mikroskooppiseen tarkasteluun saadaan lisävalaistusta tiettyihin käsitteihin.

<u>Massan säilymisen periaate</u>. Todettakoon, että massan säilymisen periaate on luonteeltaan puhtaasti kinemaattinen, vaikka aihetta käsitelläänkin vasta tässä. Kappaleen kokonaismassa (kuva 3.4.4)

$$m = \int dm = \int \rho dV \ . \qquad (3.4.2)$$



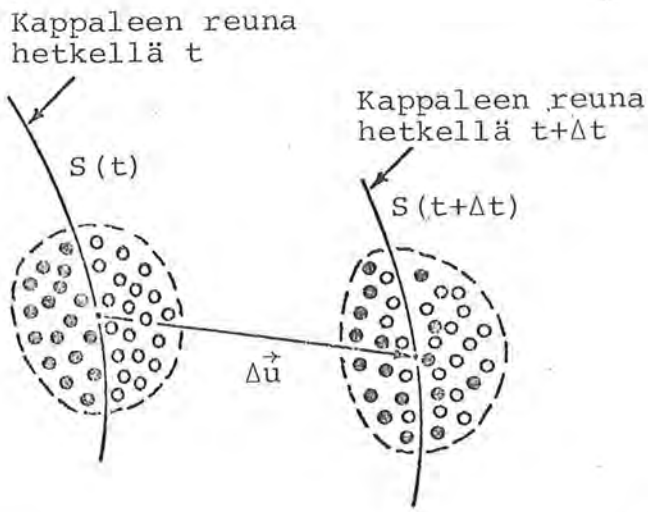
Kuva 3.4.4 Kontinuumikappale.

Massan säilymisen periaatteen (3.2.2) perusteella $m^{\cdot} = 0$ eli

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int \rho dV = 0 \ .} \qquad (3.4.3)$$

Yhtälö koskee suljettua systeemiä.

Tarkastellaan tähän liittyen kappaleen reunaa S kahdella perättäisellä ajan hetkellä t ja t+Δt mikroskooppiselta kannalta (kuva 3.4.5). Kappaleen hiukkasia on kuvattu

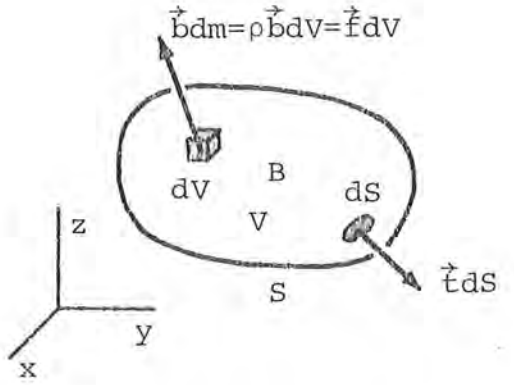


Kuva 3.4.5 Kontinuumialkion liike.

tummilla pisteillä ja ympäristön hiukkasia pienillä ympyröillä. Systeemi on ajateltu määritellyksi hetkellä t umpinaisen reunapinnan S(t) avulla. Kappaleen reunan S(t+Δt) hetkellä t+Δt määrittelevät periaatteessa reunalla hetkellä t olleiden pienten — suunnattoman määrän hiukkasia sisältävien — ainealkioiden massakeskiöiden uudet asemat ja makroskooppiselta kannalta voidaan sanoa, että kappaleen reuna muodostuu koko ajan samoista kontinuumialkioista. Kuitenkin ainakin nesteiden yhteydessä hiukkasten kesken tapahtuu satunnaisliikkeen johdosta sekoittumista ja makroskooppisesti määritellyn reunapinnan S(t+Δt) sisäpuolelle on tullut ympäristön hiukkasia ja taas ulkopuolelle on siirtynyt systeemin hiukkasia. Mikroskooppinen tarkastelu osoittaa siis, että tarkasti ottaen aikaisemmin monasti korostettua suljetun systeemin käsitettä ei pystytä toteuttamaan. Makroskooppiselta kannalta tämä käsite on kuitenkin olemassa ainakin kohtuullisen lyhyellä aikavälillä, joka antaa mahdollisuuden johtaa kullakin hetkellä päteviä tiettyjä differentiaaliyhtälöitä. Hiukkasten vaellus rajapinnan läpi tulee huomioonotetuksi tietyillä makroskooppisilla käsitteillä kuten kineettinen jännitys (ks. kohta 3.4.3).

3.4.3 Liikemäärän tase

Ulkoiset voimat. Kontinuumikappaleeseen B (kuva 3.4.6) vaikuttavat ulkoiset voimat muodostuvat massavoimista (engl. mass forces) ja pintavoimista (engl. surface forces).



Kuva 3.4.6 Kontinuumikappaleeseen vaikuttavat ulkoiset voimat.

Massavoimat vaikuttavat kappaleen massa-alkioihin ja syntyvät kappaleen ulkopuolisen massan kehittämien ns. kaukovaikutusvoimien (engl. action-at-a-distance-force) kuten gravitaatiovoimien aiheuttamina. Massavoimaa massaa kohti merkitään tässä tunnuksella $\vec{b}$ ($[\vec{b}] = \mathrm{Nkg}^{-1}$) ja taas tilavuutta kohti tunnuksella $\vec{f}$ ($[\vec{f}] = \mathrm{Nm}^{-3}$). Täten yhteyden $dm = \rho dV$ perusteella yhtälöstä $\vec{b}dm = \vec{f}dV$ seuraa tulos

$$\vec{f} = \rho\vec{b} \ . \tag{3.4.4}$$

Suureen $\vec{b}(x,y,z,t) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ arvo tietyssä pisteessä P tietyllä hetkellä määritellään periaatteessa kaavalla

$$\vec{b} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\rho\Delta V} = \frac{d\vec{F}}{\rho dV} \ . \tag{3.4.5}$$

Määritelmän sisältö on vastaava kuin kaavassa (3.4.1). Suure $\Delta\vec{F}$ on tilavuuden ΔV sisällä olevaan massaan vaikuttavien kappaleen B ulkoisten voimien resultantti. Määritelmään voidaan liittää vastaava mikroskooppinen kritiikki kuin kohdassa 3.4.2.

Todettakoon, että tilavuuden ΔV sisällä olevaan massaan vaikuttava kappaleen B ulkoinen voimasysteemi voidaan periaatteessa redusoida tuttuun tapaan pisteen P suhteen resultantiksi $\Delta\vec{F}$ ja momentiksi $\Delta\vec{M}$. Tavanomaisessa kontinuumimekaniikassa — ja myös tässä jatkossa — tehdään postulaatti eli otaksuma $\lim_{\Delta V\to 0} \Delta\vec{M}/(\rho\Delta V) = \vec{0}$. Eräissä teorioissa joudutaan käsittelemään edellisestä poiketen myös ns. jakautuneita massavoimapareja (engl. distributed body couples).

Massavoimien asemasta puhutaan myös kenttävoimista ja voimakentästä (engl. force field) ja sen voimakkuudesta eli intensiteetistä $\vec{b}$ tai $\vec{f}$. Massavoiman sijasta käytetään vielä nimityksiä tilavuusvoima (engl. volume force) tai kappalevoima (engl. body force). Koska kappalevoimat ovat verrannollisia nimenomaan tietyssä kohdassa olevaan massaan eikä tilavuuteen, on $\vec{b}$ tavallaan perustavampaa laatua oleva suure kuin $\vec{f}$. Rakenteiden mekaniikassa operoidaan tavallisesti suureen $\vec{f}$ avulla (Siksi, että tiheyttä voidaan pitää siellä lineaarisessa teoriassa vakiona kullekin ainealkiolle.) ja nestemekaniikassa suureen $\vec{b}$ avulla.

Tavallisin massavoima on maan painovoima, jolloin $\vec{b} = \vec{g}$, jossa $\vec{g}$ on putoamiskiihtyvyys. Vanhemmassa kirjallisuudessa suureesta $|\vec{f}| = |\rho\vec{g}| = \rho g$ käytetään tällöin usein nimitystä ominaispaino (tavallinen tunnus on γ). Nykyisten ohjeiden [3.6] mukaan tämä nimitys on väärä, koska suosituksena on: suure/massa = ominaissuure. Tämän ohjeen mukaan esimerkiksi suure $\vec{b}$ olisi ominaismassavoima. Termistä $\vec{f}$ voidaan myös käyttää nimitystä massavoiman tilavuusintensiteetti.

Laskemalla yhteen kappaleen massa-alkioihin vaikuttavat massavoimat kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten massavoimien resultantti $\vec{F}_V$ ($V \triangleq$ volume) saadaan siis lausekkeesta

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_V &= \int \vec{b}dm = \int \rho\vec{b}dV \\ &= \int \rho b_x dV\vec{i} + \int \rho b_y dV\vec{j} + \int \rho b_z dV\vec{k} \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.6)$$

eli lausekkeesta

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_V &= \int \vec{f}dV \\ &= \int f_x dV\vec{i} + \int f_y dV\vec{j} + \int f_z dV\vec{k}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.6')$$

Pintavoimista käytetään usein myös nimitystä kosketusvoimat (engl. contact force). Ne esittävät kappaleen ympäristön eli kappaleen viereisen kappaleen vaikutusta kappaleeseen pintojen kosketuksen johdosta; esimerkiksi nesteen paine kappaleeseen. Pintavoimaa pinta-alaa kohti eli pintavoiman intensiteettiä mer-

kitään tässä tunnuksella $\vec{t}$ ($[\vec{t}] = \mathrm{Nm}^{-2}$). Pinta-alkioon dS vaikuttava voima on tällöin $\vec{t}dS$.

Suureen $\vec{t} = t_x\vec{i} + t_y\vec{j} + t_z\vec{k}$ muita nimityksiä ovat jännitysvektori (engl. stress vector) tai traktio (engl. traction = veto, vetäminen). Tätä jälkimmäistä termiä käytetään englanninkielisessä kirjallisuudessa etenkin silloin, kun tarkastellaan valitun kappaleen reunapintaa eikä vain jotain kappaleen sisältä otettua pintaa. Tässä tullaan käyttämään suureesta $\vec{t}$ useimmiten nimitystä traktio.

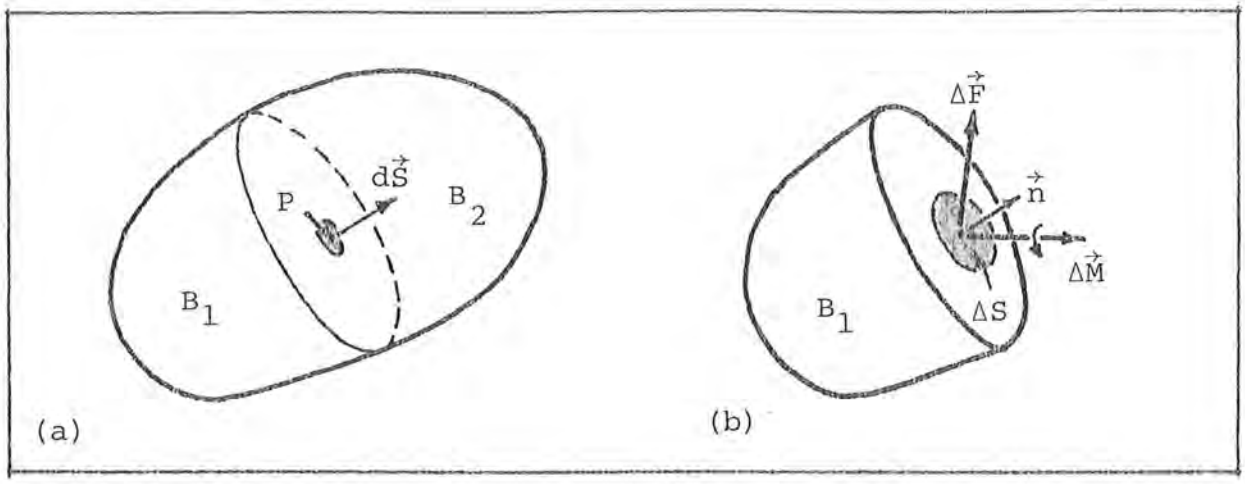
Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten pintavoimien resultantti F_S (S ≙ surface) saadaan siis lausekkeesta

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_S &= \int \vec{t}dS \\ &= \int t_x dS\,\vec{i} + \int t_y dS\,\vec{j} + \int t_z dS\,\vec{k}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.7)$$

Jännitys. Tässä kohdassa käsitellään traktiovektorin ja jännityksen käsitteitä äskeistä perusteellisimmin.

Jännitys (engl. stress) on yleisenä käsitteenä tensoriarvoinen paikan ja ajan funktio $\overleftrightarrow{\sigma} = \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)$, jonka komponentit saavat aina kussakin koordinaatistossa tietyt arvot. Jatkossa tullaan toimimaan lähinnä karteesisen suorakulmaisen koordinaatiston ja siinä esiintyvien jännityskomponenttien avulla. Lagrangen esitystavassa joudutaan operoimaan suurten siirtymien teorian yhteydessä monimutkaisilla jännityskäsitteillä kuten esimerkiksi Piola-Kirchhoffin 2. lajin jännitys. Eulerin esitystavassa toimitaan yksinkertaisemman suureen, ns. Eulerin jännityksen (usein käytetään myös nimitystä Cauchyn jännitys) avulla. Pelkällä nimityksellä jännitys tarkoitetaankin yleensä ja jatkossa juuri Eulerin jännitystä. Tavanomaisessa pienten siirtymien teoriaa soveltavassa kiinteän aineen mekaniikassa käsitellään samoin Eulerin jännityksiä.

Kontinuumikappaleen B tietyn pisteen P kautta asetettuun vektoriaaliseen pinta-alkioon $d\vec{S}$ tietyllä hetkellä liittyvä jännitysvektori $\vec{t}$ määritellään periaatteessa seuraavasti. Ajatellaan kappale B jaetuksi kahteen osaan B_1 ja B_2 pisteen P kautta kulkevan sileän pinnan, jonka normaali pisteessä P yhtyy pinta-alkioon



Kuva 3.4.7 (a) Kontinuumikappaleen jako kahteen osaan. (b) Pinnan osa ΔS ja siihen liittyvä voimasysteemi $\Delta\vec{F}$, $\Delta\vec{M}$.

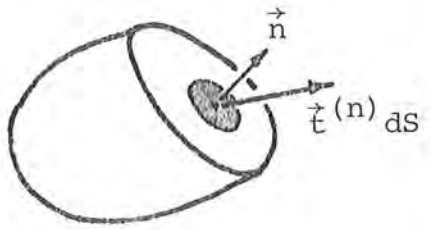
liittyvän yksikkönormaalivektorin $\vec{n}$ suuntaan (kuva 3.4.7 (a)), avulla. Olkoon B_1 se kappale, jonka ulkoinen yksikkönormaalivektori pisteessä P on $\vec{n}$. Kappaleesta B_2 tulevien kosketusvoimien vaikutus kappaleeseen B_1 pistettä P ympäröivän pinnan osan ΔS kautta voidaan esittää pisteen P suhteen redusoituna voimasysteeminä, jonka resultantti on $\Delta\vec{F}$ ja momentti $\Delta\vec{M}$ (kuva 3.4.7 (b)). Pinta-alkioon $d\vec{S}$ liittyvä traktio eli jännitysvektori $\vec{t}$ määritellään periaatteessa kaavalla

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS} . \tag{3.4.8}$$

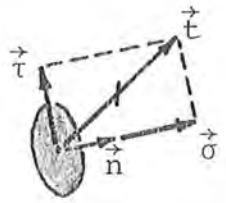
Kontinuumimekaniikan eräs postulaatti on, että tämä raja-arvo ei riipu siitä, miten pisteen P ympärillä oleva pinnan osa ΔS kutistuu kohti nollaa, eikä siitä, miten kappaleen jakava pinta on valittu, kunhan vain sen normaali pisteessä P on sovitun mukainen.

Tavanomainen kontinuumimekaniikassa tehty lisäpostulaatti on $\lim_{\Delta S \to 0} \Delta\vec{M}/\Delta S = \vec{0}$. Eräissä teorioissa joudutaan käsittelemään edellisestä poiketen myös ns. voimaparijännityksiä (engl. couple stress). Pinta-alkioon $d\vec{S}$ vaikuttava voimasysteemi on siis tavanomaisessa teoriassa pelkkä resultantti $\vec{t}dS$.

Korostettakoon, että jännitysvektori $\vec{t}(x,y,z,t)$, joka antaa tietyn pisteen kautta asetettuun pinta-alkioon $d\vec{S}$ vaikuttavan voiman $\vec{t}dS$, riippuu paitsi ko. pisteen koordinaateista ja mahdollisesti



Kuva 3.4.8 Vektori $\vec{t}$ riippuu vektorista $\vec{n}$.



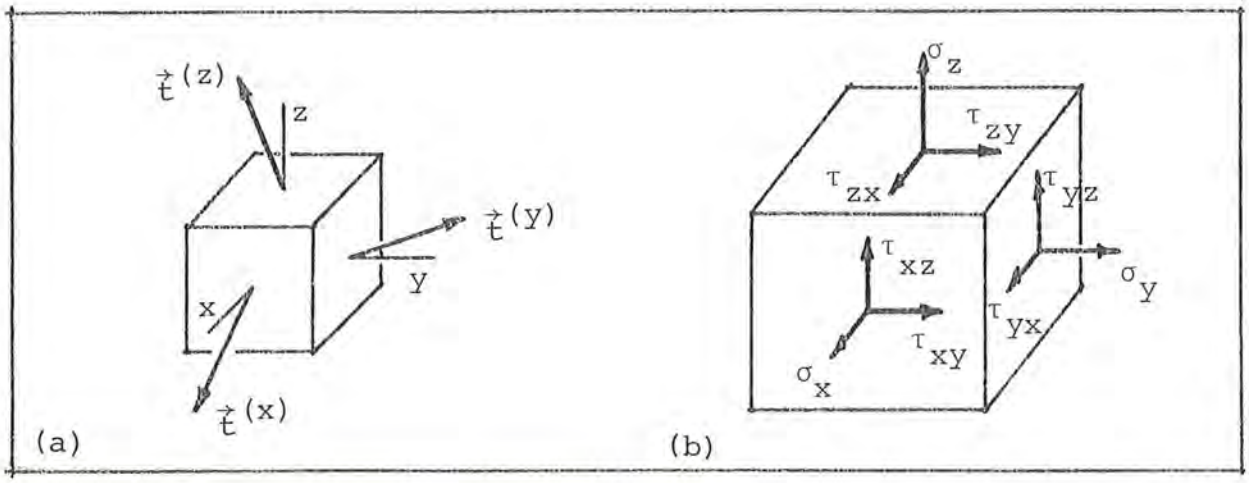
Kuva 3.4.9 Normaalijännitys σ ja leikkausjännitys τ.

ajasta myös pinta-alkion suunnasta eli siis pinta-alkion ulkoisesta yksikkönormaalivektorista $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$ (kuva 3.4.8). Tätä riippuvuutta kuvataan usein kirjoittamalla jännitysvektorin tunnus muotoon $\vec{t}^{(n)}$.

Kuvassa 3.4.9 on esitetty jännitysvektorin $\vec{t}$ jako ns. normaalijännitykseen (engl. normal stress) σ ja ns. leikkausjännitykseen (engl. shearing stress) τ. Jos käsitellään vastaavia vektorikomponentteja $\vec{\sigma}$ ja $\vec{\tau}$, saadaan

$$\vec{t} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \ . \qquad (3.4.9)$$

Kuva 3.4.10 liittyy jännitysten esittämiseen karteesisessa suorakulmaisessa xyz-koordinaatistossa. Kuvan (a) merkinnät $\vec{t}^{(x)}$,

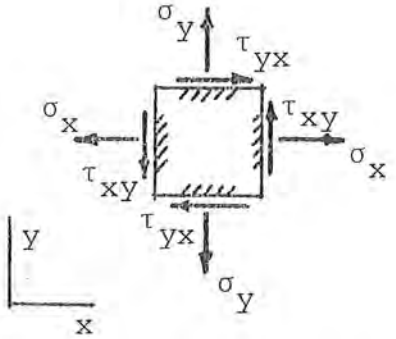


Kuva 3.4.10 (a) Kolmeen pinta-alkion suuntaan liittyvät jännitysvektorit. (b) Jännityskomponentit.

$\vec{t}^{(y)}$ ja $\vec{t}^{(z)}$ tarkoittavat jännitysvektoreita tietyssä pisteessä, kun pinta-alkion normaali $\vec{n}$ yhtyy x-, y- ja z-akselien positiivisiin suuntiin. Kuvan esittämä suorakulmainen särmiö on siis ajateltava äärettömän pieneksi. Kuvan (b) merkintöjä käyttäen näiden jännitysvektoreiden esitys $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$-kannassa on

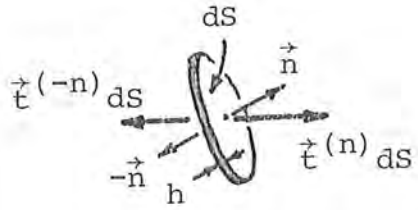
$$\left.\begin{aligned} \vec{t}^{(x)} &= \sigma_x\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k} \,, \\ \vec{t}^{(y)} &= \tau_{yx}\vec{i} + \sigma_y\vec{j} + \tau_{yz}\vec{k} \,, \\ \vec{t}^{(z)} &= \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \sigma_z\vec{k} \,. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.10)$$

Suureita σ_x, τ_{xy} jne. nimitetään jännitystensorin komponenteiksi tai lyhyemmin jännityskomponenteiksi (engl. stress component). Kuten edellä, σ:t ovat ns. normaalijännityskomponentteja ja τ:t leikkausjännityskomponentteja. Jännityskomponentit määritellään (yleensä) positiivisiksi, kun ne vaikuttavat kuvassa (b) esitettyihin koordinaattiakselien positiivisiin suuntiin. Särmiön vastakkaisilla tahkoilla — ei esitetty kuvassa — joiden ulkoiset normaalit osoittavat koordinaattiakselien negatiivisiin suuntiin, jännityskomponenttien positiiviset suunnat ovat vastakkaiset kuvassa esitetyille suunnille. Kuva 3.4.11 osoittaa tätä kaksidimensioisessa tapauksessa. Huomautettakoon, ettei ole tapana operoida suureiden σ_{-x}, τ_{-x-y} jne. avulla.



Kuva 3.4.11 Kaksidimensioinen tapaus.

Edelliseen liittyy läheisesti tulos



$$\boxed{\vec{t}^{(-n)} = -\vec{t}^{(n)} \,,} \qquad (3.4.11)$$

Kuva 3.4.12 Jännitysvektorin suunnan muuttuminen.

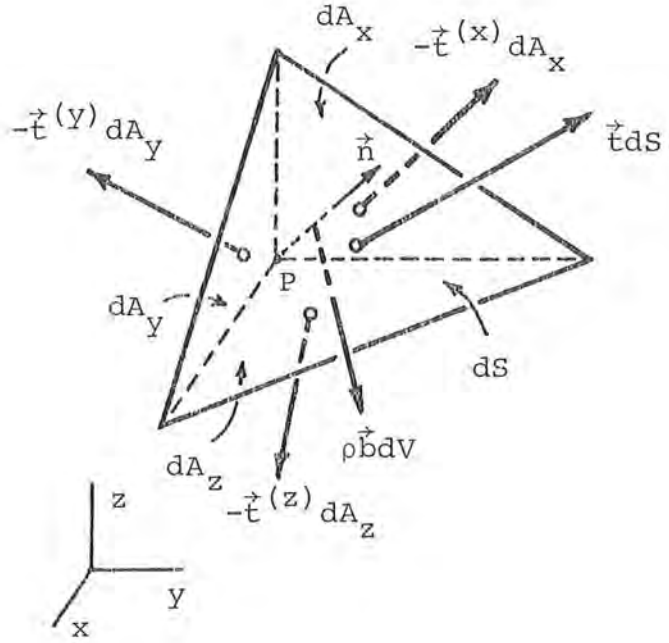
jonka mukaan jännitysvektori vaihtaa suuntansa, kun ko. pisteeseen liittyvän pinta-alkion ulkoinen normaali vaihtaa suuntaansa. Kaava voidaan johtaa soveltamalla liikemäärän taseen periaatetta kuvan 3.4.12 esittämään aineliuskaan antaen paksuuden h lähestyä nollaa. Tulos (3.4.11) on tavallaan partikkelimekaniikan voiman ja vastavoiman lain vastine kontinuumille.

Soveltamalla samoin liikemäärän taseen periaatetta kuvan 3.4.13 esittämään differentiaaliseen tetraedriin voidaan johtaa vektoriyhtälö (ks. kohta 5.4)

$$\vec{t} = n_x \vec{t}^{(x)} + n_y \vec{t}^{(y)} + n_z \vec{t}^{(z)} \tag{3.4.12}$$

eli ottaen huomioon esitykset (3.4.10) skalaariyhtälöt

$$\left.\begin{aligned} t_x &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx} \,, \\ t_y &= n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy} \,, \\ t_z &= n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z \,. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.13}$$



Kuva 3.4.13 Differentiaaliseen tetraedrialkioon vaikuttavat voimat.

Kaavat (3.4.13) ilmaisevat ns. traktio-jännitysyhteyden. Jos siis tietyssä pisteessä tunnetaan jännityskomponentit σ_x, τ_{xy} jne., mielivaltaiseen suuntaan ko. pisteen kautta asetettuun pinta-alkioon liittyvä jännitysvektori voidaan aina laskea näiden kaavojen avulla. Usein kaavoja sovelletaan käänteisesti kappaleen reunalla: Traktio on annettu, jolloin kaavat antavat tietyt reunalla vallitsevia jännityskomponentteja koskevat reunaehdot. Korostettakoon,

että kaavat pätevät sekä liikkeessä että lepotilassa olevalle mielivaltaiselle kontinuumille.

Traktio-jännitysyhteyden yleinen koordinaatistosta riippumaton esitysmuoto on

$$\boxed{\vec{t} = \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma} \ .} \qquad (3.4.14)$$

Voidaan osoittaa, että soveltamalla liikemäärämomentin taseen periaatetta kuvan 3.4.10 esittämään differentiaaliseen suorakulmaiseen särmiöön, saadaan lopuksi ns. Cauchyn II liikelaki (Cauchy v. 1827) eli ns. parittaisten leikkausjännityskomponenttien yhtäsuuruutta koskevat yhtälöt

$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy} \ , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \ , \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \ .} \qquad (3.4.15)$$

Koordinaatistosta riippumaton yleisempi tulos sanoo, että jännitystensori $\overleftrightarrow{\sigma}$ on symmetrinen.

Yhteenvetona edellä esitetystä voidaan siis todeta, että ns. jännitystilan tietyssä pisteessä määrittävät kuusi riippumatonta suuretta: σ_x, σ_y, σ_z ja esimerkiksi τ_{yz}, τ_{zx} ja τ_{xy}. Kappaleessa vallitseva ns. jännitystilakenttä taas määräytyy ko. suureiden avulla, kun ne ajatellaan paikan ja ajan funktioiksi.

Etenkin nestemekaniikassa ja plastisuusteorian yhteydessä on tapana esittää jännitystila seuraavasti. Kirjoitetaan normaalijännityskomponentit muotoon

$$\sigma_x = -p + \sigma_x^* \ , \quad \sigma_y = -p + \sigma_y^* \ , \quad \sigma_z = -p + \sigma_z^* \ , \qquad (3.4.16)$$

jossa suure

$$p = -\frac{1}{3}\,(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \qquad (3.4.17)$$

on ns. keskimääräinen normaalijännitys miinusmerkkisenä eli ns. paine. (Paine määritellään termodynamiikan keinoin joskus edellisestä poikkeavalla tavalla.) Suureita σ_x^*, σ_y^*, σ_z^*, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{yx} nimitetään deviaatiojännityskomponenteiksi (engl. deviatoric stress component; deviate = poiketa). Laskemalla yhtälöt (3.4.16)

yhteen saadaan yleinen deviaationormaalijännityskomponentteja koskeva tulos

$$\sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^* = 0 \ . \tag{3.4.18}$$

Deviaatiojännityskomponenttien hävitessä

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \ , \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \tag{3.4.19}$$

ja kaavat (3.4.13) antavat tulokset

$$t_x = -n_x p \ , \quad t_y = -n_y p \ , \quad t_z = -n_z p \tag{3.4.20}$$

eli

$$\vec{t} = -\vec{n}p \ . \tag{3.4.20'}$$

Jännitystilaa (3.4.19), jossa deviaatiojännityskomponentit häviävät, nimitetään isotrooppiseksi, pallomaiseksi tai joskus hydrostaattiseksi jännitystilaksi; viimeinen nimitys ei ole suositeltava. Isotrooppisessa tapauksessa jännitysvektori on siis aina kohtisuorassa pinta-alkiotaan vastaan ja sen suuruus tietyssä pisteessä ei riipu pinta-alkion suunnasta.

Huomautus 1. Kuvassa 3.1.2 esitetystä nesteen määritelmästä seuraa, että jatkuvassa lepotilassa olevassa nesteessä ei voi esiintyä leikkausjännityksiä, koska kaikki liukumanopeudet ovat tällöin taatusti nollia. Samoin kohdassa 5.1 esitellyn ideaalinesteen tapauksessa otaksutaan, että leikkausjännityksiä ei voi esiintyä vaikka neste on liikkeessä.

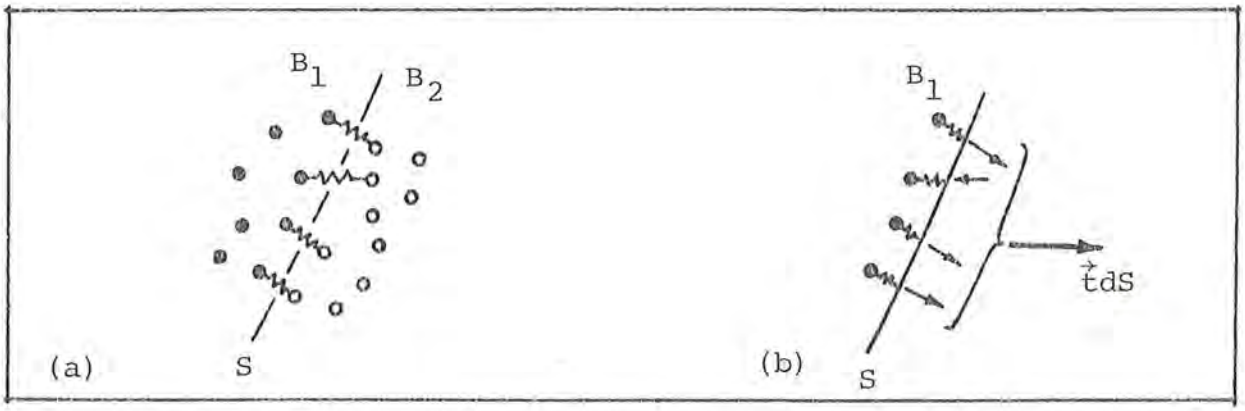
Tarkastellaan nyt yleisesti, mitä leikkausjännitysten puuttumisesta seuraa. Mihin hyvänsä kappaleen pinta-alkioon vaikuttava jännitysvektori $\vec{t}$ on siis pinta-alkion normaalin $\vec{n}$ suuntainen ja voidaan kirjoittaa alustavasti $\vec{t} = -p_n\vec{n}$, jossa p_n on tässä vielä mahdollisesti pinta-alkion suunnasta riippuva kerroin. Myös x-, y- ja z-akseleita vastaan kohtisuorassa oleville pinta-alkioille voidaan vastaavasti kirjoittaa $\vec{t}^{(x)} = -p_x\vec{i}$, $\vec{t}^{(y)} = -p_y\vec{j}$ $\vec{t}^{(z)} = -p_z\vec{k}$, jossa kertoimet p_x, p_y ja p_z ovat vielä tuntemattomia. Yleinen yhtälö (3.4.12) saa siis muodon $-p_n(n_x\vec{i}+n_y\vec{j}+n_z\vec{k}) =$

$n_x(-p_x\vec{i}) + n_y(-p_y\vec{j}) + n_z(-p_z\vec{k})$. Tästä vektoriyhtälöstä saadaan kolme skalaaritulosta: $p_x = p_n$, $p_y = p_n$, $p_z = p_n$. Koordinaatti-akselien suunnat voidaan valita mielivaltaisesti. Täten traktion kerroin tietyssä pisteessä ei riipu pinta-alkion suunnasta ja voidaan kirjoittaa kaavan (3.4.20) mukaisesti $\vec{t} = -p\vec{n}$, jossa kerrointa p nimitetään paineeksi. Vielä toisin sanoen: Jos kaikki leikkausjännitykset häviävät tietyssä pisteessä, myös deviaatiojännitykset häviävät ja kyseessä on isotrooppinen jännitystila.

Voidaan karkeasti sanoa, että aineilla on rasitusten alaisena pyrkimys valua kohti isotrooppista jännitystilaa. Onneksi kuitenkin kiinteät aineet pystyvät ottamaan vastaan kohtuullisia ei-isotrooppisia jännitystiloja ilman muodonmuutosnopeuksia, koska muuten pysyvät rakenteet eivät olisi mahdollisia.

— — —

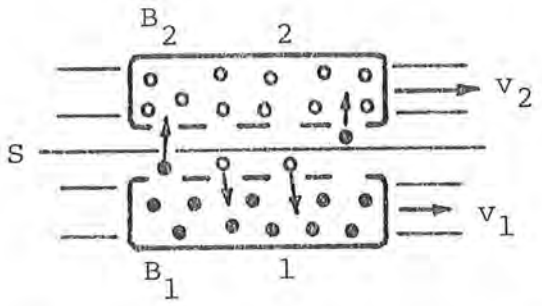
Pyritään vielä tarkastelemaan jännityksen fysikaalista taustaa. Siirtymällä mikroskooppiseen ajatteluun ymmärretään, että kappaleet eivät todellisuudessa koskaan varsinaisesti kosketa toisiaan. Kuva 3.4.14 (a) esittää kappaleiden B_1 ja B_2 välistä rajapintaa S. Rajapinnan viereiset naapurihiukkaset vaikuttavat toisiinsa tietyillä voimilla; tätä on kuvattu symbolisesti jousilla. Hiukkasten väliset voimat pienevät hyvin nopeasti niiden etäisyyden kasvaessa, joten kappaleiden B_1 ja B_2 vuorovaikutus tapahtuu siis äärimmäisen ohuen materiaalikerroksen välityksellä. Tämä vuorovaikutus esitetään makroskooppisesti termillä $\vec{t}dS$, jossa voidaan kuvan 3.4.14 (b) mukaisesti ajatella, että voiman $\vec{t}dS$ vaikutus on samanarvoinen hiukkasten välisten, alueella dS vaikuttavien voimien vaikutuksen kanssa.



Kuva 3.4.14 Kahden kappaleen rajapinta.

Esitetty jännityksen syntymistapa kuvannee kohtuullisesti totuutta kun aine on kiinteässä olomuodossa, jolloin aineen molekyylit ovat lähellä toisiaan ja niiden liike on rajoitettua. Nimitetään näin syntyvää jännitystä koheesiojännitykseksi.

Kun aine on kaasumaisessa olomuodossa, tilanne on aivan erilainen, kuten on tuttua kineettisestä kaasuteoriasta. Käytetään jännityksen syntymisen selittämisessä mukaellen lähteessä [3.7, s. 9] esitettyä vertausta, jota nimitetään tässä junanvaunuanalogiaksi. Kuva 3.4.15 esittää ylhäältä katsottuna kahta yhdensuuntaisilla raiteilla kitkattomasti liikkuvaa junanvaunua. Vaunun 2 nopeus v_2 on suurempi kuin vaunun 1 nopeus v_1. Vaunuissa olevat henkilöt huvittelevat heittelemällä pieniä esineitä suoraan vastakkaisen vaunun avoimista ikkunoista sisään, jolloin esineet lopuksi törmäävät vaunujen seinämiin. Vaunujen liikettä tarkastelee ulkopuolinen havaitsija, joka ei pysty huonon näkökykynsä vuoksi lainkaan havaitsemaan ko. pieniä esineitä. Vaunun 2 esineillä on keskimäärin suurempi nopeus ja siis myös suurempi liikemäärä vaunujen liikesuunnassa kuin vaunun 1 esineillä. Vaunusta 2 vaunuun 1 siirtyvät esineet lisäävät törmätessään vaunun seinämiin vaunun 1 nopeutta ja vastaavasti vaunun 2 nopeus pyrkii pienenemään törmäysten johdosta. Ulkopuolinen havaitsija päättelee tästä käyttäytymisestä, että vaunut vaikuttavat toinen toisiinsa tietyllä voimalla eli vaunujen välillä esiintyy kitkaa. Vaunuissa olevat henkilöt havaitsevat pienten esineiden liikkeen ja selittävät vaunujen käyttäytymisen syyn toisin. Syynä on liikemäärän siirtyminen pinnan S läpi. Jos vaunut liikkuvat samalla nopeudella, liikemäärän (netto-)siirtyminen katoaa ja samoin myös ulkopuolisen havaitsijan mittaama kitka. Tässäkin tapauksessa ulkopuolinen havaitsija toteaa vaunujen vaikuttavan edelleen kiskoihin tietyillä poikittaisilla voimilla, joten siis hänen mielestään vaunujen täytyy vaikuttaa toisiinsa poispäin työntävillä voimilla. Vaunuis-



Kuva 3.4.15 Junanvaunuanalogia.

sa olevat henkilöt näkevät saman ilmiön selityksenä esineiden törmäykset seinämiin. Kun esitetyssä vertauksessa korvataan pienet esineet molekyyleillä, junanvaunut pinnan S läheisillä suurilla molekyylijoukoilla ja ulkopuolinen havaisija kontinuumimekaniikan soveltajalla, päästään lähelle kineettisessä kaasuteoriassa käytettyä jännitysten syntymisen selittämistapaa. Käytetään tässä hiukkasten vaeltamisen johdosta syntyvästä jännityksestä nimitystä kineettinen jännitys.

Yleisessä tapauksessa kokonaisjännitys muodostuu yhteensä koheesiojännityksestä ja kineettisestä jännityksestä.

Liikemäärän taseen periaate. Kontinuumiin vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on siis

$$\vec{F} = \vec{F}_V + \vec{F}_S \ , \tag{3.4.21}$$

jossa massavoimien resultantti $\vec{F}_V$ ja pintavoimien resultantti $\vec{F}_S$ saadaan kaavojen (3.4.6) ja (3.4.7) avulla.

Kappaleen liikemäärä $\vec{p}$ määritellään lauseketta (2.3.35) vastaavalla kaavalla

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \int \vec{v}dm = \int \rho\vec{v}dV \\ &= \int \rho v_x dV\vec{i} + \int \rho v_y dV\vec{j} + \int \rho v_z dV\vec{k} \ . \end{aligned}\right\} \tag{3.4.22}$$

Liikemäärän taseen periaate ((3.2.3): $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$) voidaan kirjoittaa täten muotoon

$$\boxed{\int \rho\vec{b}dV + \int \vec{t}dS = \frac{D}{Dt}\int \rho\vec{v}dV \ .} \tag{3.4.23}$$

Huomautus 2. Myös partikkelimekaniikan kaavat (2.3.38) ja (2.3.39) pätevät sellaisinaan kontinuumille. Tämä havaitaan kirjoittamalla ensin massakeskiön määritelmän (2.3.1) vastine kontinuumille:

$$m\vec{r}_C = \int \rho\vec{r}dV \ . \tag{3.4.24}$$

Derivoidaan tämä yhtälö sitten puolittain ajan suhteen (ainederivaatta). Vasen puoli on $(m\vec{r}_C)^{\cdot} = \cancel{m}^{\cdot}\vec{r}_C + m\vec{r}_C^{\,\cdot} = m\vec{v}_C$. Oikea puoli $(\int \rho\vec{r}dV)^{\cdot} = \int \rho\vec{r}^{\,\cdot}dV = \int \rho\vec{v}dV = \vec{p}$. (Tässä on sovellettu kaavaa (3.3.), jossa $f \triangleq \vec{r}$.) Näin on saatu tulos (2.3.38). Kaava (2.3.39) seuraa nyt helposti, koska $(m\vec{v}_C)^{\cdot} = \cancel{m}^{\cdot}\vec{v}_C + m\vec{v}_C^{\,\cdot} = m\vec{v}_C^{\,\cdot} = m\vec{a}_C$.

— — —

3.4.4 Liikemäärämomentin tase

Kontinuumiin vaikuttavien ulkoisten voimien momentti $\vec{M}$ koostuu massavoimien momentista $\vec{M}_V$ ja pintavoimien momentista $\vec{M}_S$:

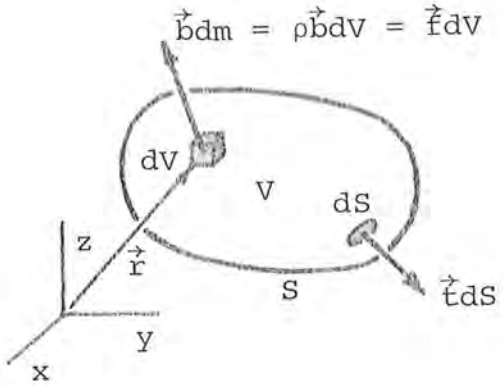
$$\vec{M} = \vec{M}_V + \vec{M}_S \ . \qquad (3.4.25)$$

jossa (ks. kuva 3.4.16)

$$M_V = \int \vec{r}\times\vec{b}dm = \int \rho\vec{r}\times\vec{b}dV \qquad (3.4.26)$$

tai

$$M_V = \int \vec{r}\times\vec{f}dV \qquad (3.4.26')$$



Kuva 3.4.16 Kontinuumikappale.

ja

$$M_S = \int \vec{r}\times\vec{t}dS \ . \qquad (3.4.27)$$

Tässä on otettu origo peruspisteeksi.

Liikemäärämomentti $\vec{L}$ määritellään lauseketta (2.3.40) vastaavalla kaavalla

$$\vec{L} = \int \vec{r}\times\vec{v}dm = \int \rho\vec{r}\times\vec{v}dV \ . \qquad (3.4.28)$$

Liikemäärämomentin taseen periaate ((3.2.4): $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$) voidaan kirjoittaa täten muotoon

$$\boxed{\int \rho\vec{r}\times\vec{b}dV + \int \vec{r}\times\vec{t}dS = \frac{D}{Dt}\int \rho\vec{r}\times\vec{v}dV \ .} \qquad (3.4.29)$$

<u>Huomautus 1.</u> Yhtälön (3.4.29) esitysmuoto, kun peruspisteenä on muu kiinteä piste kuin origo, on ilmeinen. Massakeskiön määritelmää (3.4.23) ja yhtälöä (3.4.24) hyväksikäyttäen voidaan osoittaa, että yhtälö $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ pätee jälleen myös, kun peruspisteenä on massakeskiö.

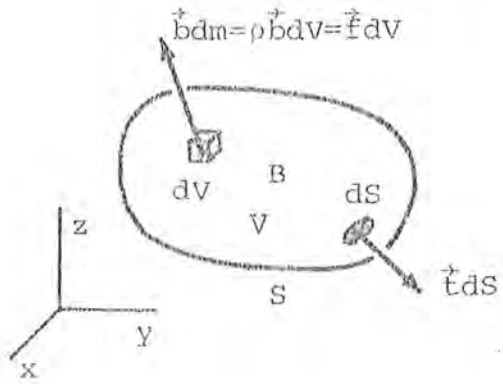
3.4.5 Energian tase

Yleistä. Edelliset kolme aksioomaa olivat käsitteellisesti helppoja partikkelimekaniikassa saatujen tulosten johdosta. Energian taseen periaate vaatii enemmän käsittelyä, jotta siinä esiintyvien suureiden merkitys selviäisi.

Yhtälössä (3.2.6) esiintyvät termit P_{ext}, P_Q, K ja E ovat vastaavasti kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien teho, kappaleen ympäristöstään saama lämpöteho, kappaleen liike-energia ja kappaleen sisäenergia. Käsitellään näitä termejä kutakin erikseen.

Ulkoisten voimien teho. Ulkoisten voimien teho P_{ext} koostuu massavoimien tehosta P^V_{ext} ja pintavoimien tehosta P^S_{ext}. Siis

$$P_{ext} = P^V_{ext} + P^S_{ext} \,, \qquad (3.4.30)$$



Kuva 3.4.17 Kontinuumikappale.

jossa

$$\left.\begin{aligned} P^V_{ext} &= \int \vec{b}\cdot\vec{v}dm = \int \rho\vec{b}\cdot\vec{v}dV \,, \\ &= \int \rho(b_x v_x + b_y v_y + b_z v_z)dV \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.31)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} P^V_{ext} &= \int \vec{f}\cdot\vec{v}dV \,, \\ &= \int (f_x v_x + f_y v_y + f_z v_z)dV \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.31')$$

ja

$$\left.\begin{aligned} P^S_{ext} &= \int \vec{t}\cdot\vec{v}dS \,, \\ &= \int (t_x v_x + t_y v_y + t_z v_z)dS \,. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.32)$$

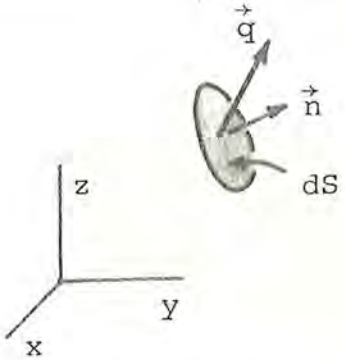
Näiden lausekkeiden muodostuminen ymmärretään ensimmäisen kaavan (2.3.55) ja kuvan 3.4.17 perusteella.

Liike-energia. Kappaleen liike-energia K määritellään lauseketta (2.3.56) vastaavalla kaavalla

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int \vec{v}\cdot\vec{v}dm = \frac{1}{2}\int \rho\vec{v}\cdot\vec{v}dV = \frac{1}{2}\int \rho v^2 dV \ , \\ &= \frac{1}{2}\int \rho(v_x^2+v_y^2+v_z^2)dV \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.33)$$

Täten kysymyksessä on kappaleen makroskooppisesti mitattu liike-energia, joka ei ota huomioon hiukkasten satunnaisliikkeeseen liittyvää osuutta.

Lämpöteho. Soveltamalla energian ja liikemäärien taseiden periaatteita pieneen kontinuumikappaleeseen (kuten kuvassa 3.4.13 esitetty kappale) ja antamalla kappaleen koon kutistua kohti nollaa voidaan osoittaa [3.8, s. 24], että voidaan määritellä ns. lämpövuovektori (engl. heat flux vector) $\vec{q}$ ($[\vec{q}] = W/m^2$), jolla on seuraava ominaisuus. Lämpövuovektori on suure, jonka avulla mielivaltaisen kontinuumissa (tai sen pinnalla) olevan pinta-alkion dS kautta kulkevan lämpövirran tiheys (engl. density of heat flow rate) q_n ($[q_n] = W/m^2$) pinta-alkion yksikkönormaalivektorin $\vec{n}$ osoittamalle puolelle saadaan kaavasta (ks. kuva 3.4.18)



Kuva 3.4.18 Lämpövuovektori $\vec{q}$.

$$\boxed{q_n = \vec{n}\cdot\vec{q}} \qquad (3.4.34)$$

eli

$$q_n = n_x q_x + n_y q_y + n_z q_z \ . \qquad (3.4.34')$$

Suureet $\vec{q}$ ja q_n ovat keskenään vastaavassa suhteessa kuin jännitystensori ja jännitysvektori (vrt. kaava (3.4.14)). Pinta-alkion dS kautta kulkeva differentiaalinen lämpövirta $dP_Q = q_n dS$ ja tietyn kappaleen reunojensa kautta saama ns. lämpövirta eli lämpöteho (engl. heat flow rate) P_Q ($[P_Q] = W$) on täten

$$P_Q = -\int q_n dS = -\int \vec{n}\cdot\vec{q}dS \ . \qquad (3.4.35)$$

Kaavassa esiintyvä miinusmerkki selittyy siitä, että tässä ja jatkossa P_Q määritellään kappaleen saamana lämpövirtana ja taas $\vec{n}$ on määritelty kappaleen pinnasta ulospäin suunnattuna ulkoisena yksikkönormaalivektorina.

On syytä korostaa, että kaava (3.4.34) kuvaa lämpövirran tiheyttä mitattuna ko. pinta-alkioon liittyvän ainepinnan (ks. kohta 3.3.3) suhteen. Ts. tulee ajatella, että kuviteltu ilmiötä mittaava havaitsija liikkuu ko. pinta-alkioon liittyvän ainepinnan mukana ja tarkastelee lämmönsiirtymistä tämän suhteen. Kuten on fysiikasta tuttua, tällainen lämmönsiirtyminen voi tapahtua johtumalla (engl. conduction) ja säteilemällä (engl. radiation) ja siis yhteensä

$$\vec{q} = \vec{q}^{\,c} + \vec{q}^{\,r} \,, \qquad (3.4.36)$$

jossa yläindeksien merkitys on ilmeinen.

Fysiikassa tavallisesti kolmantena lämmönsiirtomuotona mainittu kuljettuminen tai konvektio (engl. convection) liittyy aineen makroskooppisesta liikkeestä johtuvaan energian siirtymiseen paikasta toiseen aineen mukana ja kysymyksessä on aivan eri asia kuin kaavasta (3.4.36). Kuljettuminen tulee automaattisesti mukaan lopullisiin yhtälöihin nopeuden $\vec{v}$ yhteydessä esiintyvien termien kautta.

Johtumiseen liittyvä tavanomainen konstitutiivinen yhteys on Fourierin lämmönjohtumislaki. Säteilyn tapauksessa ei voida esittää mitään yksinkertaisia konstitutiivisia yhteyksiä. Kysymyksessä on monimutkainen ilmiö, jossa tietystä alkiosta emittoituva säteily levitessään absorboituu muihin alkioihin, joista se taas emittoituu jne. Tavallisesti säteily voidaan kuitenkin jättää huomioon ottamatta kontinuumin sisällä. Poikkeuksiakin on: esimerkiksi korkeassa lämpötilassa olevan lasimassan käsittely tai auringon säteilyn vaikutus vesistöjen pintakerroksissa. Usein säteilyn vaikutus pyritään esittämään likimääräisesti ilman vektorin $\vec{q}^{\,r}$ käyttöä eräänlaisena sisäenergian lähdeterminä (ks. kohta 5.6). Mikroskooppiselta kannalta säteilyn vaikutusta voidaan yrittää havainnollistaa fotonitulkinnalla: Kappaleen ulkopuolelta saapuvat fotonit sysivät kappaleen hiukkasia ja muuttavat täten kappaleen sisäenergian arvoa.

Sisäenergia. Kappaleen tilaan liitetään suure E ([E] = J), ns. sisäenergia tai sisäinen energia (engl. internal energy). Sitä on pyritty selittämään esimerkissä 3.4.1. Sisäenergia muodostuu hiukkasten makroskooppisesti näkymättömien energiamuotojen summasta: molekyylien satunnaisliikkeen liike-energia, molekyylien välisten voimien potentiaalienergiat ym. hiukkasten vastaavat osuudet.

Kun sisäenergiaa massalla jaettuna eli ns. ominaissisäenergiaa (engl. specific internal energy) merkitään tunnuksella e ([e] = J/kg^{-1}), kappaleen sisäenergia saadaan lausekkeena

$$E = \int e\,dm = \int \rho e\,dV \ . \tag{3.4.37}$$

E ja e ovat tilasuureita. Riippuu konstitutiivisen mallin monimutkaisuudesta, mistä kaikista muuttujista niiden ajatellaan riippuvan.

Energian taseen periaate ((3.2.6): $P_{ext} + P_Q = \dot{K} + \dot{E}$) voidaan nyt kirjoittaa edellä esitettyjen lausekkeiden avulla muotoon

$$\boxed{\int \rho \vec{b}\cdot\vec{v}\,dV + \int \vec{t}\cdot\vec{v}\,dS - \int \vec{n}\cdot\vec{q}\,dS = \frac{D}{Dt}\frac{1}{2}\int \rho\vec{v}\cdot\vec{v}\,dV + \frac{D}{Dt}\int \rho e\,dV \ .} \tag{3.4.38}$$

Ajattelemalla tämä yhtälö integroiduksi puolittain tietyn ajan välin yli saadaan tarvittaessa aksiooman (4) muoto (3.2.5).

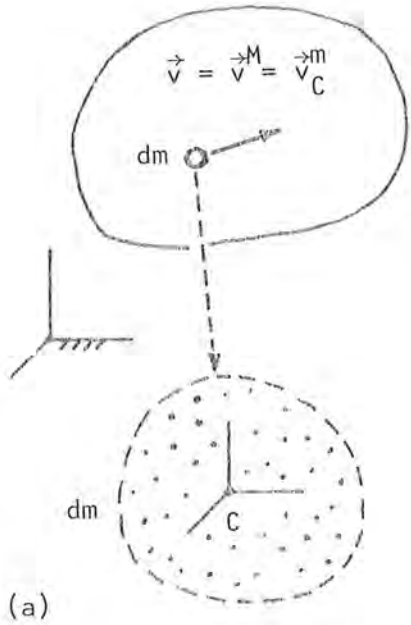
Esimerkki 3.4.1 Mikroskooppinen ja makroskooppinen työ ja energia [3.9, s. 313].

Tarkastellaan kontinuumia kohdassa 3.4.2 esitetyllä tavalla hiukkasista muodostuvana mikrosysteeminä ja yritetään näin havainnollistaa kontinuumia koskevia energiakäsitteitä. Varustetaan makroskooppisella ja mikroskooppisella tarkastelulla saadut suureet tarvittaessa vastaavasti yläviitteellä M ja m.

Kuva (a) esittää kontinuumia ja sen ainealkiota "suurennettuna" ja varustettuna omalla massakeskiökoordinaatistollaan (vrt. kuva 2.3.14).

Ainealkion massakeskiön nopeus $\vec{v}_C^m$ on massakeskiön määritelmän (2.3.1) perusteella (derivoidaan yhtälö kerran)

$$\vec{v}_C^m = (\Sigma\, m_i \vec{v}_i^m)/\Sigma\, m_i \ , \tag{a}$$



(a)

jossa $\Sigma\, m_i = dm$, on ilmeisesti lähinnä sama kuin alkiolle makroskooppisella mittauksella saatu nopeus $\vec{v} = \vec{v}^M$. Kaava (a) kuvaa tavallaan mikroskooppisen tarkkailijan määrittelemää keskimääräistä suodatettua (engl. filtering) nopeutta. Makroskooppinen tarkkailija näkee rajoitetun erottamiskykynsä johdosta saman ainemäärän liikkeestä vain pelkästään tämän suodatetun arvon.

Ainealkion mikroskooppinen liike-energia on Koenigin lauseen (2.3.57) avulla esitettynä

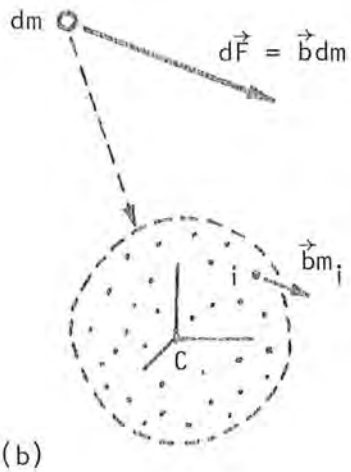
$$\begin{aligned} dK^m &= \frac{1}{2}\, dm(v^m_C)^2 + dK^m_r \\ &= \frac{1}{2}\, dmv^2 + dK^m_r \\ &= dK^M + dK^m_r\,, \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

jossa dK^m_r on siis alkion massakeskiön suhteen mitattu suhteellinen liike-energia. Integroimalla yhtälö (b) puolittain yli kontinuumin aine-alkioiden saadaan tulos

$$K^m = K^M + \int dK^m_r\,. \qquad \text{(c)}$$

Mikroskooppisesti ja makroskooppisesti mitatut kappaleen liike-energiat eivät siis ole yhtä suuria. ($K^m \geq K^M$, koska $\int K^m_r \geq 0$.) Kun mekaniikassa puhutaan kappaleen liike-energiasta, sillä tarkoitetaan juuri makroskooppista arvoa. Makroskooppisesti levossa olevalla kappaleella $K^M = 0$, mutta kappaleella voi silti olla runsaasti mikroskooppista liike-energiaa termin $\int dK^m_r$ johdosta. Makroskooppiset lämpötilamittaukset voivat antaa tietoa termistä $\int dK^m_r$.

Ulkoisten kenttävoimien eli massavoimien teho ja työ tulevat olemaan samoja laskettuina makroskooppisesti ja mikroskooppisesti. Ainealkioon vaikuttavan ulkoisen voiman $d\vec{F} = \vec{b}dm$ makroskooppinen teho (kuva (b))



(b)

$$dP^M_{ext} = \vec{b}dm \cdot \vec{v}\,. \qquad \text{(d)}$$

Kun otaksutaan, että kenttävoimakkuus $\vec{b}$ on likimain vakio pienen alkion alueella, mikroskooppinen teho (vrt. esimerkki 2.3.3)

$$\begin{aligned} dP^m_{ext} &= \Sigma\, \vec{F}^m_i \cdot \vec{v}^m_i = \Sigma\, \vec{F}_i \cdot \vec{v}^m_C + \Sigma\, \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}^m_{i/C} \\ &= \Sigma\, \vec{b}m_i \cdot \vec{v}^m_C + \Sigma\, \vec{b}m_i \cdot \dot{\vec{r}}^m_{i/C} \\ &= \vec{b}(\Sigma\, m_i) \cdot \vec{v}^m_C + \cancel{\vec{b}\Sigma\, m_i \cdot \dot{\vec{r}}^m_{i/C}} \end{aligned}$$

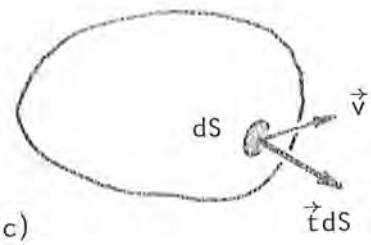
$$= \vec{b}dm \cdot \vec{v} = dP^M_{ext} \ . \qquad \text{(e)}$$

Integrointi antaa siis kenttävoimille tuloksen $P^m_{ext} = P^M_{ext}$ eli myös $W^m_{ext} = W^M_{ext}$.

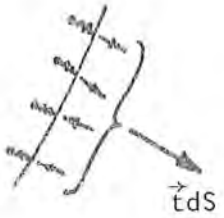
Sen sijaan kappaleen reunalla vaikuttavien ulkoisten voimien makroskooppinen ja mikroskooppinen teho ja työ tulevat poikkeamaan toisistaan. Pintavoimien (kuva (c)) makroskooppinen teho

$$P^M_{ext} = \int \vec{t} \cdot \vec{v} dS \ . \qquad \text{(f)}$$

Siirtymällä mikroskooppiseen tarkasteluun (kuva (d)) havaitaan, että kappaleen pinnan läheiset kappaleen ulkopuoliset hiukkaset voivat tehdä työtä kappaleen hiukkasiin, vaikka kappaleen reuna olisi makroskooppisessa mielessä liikkumatta. Tätä työtä, jota ei voida mitata muodossa makroskooppinen voima kertaa makroskooppinen siirtymä, nimitetään kappaleen saamaksi lämmöksi W_Q. (Tarkemmin äskeinen kuvailu liittyisi lähinnä lämmön johtumiseen. Säteilyn osuus tulisi esittää massattomien hiukkasten, fotonien, törmäyksinä kappaleen hiukkasiin.) Täten kappaleen reunalla vaikuttaville voimille pätee $W^m_{ext} = W^M_{ext} + W_Q$ tai $P^m_{ext} = P^M_{ext} + P_Q$, jossa P_Q on kappaleen saama lämpö aikaa kohti eli ns. lämpöteho. Täten massavoimille ja pintavoimille saadaan siis yhteisesti tulos



(c)



(d)

$$W^m_{ext} = W^M_{ext} + W_Q \ . \qquad \text{(g)}$$

Yleensä ollaan sitä mieltä, että luonto on mikroskooppisella tasolla konservatiivinen. (Ajatellaan esimerkkinä eristetyssä säiliössä olevaa kaasua. Jos kaasumolekyylien välillä olisi kitkaa, molekyylien liike hidastuisi ja lopuksi molekyylit lepäisivät säiliön pohjalla!) Täten mikroskooppisilla sisäisillä voimilla on potentiaalienergia V^m_{int} ja mikroskooppisten sisäisten voimien tietyssä prosessissa tekemä työ (vrt. kaava (2.3.69))

$$W^m_{int} = -\Delta V^m_{int} \ . \qquad \text{(h)}$$

Yleiselle partikkelisysteemille johdettu energiaperiaate (2.3.61) on tämän esimerkin merkinnöin

$$W^m_{ext} + W^m_{int} = \Delta K^m \ . \qquad \text{(i)}$$

Kun tähän sijoitetaan tulokset (c), (g) ja (h), saadaan yhtälö

$$W^M_{ext} + W_Q - V^m_{int} = \Delta K^M + \Delta \int K^m_r \qquad \text{(j)}$$

eli

$$W^M_{ext} + W_Q = \Delta K^M + \Delta E \ , \qquad (k)$$

jossa suuretta

$$E = V^m_{int} + \int K^m_r \qquad (l)$$

voidaan nimittää systeemin ns. sisäiseksi energiaksi. Kun kaavasta (k) poistetaan yläviitteet, saadaan aksiooma (3.2.5).

Äskeistä esitystä ei voida tietenkään pitää minään eksaktina johtona. Kuitenkin se osoittaa, että energian taseen periaate on tietyllä tavalla ilmentymä partikkelisysteemin energiaperiaatteesta. Makroskooppinen havaitsija ei vain pysty havaitsemaan sen tiettyjä termejä vastaavasti kuin mikroskooppinen havaitsija ja tämän vuoksi energiaperiaate täytyy lausua uudella tavalla.

Sisäisen energian nähdään olevan riippumaton valitusta inertiaalikoordinaatistosta. Ensinnäkin kukin termi $dK^m_r = \frac{1}{2}\Sigma\, m_i |\dot{\vec{r}}_{i/C}|^2$ pysyy arvoltaan muuttumattomana valittiinpa alkion massakeskiökoordinaatiston suuntautuneisuus miten hyvänsä. Toiseksi esimerkissä 2.3.2 osoitettiin, että sisäisten voimien työ ja siis myös niiden potentiaalienergia on koordinaatistosta riippumaton. Täten sana sisäinen on osuva tässä yhteydessä, koska sisäinen energia on jotain pelkästään ko. kappaleeseen liittyvää päin vastoin kuin esimerkiksi suureet W_{ext} ja K, joiden arvot riippuvat valitusta inertiaalikoordinaatistosta.

Ainealkion mikroskooppinen liikemäärä on esimerkin 2.3.3 kaavan (g) perusteella

$$d\vec{p}^m = dm\vec{v}^m_C = dm\vec{v} = d\vec{p}^M \ .$$

Täten kappaleen mikroskooppinen liikemäärä $\vec{p}^m$ on yhtä suuri kuin makroskooppinen liikemäärä $\vec{p}^M$. Tämä selittää osittain liikemäärän periaatteen identtiset muodot partikkeli- ja kontinuumimekaniikassa. Energiaperiaatteeseen liittyvät yhteydet tulivat mutkikkaammiksi, koska $K^m \neq K^M$ ja $W^m \neq W^M$.

Termodynamiikkaa. Energiayhtälö on aihe, jota käsitellään etenkin termodynamiikan tai ns. lämpöopin alaan kuuluvassa kirjallisuudessa. Kuitenkin energiayhtälö on välttämätöntä ottaa mukaan myös vähänkin täsmällisesti konstruoituun kontinuumimekaniikan teoriaan. Kontinuumiteoriaa, jossa lämpötila-, lämpö- ja entropiakäsitteillä on oleellinen sija, nimitetään nykyään usein termomekaniikaksi (engl. thermomechanics). On ilmeistä, että termomekaniikka tulee muodostumaan tulevaisuudessa yhä tärkeämmäksi osaksi yleistä mekaniikkaa. [2.6, s. v]: "Kontinuumimekaniikka ja termodynamiikka ovat erottamattomat: yleiseen kontinuumimekaniikan teoriaan sisältyy aina termodynamiikka ja kääntäen".

Tavanomaiset termodynamiikan ja lämpöopin alkeisesitykset ovat usein niin rajoittuneita, että niistä saa vääristyneen kuvan vallitsevista peruslaeista. [2.6, s. 56]: "Termodynamiikan kohteena on pitkään ollut — ja melko koko kirjallisuus pitää edelleen kohteenaan — äärellinen ainemäärä, tavallisesti kaasu, ja sitä sanomatta säännönmukaisesti otaksutaan, että tila on sama läpeensä koko alueessa. Mekaniikassa tämä lähestymistapa merkitsisi, että tarkasteltaisiin vain homogeenisia muodonmuutos- ja jännitystiloja. Tämä estäisi ratkaisemasta jopa kaikkein yksinkertaisimpia lujuusopin tehtäviä: esimerkiksi taivutetussa tai väännetyssä sauvassa muodonmuutos ja jännitys ovat paikan funktioita."

Täten termodynamiikka pitää käsitellä kontinuumimekaniikan yhteydessä kenttäteoriana (engl. field theory) eli siis siten, että ko. suureita kuten lämpötilaa, ominaissisäenergiaa jne. pidetään paikan ja ajan funktioina vastaavasti kuten esimerkiksi siirtymiä ja nopeuksia.

Tarkastellaan kohdassa 2.3.5 käsiteltyjä tilafunktiokäsitettä lisää nyt kontinuumimekaniikan kannalta.

Lämpöopissa termodynaamisia prosesseja tarkastellaan yleensä systeemissä, joka muodostuu äärellisessä säiliössä olevasta kaasumäärästä, jonka tilaa kontrolloidaan siirtämällä yhden seinämän muodostavaa mäntää ja antamalla systeemin saada tai luovuttaa lämpöä. (Usein operoidaan lisäksi suureen ρ sijasta ns. ominaistilavuuden (engl. specific volume) $V/m = 1/\rho$ avulla.) Kontinuumimekaniikassa voidaan ajatella, että kukin pieni erillinen ainealkio vastaa liikkuessaan ja muotoaan muuttaessaankin em. systeemiä; ts. otaksutaan, että ainealkion alueella vallitsee riittävällä tarkkuudella ns. termodynaaminen tasapainotila siten, että äärelliselle systeemille tasapainotilassa mitatut riippuvuudet pätevät samanlaisina ainealkiollekin. Tästä menettelytavasta käytetään joskus nimitystä <u>lokaalisen tasapainon postulaatti</u> (engl. postulation of local equilibrium).

Yleisemmin tilamuuttujina esiintyy muitakin kinemaattisia suureita kuin tiheys. Näitä voivat olla esimerkiksi venymäkomponentit $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ ja vaikka deformaationopeudet $\overleftrightarrow{d}$. Kemiallisessa seoksessa tilamuuttujina voisivat olla lisäksi seoskomponenttien konsentraatiot jne. Kukin aineen konstitutiivisia yhteyksiä mallitettaessa valitaan tietyt tilamuuttujat riippumattomiksi muuttujiksi

ja loput tilamuuttujat ajatellaan näiden funktoiksi.

Esimerkiksi tavanomaisten nesteiden yhteydessä otaksutaan että riittää, kun vain kaksi tilamuuttujaa valitaan riippumattomiksi (esimerkiksi tiheys ρ ja termodynaaminen lämpötila T). Ainetta, jonka suhteen voidaan tehdä riittävällä tarkkuudella em. otaksuma, nimitetään joskus yksinkertaiseksi kokoonpuristuvaksi aineeksi (engl. simple compressible substance) [3.10, s. 80]. Tätä tapausta tullaan käsittelemään jatkossa eräänlaisena mallitapauksena sen yksinkertaisuuden vuoksi. Huomautettakoon vielä, että kontinuumimekaniikan lopulliset riippumattomat muuttujat ovat paikkakoordinaatit x, y, z ja aika t (jos Eulerin esitys). Kun edellä puhuttiin riippumattomista muuttujista — esimerkiksi paine $p = p(\rho,T)$ — , oli kysymys näistä suureista jonkin konstitutiivisen yhteyden kannalta. Mutta koska esimerkiksi $\rho = \rho(x,y,z,t)$, $T = T(x,y,z,t)$, on siis lopuksi myös $p = p(x,y,z,t)$.

Kerrattakoon tavanomaisimpien termodynaamisten prosessien eli tilanmuutosten yhteydessä käytettyjä nimityksiä.

Isoterminen prosessi (engl. isothermal process): systeemin lämpötila ei muutu prosessissa.

Isobaarinen prosessi (engl. isobaric process): systeemin paine ei muutu prosessissa.

Isokoorinen prosessi (engl. isochoric process): systeemin tilavuus (tiheys) ei muutu prosessissa.

Adiabaattinen prosessi (engl. adiabatic process): systeemi ei saa lämpöä ulkopuoleltaan prosessissa.

Isentrooppinen prosessi (engl. isentropic process): systeemin entropia ei muutu prosessissa.

Kontinuumimekaniikassa näitä termejä tulee siis soveltaa erikseen systeemiin = kukin ainealkio. Todellisuudessa johonkin ilmiöön liittyvät prosessien tapahtumistavat ovat tavallisesti etukäteen tuntemattomia ja ne määräytyvät periaatteessa osana ratkaisua. Yllä esitetyt prosessit esiintyvät kuitenkin usein puhtaina sopivissa koejärjestelyissä aineiden ominaisuuksia mitattaessa. Joskus esimerkiksi termillä isoterminen tarkoitetaankin vain, että lämpötila on sama prosessin alussa ja lopussa.

Huomautus 1. Termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö esitetään lämpöopissa usein muodossa

$$W_{ext} + W_Q = \Delta E \tag{3.4.39}$$

tai

$$đW_{ext} + đW_Q = dE \ . \tag{3.4.39'}$$

Tällöin on kuitenkin itse asiassa kyseessä pelkän termostatiikan sovellutus yhtälöön (3.2.5). On tarkasteltu prosessia, jossa systeemi on alku- ja lopputilassa tasapainotilassa, jolloin systeemin makroskooppinen liike-energia on nolla alussa ja lopussa ja siis myös $\Delta K = 0$. Vaihtoehtoisesti kaava (3.4.39) pätee myös hyvin hitaasti tapahtuvissa prosesseissa, joissa koko ajan $K \approx 0$.

Jos käsitellään kaasua, jossa otaksutaan vallitsevan isotrooppisen jännitystilan, traktio $\vec{t} = -\vec{n}p$ kaavan (3.4.20') perusteella. Täten pintavoimien tekemä differentiaalinen työ on kaavan (3.4.32) avulla lausuttuna

$$đW^S_{ext} = P^S_{ext}dt = (\int \vec{t}\cdot\vec{v}dS)dt = \int \vec{t}\cdot\vec{v}dtdS$$

$$= -\int \vec{n}p\cdot\vec{v}dtdS = -p\int v_n dtdS = -pdV \ . \tag{3.4.40}$$

Tässä on siis vielä otaksuttu, että paine on vakio paikan suhteen kappaleen pinnalla. Suure dV on kappaleen tilavuuden muutos. Tulos ymmärretään kuvaa 3.3.13 tarkastelemalla.

Kaava (3.4.40) esittää tavanomaisinta lämpöopin kirjoissa esiintyvää systeemin saaman differentiaalisen työn muotoa. Esimerkiksi isobaarisessa prosessissa saadaan täten $W^S_{ext} = -p\Delta V$, jossa ΔV on kappaleen tilavuuden muutos.

4 KIINTEÄN AINEEN MEKANIIKKA

4.1 Yleistä

Lagrangen esityksessä kinematiikan tarkastelu tulee yksinkertaiseksi, mutta sen sijaan kineettisten yhteyksien käsittely on suurten siirtymien yhteydessä monimutkaista. Eulerin esityksessä tilanne on päinvastainen ja etenkin kineettiset yhteydet ovat melko helposti johdettavissa. Tämän vuoksi yleisiä aksioomia esiteltiin kohdassa 3.4 lähinnä Eulerin esityksen kannalta.

Nestemekaniikassa ollaan yleensä kiinnostuneita virtauksen laadusta — nopeusjakautuma, painejakautuma, jne. — tietyssä avaruuden osassa eikä niinkään tiettyjen partikkelien liikkeen historiasta. Kiinteän aineen mekaniikassa tilanne on yleensä toinen, tiettyjen partikkelien liike on tärkeä tuntea; esimerkiksi mikä on palkin keskipisteen siirtymä jne. Tämä antaa erään selityksen erilaisten esitystapojen käytölle.

Joskus kiinteän aineen mekaniikassakin käytetään Eulerin esitystä, esimerkiksi suurten plastisten muodonmuutosten käsittelyssä. Samoin kääntäen nesteiden yhteydessä voidaan toisinaan käyttää Lagrangen esitystä, esimerkiksi kun siirtymät ovat pieniä tai kun on tarpeen seurata tietyn ainepinnan liikettä. On olemassa myös esitystapoja, jotka ovat välimuotoja Lagrangen ja Eulerin esityksistä [4.1].

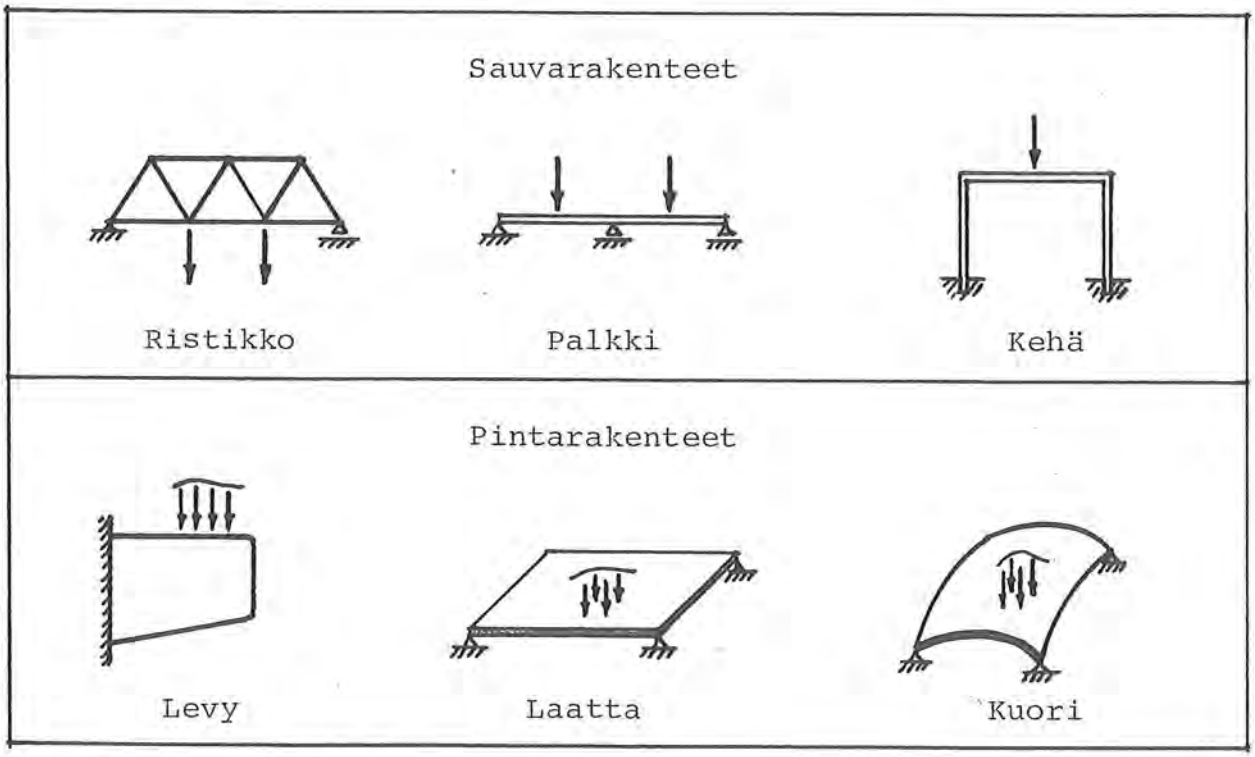
Tässä luvussa pidetään siis pohjana Lagrangen esitystä ja selostetaan yleisten aksioomien siinä saamia yksityiskohtaisia muotoja. Lisäksi käsitellään esimerkkitapauksena lineaarisesti kimmoisen ainemallin yhteydessä syntyviä yleisten yhtälöiden erityisversioita.

Kiinteän aineen mekaniikan tärkeimpiä teknillisiä sovellutuksia ovat kappaleisiin syntyvien siirtymien ja jännitysten määrittäminen. Jos ne kasvavat liian suuriksi, kappaleen — esimerkiksi tietyn rakenteen — käyttökelpoisuus vaarantuu.

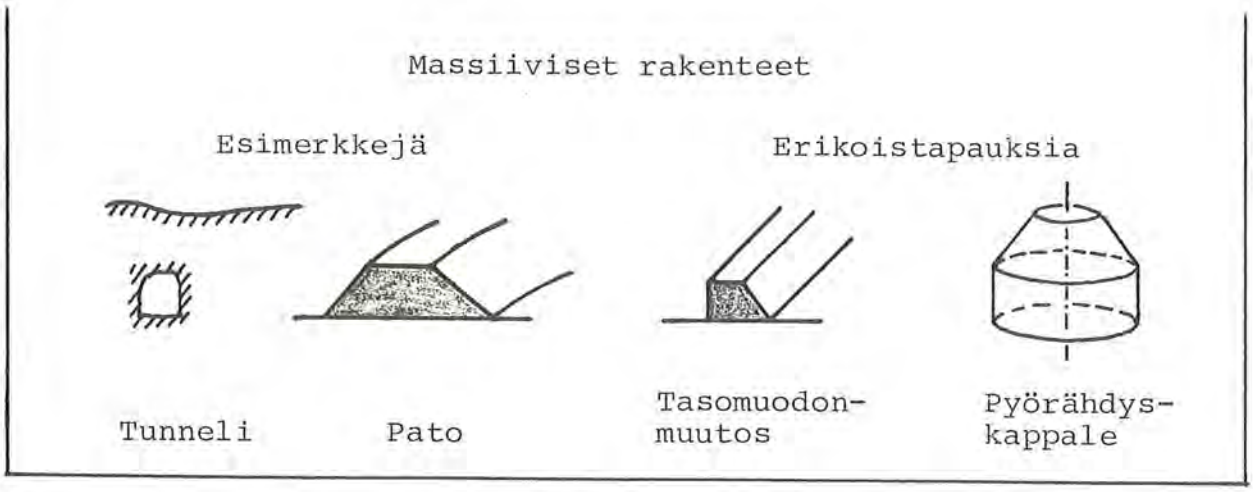
Lyhyesti sanottuna kohdan 3.2 aksioomat (1), (2) ja (3) kuvaavat puhtaasti mekaanisia ilmiöitä ja vasta aksioomassa (4) on mukana termodynamiikkaa eli ns. termisiä (engl. thermal) — lämpötilaan, lämpöön jne. liittyviä — ilmiöitä. Yleisessä termomeka-

niikan probleemassa aksioomista (1)...(4) syntyvät yhtälöt ovat kytkettyjä ja ne on ratkaistava kaikki samanaikaisesti, mikä tekee käsittelyn vaikeaksi. Kuitenkin on tapauksia, joissa kytkentä mekaanisten ja termisten ilmiöiden välillä on niin heikko, että ne voidaan käsitellä erillisinä, jolloin laskelmat helpottuvat ratkaisevasti. Näin on laita melkein aina rakenteiden mekaniikassa. Esimerkiksi lämpöjännitysten teoriassa lasketaan ensin aksioomasta (4) johdetun ns. lämmönjohtumistehtävän avulla lämpötilajakautuma rakenteessa. Tämän jälkeen suoritetaan erillinen jännitysanalyysi tavanomaiseen tapaan ottaen vain huomioon lämpötilajakautumasta johtuvat alkumuodonmuutokset.

Syntyvät probleemat voidaan luokitella monella eri tavalla. Tutkittavan kappaleen muodon ja kuormitustavan perusteella kappaleista käytetään rakenteiden yhteydessä mm. kuvassa 4.1.1 näkyviä nimityksiä. Tavanomaisten otaksumien jälkeen tarvitaan sauvarakenteissa yksi riippumaton paikkakoordinaatti, pintarakenteissa kaksi koordinaattia ja massiivisissa eli kolmidimensioisissa rakenteissa yleensä kaikki kolme paikkakoordinaattia. Tasomuodonmuutostapauksessa sekä pyörähdyssymmetrisesti kuormitetun pyörähdyskappaleen tapauksessa tullaan toimeen kahden paikkakoordinaatin avulla. Tässä esityksessä selostetaan lähinnä vain yleisessä kol-



Kuva 4.1.1 jatkuu



Kuva 4.1.1 Jako kappaleen muodon mukaan.

midimensioisessa tapauksessa syntyviä yhtälöitä. Itse asiassa yhtälöiden synnyttäminen erikoistapauksissa ei ole kovin vaikeaa etenkään, jos perustana on virtuaalisen työn periaate tai jokin vastaavantyyppinen formulaatio, jolloin vallitsevia differentiaaliyhtälöitä ei tarvitse kirjoittaa periaatteessa lainkaan näkyviin. Joitakin erikoistapauksia on esitetty kuitenkin kohdassa 6.1.

Toinen mahdollinen jakoperuste liittyy kappaleen liiketilaan. Joskus käytetään nimityksiä stationaarinen (engl. stationary) eli pysyvä (engl. steady) ja epästationaarinen (engl. nonstationary) eli transientti (engl. transient) tila sen mukaan, onko kappaleen tila ajan suhteen muuttumaton vai ei. Tavallisemmin puhutaan rakenteiden yhteydessä kuitenkin vastaavasti staattisesta ja dynaamisesta tapauksesta. Dynaamisella probleemalla tarkoitetaan yleensä lisäksi sitä, että hitausvoimat on otettava tehtävässä huomioon. Jos hitausvoimat voidaan jättää huomioonottamatta epästationaarisessa tapauksessa, käytetään usein nimitystä kvasistaattinen tapaus.

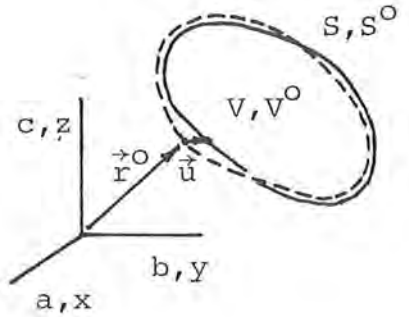
Kolmas jakoperuste liittyy syntyvien yhtälöiden matemaattiseen muotoon; jaetaan probleemat [4.2] tasapaino-, ominaisarvo- ja etenemistehtäviin (engl. equilibrium, eigenvalue, propagation problem). Näistä ovat kimmoisessa kappaleessa esimerkkeinä vastaavasti jännitys- ja siirtymätilan määrittäminen pysyvien kuormien alaisena, hoikan kappaleen stabiiliustarkastelu tai vapaasti värähtelevän kappaleen ominaismuotojen ja ominaistaajuuksien määrittäminen sekä kappaleen jännitys- ja siirtymätilan määrittäminen nopeasti ajan mukana muuttuvien kuormien alaisena. Luokittelu on siis

osittain sama kuin edellisessä kohdassa esitetty.

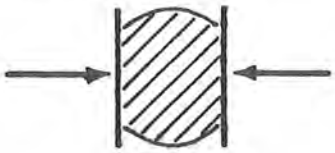
Matemaattisessa mielessä oleellinen seikka tehtävän vaikeuden kannalta on kuitenkin kysymys syntyvien yhtälöiden lineaarisuudesta tai epälineaarisuudesta. Epälineaarisuus voi syntyä kahdesta eri syystä. Jos jännitys-venymäyhteys ei noudata ns. lineaarista yleistettyä Hooken lakia (tai yleisemmin mikä hyvänsä konstitutiivinen riippuvuus ei ole lineaarinen), puhutaan fysikaalisesta epälineaarisuudesta (engl. physical nonlinearity). Esimerkiksi ns. kimmoplastisesta aineesta oleva rakenne on täten fysikaalisesti epälineaarinen. Kun kappaleen siirtymät ovat niin suuria, että kappaleen liike- tai tasapaino- yms. yhtälöitä muodostettaessa on otettava huomioon kappaleen muuttunut geometria, puhutaan geometrisesta epälineaarisuudesta (engl. geometrical nonlinearity). Yleisessä tapauksessa kummatkin epälineaarisuuden syyt ovat mukana. Taulukossa 4.1.1 on pyritty havainnollistamaan geometrisen lineaarisuuden ja epälineaarisuuden eroja.

On helppo ymmärtää, että suurten siirtymien käsittely johtaa pakosta hyvin monimutkaisiin yhtälöihin. Onneksi suuri osa kiinteän aineen mekaniikan tehtävistä on kuitenkin sellaisia, joissa

Taulukko 4.1.1 Jako liikkeen suuruuden mukaan.

Geometrinen lineaarisuus	Huomautuksia
Pienten eli infinitesimaalisten siirtymien teoria (engl. small displacement theory). Tilanne siirtymät liioiteltuna: 	Muodonmuutoksien $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ ja siirtymien $\vec{u}$ välinen riippuvuus on lineaarinen: $\varepsilon_a = \frac{\partial u_a}{\partial a}, \ldots$ Siirtymät ovat niin pieniä, että kappaleen liike —, tasapaino — yms. yhtälöt voidaan ajatella muodostetuiksi kappaleen alkuperäisen geometrian suhteen. Muodonmuutoskomponentit $\varepsilon_a << 1, \ldots$

Taulukko 4.4.1 jatkuu

Geometrinen epälineaarisuus	Huomautuksia
Suurten siirtymien teoria (engl. large displacement theory). Esimerkkejä: Kuroutuminen vetokokeessa Kumijousen puristuminen  Sauvan nurjahdus 	Muodonmuutosten $g_{\varepsilon}^{\leftrightarrow}$ ja siirtymien $\vec{u}$ välinen riippuvuus on epälineaarinen: $$g_{\varepsilon_{aa}} = \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_a}{\partial a}\right)^2 + \ldots\right.$$ Kappaleen liike -, tasapaino- yms. yhtälöitä muodostettaessa kappaleen uusi muuttunut geometria on otettava huomioon. Tärkeä erikoistapaus on etenkin ns. taipuisien kappaleiden yhteydessä usein pätevä suurten siirtymien mutta pienten muodonmuutosten teoria. Vrt. nurjahdus.

siirtymiä voidaan pitää pieninä. Käytännön rakenteissahan ei voida yleensä sallia kovin suuria siirtymiä ilman käyttökelpoisuuden menetystä. Pienten siirtymien teoriassa ero Lagrangen ja Eulerin esitystapojen välillä katoaa.

Huomautus 1. Suurten siirtymien yhteydessä syntyvien muodonmuutosten ei luonnollisestikaan tarvitse olla aina vastaavasti suuria; otetaan esimerkiksi vaikka junanvaunun liike.

4.2 Kiinteiden aineiden konstitutiivisia yhteyksiä

Yleistä. Eri aineet käyttäytyvät mekaanisten rasitusten ja lämpötilamuutosten alaisina eri tavoin. Tämän laskennolliseksi esittämiseksi tarvitaan kunkin aineen fysikaalisia ominaisuuksia kuvaavia tunnuslukuja sekä näiden riippuvuuksia toisistaan eli ns. konstitutiivisia yhteyksiä.

Tässä yhteydessä keskitytään pienen ainealkion (suljettu systeemi) tietyissä prosesseissa kokemiin muutoksiin ja yleensä ei tule näkyviin, onko kyseessä Lagrangen vai Eulerin esitystapa. Täten monet nyt esitettävät käsitteet ovat käytössä vastaavina myös nesteille eikä niitä enää välttämättä toisteta kohdassa 5.2. Paitsi konstitutiivisia yhteyksiä tässä kohdin esitellään lisäksi aiheeseen liittyvää standardisoitua terminologiaa [3.6].

On ymmärrettävää, että eri materiaalien — metalli, muovi, betoni, puu, eläinkudos, kallio, hiekka, savi jne. — konstitutiiviseen mallittamiseen ei voida antaa mitään yksinkertaisia yleispäteviä ohjeita. Numeeristen ratkaisumenetelmien kehittyminen on johtanut tilanteeseen, jossa hyvinkin hienostuneita malleja voidaan rakentaa sisään algoritmeihin; mallien tulisi vain olla realistisia. Aikaisemmin käsilaskentamenetelmiä käytettäessä mutkikkaiden mallien käyttöön ei luonnollisestikaan ollut mahdollisuuksia. Nykyään tehdään paljon konstitutiiviseen teoriaan liittyvää kehitystyötä, koska alue on tullut erittäin tärkeäksi. Tässä esityksessä rajoitutaan kuvaamaan lähinnä kahta esimerkkitapausta: kiinteän aineen yhteydessä lineaarisesti kimmoisen aineen malli ja nesteen yhteydessä Newtonin nesteen malli.

Tiheys. Aineen tiheys ρ ($[\rho] = \mathrm{kgm}^{-3}$) saadaan suhteena

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{4.2.1}$$

jossa m ($[m] = \mathrm{kg}$) on tietyn ainemäärän massa ja V ($[V] = \mathrm{m}^3$) on vastaava tilavuus. Kaava on kirjoitettu otaksuen aineen tila vakioksi koko alueessa V. Jos näin ei ole, kaava on tarkennettava määritelmän (3.4.1) mukaiseksi eli paikallinen tiheys $\rho = dm/dV$. Tässä kohdassa käytetään kuitenkin mukavuussyistä kaavan (4.2.1)

merkintöjä ymmärtäen samalla, että jos tila ei ole vakio paikan suhteen, m ja V on tulkittava differentiaalisiksi suureiksi. Näin menetellen vältytään kömpelön merkinnän d(dV) (tilavuusalkion differentiaalinen muutos) käytöltä ja voidaan kirjoittaa sen sijasta pelkästään dV (nyt eri asia kuin kaavassa (3.4.1) esiintyvä dV). Koska tietyn ainealkion massa on massan säilymisen periaatteen johdosta vakio, tiheyden muutos voi siis tapahtua kaavan (4.2.1) perusteella ainoastaan ainealkioon liittyvän tilavuuden muutoksen johdosta.

Kokoonpuristuvuus ja lämpölaajeneminen. Olkoon tiettyyn ainemäärään liittyvän tilavuuden V jonkin prosessin johdosta saama differentiaalinen muutos dV. Ns. suhteellinen tilavuudenmuutos

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\left(\frac{m}{\rho}\right)}{\frac{m}{\rho}} = \frac{-\frac{1}{\rho^2}\, m d\rho}{\frac{m}{\rho}} = -\frac{d\rho}{\rho}\,, \qquad (4.2.2)$$

jossa on sovellettu tiheyden määritelmää (4.2.1) ja otettu huomioon, että m on vakio. Täten suhteellinen tilavuudenmuutos dV/V on yhtä suuri kuin miinusmerkkinen suhteellinen tiheydenmuutos $d\rho/\rho$.

Aineen ns. kokoonpuristuvuus (engl. compressibility) κ ($[\kappa] = \mathrm{Pa}^{-1}$) määritellään kaavalla

$$-\frac{dV}{V} \equiv \frac{d\rho}{\rho} = \kappa dp\,, \qquad (4.2.3)$$

jossa miinusmerkki on mukana, jotta kokoonpuristuvuudelle saataisiin positiivinen arvo, sillä paineen positiivinen muutos dp aiheuttaa yleensä tilavuuden pienenemisen eli dV on negatiivinen. Mitä suurempi arvo κ:lla on, sitä helpommin aine siis puristuu kokoon. Kokoonpuristuvuuden käänteisarvoa nimitetään puristuvuuskertoimeksi (engl. bulk modulus) tai myös tilavuuskimmokertoimeksi K ($[K] = \mathrm{Pa}$). Siis

$$K = \frac{1}{\kappa} \qquad (4.2.4)$$

ja kaava (4.2.3) saa vaihtoehtoisen muodon

$$dp = -K\frac{dV}{V} \equiv K\frac{d\rho}{\rho} . \qquad (4.2.5)$$

Aineen ns. tilavuuden lämpötilakerroin (engl. cubic expansion coefficient) γ ($[\gamma] = K^{-1}$) määritellään kaavalla

$$\frac{dV}{V} \equiv -\frac{d\rho}{\rho} = \gamma dT . \qquad (4.2.6)$$

Vastaavasti aineen ns. pituuden lämpötilakerroin (engl. linear expansion coefficient) α ($[\alpha] = K^{-1}$) määritellään kaavalla

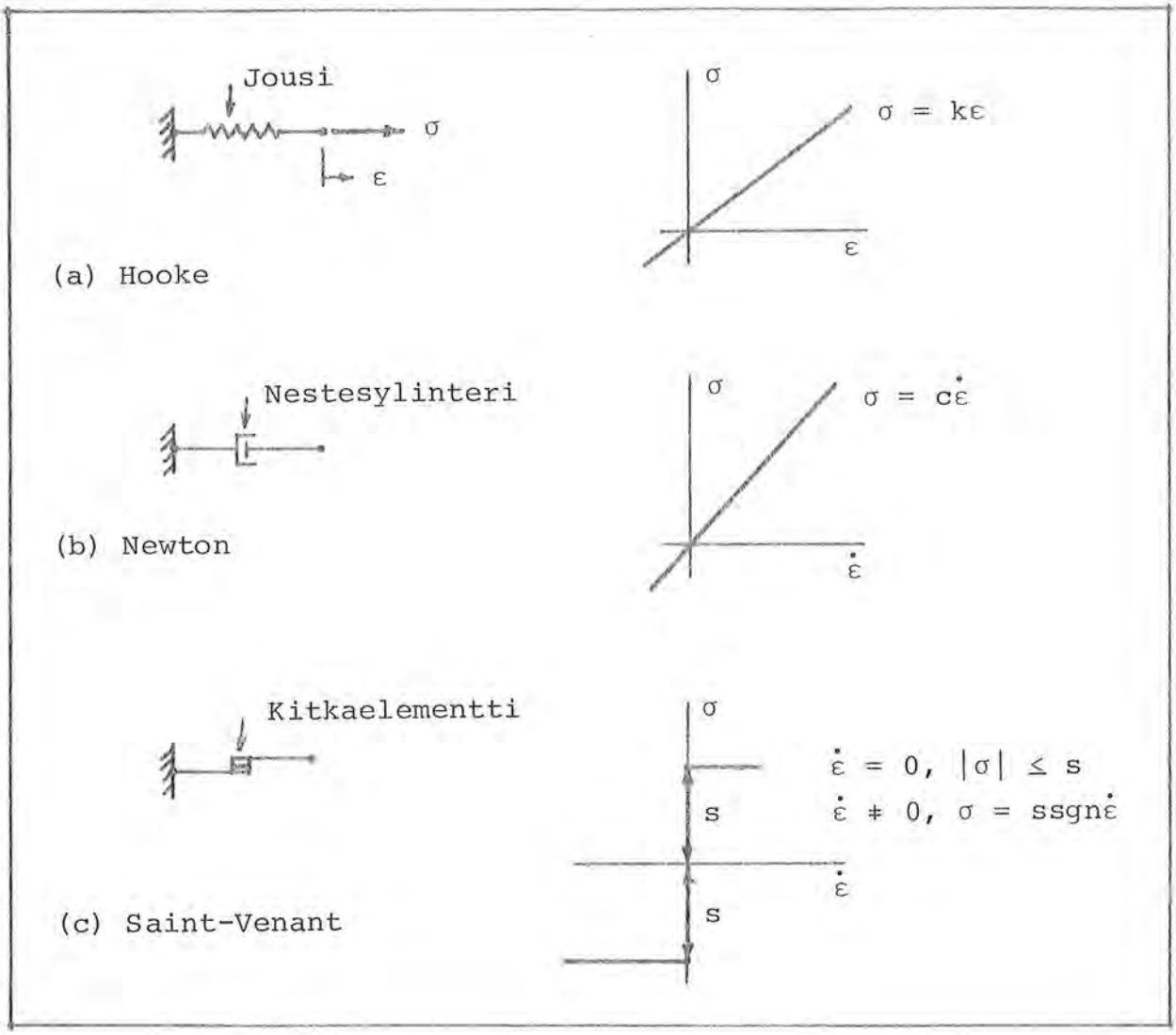
$$\frac{dl}{l} = \alpha dT , \qquad (4.2.7)$$

jossa l on tietyn ainejanan pituus alkutilassa ja dl ainejanan pituuden muutos. Yleisessä tapauksessa α riippuu ainejanan suunnasta. Isotrooppisella aineella

$$\gamma = 3\alpha . \qquad (4.2.8)$$

On syytä korostaa, että kaikki kaavojen (4.2.3)...(4.2.8) määrittelemien kertoimien arvot riippuvat prosessista, joka tulee periaatteessa aina lisäksi mainita samoin kuin mitä suureita on pidettävä riippumattomina muuttujina. Kertoimien arvot riippuvat nimittäin yleensä myös riippumattomien muuttujien arvoista. Näitä seikkoja käsitellään enemmän kohdassa 5.2.

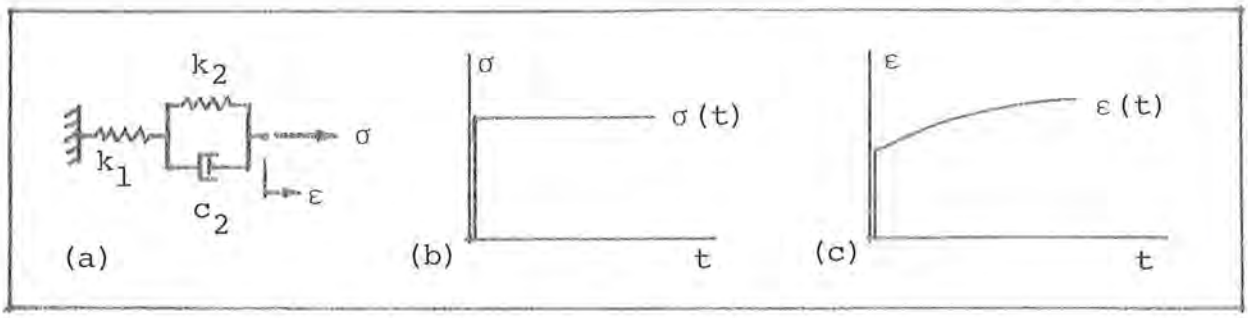
Jännitys-venymä. Mekaniikan kannalta kaikkein tärkeimpiä konstitutiivisia yhteyksiä ovat ns. jännitys-venymäyhteydet, jotka sitovat jännityskomponentit ja venymäkomponentit jollakin tavoin toisiinsa. (Yleisemmin siis jännitykset pyritään lausumaan riippumattomien tilamuuttujien funktioina.) Eräs tapa havainnollistaa asiaa on lähteä liikkeelle ns. reologisista malleista. Kuva 4.2.1 esittää kolmea reologista perusmallia eli reologista elementtiä. Suure σ symbolisoi malliin vaikuttavaa voimaa ja ε voiman vaikutuspisteen siirtymää. Hooken malli kuvaa aineen kimmoista, palautuvaa käyttäytymistä. Newtonin malli kuvaa aineen viskoosia, nestemäistä käyttäytymistä. Saint-Venantin malli kuvaa aineen plastista käyttäytymistä; jännitykset eivät voi ylittää tiettyjä arvoja.



Kuva 4.2.1 (a) Hooken, (b) Newtonin, (c) Saint-Venantin reologinen malli.

Yhdistelemällä perusmalleja rinnan ja sarjaan saadaan yhä monimutkaisempia yhdistelmiä, jotka pystyvät sopivalla malliparametrien arvojen valinnoilla approksimoimaan todellisten aineiden käyttäytymistä yksiaksiaalisessa tapauksessa. Esimerkiksi ns. lineaarisen standardiaineen reologinen malli on kuvan 4.2.2 (a) mukainen. Jos malliin vaikuttava voima σ muuttuu ajan mukana kuvan (b) esittämällä tavalla, siirtymä ε tulee riippumaan ajasta kuvan (c) mukaisesti.

Kontinuumin käyttäytymisestä voi saada mielikuvan ajattelemalla kontinuumi muodostuneeksi suuresta määrästä partikkeleita, joiden väliset sisäiset voimat ovat kukin monimutkaista reologista mallia vastaavia. Ilmeisesti kontinuumin vaste ulkoisten kuormien joh-



Kuva 4.2.2 Lineaarinen standardiaine.

dosta tulee olemaan samantyyppinen kuin itse reologisen mallin. Tietenkin kontinuumissa tulevat lisäksi mukaan liikkeestä johtuvien hitausvoimien vaikutukset.

On syytä huomata, että tieto kontinuumin asemasta ja nopeusjakautumasta tietyllä hetkellä ei yleisessä tapauksessa vielä riitä, jotta kontinuumin tila tulevaisuudessa voitaisiin ennustaa, vaan tarvitaan myös tieto kontinuumin historiasta, sillä yleisessä tapauksessa jännitykset ovat monimutkaisia funktionaaleja systeemin historiasta välillä $(-\infty, t)$, Tilanne poikkeaa siis oleellisesti klassillisesta partikkelimekaniikasta, jossa esimerkiksi planeettasysteemin tila tulevaisuudessa määräytyy täysin, mikäli planeettojen asemat ja nopeudet tietyllä hetkellä tunnetaan.

Tekniikassa käytetyt tavallisimmat ainemallit ovat kimmoinen (engl. elastic), plastinen (engl. plastic), viskokimmoinen (engl. viscoelastic) ja viskoplastinen (engl. viscoplastic) aine ja vastaavasti puhutaan kimmo-, plastisuus-, viskokimmoisuus- ja viskoplastisuusteoriasta. (Monimutkaisempiakin kombinaatioita voidaan luonnollisesti esittää.) Nimet viittaavat siis käytetyn mallin oleellisiin piirteisiin. Kimmoisen aineen reologinen vastine olisi pelkistä Hooken elementeistä muodostuva systeemi. Kimmoinen aine on lujuuslaskelmissa ylivoimaisesti eniten käytetty malli yksinkertaisuutensa vuoksi. Lisäksi se vastaa joillakin aineilla kuten teräs pienillä jännitysten arvoilla hyvin todellisuutta. Tässä rajoitutaan käsittelemään vain kimmoista ainetta.

Ns. ideaalikimmoisen aineen (engl. ideal elastic solid) eli ns. Hooken aineen (engl. Hookean solid) jännitysten ajatellaan riippuvan vain muodonmuutosten ja lämpötilan hetkellisistä arvois-

ta. Riippumattomia tilamuuttujia ovat täten esimerkiksi venymätensorin $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ kuusi komponenttia ja lämpötila T. Riippuvuus on siis symbolisesti muotoa

$$\boxed{\overleftrightarrow{\sigma} = \overleftrightarrow{\sigma}(\overleftrightarrow{\varepsilon}, T) \ .} \tag{4.2.9}$$

Täsmällisemmin otettuna yhteyteen (4.2.9) tulisi lisäksi merkitä tunnus $\vec{r}^{\,o}$ viittaamaan siihen, että riippuvuuden yksityiskohtainen muoto (ainevakioiden arvot) vaihtelee paikan mukaan epähomogeenisen aineen tapauksessa.

Tässä rajoitutaan ns. lineaarisesti kimmoisen aineen malliin, jolloin yhteyden (4.2.9) erikoistapauksena saadaan matriisimerkintöjä käyttäen ns. yleistetty Hooken laki (engl. generalized Hooke's law)

$$\boxed{\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \ ,} \tag{4.2.10}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} \{\sigma\} &= [\sigma_a \ \sigma_b \ \sigma_c \ \tau_{bc} \ \tau_{ca} \ \tau_{ab}]^T \ , \\ \{\varepsilon\} &= [\varepsilon_a \ \varepsilon_b \ \varepsilon_c \ \gamma_{bc} \ \gamma_{ca} \ \gamma_{ab}]^T \end{aligned}\right\} \tag{4.2.11}$$

ja [D] on 6×6 matriisi, jonka alkiot ovat vakioita $\{\varepsilon\}$:n suhteen.

Koska yhteydestä (4.2.10) puuttuu eksplisiittinen riippuvuus lämpötilasta T, on selvää, että jännitys-venymämatriisin [D] alkioiden arvot riippuvat periaatteessa prosessista. Käytännössä tavallisimmat prosessit ovat lähellä joko isotermistä tai adiabaattista muutosta. Edellinen liittyy tapauksiin, jossa kappaletta kuormitetaan hitaasti muuttuvalla tavalla, jolloin muodonmuutoksiin liittyvät lämpötilan muutokset ovat hyvin pieniä, koska ne tasoittuvat lämmönjohtumisen kautta pois. Jälkimmäinen muutos esiintyy läheisesti mm. kappaleen värähtelyssä. Käytännössä ainevakioiden riippuvuus prosessista on niin vähäinen, että kirjallisuudessa annetaan yleensä vain yhdet arvot mainitsematta prosessia. (Ainevakioiden arvot riippuvat kylläkin vallitsevasta peruslämpötilasta.)

Kimmoisen aineen määritelmään liitetään tavallisesti vaatimus tietyn venymäkomponenttien funktion $U^{\sigma}(\{\varepsilon\})$ olemassaolosta siten,

että

$$\sigma_a = \frac{\partial U^\sigma}{\partial \varepsilon_a}, \quad \tau_{bc} = \frac{\partial U^\sigma}{\partial \gamma_{bc}}, \ldots \tag{4.2.12'}$$

eli kohdan L.2.1 merkintöjä käyttäen

$$\boxed{\{\sigma\} = \frac{\partial U^\sigma}{\partial \{\varepsilon\}} .} \tag{4.2.12}$$

Suure U^σ ($[U^\sigma] = Jm^{-3}$) on muodonmuutosenergia tilavuutta kohti eli ns. muodonmuutosenergiatiheys (engl. strain energy density).

Lineaarisesti kimmoisen aineen tapauksessa muodonmuutosenergiatiheysfunktion olemassaolosta seuraa, että kaavan (4.2.10) matriisin [D] tulee olla symmetrinen. Kun nimittäin otetaan funktioksi U^σ neliömuoto

$$\boxed{U^\sigma = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} ,} \tag{4.2.13}$$

jossa [D] on symmetrinen, havaitaan derivoimalla (vrt. kaava (L.2.6)), että yhteys (4.2.10) on voimassa. Funktioon U^σ palataan vielä kohdassa 4.10.

Jännitys-venymämatriisi [D] sisältää siis yleisessä tapauksessa — kun otetaan symmetria huomioon — $6\times6-(6\times6-6)/2 = 36-15 = 21$ riippumatonta ainevakiota. Kirjallisuudessa on esitetty matriisin [D] eri erikoistapauksissa saamia muotoja. Niistä tavanomaisin liittyy isotrooppiseen aineeseen. (Isotrooppisella (engl. isotropic) aineella tarkoitetaan, että ainevakioiden arvot tietyssä pisteessä eivät riipu lainkaan koordinaattiakselien suuntautuneisuudesta. Vastakohta on anisotrooppinen (engl. anisotropic) aine. Homogeenisella (engl. homogeneous) aineella taas tarkoitetaan, että ainevakioiden arvot eivät riipu paikasta. Vastakohta on epähomogeeninen (engl. nonhomogeneous) aine. Näitä käsitteitä käytetään vastaavina muidenkin ominaisuuksien — kuten esimerkiksi lämmönjohtavuus — suhteen.) Voidaan osoittaa, että isotrooppisella kimmoisella aineella riippumattomia ainevakioita on vain kaksi. Ns. isotrooppisen Hooken lain tavanomainen esitysmuoto on

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_a &= 2G\varepsilon_a + \lambda(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c)\ , & \tau_{bc} &= G\gamma_{bc}\ ,\\
\sigma_b &= 2G\varepsilon_b + \lambda(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c)\ , & \tau_{ca} &= G\gamma_{ca}\ ,\\
\sigma_c &= 2G\varepsilon_c + \lambda(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c)\ , & \tau_{ab} &= G\gamma_{ab}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.14)$$

tai kääntäen

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \frac{1}{E}\sigma_a - \frac{\nu}{E}\sigma_b - \frac{\nu}{E}\sigma_c\ , & \gamma_{bc} &= \frac{1}{G}\tau_{bc}\ ,\\
\varepsilon_b &= \frac{1}{E}\sigma_b - \frac{\nu}{E}\sigma_c - \frac{\nu}{E}\sigma_a\ , & \gamma_{ca} &= \frac{1}{G}\tau_{ca}\ ,\\
\varepsilon_c &= \frac{1}{E}\sigma_c - \frac{\nu}{E}\sigma_a - \frac{\nu}{E}\sigma_b\ , & \gamma_{ab} &= \frac{1}{G}\tau_{ab}\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.15)$$

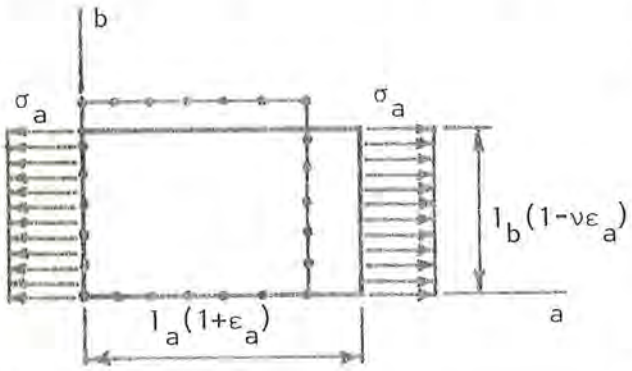
Tässä E ([E] = Pa) on ns. kimmokerroin (engl. Young's modulus), ν ([ν] = -) on ns. Poissonin suhde (engl. Poisson's ratio), G ([G] = Pa) on ns. liukukerroin (engl. shear modulus) ja λ ([λ] = Pa) on ns. Lamén parametri. (Myös suure G varustettuna usein merkinnällä μ kulkee nimellä Lamén parametri.) Kuten todettiin, aina vain kaksi ainevakiota on riippumatonta ja suureiden E, ν, G ja λ välille voidaan kirjoittaa lähes lukematon määrä erilaisia yhteyksiä kuten esimerkiksi

$$\left.\begin{aligned}
G &= \frac{E}{2(1+\nu)}\ ,\\
\lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.16)$$

Matriisi [D] on siis isotrooppisella aineella kaavojen (4.2.14) perusteella seuraava

$$[D] = \begin{bmatrix}
2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\
 & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\
 & & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0\\
\text{Symmetrinen} & & & G & 0 & 0\\
 & & & & G & 0\\
 & & & & & G
\end{bmatrix}\ . \qquad (4.2.17)$$

Esimerkki 4.2.1 Vakioiden E, ν ja G fysikaalinen merkitys. Kuvan (a) pisteviivoitus esittää isotrooppisesta kimmoisesta aineesta olevaa suorakulmaisen suuntaissärmiön muotoista kappaletta alkutilassaan. Kappaleen särmien pituudet ovat l_a, l_b ja l_c.



(a)

Kappaleeseen synnytetään ns. yksiaksiaalinen jännitystila, jossa esimerkiksi komponentti $\sigma_a \neq 0$ ja kaikki muut jännityskomponentit ovat nollia. Tällainen jännitystila syntyy mm. sauvamaisissa rakenteissa, kun niitä rasitetaan sauvan suuntaisesti (esimerkiksi vetokoe).

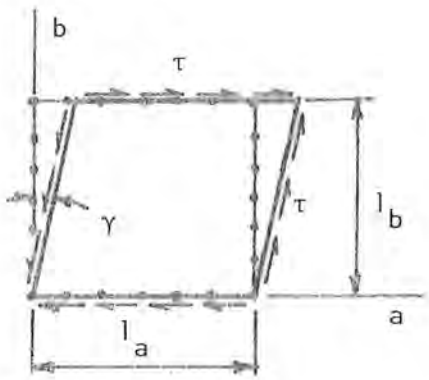
Kaavojen (4.2.15) perusteella vastaavat suhteelliset venymät ovat

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E}\sigma_a\,, \quad \varepsilon_b = -\frac{\nu}{E}\sigma_a = -\nu\varepsilon_a\,, \quad \varepsilon_c = -\frac{\nu}{E}\sigma_a = -\nu\varepsilon_a \tag{a}$$

ja liukukulmat ovat nollia.

Kuvan (a) ehjä viiva esittää kappaleen saamaa vastaavaa uutta muotoa liioiteltuna, kun normaalijännitys σ_a on positiivinen. Kappaleen särmien uudet mitat ovat siis pienten siirtymien teorian mukaan $l_a(1+\varepsilon_a)$, $l_b(1-\nu\varepsilon_a)$ ja $l_c(1-\nu\varepsilon_a)$. Teoreettinen termodynaaminen tarkastelu asettaa kimmokertoimen E ja Poissonin suhteen arvoille rajoitukset [3.1, s. 293] $E > 0$ ja $-1 < \nu < 1/2$. Edellinen ehto vastaa intuition antamaa käsitystä, sillä tuntuuhan luonnolliselta, että jännitys synnyttää itsensä kanssa samansuuntaisen venymän eikä vastakkaissuuntaista. Poissonin suhteen arvon on todettu kokeellisesti olevan välillä $0 < \nu < 1/2$. Aineita, joilla ν:n arvo olisi negatiivinen, ei siis ole havaittu. Metalleilla tyypillinen ν:n arvo on luokkaa 0,3.

Kuvassa (b) äskeinen kappale on asetettu ns. puhtaan leikkausjännitystilan alaiseksi, jolloin esimerkiksi $\tau \equiv \tau_{ab} = \tau_{ba} \neq 0$ ja kaikki muut jännityskomponentit ovat nollia. Tällainen jännitystila syntyy esimerkiksi (aina paikallisesti) ohutseinämäisen sylinteriputken väännössä. Kaavojen (4.2.15) perusteella havaitaan, että liukukulma



(b)

$$\gamma \equiv \gamma_{ab} = \gamma_{ba} = \frac{1}{G}\tau \tag{b}$$

ja kaikki muut muodonmuutoskomponentit häviävät. Jälleen termodynamiikka ja myös kokemus osoittaa, että liukukertoimen G arvon tulee olla positiivinen.

Jos operoidaan vastaavasti kuin kohdassa 3.4.3 deviaatiojännityskomponenttien σ_a^*, σ_b^*, σ_c^*, τ_{bc}, τ_{ca}, τ_{ab} avulla, jolloin

$$\sigma_a = -p + \sigma_a^* \ , \quad \sigma_b = -p + \sigma_b^* \ , \quad \sigma_c = -p + \sigma_c^* \tag{4.2.18}$$

ja

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c) \ , \tag{4.2.19}$$

kaavat (4.2.14) voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a^* &= 2G\varepsilon_a - \frac{2}{3}G(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c) \ , & \tau_{bc} &= G\gamma_{bc} \ , \\ \sigma_b^* &= 2G\varepsilon_b - \frac{2}{3}G(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c) \ , & \tau_{ca} &= G\gamma_{ca} \ , \\ \sigma_c^* &= 2G\varepsilon_c - \frac{2}{3}G(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c) \ , & \tau_{ab} &= G\gamma_{ab} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.20}$$

ja

$$p = -K(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c) \ , \tag{4.2.21}$$

jossa kerroin

$$K = \frac{2}{3}G + \lambda = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu} \tag{4.2.22}$$

Kohdassa 4.3 osoitetaan, että suure $\varepsilon_V \equiv \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ — ns. dilataatio — esittää ainealkion suhteellista (pientä) tilavuudenmuutosta. Täten kerroin K on juuri kaavassa (4.2.5) aikaisemmin esiintynyt puristuvuuskerroin kimmoista isotrooppista ainetta koskevana. (Tarkemmin siis kaava (4.2.21) voidaan ensin kirjoittaa muodossa $p = -K(V-V^o)/V^o$ ja koska K on vakio, differentiointi antaa tuloksen $dp = -KdV/dV^o$.)

Jotkin aineet kuten esimerkiksi tietyt kumit ja huokosnesteen täyttämä maaperä (nopeiden kuormitusvaihtelujen alaisena) käyttäytyvät miltei kokoonpuristumattomina eli niillä $\varepsilon_V \approx 0$. Tällöin puristuvuuskertoimen K arvo tulee suureksi, koska kaavassa (4.2.21) kirjoitettuna muodossa $p = -K\varepsilon_V$ pienetkin dilataation ε_V arvot vaativat vastaavasti suurta paineen arvoa. Joskus kiinteilläkin aineilla käytetään täysin <u>kokoonpuristumattoman</u> (engl. incompressible) aineen mallia ja asetetaan rajoite $\varepsilon_V = 0$. Puristuvuuskertoimen arvo lähestyy tällöin periaatteessa ääretöntä ja kaava $p = -K\varepsilon_V$ antaa paineelle p epämääräisen arvon $-\infty\cdot 0$ (vrt.

kohta 2.3.1). Paine on siis nyt rajoitevoima (voima yleistetyssä mielessä). Täysin kokoonpuristumattoman aineen malli on luonnollisesti todellisuuden vastainen, koska havaintojen mukaan kaikki aineet puristuvat enemmän tai vähemmän kokoon paineen vaikutuksesta. Kokoonpuristumattoman aineen malli rikkoo todellisuutta kuitenkin lievemmin kuin jäykän kappaleen malli, jossa rajoitteet ovat $\{\varepsilon\} = \{0\}$. Kaikki jännityskomponentit tulevat tällöin rajoitevoimiksi, eikä niitä pystytä edes määrittämään, joten sisäisten jännitysten käsittelyssä jäykän kappaleen malli on käyttökelvoton. Kokoonpuristumattoman kimmoisen aineen mallissa sen sijaan myös rajoitevoima paine pystytään määrittämään tavanomaisten reunaehtojen yhteydessä yksikäsitteisesti.

Kaavoista (4.2.22) havaitaan, että kokoonpuristumattomalla kimmoisella isotrooppisella aineella $\nu = 1/2$ ja $\lambda \to \infty$. Samoin havaitaan kaavojen (4.2.20) ja (4.2.21) avulla, että vallitsevat jännitys-venymäyhteydet ovat

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a &= -p + 2G\varepsilon_a , & \tau_{bc} &= G\gamma_{bc} , \\ \sigma_b &= -p + 2G\varepsilon_b , & \tau_{ca} &= G\gamma_{ca} , \\ \sigma_c &= -p + 2G\varepsilon_c , & \tau_{ab} &= G\gamma_{ab} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.23)$$

ja paineelle ei ole konstitutiivista lakia.

Jos kappaleessa on alkutilassa, jonka suhteen siirtymät ja muodonmuutokset mitataan, <u>alkujännityksiä</u> (engl. initial stress) $\sigma_a^o, \ldots$ ja jos kappale saa lisäksi ns. <u>alkumuodonmuutoksia</u> eli alkuvenymiä (engl. initial strain) $\varepsilon_a^o, \ldots$ muiden syiden kuin jännitysten muutosten $\sigma_a - \sigma_a^o, \ldots$ johdosta, kaava (4.2.10) yleistetään muotoon

$$\boxed{\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^o\}) + \{\sigma^o\} ,} \qquad (4.2.24)$$

jossa $\{\varepsilon^o\}$ ja $\{\sigma^o\}$ ovat alkumuodonmuutoksista ja alkujännityksistä muodostetut pystyvektorit. Esimerkiksi maaperä- ja kalliomekaniikassa alkujännitysten vaikutus on yleensä huomattava. Alkujännitykset ovat syntyneet monimutkaisten geologisten prosessien tuloksena ja niiden suuruutta ei tiedetä ilman mittauksia. Taval-

lisin alkumuodonmuutosten aiheuttaja on lämpötilan muutos $\Delta T = T-T^o$ alkutilan suhteen. Isotrooppisella aineella tällöin

$$\{\varepsilon^o\} = [\alpha\Delta T \ \alpha\Delta T \ \alpha\Delta T \ 0 \ 0 \ 0]^T , \tag{4.2.25}$$

jossa α on pituuden lämpötilakerroin (vrt. kaava (4.2.7). On huomattava, että alkumuodonmuutoksilla tarkoitetaan tässä kappaleesta irroitetuksi ajatellun, vapaan, vain alkujännitysten alaisena olevan ainealkion muodonmuutoksia, eikä itse kappaleeseen esimerkiksi lämpötilan muutoksen johdosta syntyviä lopullisia muodonmuutoksia.

Lausekkeen (4.2.24) oikeellisuus ymmärrettäneen seuraavan tarkastelun avulla. Kaava (4.2.10): $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ ilmaisee jännityksen ja venymän välisen riippuvuuden tavallaan muodossa: $\{\varepsilon\}$ on syy ja $\{\sigma\}$ on seuraus. Käänteinen muoto $\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\sigma\}$ (vrt. kaavat (4.2.15)) on luontevampi, koska se pitää jännitystä syynä ja venymää seurauksena. Pidetäänhän rakenteiden mekaniikassakin tavallisesti analogisesti voimaa syynä ja siirtymää seuraksena eikä kääntäen. Jos ainealkiossa on alkutilassa alkujännityksiä, venymät aiheutuvat jännitysten muutoksista $\{\sigma\} - \{\sigma^o\}$ ja siis venymä $= [D]^{-1}(\{\sigma\}-\{\sigma^o\})$. Jos ainealkio saa lisäksi alkuvenymiä $\{\varepsilon^o\}$ esimerkiksi lämpötilan muutoksen johdosta, alkion kokonaisvenymä on lineaarisessa teoriassa näiden kahden osuuden summa eli

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}(\{\sigma\}-\{\sigma^o\}) + \{\varepsilon^o\} . \tag{4.2.26}$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain vasemmalta matriisilla [D] ja järjestelemällä termejä päädytään yhteyteen (4.2.24).

Isotrooppisella aineella kaavat (4.2.14) ja (4.2.15) laajenevat muotoihin

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_a = 2G(\varepsilon_a-\varepsilon_a^o) + \lambda(\varepsilon_a-\varepsilon_a^o+\varepsilon_b-\varepsilon_b^o+\varepsilon_c-\varepsilon_c^o) + \sigma_a^o , \\ &\ldots \\ &\tau_{bc} = G\gamma_{bc} + \tau_{bc}^o , \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.2.27}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_a = \frac{1}{E}(\sigma_a-\sigma_a^o) - \frac{\nu}{E}(\sigma_b-\sigma_b^o) - \frac{\nu}{E}(\sigma_c-\sigma_c^o) + \varepsilon_a^o \ , \\ &\ldots \\ &\gamma_{bc} = \frac{1}{G}(\tau_{bc}-\tau_{bc}^o) \ , \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.28)$$

Isotropian johdosta on siis otaksuttu, että $\gamma_{bc}^o = \gamma_{ca}^o = \gamma_{ab}^o = 0$.

Jos kaavassa (4.2.24) asetetaan alkujännitykset nolliksi ja tarkastellaan vain lämpötilan muutoksesta johtuvia alkumuodonmuutoksia merkiten

$$\{\varepsilon^o\} = \{\alpha\}\Delta T = \{\alpha\}(T-T^o) \ , \qquad (4.2.29)$$

jossa pituuden ja liukuman lämpötilakertoimet on koottu pystyvektoriin

$$\{\alpha\} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^T \ , \qquad (4.2.30)$$

saadaan yhteys

$$\boxed{\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\}-\{\alpha\}(T-T^o)) \ .} \qquad (4.2.31)$$

Tämä on tavanomainen ns. yleistetty Duhamel-Neumann muoto Hooken laista [3.1, s. 290] matriisimerkinnöin esitettynä. Se kuvaa ns. lineaarisen termokimmoteorian (engl. linear thermoelasticity) tai lyhyemmin lämpöjännitysteorian konstitutiivisia yhteyksiä.

Isotrooppisella aineella voidaan kirjoittaa

$$\{\alpha\} = \{m\}\alpha \ , \qquad (4.2.32)$$

jossa

$$\{m\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \ . \qquad (4.2.33)$$

Kaava (4.2.31) saa tällöin muodon

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\}-\{m\}\alpha(T-T^o)) \qquad (4.2.34)$$

eli yksityiskohtaisemmin

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a &= 2G[\varepsilon_a-\alpha(T-T^o)] + \lambda[\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c-3\alpha(T-T^o)] \ , \\ &\ldots \\ \tau_{bc} &= G\gamma_{bc} \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.35)$$

Paineelle saadaan lauseke (vrt. kaava (4.2.21))

$$p = -K[(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c) - 3\alpha(T-T^o)] = -K(\varepsilon_V-\varepsilon_V^o) \ . \qquad (4.2.36)$$

Yhteyttä (4.2.31) sovelletaan Hooken lain (4.2.10) sijasta tapauksissa, joissa lämpötilan muutosten tiedetään olevan oleellisia; esimerkiksi höyrykattilan seinämässä vallitsevien jännitysten määrittäminen. Jos lämpötilajakauma $T(\vec{r}^o,t)$ otaksutaan tunnetuksi (tavallisesti se voidaan nimittäin määrittää erikseen lämmönjohtumistehtävän avulla), yhteyden (4.2.31) käyttö on suoraviivaista. Tarkemmassa — harvoin tarvittavassa — tarkastelussa käsittely vaikeutuu, koska kuormitusten johdosta syntyvät muodonmuutokset aiheuttavat myös lämpötilan muutoksia ja mekaanisen ja termisen probleeman välillä esiintyy kytkentää. Kaava (4.2.31) (tai vielä yleisemmin kaava (4.2.24)) on siis tällöinkin edelleen käytettävissä. Kaavan ainevakiot eivät nyt riipu prosessista; vrt. kaavaan (4.2.10) liittyvä teksti. (Ainevakiot voivat kylläkin riippua edelleen alkulämpötilasta T^o.)

Huomautus 1. Edellä jännitys-venymäyhteyttä on tarkasteltu pienten siirtymien teorian kannalta siten, että esimerkiksi yleistetyssä Hooken laissa (4.2.10) $\{\sigma\}$ liittyy Eulerin eli Cauchyn jännitykseen ja $\{\varepsilon\}$ insinöörivenymään. Hooken laki voidaan esittää kuitenkin yleisemmin suurten siirtymien teoriaan liittyen (edelleen lineaarisena) muodossa

$$\{^p\sigma\} = [D]\{^g\varepsilon\} \qquad (4.2.37)$$

jossa

$$\{^p\sigma\} = [^p\sigma_a \ ^p\sigma_b \ ^p\sigma_c \ ^p\tau_{bc} \ ^p\tau_{ca} \ ^p\tau_{ab}]^T \ ,$$

$$\{{}^{g}\varepsilon\} = [{}^{g}\varepsilon_a \; {}^{g}\varepsilon_b \; {}^{g}\varepsilon_c \; {}^{g}\gamma_{bc} \; {}^{g}\gamma_{ca} \; {}^{g}\gamma_{ab}]^T \; . \qquad (4.2.38)$$

Pystyvektorit $\{{}^{p}\sigma\}$ ja $\{{}^{g}\varepsilon\}$ ovat vastaavasti toisen Piola-Kirchhoffin jännitystensorin (ks. kohta 4.4.2) ja Green-Lagrangen venymätensorin matriisivastineita. Todettakoon, että yleistetyn Hooken lain (4.2.10) tai yhteyden (4.2.37) yleinen koordinaatistosta riippumaton muoto on yhtälö, jossa jännitys- ja venymätensorin välisen riippuvuuden ilmaisee neljännen kertaluvun tensori — matriisin [D] vastine.

Huomautus 2. Tehdään eräitä matriisimerkintöihin liittyviä huomautuksia. Voisi tuntua luontevalta esittää toisen kertaluvun tensori — kuten venymä $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ — karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa aina 3×3 matriisina $[\varepsilon]$ kuten on tehtykin mm. kaavoissa (3.3.39). Kuitenkin juuri elementtimenetelmään liittyvässä kirjallisuudessa (tässä on pyritty noudattamaan mahdollisimman paljon perusteoksen [4.3] merkintöjä) on tavallisempaa kirjata venymäkomponentit 6×1 matriisiksi $\{\varepsilon\}$ kuten on esitetty mm. kaavassa (4.2.11). (Jos kyseessä olisi yleinen toisen kertaluvun tensori eikä symmetrinen $\overleftrightarrow{\varepsilon}$-tensori, matriisin kooksi tulisi 9×1.) Syy tähän jälkimmäiseen valintaan on lähinnä seuraava. Elementtimenetelmässä toimitaan jatkuvasti työn tyyppisten suureiden kuten virtuaalinen työ, differentiaalinen työ jne. kanssa. Esimerkiksi jännitysten tekemä virtuaalisen työn lauseke on pienten siirtymien teoriassa (vrt. kohta 4.9.1)

$$\delta W_{int} = -\int \overleftrightarrow{\sigma}:\delta\overleftrightarrow{\varepsilon}dV^o = -\int \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV^o \; , \qquad (4.2.39)$$

jossa jälkimmäinen muoto pätee karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa. (On käytetty indeksimerkintöjä vastaavaan tapaan kuin kaavassa (3.3.45).) Kahden toisen kertaluvun tensorin muotoa $(\overleftrightarrow{\ })\,:\,(\overleftrightarrow{\ })$ oleva tulo on skalaari eli nollannen kertaluvun tensori eli ns. skalaaritulo (engl. scalar product, double-dot product) [3.1, s. 35].

Termin $\Sigma\Sigma\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ esittäminen 3×3 matriisien $[\sigma]$ ja $[\varepsilon]$ avulla tulisi kömpelöksi. Jos sen sijaan numeroidaan $[\sigma]$- ja $[\varepsilon]$-matriisien alkiot mielivaltaisessa järjestyksessä (mutta kummassakin

matriisissa vastaavalla tavalla) yhdestä yhdeksään ja muodostetaan 9×1 matriisit $\{\sigma\}$ ja $\{\varepsilon\}$, kaavan (4.2.39) sijasta saadaan selvästi yksinkertainen lauseke

$$\delta W_{int} = -\int \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV^o = -\int \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV^o \ . \qquad (4.2.39')$$

(Huomautettakoon, että termi $\{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}$ on skalaari eli 1×1 matriisi, joten sen arvo ei muutu transponoitaessa.) Koska $[\sigma]$- ja $[\varepsilon]$-matriisit ovat symmetrisiä, riittää kuitenkin, että numeroidaan vain matriisien kuusi riippumatonta alkiota ja saadaan siis 6×1 matriisit $\{\sigma\}$ ja $\{\varepsilon\}$. Koska lausekkeen (4.2.39) ei-diagonaaliset tensorikomponenttiyhdistelmät kuten $\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}$ ja $\sigma_{21}\delta\varepsilon_{21}$ esiintyvät aina kahteen kertaan, täytyy matriisien $\{\sigma\}$ ja $\{\varepsilon\}$ tietyt alkiot määritellä välttämättä ei-tensorikomponenteiksi. Tavallisin valinta on se, että $\{\sigma\}$:n alkiot otetaan tensorikomponenteiksi, jolloin alkioiden σ_{23}, σ_{31} ja σ_{12} $\{\varepsilon\}$:n vastinalkiot tulevat olemaan $2\varepsilon_{23}$, $2\varepsilon_{31}$ ja $2\varepsilon_{12}$ (vrt. esitys (4.2.11) ja (4.2.38)).

Kaavalla (4.2.33) määritelty apumatriisi $\{m\}$ tulee esiintymään useissa eri yhteyksissä. Se on lähinnä eräänlainen tensorilaskennan Kroneckerin deltan δ_{ij} vastine. Tietyn toisen kertaluvun tensorin kuten $\overleftrightarrow{\sigma}$ ns. <u>jälki</u> (engl. trace) saadaan karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa lausekkeena

$$\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\sigma} \equiv \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\delta_{ij} \ . \qquad (4.2.40)$$

Matriisimerkinnöin vastaava tulos syntyy kaavan

$$\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\sigma} = \{m\}^T\{\sigma\} = \{\sigma\}^T\{m\} \ . \qquad (4.2.40')$$

avulla. Samoin lausekkeen (3.4.17) mukainen paine on siis esitettävissä muodossa

$$p = -\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\sigma} = -\frac{1}{3}\,\{m\}^T\{\sigma\} \ . \qquad (4.2.41)$$

Jännitystilan esitys isotrooppisena paineosana ja deviaatio-osana on tensorein muotoa

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -p\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\sigma}^* , \tag{4.2.42}$$

jossa $\overleftrightarrow{I}$ on yksikkötensori. Matriisein voidaan kirjoittaa vastaavasti esitys

$$\{\sigma\} = -\{p\} + \{\sigma^*\} , \tag{4.2.42'}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} \{p\} &= [p\ p\ p\ 0\ 0\ 0]^T = \{m\}p , \\ \{\sigma^*\} &= [\sigma_a^*\ \sigma_b^*\ \sigma_c^*\ \tau_{bc}\ \tau_{ca}\ \tau_{ab}] . \end{aligned}\right\} \tag{4.2.43}$$

— — —

Lämpökapasiteetti. Aineen ns. ominaislämpökapasiteetti (engl. specific heat capacity) c ($[c] = \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$) määritellään kaavalla

$$c = \frac{đW_Q}{m dT} , \tag{4.2.44}$$

jossa $đW_Q$ on tietyn ainemäärän saama differentiaalinen lämpö, dT on vastaava lämpötilan muutos ja m ko. ainemäärän massa. Koska lämpö ei ole tilasuure, differentiaaliselle lämmölle on käytetty tunnusta $đW_Q$ (kirjallisuudessa yleensä d'Q tai dQ). Suureen c arvo riippuu prosessista. Käytössä ovat tavallisimmin isobaariseen prosessiin liittyvä ns. ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa c_p sekä isokooriseen prosessiin liittyvä ns. ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa (tai siis vakiotiheydessä) c_V. Kiinteillä aineilla suureen c_V tilalle tulee tarkemmin ottaen suure c_ε eli ominaislämpökapasiteetti vakiomuodonmuutostilassa.

Lämpökapasiteetti esiintyy aineiden sisäenergioiden lausekkeissa lämpötilan muutoksiin liittyvissä termeissä. Suureiden c_p ja c_V välistä riippuvuutta tarkastellaan kohdassa 5.2.

Sisäenergia. Otaksutaan kaavan (4.2.24) mukainen jännitys-venymäyhteys siten, että alkuvenymät johtuvat vain lämpötilan muutoksista:

$$\{\sigma(\overleftrightarrow{\varepsilon},T)\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\alpha\}(T-T^o) + \{\sigma^o\} . \tag{4.2.45}$$

(Sama yhteys seuraa kaavasta (4.2.31) täydentämällä sitä alkujännityksien osuudella.) Tällöin pienten siirtymien teoriaan liitty-

vä, lineaarisesti kimmoisen aineen ominaissisäenergian $e = e(\overleftrightarrow{\varepsilon},T)$ lauseke on muotoa

$$e = e^o + \frac{1}{\rho^o}\left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}+\{\varepsilon\}^T[D]\{\alpha\}T^o+\{\varepsilon\}^T\{\sigma^o\}\right) + \\ + \frac{c_\varepsilon}{2T^o}\left[T^2-(T^o)^2\right] . \qquad (4.2.46)$$

Tässä tunnus ^{o} viittaa arvoihin alkutilassa ja $\{\alpha\} = \{\alpha(\overleftrightarrow{\sigma},T)\}_\sigma\big|_{\overleftrightarrow{\sigma}=\overleftrightarrow{\sigma}^o,T=T^o}$ $c_\varepsilon = c_\varepsilon(\overleftrightarrow{\varepsilon},T)\big|_{\overleftrightarrow{\varepsilon}=\overleftrightarrow{0},T=T^o}$. Alaviitteet σ ja ε tarkoittavat, että lämpötilakertoimet liittyvät vakiojännitystilaprosessiin ja ominaislämpökapasiteetti vakiomuodonmuutosprosessiin. Lauseke (4.2.46) on saatu approksimoimalla vapaan energian lauseketta $\overleftrightarrow{\varepsilon}$:n ja T:n suhteen sopivasti katkaistulla Taylorin sarjalla vastaavaan tapaan kuin mitä on esitetty lähteessä [2.6, s. 116]. (Huomautettakoon, että jos suureita $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ ja T pidetään riippumattomina tilamuuttujina, $\{\alpha\} = \{\alpha(\overleftrightarrow{\varepsilon},T)\}$. Koska kuitenkin yhteys (4.2.45) eli $\{\sigma\} = \{\sigma(\overleftrightarrow{\varepsilon},T)$ antaa käännettynä $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon(\overleftrightarrow{\sigma},T)\}$ voidaan myös kirjoittaa $\{\alpha\} = \{\alpha(\overleftrightarrow{\sigma},T)\}$.)

Yleensä ei olla kiinnostuneita itse suureesta e vaan sen muutoksista jossain prosessissa. Lausekkeen (4.2.46) differentiointi antaa ensin (ks. huomautus 3)

$$de = \frac{1}{\rho^o}\left(d\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}+d\{\varepsilon\}^T[D]\{\alpha\}T^o+d\{\varepsilon\}^T\{\sigma^o\}\right) + \\ + c_\varepsilon\frac{T}{T^o}dT . \qquad (4.2.47)$$

Suorittamalla approksimointi $T/T^o \approx 1$ ja käyttämällä lisäksi hyväksi kaavaa (4.2.45) saadaan lopuksi tulos

$$\boxed{de = \frac{1}{\rho^o}\left(\{\sigma\}+[D]\{\alpha\}T\right)^T d\{\varepsilon\} + c_\varepsilon dT .} \qquad (4.2.48)$$

Jos kyseessä on vakiomuodonmuutosprosessi, $d\{\varepsilon\} = \{0\}$, ja kaava (4.2.48) yksinkertaistuu muotoon

$$de = cdT , \qquad (4.2.49)$$

kun vielä jätetään viite ε pois. Esitys (4.2.49) on hyvin tavanomainen — myös hieman muotoaan muuttavien kappaleiden yhteydessä — kirjallisuudessa esiintyvä approksimaatio.

Esimerkki 4.2.2 Ominaissisäenergian muutos. Tarkastellaan kiinteälle aineelle ja nesteelle esitettyjen lausekkeiden (4.2.48) ja (5.2.35) välistä yhteyttä.

Isotrooppiseen kiinteään aineeseen syntyy isotrooppisen jännitystilan (muodonmuutostilan) johdosta isotrooppinen muodonmuutostila (jännitystila). Tällöin kiinteän aineen vasteen tulee olla samanlainen kuin nesteen, koska deviaatiojännitykset häviävät. (Kiinteä ainee "luulee olevansa" neste.)

Isotrooppisessa jännitys- ja muodonmuutostilassa

$$\{\sigma\} = -\{p\} = -\{m\}p \tag{a}$$

ja

$$\{\varepsilon\} = \{m\}\varepsilon \ , \tag{b}$$

jossa ε on suhteellisen venymän arvo (vakio suunnasta riippumatta). Täten kaavan (4.2.48) termi

$$\{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} = (-\{m\}p)^T\{m\}d\varepsilon = -p\{m\}^T\{m\}d\varepsilon$$

$$= -p[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{Bmatrix} d\varepsilon = -p3d\varepsilon$$

$$= -pd\varepsilon_V \ . \tag{c}$$

(On käytetty hyväksi yhteyttä $\varepsilon_V \equiv \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = 3\varepsilon$, joten $d\varepsilon_V = 3d\varepsilon$.)

Lasketaan seuraavaksi kaavan (4.2.48) termi $([D]\{\alpha\}T)^T d\{\varepsilon\}$. Kimmoisuuden ja lämpölaajenemisen suhteen isotrooppiselle aineelle saadaan (ks. kaavat (4.2.17), (4.2.32) ja (4.2.22))

$$[D]\{\alpha\}T = [D]\{m\}\alpha T$$

$$= \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \alpha T$$

$$= \begin{Bmatrix} 2G+3\lambda \\ 2G+3\lambda \\ 2G+3\lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha T = 3 \begin{Bmatrix} K \\ K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha T \ . \tag{d}$$

Täten termi

$$([D]\{\alpha\}T)^T d\{\varepsilon\} = ([D]\{\alpha\}T)^T \{m\} d\varepsilon$$

$$= 3[K\ K\ K\ 0\ 0\ 0]\alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\varepsilon$$

$$= 9K\alpha T d\varepsilon = 3K\alpha T d\varepsilon_V \ . \tag{e}$$

Kaava (4.2.48) saa siis ensin muodon

$$de = \frac{1}{\rho^o} (-p d\varepsilon_V + 3K\alpha T d\varepsilon_V) + c_\varepsilon dT \ . \tag{f}$$

Koska vielä $\varepsilon_V = (V-V^o)/V^o \approx -(\rho-\rho^o)/\rho^o$ (ks. kaava (4.2.2)),

$$d\varepsilon_V = -\frac{d\rho}{\rho^o} \tag{g}$$

ja kun merkitään kaavan (4.2.8) mukaisesti

$$\gamma = 3\alpha \tag{h}$$

päädytään lausekkeeseen

$$de = (p-TK\gamma) \frac{1}{(\rho^o)^2} d\rho + c_\varepsilon dT \ . \tag{i}$$

Tämä on indeksien tarkennusta vaille identtinen lausekkeen (5.2.35) kanssa.

Huomautus 3. Olkoon esimerkiksi matriisitulon [D] = [A][B][C] tekijämatriisien alkiot tietyn muuttujan t funktioita. Matriisitulon määritelmän perusteella voidaan osoittaa, että derivoinnin, differentioinnin ja varioinnin suhteen pätevät tavanomaisen näköi-

set laskusäännöt kuten

$$\left.\begin{aligned} \frac{d[D]}{dt} &= \frac{d[A]}{dt}[B][C] + [A]\frac{d[B]}{dt}[C] + [A][B]\frac{d[C]}{dt} , \\ d[D] &= d[A][B][C] + [A]d[B][C] + [A][B]d[C] , \\ \delta[D] &= \delta[A][B][C] + [A]\delta[B][C] + [A][B]\delta[C] . \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.50)$$

Matriisien yhteydessä on lisäksi vain muistettava säilyttää tekijöiden keskinäinen järjestys muuttumattomana, koska matriiseille ei päde tulon vaihdantalaki.

Tarkastellaan erityisesti kohdassa L.2.1 esitettyä neliömuotoa $f = \{x\}^T[A]\{x\}$, jossa $[A]$ on symmetrinen vakiomatriisi. Tällöin siis

$$\begin{aligned} df &= d\{x\}^T[A]\{x\} + \{x\}^T[A]d\{x\} \\ &= d\{x\}^T[A]\{x\} + d\{x\}^T[A]\{x\} \\ &= 2d\{x\}^T[A]\{x\} = 2([A]\{x\})^T d\{x\} = 2\{x\}^T[A]d\{x\} . \end{aligned} \qquad (4.2.51)$$

Vastaavasti lineaarimuodolle $f = \{A\}^T\{x\} = \{x\}^T\{A\}$, jossa $\{A\}$ on vakio, saadaan

$$df = \{A\}^T d\{x\} = d\{x\}^T\{A\} . \qquad (4.2.52)$$

Kaavoja (4.2.51) ja (4.2.52) on sovellettu lauseketta (4.2.46) differentioitaessa.

Lämmönjohtavuus. Ylivoimaisesti yleisin lämmönjohtumisen yhteydessä käytetty konstitutiivinen malli on ns. Fourierin lämmönjohtumislaki (engl. Fourier law of heat conduction). Siinä otaksutaan, että lämmönjohtumiseen liittyvä lämpövuovektori (rajoitutaan pienten siirtymien teoriaan)

$$\vec{q}^c = q_a^c\vec{i} + q_b^c\vec{j} + q_c^c\vec{k} \qquad (4.2.53)$$

ja lämpötilan gradientti

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial a}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial b}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial c}\vec{k} \tag{4.2.54}$$

riippuvat toisistaan lineaarisesti:

$$\boxed{\vec{q}^{\,c} = -\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}T)\ .} \tag{4.2.55}$$

Tässä $\overleftrightarrow{k}$ on ns. <u>lämmönjohtavuustensori</u>. Matriisimerkintöjä

$$\left.\begin{aligned} \{q^c\} &= [q_a^c\ q_b^c\ q_c^c]^T\ , \\ \{\nabla\} &= [\frac{\partial}{\partial a}\ \frac{\partial}{\partial b}\ \frac{\partial}{\partial c}]^T\ , \\ \{\nabla\}T &= [\frac{\partial T}{\partial a}\ \frac{\partial T}{\partial b}\ \frac{\partial T}{\partial c}]^T \end{aligned}\right\} \tag{4.2.56}$$

käyttäen kaavan (4.2.55) vastine on

$$\boxed{\{q^c\} = -[k]\{\nabla\}T} \tag{4.2.55'}$$

eli

$$\begin{Bmatrix} q_a^c \\ q_b^c \\ q_c^c \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} & k_{ac} \\ k_{ba} & k_{bb} & k_{bc} \\ k_{ca} & k_{cb} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a} \\ \frac{\partial T}{\partial b} \\ \frac{\partial T}{\partial c} \end{Bmatrix} \tag{4.2.55''}$$

eli vielä

$$\left.\begin{aligned} q_a^c &= -(k_{aa}\frac{\partial T}{\partial a} + k_{ab}\frac{\partial T}{\partial b} + k_{ac}\frac{\partial T}{\partial c})\ , \\ q_b^c &= -(k_{ba}\frac{\partial T}{\partial a} + k_{bb}\frac{\partial T}{\partial b} + k_{bc}\frac{\partial T}{\partial c})\ , \\ q_c^c &= -(k_{ca}\frac{\partial T}{\partial a} + k_{cb}\frac{\partial T}{\partial b} + k_{cc}\frac{\partial T}{\partial c})\ . \end{aligned}\right\} \tag{4.2.55'''}$$

Termomekaniikan keinoin voidaan osoittaa [2.6, s. 75], että lämmönjohtavuusmatriisi [k] on <u>symmetrinen</u> ja <u>positiivisesti definiitti</u>.

Matriisin [k] alkioita k ([k] = $Wm^{-1}K^{-1}$) nimitetään lämmönjohtavuuksiksi (engl. thermal conductivity). Lämmönjohtavuuksien arvot riippuvat yleensä ainakin vallitsevasta lämpötilan arvosta: k = k(T).

Koordinaattiakselien suunnat voidaan valita aina kussakin pisteessä vähintään yhdellä tavalla siten, että lämmönjohtavuusmatriisista tulee diagonaalinen:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_a & 0 & 0 \\ 0 & k_b & 0 \\ 0 & 0 & k_c \end{bmatrix}. \qquad (4.2.57)$$

Vastaavia koordinaattiakselien suuntia nimitetään lämmönjohtavuuden pääsuunniksi. Pätee $k_a > 0$, $k_b > 0$, $k_c > 0$.

Jos kyseessä on lämmönjohtavuudeltaan isotrooppinen aine

$$[k] = k[I] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

olipa koordinaattiakselien suunta mikä hyvänsä. Pätee k > 0. Tällöin kaavat (4.2.55) ja (4.2.55''') yksinkertaistuvat muotoihin

$$\vec{q}^{\,c} = -k\vec{\nabla}T \qquad (4.2.59)$$

eli

$$\{q^c\} = -k\{\nabla\}T \qquad (4.2.59')$$

eli

$$q_a^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial a}, \quad q_b^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial b}, \quad q_c^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial c}. \qquad (4.2.59'')$$

Lämpövuovektorin suunta on tällöin samansuuntainen lämpötilan voimakkaimman alenemissuunnan kanssa.

Ainevakioita. Taulukkoon 4.2.1 on kerätty sekalaisista lähteistä joitakin ainevakioiden summittaisia arvoja. Esimerkiksi lämmönjohtavuudet riippuvat melko voimakkaasti vallitsevasta lämpötilasta ja taulukon luvut on esitetty tässä lähinnä vain anta-

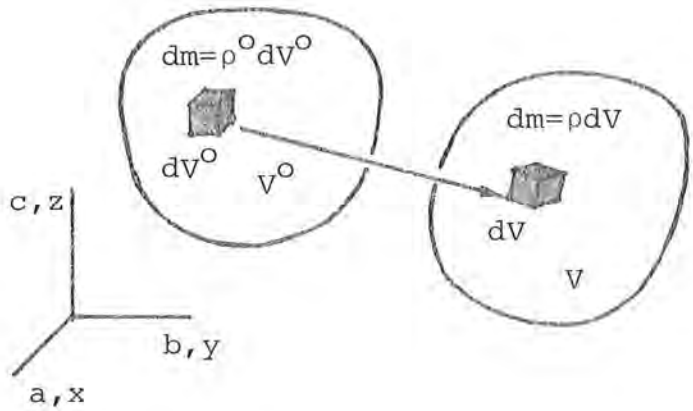
maan kuvaa eri aineiden ominaisuuksien keskinäisistä suhteista.

Taulukko 4.2.1 Eräiden kiinteiden aineiden ominaisuuksia.

Aine	ρ kgm^{-3}	α K^{-1}	c_p $Jkg^{-1}K^{-1}$	k $Wm^{-1}K^{-1}$	E GPa	ν -
Alumiini	2700	$23 \cdot 10^{-6}$	880	210	70	0,3
Kupari	8900	17•	390	390	80	0,3
Teräs	7800	12•	470	45	210	0,3
Betoni	2000	14•	880	1,3	30	0,12
Lasi	2500	9•	750	0,7	60	0,25
Korkki	200		1900	0,05		
Jää	920	50•	2100	2,2		

4.3 Massan säilyminen

Jatkuvuusyhtälö. Kappaleen massa hetkellä t on kaavan (3.4.2)



Kuva 4.3.1 Kappaleen liike.

mukaisesti (kuva 4.3.1)

$$m = \int dm = \int_V \rho dV = \int_{V(t)} \rho(x,y,z,t)\,dV \ . \qquad (4.3.1)$$

Lagrangen esityksessä kaikki suureet referoidaan alku- eli referenssitilan suhteen ja integrointi suoritetaankin kappaleen alkutilassa ottaman kiinteän avaruuden osan V^o ylitse. Alkutilassa ($t = t^o$)

$$m = \int dm = \int_{V^o} \rho^o dV^o = \int_{V^o} \rho^o(a,b,c)\,dV^o \ , \qquad (4.3.2)$$

jossa $\rho^o(a,b,c)$ on siis tiheys alkutilassa (yleensä annettu suure). Muunnetaan integraali (4.3.1) matematiikassa esitetyllä tavanomaisella tavalla [3.3, s.51] muuttujissa a, b ja c lausutuksi integraaliksi. Muunnoksen välittävät yhteydet (3.3.2). Saadaan

$$m = \int_V \rho(x,y,z,t)\,dV$$

$$= \int_{V^o} \rho[x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t),t]J dV^o \ , \qquad (4.3.3)$$

jossa

$$J(a,b,c,t) \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} \equiv \det\left[\frac{\partial r}{\partial r^o}\right]$$

$$\equiv \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u_a}{\partial a} & \frac{\partial u_a}{\partial b} & \frac{\partial u_a}{\partial c} \\ \frac{\partial u_b}{\partial a} & 1+\frac{\partial u_b}{\partial b} & \frac{\partial u_b}{\partial c} \\ \frac{\partial u_c}{\partial a} & \frac{\partial u_c}{\partial b} & 1+\frac{\partial u_c}{\partial c} \end{bmatrix} . \qquad (4.3.4)$$

Suure J on ns. Jacobin funktionaalideterminantti.

Kaavojen (4.3.2) ja (4.3.3) perusteella (asetetaan $m(t^o) = m(t)$)

$$\int_{V^o} (\rho^o - \rho J)\, dV^o = 0 \ . \qquad (4.3.5)$$

Koska tämän yhtälön tulee päteä myös jokaisen alueen V^o osa-alueen suhteen, seuraa tästä ainekoordinaateissa lausuttu massan säilymisen periaatteen paikallinen muoto eli ns. jatkuvuusyhtälö (engl. equation of continuity, continuity equation)

$$\boxed{\rho^o = \rho J \ .} \qquad (4.3.6)$$

Nimitys jatkuvuusyhtälö ei liene erityisen onnistunut, vaikka se onkin — ehkä lyhyytensä vuoksi — laajasti käytössä etenkin nestemekaniikassa.

Kaavojen (4.3.5) ja (4.3.6) välisen askeleen suorittamista on syytä tarkastella huolellisemmin erikseen yleisessä muodossa, koska vastaava ajattelu tulee toistumaan jatkossa yhä uudestaan.

Olkoon kysymyksessä yleinen jotain kappaletta koskeva globaalinen muoto

$$\int_{V^o} f(a,b,c,t)\,dV^o = 0 \ , \tag{4.3.7}$$

jossa integrandi f on paikan suhteen jatkuva funktio ja voi vielä riippua ajasta (edellä $f = \rho^o - \rho J$). Jos yhtälö (4.3.7) pätee jokaisen alueesta V^o valitun osa-alueen ΔV^o suhteen eli jos (Vaikka jokin tulos $\int_{V^o} f dV^o = 0$ on siis kirjoitettu ensin tietylle kappaleelle, muistetaan, että mekaniikan aksioomat pätevät mielivaltaiselle kappaleelle ja siis myös jokaiselle alkuperäisestä kappaleesta valitulle osakappaleelle.)

$$\int_{\Delta V^o} f dV = 0 \ , \tag{4.3.8}$$

seuraa tästä paikallinen muoto

$$f = 0 \quad \text{alueessa } V^o \ . \tag{4.3.9}$$

Todistus perustuu vastaotaksumaan. Olkoon f nollasta eroava ja vaikka positiivinen alueen tietyssä sisäpisteessä P. Jatkuvana funktiona f on tällöin positiivinen myös pisteen P tietyssä ympäristössä ΔV^o, jolloin yhtälön (4.3.8) vasen puoli tulee positiiviseksi. Täten vastaotaksuma on väärä ja yhtälö (4.3.9) on voimassa. Saatu tulos pätee myös vektori- tai tensoriarvoiselle funktiolle f.

Huomautettakoon, että vastaava askel ($\int_V f(x,y,z,t)\,dV = 0 \Rightarrow f = 0$ alueessa V) voidaan luonnollisesti suorittaa analogisena myös Eulerin esityksessä.

Palataan jatkuvuusyhtälön käsittelyyn. Kaava (4.3.6) on melko helppo pitää mielessä seuraavan vaihtoehtoisen johdon avulla. Ainealkion massa dm on vakio eli (vrt. kuva 4.3.1)

$$dm = \rho^o dV^o = \rho dV \ , \tag{4.3.10}$$

joten saadaan ensin tulos

$$\frac{dV}{dV^o} = \frac{\rho^o}{\rho} \ . \tag{4.3.11}$$

Matematiikasta taas muistetaan, että Jacobin funktionaalidetermi-

nantti

$$J = \frac{dV}{dV^o} . \tag{4.3.12}$$

Yhdistämällä tulokset (4.3.11) ja (4.3.12) päädytään yhtälöön (4.3.6).

Koska ρ^o on vakio ajan suhteen, yhtälöstä (4.3.6) saadaan ottamalla aineellinen aikaderivaatta vaihtoehtoinen, joskus esiintyvä jatkuvuusyhtälön muoto (tässä $D/Dt = \partial/\partial t$)

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) \equiv \frac{D\rho}{Dt} J + \rho \frac{DJ}{Dt} = 0 \tag{4.3.13}$$

Suureen $J = dV/dV^o$ venymäkomponenteissa esitetty lauseke saadaan pienten muodonmuutosten tapauksessa suoraan kuvan 3.3.2 avulla. Alkion tilavuus alkutilassa $dV^o = dadbdc$ ja deformoituneessa tilassa alkion särmien pituuksien approksimaatiot ovat $(1+{}^g\varepsilon_{aa})da$, $(1+{}^g\varepsilon_{bb})db$ ja $(1+{}^g\varepsilon_{cc})dc$. Tilavuus voidaan laskea likimain pitäen suuntaissärmiötä suorakulmaisena: $dV = (1+{}^g\varepsilon_{aa})(1+{}^g\varepsilon_{bb})(1+{}^g\varepsilon_{cc})dadbdc$. Jättämällä pienten suureiden tulot pieninä pois saadaan siis lopuksi

$$J = 1 + {}^g\varepsilon_{aa} + {}^g\varepsilon_{bb} + {}^g\varepsilon_{cc} \tag{4.3.13}$$

eli

$$J = 1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c , \tag{4.3.14}$$

jossa jälkimmäinen tulos liittyy pienten siirtymien teoriaan. Jatkuvuusyhtälö on siis pienten siirtymien teoriassa

$$\rho^o = \rho(1+\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c) . \tag{4.3.15}$$

Toisaalta pienten siirtymien teoriassa tehdään normaalisti kaikissa yhtälöissä lisäapproksimaatio

$$\rho = \rho^o . \tag{4.3.16}$$

Kaavaa (4.3.15) tarvitaan silloin lähinnä vain ns. kokoonpuristu-

mattomuusehdon yhteydessä.

Aineen sanotaan olevan kokoonpuristumatonta, jos ainealkion tilavuus ei muutu eli sen tiheys on vakio eli $\rho = \rho^{o}$. Jatkuvuusyhtälöstä (4.3.6) tulee tällöin kokoonpuristumattomuusehto

$$\boxed{J = 1 \ ,} \tag{4.3.17}$$

joka saa pienten siirtymien teoriassa muodon

$$\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = 0 \tag{4.3.18}$$

eli

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0} \tag{4.3.19}$$

eli

$$\frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{\partial u_c}{\partial c} = 0 \ . \tag{4.3.19'}$$

Matriisimerkintöjä käyttäen kaavojen (4.3.18) ja (4.3.19) vastineet ovat

$$\{m\}^T\{\varepsilon\} = 0 \tag{4.3.18'}$$

ja

$$\{\nabla\}^T\{u\} = 0 \ . \tag{4.3.19''}$$

Huomautus 1. Edellä esiintynyt suure

$$\varepsilon_V \equiv \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{\partial u_c}{\partial c} \tag{4.3.20}$$

eli

$$\varepsilon_V = \{m\}^T\{\varepsilon\} = \{\nabla\}^T\{u\}$$

on ns. suhteellinen tilavuudenmuutos eli dilataatio (engl. volume

strain, dilatation = laajeneminen) pienten siirtymien tapauksessa. Sillä ensinnäkin kaavojen (4.3.12) ja (4.3.11) perusteella suhteellisen tilavuudenmuutoksen ε_V lauseke on yleisesti muotoa

$$\varepsilon_V \equiv \frac{dV-dV^o}{dV^o} = \frac{dV}{dV^o} - 1 = \frac{\rho^o}{\rho} - 1 = J - 1 \ . \qquad (4.3.21)$$

Koska taas J:n lauseke on pienten siirtymien yhteydessä kaavan (4.3.14) mukainen, päädytään siis kaavaan (4.3.20).

Dilataation ε_V muutosnopeus $\dot{\varepsilon}_V = D\varepsilon_V/Dt$ voidaan esittää mm. muodoissa (vrt. kaavat (4.3.21)

$$\frac{D\varepsilon_V}{Dt} = \frac{DJ}{Dt} = -\frac{\rho^o}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{J}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \ . \qquad (4.3.22)$$

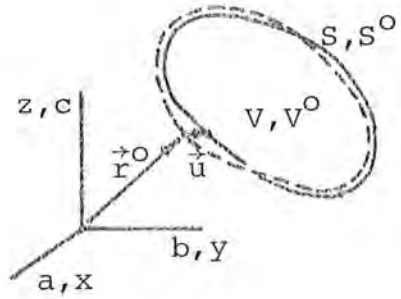
4.4 Liikemäärän tase

4.4.1 Pienet siirtymät

Cauchyn liikeyhtälöt. Tämän esityksen yhteydessä on syytä tarkastella samanaikaisesti kohtaa 5.4. Liikemäärän taseen periaate saatetiin kohdassa 3.4 Eulerin esitystapaa vastaavaan muotoon

$$\int_{V(t)} \rho \vec{b} dV + \int_{S(t)} \vec{t} dS = \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV \ . \qquad (4.4.1)$$

Kun rajoitutaan pieniin siirtymiin, kappaleen deformoitunut geometria ei poikkea sanottavasti alkutilan geometriasta (kuva 4.4.1) ja siis $V(t) \approx V^o$, $S(t) \approx S^o$ sekä lisäksi $\rho \approx \rho^o$ kullekin alkiolle. (Jälkimmäinen yhteys ymmärretään kaavan (4.3.15) perusteella. Koska ε_a, ε_b ja $\varepsilon_c << 1$, massavoimaa ja liikemäärää laskettaessa ei tehdä suurta virhettä vaikka asetetaankin $\rho = \rho^o$.) Samoin pätee kullekin alkiolle $x \approx a$, $y \approx b$ ja $z \approx c$. Täten yhtälö (4.4.1) voidaan lausua välittömästi likimääräisesti myös Lagrangen esitystavalla muodossa



Kuva 4.4.1 Pienet siirtymät liioiteltuina.

$$\int_{V^o} \rho^o b dV^o + \int_{S^o} \vec{t} dS^o = \frac{D}{Dt} \int_{V^o} \rho^o \vec{v} dV^o \ . \qquad (4.4.2)$$

Tässä siis integrandeissa olevat suureet on ajateltava nyt muuttujien a, b, c ja t funktioiksi (tosin tiheys on nyt vain paikan funktio: $\rho^o = \rho^o(a,b,c)$) ja lisäksi $D/Dt = \partial/\partial t$.

Johdetaan globaalia yhtälöä (4.4.2) vastaava paikallinen muoto. Käsittely on tyypillisesti aina samanlainen. Ensin muunnetaan yhtälön termit niin tarvittaessa siten, että ne kaikki esittävät integraaleja saman alueen yli. Tämän jälkeen paikallinen muoto syntyy suoraan integrandeissa olevia termejä koskevana yhtälönä vastaavalla päättelyllä, joka esitettiin kohdassa 4.3.

Kun siirtymät ovat pieniä, voidaan Lagrangen esityksessäkin

toimia riittävällä tarkkuudella Eulerin jännityksen avulla. Täten kaikki kohdassa 3.4 esitetyt jännityksiin liittyvät kaavat voidaan ajatella kirjoitetuiksi tässä uudelleen siten, että tunnukset x, y ja z korvataan vain tunnuksilla a, b ja c. Näin ollen pintaintegraali

$$\int_{S^o} \vec{t}dS^o = \int_{S^o} (n_a\vec{t}^{(a)}+n_b\vec{t}^{(b)}+n_c\vec{t}^{(c)})dS^o ,$$

$$= \int_{V^o} (\frac{\partial\vec{t}^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial\vec{t}^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial\vec{t}^{(c)}}{\partial c})dV^o . \qquad (4.4.3)$$

On sovellettu traktio-jännitysyhteyttä (3.4.12) ja Gaussin lauseen mukaisia kaavoja (L.2.10). Kun yhtälön (4.4.2) oikeaan puoleen sovelletaan vielä kaavaa (3.3.55) ($f \triangleq \rho^o\vec{v}$, ρ^o ei ole ajan funktio), saadaan siis yhtälö

$$\int_{V^o} \rho^o\vec{b}dV^o + \int_{V^o} (\frac{\partial t^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial t^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial t^{(c)}}{\partial c})dV^o = \int_{V^o} \rho^o \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} dV^o . \qquad (4.4.4)$$

Täten liikemäärän taseen periaatteen paikalliseksi muodoksi tulee pienten siirtymien tapauksessa Lagrangen esitystä käytettäessä yhtälö (vrt. kaava (3.3.10))

$$\boxed{\rho^o\vec{b} + \frac{\partial\vec{t}^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial\vec{t}^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial\vec{t}^{(c)}}{\partial c} = \rho^o\vec{a} .} \qquad (4.4.5')$$

(Tarkemmin ottaen tulos johdetaan ajattelemalla yhtälö (4.4.4) ensin kirjoitettuna muotoon $\int_{V^o} f dV^o = 0$, josta seuraa kohdassa 4.3 esitetyllä tavoin yhtälö $f = 0$ ja sitten termi $-\rho^o\vec{a}$ oikealle puolelle siirtämällä yhtälö (4.4.5').)

Yhtälöitä (4.4.5') nimitetään tavallisesti <u>liikeyhtälöiksi</u> (tarkemmin Cauchyn liikeyhtälöiden eräs muoto, vrt. kohta 5.4).

Liikeyhtälöiden komponenttiesitys on (vrt. kaavat (3.4.10))

$$\rho^o b_a + \frac{\partial\sigma_a}{\partial a} + \frac{\partial\tau_{ba}}{\partial b} + \frac{\partial\tau_{ca}}{\partial c} = \rho^o a_a ,$$

$$\left.\begin{aligned} \rho^o b_b + \frac{\partial \tau_{ab}}{\partial a} + \frac{\partial \sigma_b}{\partial b} + \frac{\partial \tau_{cb}}{\partial c} &= \rho^o a_b \,, \\ \rho^o b_c + \frac{\partial \tau_{ac}}{\partial a} + \frac{\partial \tau_{bc}}{\partial b} + \frac{\partial \sigma_c}{\partial c} &= \rho^o a_c \,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.5'')$$

Vastaavasti kuin kohdassa 5.4 voidaan johtaa liikeyhtälöiden yleinen koordinaatistosta riippumaton muoto

$$\boxed{\rho^o \vec{b} + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma} = \rho^o \vec{a} \,.} \qquad (4.4.5)$$

Matriisimerkintöjä käyttäen liikeyhtälöt (4.4.5'') voidaan vielä esittää mm. muodossa

$$\boxed{\rho^o \{b\} + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma\} = \rho^o \{a\} \,,} \qquad (4.4.5''')$$

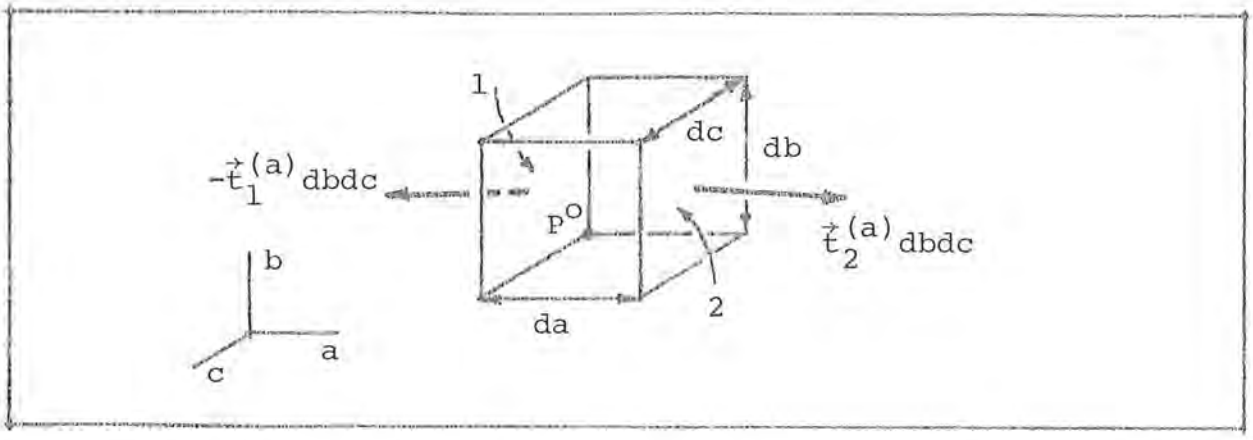
jossa siis

$$\left.\begin{aligned} \{b\} &= [b_a \; b_b \; b_c]^T \,, \\ [{}_f\partial_\sigma] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial c} & \frac{\partial}{\partial b} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial b} & 0 & \frac{\partial}{\partial c} & 0 & \frac{\partial}{\partial a} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial c} & \frac{\partial}{\partial b} & \frac{\partial}{\partial a} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.6)$$

ja muut merkinnät ovat olleet esillä jo aikaisemmin.

Liikeyhtälöiden erikoistapauksena saadaan staattisessa tapauksessa <u>tasapainoyhtälöt</u> asettamalla $\vec{a} = \vec{0}$.

Edellä esitetty johto perustui epähavainnolliseen matemaattiseen manipulointiin. Havainnollisempi vaihtoehtoinen johto syntyy differentiaaligeometrisen tarkastelun avulla. Kuva 4.4.2 esittää suorakulmaista differentiaaliasta suuntaissärmiötä sekä siihen vaikuttavia voimia. (Siirtymät ajatellaan tässä yhteydessä äärettömän pieniksi, joten alku- ja lopputilalla ei ole eroa.) Olkoon pisteen P^o koordinaatit a, b ja c ja a-akselia vastaan kohtisuorilla pinta-alkioilla vaikuttavan traktion arvo pisteessä P^o $\vec{t}^{(a)}$. Tahkojen 1 ja 2 keskipisteiden koordinaatit ovat vas-



Kuva 4.4.2 Alkion a-akselia vastaan kohtisuorassa oleviin tahkoihin vaikuttavat pintavoimat.

taavasti (a, b+db/2, c+dc/2) ja (a+da, b+db/2, c+dc/2). Ajattelemalla traktio $\vec{t}^{(a)}$ kehitetyksi paikan suhteen Taylorin sarjaksi piste P^o kehityskeskuksena saadaan tahkojen 1 ja 2 keskipisteissä vallitseviksi arvoiksi

$$\left.\begin{aligned} \vec{t}_1^{(a)} &= \vec{t}^{(a)} + \frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial b}\frac{db}{2} + \frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial c}\frac{dc}{2}, \\ \vec{t}_2^{(a)} &= \vec{t}^{(a)} + \frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial a}da + \frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial b}\frac{db}{2} + \frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial c}\frac{dc}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.7)$$

kun rajoitutaan kehitelmän lineaarisiin termeihin. (Derivaattojen arvot on ajateltava lasketuiksi pisteessä P^o.) Tahkoihin 1 ja 2 vaikuttavien pintavoimien resultantiksi saadaan siis likimain arvo

$$(\vec{t}_2^{(a)} - \vec{t}_1^{(a)})\,dbdc = \left(\frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial a}da\right)dbdc = \frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial a}dV^o \qquad (4.4.8)$$

Muihin tahkoihin vaikuttavat pintavoimat (ei esitetty kuvassa 4.4.2) voidaan käsitellä analogisesti, joten alkioon vaikuttavien pintavoimien resultantti tulee olemaan

$$d\vec{F}_S = \vec{f}^{\sigma}dV^o \qquad (4.4.9)$$

jossa on merkitty (vrt. kaava (5.4.6))

$$\vec{f}^{\sigma} \equiv \frac{\partial \vec{t}^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial \vec{t}^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial \vec{t}^{(c)}}{\partial c} . \qquad (4.4.10)$$

Tässä tarkastelussa on siis myös lauseketta (4.4.8) laskettaessa jätetty korkeamman kertaluvun sarjakehitelmätermejä huomiotta (Pintaan vaikuttava voima ei ole yleensä tarkalleen sama kuin traktio pinnan keskipisteessä kertaa pinta-ala.), mutta täsmällisempi tarkastelu osoittaa, että nämä yksinkertaistukset eivät aiheuta virheitä rajalla, kun da, db ja dc $\to$ 0.

Alkioon vaikuttavien massavoimien resultantti

$$d\vec{F}_V = \vec{b}dm = \rho^o\vec{b}dV^o . \qquad (4.4.11)$$

Koska tässä taas ρ^o ja $\vec{b}$ tarkoittavat ko. suureiden arvoja pisteessä P^o, lauseke (4.4.11) on yleensä likimääräinen, mutta virhe katoaa, kun $dV^o \to 0$.

Alkion liikemäärä on likimain

$$dm\vec{v} = \rho^o\vec{v}dV^o \qquad (4.4.12)$$

ja koska alkion massa dm on vakio, liikemäärän muutosnopeus

$$\frac{D}{Dt}(dm\vec{v}) = dm\frac{D\vec{v}}{Dt} = dm\vec{a} = \rho^o\vec{a}dV^o . \qquad (4.4.13)$$

Kun alkioon sovelletaan liikemäärän taseen periaatetta saadaan siis yhtälö

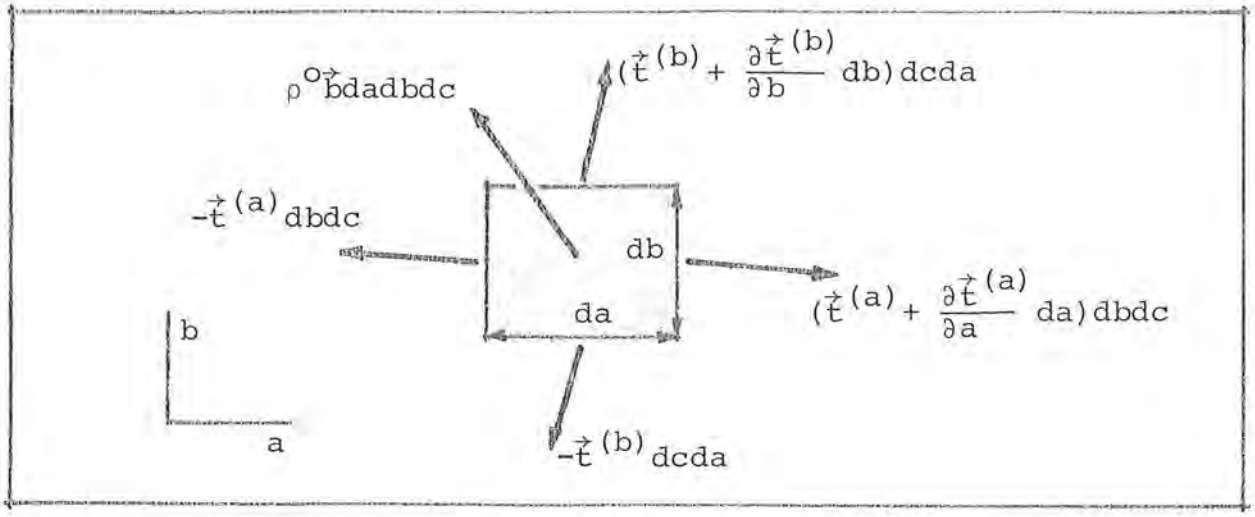
$$\rho^o\vec{b}dV^o + \vec{f}^{\sigma}dV^o = \rho^o\vec{a}dV^o \qquad (4.4.14)$$

eli

$$\rho^o\vec{b} + \vec{f}^{\sigma} = \rho^o\vec{a} . \qquad (4.4.15)$$

Tämä on lyhennysmerkinnän $\vec{f}^{\sigma}$ merkityksen (4.4.10) huomioonottaen täsmälleen sama kuin aikaisemmin johdettu liikeyhtälö (4.4.5')

Todettakoon, että differentiaaligeometrinen käsittely esiintyy kirjallisuudessa hieman vaihtelevissa muodoissa. Joskus kehityskeskukseksi valittu piste otetaan alkion keskipisteeseen. Tavallisimmin alkioon vaikuttavat pintavoimat esitetään kuitenkin kuvan 4.4.3 tapaan.



Kuva 4.4.3 Alkioon vaikuttavat voimat tasotapauksessa.

Tämä on muodollisesti hieman väärin, koska kuva antaa ymmärtää, että traktioiden arvot $\vec{t}^{(a)}$ ja $\vec{t}^{(b)}$ liittyvät eri kehityskeskuksiin, vaikka niillä tarkoitetaankin ko. suureiden arvoja samassa pisteessä. Käsittely kuvan esittämällä tavalla ei aiheuta kuitenkaan virheitä, koska oikeissa kehitelmissä esiintyvät lisätermit (joita ei näy kuvassa) kumoavat toisensa, kuten voidaan havaita tarkastelemalla esimerkiksi lausekkeita (4.4.7).

Differentiaaligeometrinen käsittely on havainnollinen, mutta siitä tulee käyräviivaisten koordinaatistojen yhteydessä helposti kömpelö. Epähavainnolliset (insinöörin mielestä), mutta täsmälliset ja elegantit Gaussin lauseen käyttöön perustuvat johdot sekä differentiaaligeometriset johdot täydentävät tavallaan toisiaan. Kumpiakin johtamistapoja esiintyy kirjallisuudessa ja niihin liittyvään ajatteluun on syytä perehtyä kohtuullisesti. Täsmällisissä differentiaaligeometrisissa tarkasteluissa käytetään usein vielä apuna integraalilaskennan väliarvolausetta (ks. esimerkiksi [3.1, s.76]).

Kohdassa 5.4 on vertailtu Cauchyn liikeyhtälöiden ja partikkelisysteemin liikeyhtälöiden analogisia termejä (taulukko 5.4.1). Lisäksi siellä on esitetty suuretta $\vec{b}$ koskeva huomautus (huomautus 3), joka pätee luonnollisesti tässäkin.

Huomautus 1. Liikeyhtälöiden oikea puoli $\rho\vec{a}$ esitetään tavallisesti laskemalla kiihtyvyys kaavan (3.3.15) avulla, jolloin

$$\rho^{o}\vec{a} = \rho^{o}\frac{D^2\vec{u}}{Dt^2} = \rho^{o}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{4.4.16}$$

eli komponenttimuodossa

$$\left.\begin{aligned} \rho^{o}a_a &= \rho^{o}\frac{D^2u_a}{Dt^2} = \rho^{o}\frac{\partial^2u_a}{\partial t^2}\,, \\ \rho^{o}a_b &= \rho^{o}\frac{D^2u_b}{Dt^2} = \rho^{o}\frac{\partial^2u_b}{\partial t^2}\,, \\ \rho^{o}a_c &= \rho^{o}\frac{D^2u_c}{Dt^2} = \rho^{o}\frac{\partial^2u_c}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.16'}$$

eli vielä matriisimerkinnöin

$$\rho^{o}\{a\} = \rho^{o}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\}\,. \tag{4.4.16''}$$

Huomautus 2. Kiinteän aineen mekaniikassa on tavallista, että liikeyhtälöissä esiintyy termin $\rho^{o}\vec{b}$ sijasta termi (vrt. kohta 4.3.3)

$$\vec{f} = \rho^{o}\vec{b} \tag{4.4.17}$$

eli alkioon vaikuttava massavoima $\vec{b}dm = \rho^{o}\vec{b}dV^{o}$ tilavuudella dV^{o} jaettuna. Todettakoon, että intensiteetin $\vec{b}$ luonnollinen esitysmuoto on $\vec{b} = \vec{b}(x,y,z,t)$ sillä voimakentällä on aina tietty arvo nimenomaan tietyssä avaruuden pisteessä. (Esimerkiksi kaava (2.3.142) antaa ei-inertiaalikehyksessä toimittaessa keskipakovoimakentän intensiteetiksi $\vec{b} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{s})$.) Täten $\vec{b}$:n muoto $\vec{b} = \vec{b}(a,b,c,t)$ on suurten siirtymien teoriassa yleensä etukäteen tuntematon (Poikkeuksena on luonnollisesti tavanomainen tasaisen painovoimakentän tapaus, jolloin $\vec{b} = \vec{g}$ = vakio sekä paikan että ajan suhteen.), koska $\vec{b}$:n arvo riippuu siirtymistä. Kuitenkin pienten siirtymien teoriassa $a \approx x$ jne. ja $\vec{b}$ on annettu suure, eikä sitä tarvitse määrittää osana ratkaisua. Huomautettakoon

vielä, että tunnuksen ρ^o sijasta kirjallisuudessa käytetään usein pelkkää merkintää ρ.

Navierin liikeyhtälöt. Cauchyn liikeyhtälöt (4.4.5) pätevät mielivaltaiselle kontinuumille. Jos aineen otaksutaan noudattavan yleistettyä Hooken lakia, jännityksen lauseke on $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$. Siirrytään muutenkin taulukon 3.3.2 mukaisten matriisimerkintöjen käyttöön, jolloin $\{\varepsilon\} = [{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}$ ja $\{a\} = \partial^2/\partial t^2\{u\}$. Liikeyhtälöt (4.4.5''') saavat tässä tapauksessa siis muodon

$$\boxed{\rho^o\{b\} + [{}_f\partial_\sigma]([D][{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}) = \rho^o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\} \ .} \qquad (4.4.18)$$

Näitä yhtälöitä nimitetään usein Navierin yhtälöiksi (Navier v. 1821). Ne ovat siis kimmoista ainetta koskevat, siirtymissä lausutut liikeyhtälöt. Yhtälöt ovat toista kertalukua sekä paikkakoordinaattien että ajan suhteen.

Yhtälöiden loppuun asti kehitettyjä yksityiskohtaisia lausekkeita ei esitetä tässä, koska niistä tulee hyvin mutkikkaita, jos kappaleen aine on epähomogeenista, jolloin matriisin [D] alkiot riippuvat paikasta. Näitä lausekkeita ei tulla tarvitsemaankaan, kun ratkaisun lähtökohtana pidetään virtuaalisen työn periaatetta. Todettakoon vain, että kun kyseessä on isotrooppinen homogeeninen tapaus, Navierin yhtälöt voidaan saattaa klassilliseen muotoon [3.1, s. 500]

$$\rho^o\vec{b} + (G+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + G\nabla^2\vec{u} = \rho^o \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \qquad (4.4.19)$$

eli komponenteittain

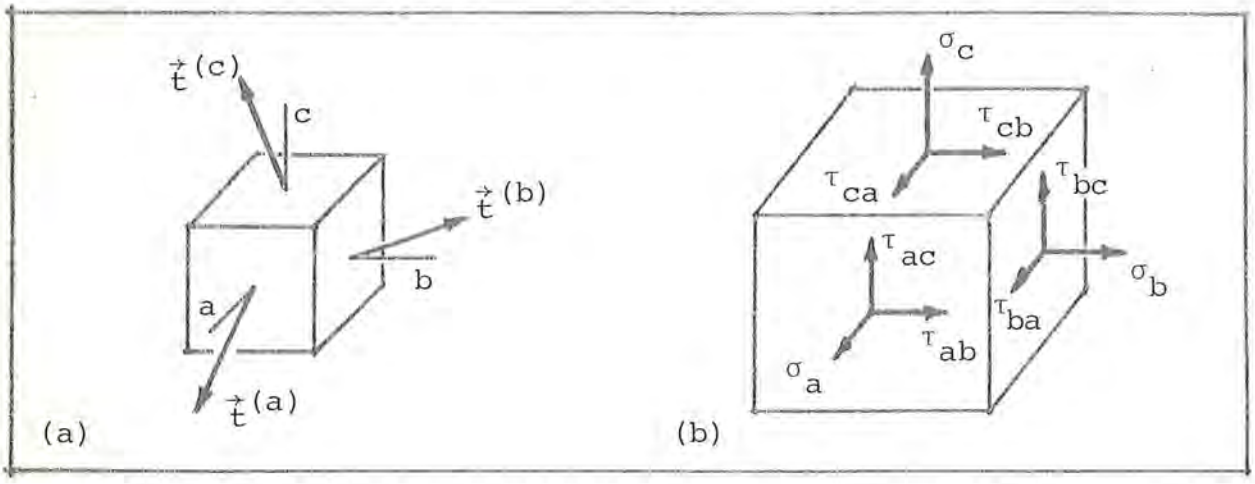
$$\left.\begin{aligned} &\rho^o b_a + (G+\lambda)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{\partial u_c}{\partial c}\right) + \\ &\qquad + G\left(\frac{\partial^2 u_a}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial c^2}\right) = \rho^o \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} \ , \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.19')$$

Jos kyseessä on kokoonpuristumaton tapaus, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ ja kaavat yksinkertaistuvat hieman.

Jos kappaleessa esiintyy alkujännityksiä ja alkumuodonmuutoksia, Navierin yhtälöt voidaan helposti täydentää niiden antamilla osuuksilla; ks. kaava (4.2.24).

Traktio-jännitysyhteys. Otsikon esittämää yhteyttä on käytetty edellä hyväksi jo liikeyhtälöitä johdettaessa. Traktio-jännitysyhteyden johto esitetään kohdassa 5.4. Kirjoitetaan tässä vain yhteenvetona pienten siirtymien teorian yhteydessä Lagrangen esityksen mukaisia merkintöjä käyttäen syntyvät kaavat.

Kuvan 5.4.3 sijasta voidaan nyt esittää kuva 4.4.4. Täten



Kuva 4.4.4 (a) Kolmeen pinta-alkion suuntaan liittyvät jännitysvektorit. (b) Jännityskomponentit.

esityksen (5.4.23) vastine on

$$\left.\begin{aligned} \vec{t}^{(a)} &= \sigma_a\vec{i} + \tau_{ab}\vec{j} + \tau_{ac}\vec{k}\,, \\ \vec{t}^{(b)} &= \tau_{ba}\vec{i} + \sigma_b\vec{j} + \tau_{bc}\vec{k}\,, \\ \vec{t}^{(c)} &= \tau_{ca}\vec{i} + \tau_{cb}\vec{j} + \sigma_c\vec{k}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.20)$$

Traktio-jännitysyhteys on kohdan 5.4 perusteella

$$\boxed{\vec{t} = \vec{n}^{o}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}} \qquad (4.4.21)$$

eli

$$\vec{t} = n_a^o \vec{t}^{(a)} + n_b^o \vec{t}^{(b)} + n_c^o \vec{t}^{(c)} \tag{4.4.21'}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} t_a &= n_a^o \sigma_a + n_b^o \tau_{ba} + n_c^o \tau_{ca} , \\ t_b &= n_a^o \tau_{ab} + n_b^o \sigma_b + n_c^o \tau_{cb} , \\ t_c &= n_a^o \tau_{ac} + n_b^o \tau_{bc} + n_c^o \sigma_c \end{aligned}\right\} \tag{4.4.21''}$$

eli

$$\boxed{\{t\} = [n^o]\{\sigma\} ,} \tag{4.4.21'''}$$

jossa

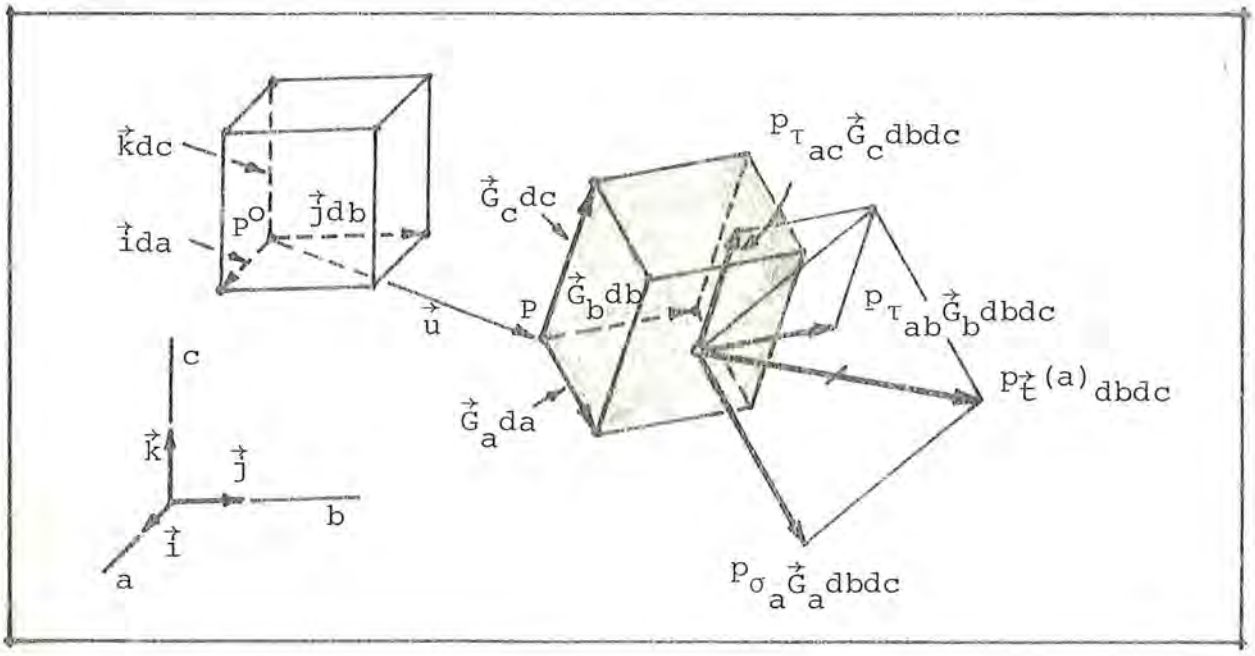
$$\left.\begin{aligned} \{t\} &= [t_a \ t_b \ t_c]^T , \\ [n^o] &= \begin{bmatrix} n_a^o & 0 & 0 & 0 & n_c^o & n_b^o \\ 0 & n_b^o & 0 & n_c^o & 0 & n_a^o \\ 0 & 0 & n_c^o & n_b^o & n_a^o & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}\right\} \tag{4.4.22}$$

Matriisikaavassa (4.4.21''') on jo käytetty hyväksi tietoa, että parittaiset leikkausjännitykset ovat yhtäsuuria.

4.4.2 Suuret siirtymät

Toinen Piola-Kirchhoffin jännitys. Suurten siirtymien yhteydessä Lagrangen esitystapaa käytettäessä jännityskäsitteet tulevat mutkikkaiksi. Eulerin eli Cauchyn jännitys ei ole nimittäin tällöin sovelias, koska jännityskäsite halutaan liittää yleensä tiettyä ainealkiota seuraavaksi eikä mielivaltaiseen avaruuden pisteeseen liittyväksi. Tämä on tarpeen, jotta voitaisiin käyttää asiaankuuluvaa konstitutiivista yhteyttä esimerkiksi epähomogeenisen kappaleen tapauksessa. Kirjallisuudessa esiintyy toisistaan poikkeavia jännitysten määrittelytapoja. Tässä käsitellään niistä yhtä (ns. toinen Piola-Kirchhoffin jännitys), joka on ehkä kaikkein tavallisin. Lähteessä [4.4] on selkeä esitys suuriin siirtymiin liittyvistä jännityksistä.

Kuva 4.4.5 vastaa aikaisemmin esitettyä kuvaa 3.3.2 varustet-



Kuva 4.4.5 Ainealkion tahkoon vaikuttava pintavoima $p_{\vec{t}}^{(a)} dbdc$.

tuna tietyillä lisämerkinnöillä. Deformoituneen suuntaissärmiön tahkoon, joka on ollut alkutilassa kohtisuorassa a-akselia vastaan, vaikuttavaa pintavoimien resultanttia merkitään tunnuksella $p_{\vec{t}}^{(a)} dbdc$. Näin määritelty suure $p_{\vec{t}}^{(a)}$ ei ole pintaan vaikuttava todellinen traktio, koska lausekkeessa $p_{\vec{t}}^{(a)} dbdc$ esiintyy pintaalkion pinta-ala $dbdc = dA_a^o$ alkutilassa eikä todellinen pinta-ala

$|\vec{G}_b db \times \vec{G}_c dc|$. Suuretta ${}^p\vec{t}^{(a)}$ voidaan nimittää tätä korostettaessa pseudotraktioksi (engl. pseudo traction). (Yläviite p on valittu muistuttamaan tästä.) Sen vektorikomponentteja alkion särmien suunnissa merkitään seuraavasti: ${}^p\sigma_a\vec{G}_a$, ${}^p\tau_{ab}\vec{G}_b$, ${}^p\tau_{ac}\vec{G}_c$ eli

$$\left.\begin{aligned} {}^p\vec{t}^{(a)} &= {}^p\sigma_a\vec{G}_a + {}^p\tau_{ab}\vec{G}_b + {}^p\tau_{ac}\vec{G}_c\,, \\ {}^p\vec{t}^{(b)} &= {}^p\tau_{ba}\vec{G}_a + {}^p\sigma_b\vec{G}_b + {}^p\tau_{bc}\vec{G}_c\,, \\ {}^p\vec{t}^{(c)} &= {}^p\tau_{ca}\vec{G}_a + {}^p\tau_{cb}\vec{G}_b + {}^p\sigma_c\vec{G}_c\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.23)$$

Tässä kaksi viimeistä esitystä syntyvät vastaavasti kuin ensimmäinen. Suureet ${}^p\sigma_a$, ${}^p\tau_{ab}$ jne. ovat ns. toisen Piola-Kirchhoffin eli ns. Kirchhoffin jännitystensorin ${}^p\overleftrightarrow{\sigma}$ komponentteja. Niitä tullaan nimittämään tässä lyhyesti jännityskomponenteiksi tai pseudojännityksiksi.

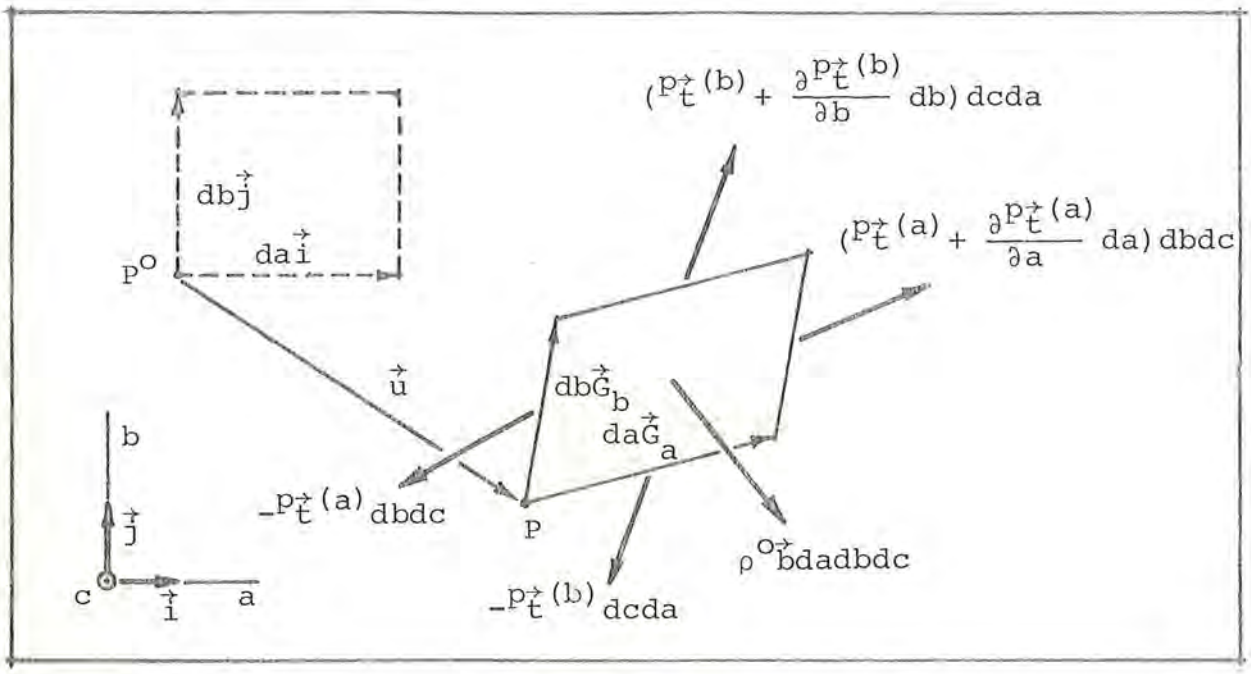
Pienten muodonmuutosten tapauksessa pseudojännitykset ovat arvoiltaan hyvin lähellä todellisia Eulerin jännityksiä (kun Eulerin jännityskomponentit lasketaan deformoituneen alkion ko. pinta-alkion paikkaan liittyvinä ja alkion suunta huomioonottaen), koska deformoituneet pinta-alat ovat miltei yhtä suuria kuin alkuperäiset pinta-alat ja koska suureet $\vec{G}_a$, $\vec{G}_b$ ja $\vec{G}_c$ ovat miltei yksikkövektoreita ja miltei kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Liikemäärämomentin taseen periaatteen avulla voidaan osoittaa (ks. kohta 4.5.2), että parittaisten pseudoleikkausjännitysten yhtäsuuruus muodossa

$${}^p\tau_{bc} = {}^p\tau_{cb}\,, \quad {}^p\tau_{ca} = {}^p\tau_{ac}\,, \quad {}^p\tau_{ab} = {}^p\tau_{ba} \qquad (4.4.24)$$

pätee. Ns. ensimmäisen Piola-Kirchhoffin jännityksen suhteen ei näin ole [3.1, s. 221].

Cauchyn liikeyhtälöt. Johdetaan liikeyhtälöt differentiaaligeometrisella tavalla vastaavasti kuin kohdassa 4.4.1. Kuvan 4.4.3 sijasta saadaan kuva 4.4.6. (Kuva on piirretty tasotapauksessa, jottei esityksestä tulisi liian mutkikasta.) Suurten siirtymien yhteydessä tulee helposti tiettyjä ajatuksellisia vaikeuksia kos-



Kuva 4.4.6 Deformoituneeseen alkioon vaikuttavat voimat tasotapauksessa.

ka kappaleeseen liittyvät fysikaaliset ilmiöt tapahtuvat tietenkin aina kappaleen kullakin hetkellä varaamassa avaruuden osassa, mutta Lagrangen esityksen mukaisesti ilmiön matemaattinen kuvaaminen täytyy kuvitella alkutilan mukaisessa määrittelyalueessa tapahtuvaksi.

Deformoituneeseen alkioon vaikuttavien massavoimien resultantti

$$dF_V = \vec{b}dm = \rho^o \vec{b} dV^o = \rho^o \vec{b} dadbdc \ . \qquad (4.4.25)$$

Tässä siis $\vec{b}$ tarkoittaa kenttävoiman intensiteettiä pisteessä P, joten $\vec{b}$ voi olla periaatteessa etukäteen tuntematon, koska sen muoto $\vec{b} = \vec{b}(a,b,c,t)$ riippuu siirtymistä; ks. kohdan 4.4.1 huomautus 2. Kaavan (4.4.25) lopullisen muodon saavuttamiseksi on vielä käytetty hyväksi yhteyttä (4.3.10) eli $dm = \rho^o dV^o = \rho dV$.

Alkioon vaikuttavien pintavoimien resultantti

$$d\vec{F}_S = -\vec{p}_t(a)\, dbdc + (\vec{p}_t(a) + \frac{\partial \vec{p}_t(a)}{\partial a} da)\, dbdc +$$

$$-\vec{p}_t^{(b)}dcda + (\vec{p}_t^{(b)} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(b)}}{\partial b}db)dcda +$$

$$-\vec{p}_t^{(c)}dadb + (\vec{p}_t^{(c)} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(c)}}{\partial c}dc)dadb$$

$$= \frac{\partial \vec{p}_t^{(a)}}{\partial a}dadbdc + \frac{\partial \vec{p}_t^{(b)}}{\partial b}dadbdc + \frac{\partial \vec{p}_t^{(c)}}{\partial c}dadbdc$$

$$= (\frac{\partial \vec{p}_t^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(c)}}{\partial c})dV^o \ . \qquad (4.4.26)$$

Tässä on siis otettu jo kuvan 4.4.6 esittämästä tilanteesta poiketen yleiseen kolmidimensioiseen tapaukseen liittyvä pseudotraktion $\vec{p}_t^{(c)}$ osuus huomioon.

Alkion liikemäärä on $dm\vec{v}$ ja koska alkion massa dm on vakio, liikemäärän muutosnopeus (tässä $D/Dt = \partial/\partial t$)

$$\frac{D}{Dt}(dm\vec{v}) = dm\frac{D\vec{v}}{Dt} = dm\vec{a} = \rho^o\vec{a}dV^o \ . \qquad (4.4.27)$$

Kun alkioon sovelletaan liikemäärän taseen periaatetta, saadaan siis yhtälö

$$\rho^o\vec{b}dV^o + (\frac{\partial \vec{p}_t^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(c)}}{\partial c})dV^o = \rho^o\vec{a}dV^o \qquad (4.4.28)$$

eli

$$\boxed{\rho^o\vec{b} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial \vec{p}_t^{(c)}}{\partial c} = \rho^o\vec{a} \ .} \qquad (4.4.29)$$

Nämä ovat <u>Cauchyn liikeyhtälöt</u> suurten siirtymien tapauksessa. Kiihtyvyyden $\vec{a}$ siirtymissä esitetty lauseke saadaan edelleen kaavojen (4.4.16) avulla.

Niin haluttaessa voidaan jälleen merkitä kaavan (4.4.9) tapaan

$$d\vec{F}_S = \vec{p}_f^{\,\sigma}dV^o \ , \qquad (4.4.30)$$

jossa lyhennysmerkintä

$$p_{\vec{f}}^{\sigma} \equiv \frac{\partial p_{\vec{t}}^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial p_{\vec{t}}^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial p_{\vec{t}}^{(c)}}{\partial c} \quad . \tag{4.4.31}$$

Liikeyhtälöt (4.4.29) saadaan tällöin lyhyempään muotoon

$$\rho^{o}\vec{b} + p_{\vec{f}}^{\sigma} = \rho^{o}\vec{a} \ . \tag{4.4.32}$$

Liikeyhtälöiden komponenttimuodot karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa saadaan muodostamalla yhtälön (4.4.29) molempien puolien skalaaritulot vuoronperään yksikkövektoreiden $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ kanssa. Esimerkiksi ensimmäinen yhtälö tulee olemaan

$$\rho^{o}\vec{b}\cdot\vec{i} + \frac{\partial p_{\vec{t}}^{(a)}}{\partial a}\cdot\vec{i} + \frac{\partial p_{\vec{t}}^{(b)}}{\partial b}\cdot\vec{i} + \frac{\partial p_{\vec{t}}^{(c)}}{\partial c}\cdot\vec{i} = \rho^{o}\vec{a}\cdot\vec{i} \tag{4.4.33}$$

eli

$$\rho^{o}b_a + \frac{\partial}{\partial a}(p_{\vec{t}}^{(a)}\cdot\vec{i}) + \frac{\partial}{\partial b}(p_{\vec{t}}^{(b)}\cdot\vec{i}) + \frac{\partial}{\partial c}(p_{\vec{t}}^{(c)}\cdot\vec{i}) = \rho^{o}a_a \ . \tag{4.4.34}$$

On käytetty hyväksi tietoa, että $\vec{i}$ on vakio suureiden a, b ja c suhteen. Ottamalla huomioon lausekkeet (4.4.23) havaitaan, että joudutaan laskemaan tulot $\vec{G}_a\cdot i$, $\vec{G}_b\cdot\vec{i}$ jne. Kerätään ne näkyviin siirtymien avulla lausuttuina (ks. kaavat (3.3.19)):

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{G}_a\cdot\vec{i} = 1 + \frac{\partial u_a}{\partial a}\ , \quad \vec{G}_a\cdot\vec{j} = \frac{\partial u_b}{\partial a}\ , \quad \vec{G}_a\cdot\vec{k} = \frac{\partial u_c}{\partial a}\ ,\\
&\vec{G}_b\cdot\vec{i} = \frac{\partial u_a}{\partial b}\ , \quad \vec{G}_b\cdot\vec{j} = 1 + \frac{\partial u_b}{\partial b}\ , \quad \vec{G}_b\cdot\vec{k} = \frac{\partial u_c}{\partial b}\ ,\\
&\vec{G}_c\cdot\vec{i} = \frac{\partial u_a}{\partial c}\ , \quad \vec{G}_c\cdot\vec{j} = \frac{\partial u_b}{\partial c}\ , \quad \vec{G}_c\cdot\vec{k} = 1 + \frac{\partial u_c}{\partial c}\ .
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.35}$$

Täten saadaan komponenttiliikeyhtälöt

$$\left.\begin{aligned}
&\rho^{o}b_a + \frac{\partial}{\partial a}\left[p_{\sigma_a}(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}) + p_{\tau_{ab}}\frac{\partial u_a}{\partial b} + p_{\tau_{ac}}\frac{\partial u_a}{\partial c}\right] +\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial b}\left[p_{\tau_{ba}}(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}) + p_{\sigma_b}\frac{\partial u_a}{\partial b} + p_{\tau_{bc}}\frac{\partial u_a}{\partial c}\right] +\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial c}\left[p_{\tau_{ca}}(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}) + p_{\tau_{cb}}\frac{\partial u_a}{\partial b} + p_{\sigma_c}\frac{\partial u_a}{\partial c}\right] = \rho^{o}a_a\ ,
\end{aligned}\right|$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\rho^{o}b_b + \frac{\partial}{\partial a}\left[{}^{p}\sigma_a \frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\tau_{ab}\left(1+\frac{\partial u_b}{\partial b}\right) + {}^{p}\tau_{ac}\frac{\partial u_b}{\partial c}\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial b}\left[{}^{p}\tau_{ba}\frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\sigma_b\left(1+\frac{\partial u_b}{\partial b}\right) + {}^{p}\tau_{bc}\frac{\partial u_b}{\partial c}\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial c}\left[{}^{p}\tau_{ca}\frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\tau_{cb}\left(1+\frac{\partial u_b}{\partial b}\right) + {}^{p}\sigma_c\frac{\partial u_b}{\partial c}\right] = \rho^{o}a_b\,, \\
&\rho^{o}b_c + \frac{\partial}{\partial a}\left[{}^{p}\sigma_a \frac{\partial u_c}{\partial a} + {}^{p}\tau_{ab}\frac{\partial u_c}{\partial b} + {}^{p}\tau_{ac}\left(1+\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial b}\left[{}^{p}\tau_{ba}\frac{\partial u_c}{\partial a} + {}^{p}\sigma_b\frac{\partial u_c}{\partial b} + {}^{p}\tau_{bc}\left(1+\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial c}\left[{}^{p}\tau_{ca}\frac{\partial u_c}{\partial a} + {}^{p}\tau_{cb}\frac{\partial u_c}{\partial b} + {}^{p}\sigma_c\left(1+\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)\right] = \rho^{o}a_c\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (4.4.29')
$$

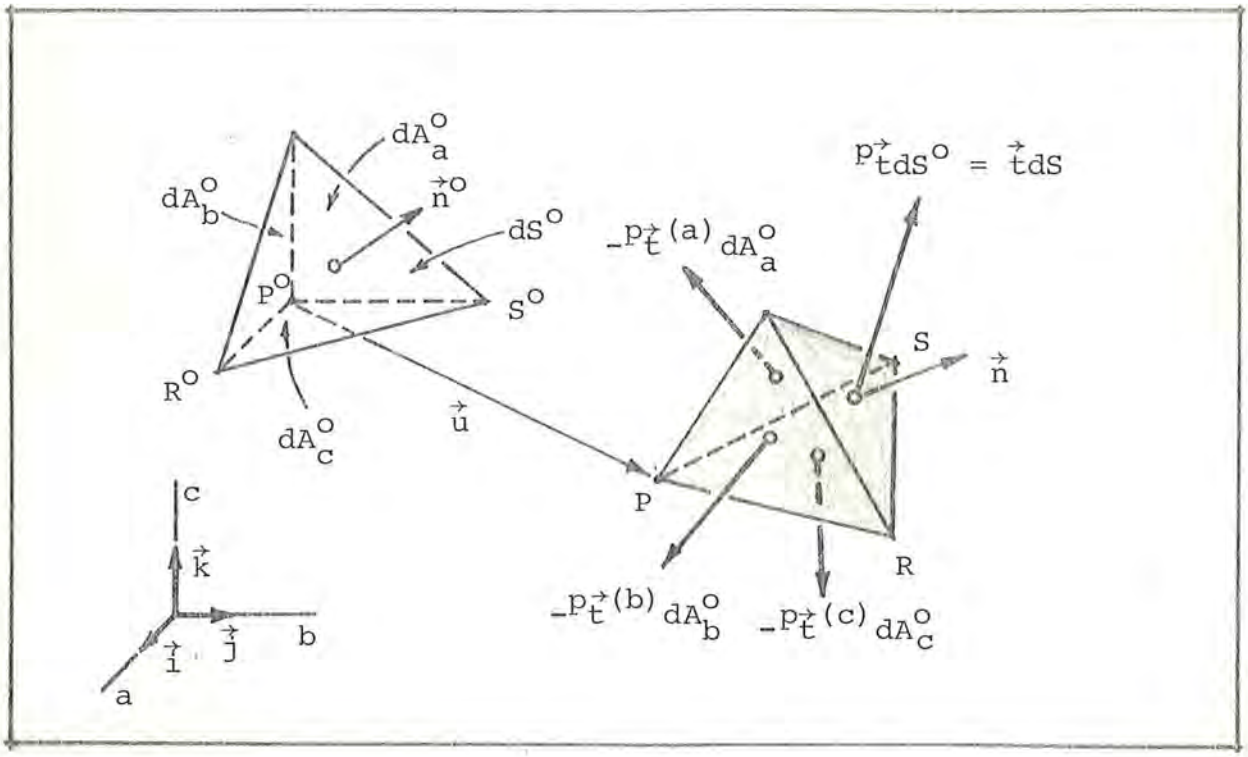
Nämä monimutkaiset yhtälöt palautuvat pienten siirtymien teorian liikeyhtälöiksi (4.4.5''), kun annetaan kaikkien siirtymien derivaattojen lähestyä nollaa ja poistetaan samalla yläviite p.

Yhtälöiden matriisivastineita sekä Navierin liikeyhtälöitä ei ole syytä pyrkiä esittämään tässä. Tilanne on joka tapauksessa niin komplisoitu, että ratkaisuja on etsittävä numeerisesti, jolloin virtuaalisen työn periaate on hedelmällisempi lähtökohta.

Huomautus 1. Termiä ${}^{p}\vec{f}^{\sigma}$ ei voida esittää tässä enää yksinkertaisessa tensorimuodossa $\vec{\nabla}\cdot{}^{p}\vec{f}^{\sigma}$ (vrt. kaava (4.4.5)). Oikea tensorimuoto on esitetty lähteessä [3.1, s. 224].

Traktio-jännitysyhteys. Suoritetaan tarkastelu samaan henkeen kuin kohdassa 5.4 kuvan 5.4.2 yhteydessä, mutta ei niin täsmällisesti. Kuvassa 4.4.7 on esitetty deformoituneeseen tetraedrialkioon vaikuttavat pintavoimat. Havaitaan, että myös tetraedrin vinoon tahkoon liittyvä vektori ${}^{p}\vec{t}$ on määritelty pseudotraktioksi, koska pinta-alkioon dS vaikuttava voima $\vec{t}dS$ ($\vec{t}$ on todellinen traktio) on esitetty muodossa ${}^{p}\vec{t}dS^{o}$, jossa dS^{o} on pinta-alkion dS pinta-ala alkutilassa.

Täsmällinen liikemäärän taseen periaatteen soveltaminen osoittaa vastaavaan tapaan kuin kohdassa 5.4, että lopulliseksi yhtä-



Kuva 4.4.7 Differentiaalinen tetraedrialkio alkutilassa ja deformoituneessa tilassa.

löksi saadaan pelkästään deformoituneeseen alkioon vaikuttavia pintavoimia koskeva tasapainoyhtälö

$$\vec{p}_t dS^o - \vec{p}_t(a)\, dA_a^o - \vec{p}_t(b)\, dA_b^o - \vec{p}_t(c)\, dA_c^o = \vec{0} \ . \qquad (4.4.36)$$

Alkutilan geometriasta seuraa tulokset (sovelletaan kaavoja (5.4.17))

$$dA_a^o = n_a^o dS^o \ , \quad dA_b^o = n_b^o dS^o \ , \quad dA_c^o = n_c^o dS^o \ . \qquad (4.4.37)$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (4.4.36) ja jakamalla dS^o:lla saadaan <u>traktio-jännitysyhteys</u>

$$\vec{p}_t = n_a^o\, \vec{p}_t(a) + n_b^o\, \vec{p}_t(b) + n_c^o\, \vec{p}_t(c) \ . \qquad (4.4.38)$$

Tämän komponenttimuodot syntyvät jälleen muodostamalla yhtälön molempien puolien skalaaritulot vuoronperään yksikkövektoreiden $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ kanssa. Esimerkiksi ensimmäinen yhtälö tulee olemaan

$$p_{\vec{t}} \cdot \vec{i} = n_a^o \, p_{\vec{t}}^{(a)} \cdot \vec{i} + n_b^o \, p_{\vec{t}}^{(b)} \cdot \vec{i} + n_c^o \, p_{\vec{t}}^{(c)} \cdot \vec{i} \, .$$

Ottamalla vielä huomioon lausekkeet (4.4.23) ja (4.4.35) saadaan siis

$$\left.\begin{aligned}
p_{t_a} &= n_a^o\left[p_{\sigma_a}\left(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}\right) + p_{\tau_{ab}}\frac{\partial u_a}{\partial b} + p_{\tau_{ac}}\frac{\partial u_a}{\partial c}\right] + \\
&\quad + n_b^o\left[p_{\tau_{ba}}\left(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}\right) + p_{\sigma_b}\frac{\partial u_a}{\partial b} + p_{\tau_{bc}}\frac{\partial u_a}{\partial c}\right] + \\
&\quad + n_c^o\left[p_{\tau_{ca}}\left(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}\right) + p_{\tau_{cb}}\frac{\partial u_a}{\partial b} + p_{\sigma_c}\frac{\partial u_a}{\partial c}\right] , \\
p_{t_b} &= n_a^o\left[p_{\sigma_a}\frac{\partial u_b}{\partial a} + p_{\tau_{ab}}\left(1+\frac{\partial u_b}{\partial b}\right) + p_{\tau_{ac}}\frac{\partial u_b}{\partial c}\right] + \\
&\quad n_b^o\left[p_{\tau_{ba}}\frac{\partial u_b}{\partial a} + p_{\sigma_b}\left(1+\frac{\partial u_b}{\partial b}\right) + p_{\tau_{bc}}\frac{\partial u_b}{\partial c}\right] + \\
&\quad + n_c^o\left[p_{\tau_{ca}}\frac{\partial u_b}{\partial a} + p_{\tau_{cb}}\left(1+\frac{\partial u_b}{\partial b}\right) + p_{\sigma_c}\frac{\partial u_b}{\partial c}\right] , \\
p_{t_c} &= n_a^o\left[p_{\sigma_a}\frac{\partial u_c}{\partial a} + p_{\tau_{ab}}\frac{\partial u_c}{\partial b} + p_{\tau_{ac}}\left(1+\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)\right] + \\
&\quad + n_b^o\left[p_{\tau_{ba}}\frac{\partial u_c}{\partial a} + p_{\sigma_b}\frac{\partial u_c}{\partial b} + p_{\tau_{bc}}\left(1+\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)\right] + \\
&\quad + n_c^o\left[p_{\tau_{ca}}\frac{\partial u_c}{\partial a} + p_{\tau_{cb}}\frac{\partial u_c}{\partial b} + p_{\sigma_c}\left(1+\frac{\partial u_c}{\partial c}\right)\right] .
\end{aligned}\right\} \qquad (4.4.38')$$

Huomattakoon näissä kaavoissa ja kaavoissa (4.4.29') esiintyvät identtiset termit. Jos kaikkien siirtymien derivaattojen annetaan lähestyä nollaa ja poistetaan yläviitteet o ja p, päädytään pienten siirtymien teorian mukaisiin kaavoihin (4.4.21'').

Huomautus 2. Yhtälön (4.4.38) oikeaa puolta ei voida esittää tässä enää yksinkertaisessa tensorimuodossa $\vec{n}^{o} \cdot {}^{p}\overleftrightarrow{\sigma}$ (vrt. kaava (4.4.21)). Oikea tensorimuoto on esitetty lähteessä [3.1, s. 222].

4.5 Liikemäärämomentin tase

4.5.1 Pienet siirtymät

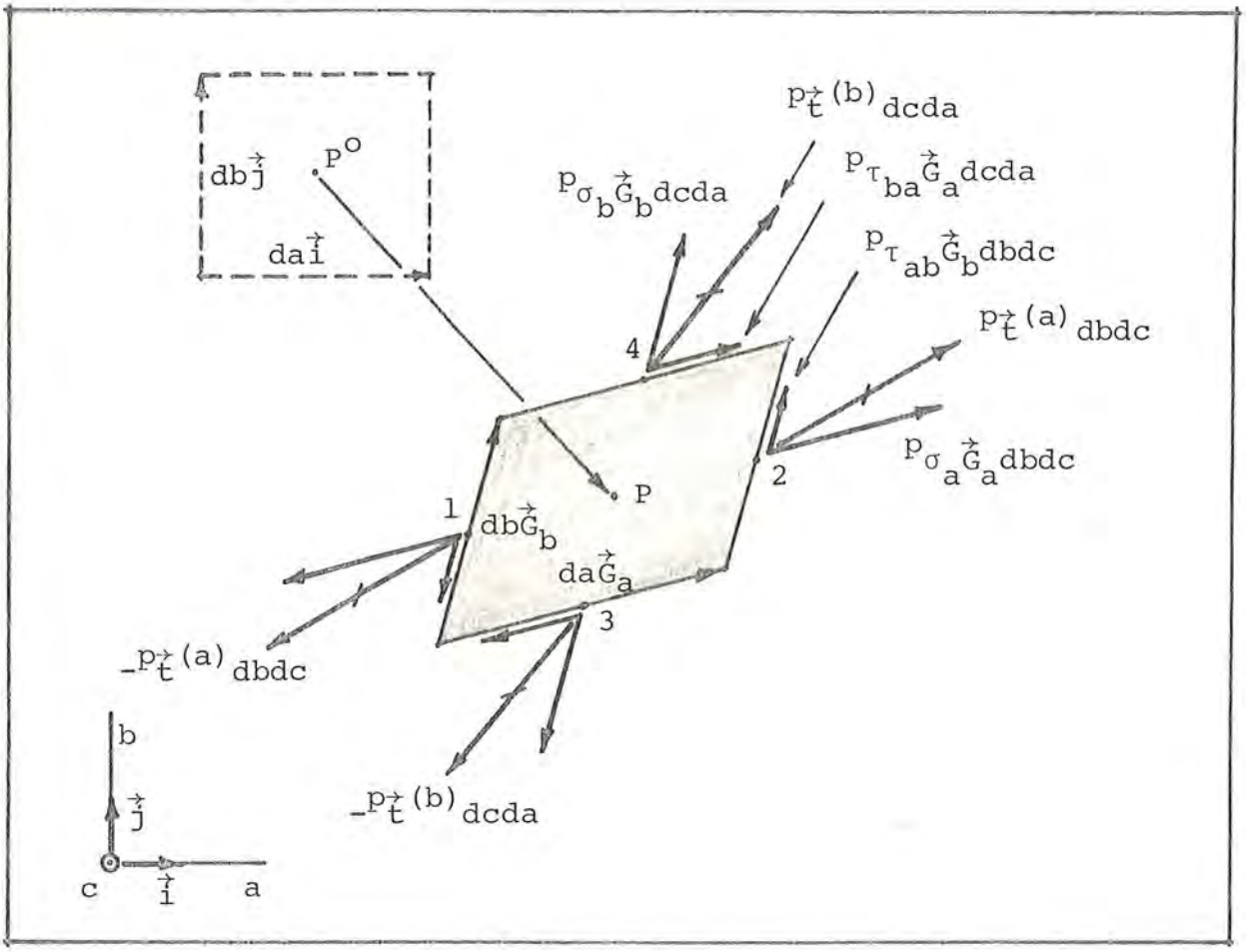
Parittaisten leikkausjännitysten yhtäsuuruus:

$$\boxed{\tau_{bc} = \tau_{cb}\,, \quad \tau_{ca} = \tau_{ac}\,, \quad \tau_{ab} = \tau_{ba}} \tag{4.5.1}$$

saadaan suoraan kohdan 5.5 kaavasta (5.5.9) vaihtamalla vain merkinnät asiaankuuluvasti.

4.5.2 Suuret siirtymät

Parittaisten pseudoleikkausjännitysten yhtäsuuruus pätee myös toisen Piola-Kirchhoffin jännitystensorin komponenttien suhteen.



Kuva 4.5.1 Deformoituneeseen alkioon vaikuttavat pintavoimat tasotapauksessa.

Suoritetaan johto differentiaaligeometrisesti vastaavaan tapaan kuin mitä tehtiin kohdassa 5.5 kuvan 5.5.2 yhteydessä.

Nyt saadaan kuva 4.5.1. (On otettu taas tasotapaus. Kuvassa on jätetty eräiden voimakomponenttien arvot tilanahtauden vuoksi merkitsemättä.) Tarkan suuruusluokkatarkastelun avulla voidaan osoittaa, että kulmaliikemäärän taseen periaate saa kuvan alkioon sovellettuna lopuksi jälleen muodon $d\vec{M}_S = \vec{0}$.

Lasketaan pintavoimien momentti $d\vec{M}_S$ alkion keskipisteen P suhteen. Pisteiden 1, 2, 3 ja 4 paikkavektorit pisteen P suhteen ovat vastaavasti $-da\vec{G}_a/2$, $da\vec{G}_a/2$, $-db\vec{G}_b/2$, $db\vec{G}_b/2$. Koska pseudonormaalijännitysvoimien vaikutussuorat kulkevat pisteen P kautta, näiden voimien momentti pisteen P suhteen häviää ja vain pseudoleikkausjännitysvoimien antamat termit tulee ottaa huomioon. Saadaan siis

$$
\begin{aligned}
d\vec{M}_S &= -\frac{1}{2}\, da\vec{G}_a \times (-{}^p\tau_{ab}\vec{G}_b dbdc) + \frac{1}{2}\, da\vec{G}_a \times {}^p\tau_{ab}\vec{G}_b dbdc + \\
&\quad - \frac{1}{2}\, db\vec{G}_b \times (-{}^p\tau_{ba}\vec{G}_a dcda) + \frac{1}{2}\, db\vec{G}_b \times {}^p\tau_{ba}\vec{G}_a dcda \\
&= {}^p\tau_{ab} dadbdc\vec{G}_a \times \vec{G}_b + {}^p\tau_{ba} dadbdc\vec{G}_b \times \vec{G}_a \\
&= {}^p\tau_{ab} dV^o\vec{G}_a \times \vec{G}_b - {}^p\tau_{ba} dV^o\vec{G}_a \times \vec{G}_b \\
&= ({}^p\tau_{ab} - {}^p\tau_{ba})\vec{G}_a \times \vec{G}_b dV^o \,. \qquad (4.5.2)
\end{aligned}
$$

Koska $d\vec{M}_S = \vec{0}$, saadaan siis viimeinen kaavoista

$$
\boxed{{}^p\tau_{bc} = {}^p\tau_{cb}\,, \quad {}^p\tau_{ca} = {}^p\tau_{ac}\,, \quad {}^p\tau_{ab} = {}^p\tau_{ba}\,.} \qquad (4.5.3)
$$

Kaksi ensimmäistä kaavaa syntyvät helposti suorittamalla äskeisen tyyppinen johto ottamalla huomioon kaikki alkioon vaikuttavat pintavoimat kolmidimensioisessa tapauksessa.

Kaavoja (4.5.3) vastaava, koordinaatistosta riippumaton yleisempi tulos sanoo, että toinen Piola-Kirchhoffin jännitystensori ${}^p\overleftrightarrow{\sigma}$ on <u>symmetrinen</u> eli

$$\boxed{\underset{\sim}{p}_{\sigma}^{\leftrightarrow\,T} = \underset{\sim}{p}_{\sigma}^{\leftrightarrow}\,.} \tag{4.5.4}$$

Tässä merkintä $(\overset{\leftrightarrow}{\ })^T$ tarkoittaa tensorin $(\overset{\leftrightarrow}{\ })$ liittotensoria eli transpoosia (engl. conjugate, transpose) [3.2, s.141].

4.6 Energian tase

4.6.1 Pienet siirtymät

Yleistä. Vallitsevat oleelliset kaavat saadaan jälleen suoraan luvun 5 vastaavasta kohdasta 5.6 muuttamalla merkinnät asiaankuuluvasti ($x \to a$, $y \to b$, $z \to c$, $D(\ )/Dt \to \partial(\ )\partial t$, $d_x \to \partial\varepsilon_a/\partial t$ jne.) tarvitsematta toistaa johtoja.

Mekaanisen energian tase. Kaavojen (5.6.18) ja (5.6.19) vastineiksi saadaan

$$\boxed{P = K^{\bullet}} \tag{4.6.1}$$

eli

$$P_{ext} + P_{int} = K^{\bullet}, \tag{4.6.1'}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} P_{ext} &= P^V_{ext} + P^S_{ext} = \int_{V^o} \rho^o \vec{b}\cdot\vec{u}^{\bullet}\, dV^o + \int_{S^o} \vec{t}\cdot\vec{u}^{\bullet}\, dS^o\ , \\ P_{int} &= -\int_{V^o} \{\sigma\}^T\{\varepsilon\}^{\bullet}\, dV^o \end{aligned}\right\} \tag{4.6.2}$$

ja vielä

$$K = \frac{1}{2}\int_{V^o} \rho^o \dot{\vec{u}}\cdot\vec{u}^{\bullet}\, dV^o\ . \tag{4.6.3}$$

Tässä on siis toimittu siirtymävektorin $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}^o,t)$ avulla, jolloin $\vec{v} \to \vec{u}^{\bullet} = \partial\vec{u}/\partial t$. Askeleen $\{d\} \to \{\varepsilon\}^{\bullet} = \partial\{\varepsilon\}/\partial t$ suorittamisen oikeutus pienten siirtymien yhteydessä perustuu kaavoihin (3.3.71).

Kertomalla yhtälöt (4.6.1) ja (4.6.1') puolittain ajan differentiaalilla dt saadaan vastaavasti kaavat

$$\boxed{đW = dK} \tag{4.6.4}$$

eli

$$đW_{ext} + đW_{int} = dK \ , \tag{4.6.4'}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} đW_{ext} &= đW^V_{ext} + đW^S_{ext} = \int_{V^o} {}^o\vec{b}\cdot d\vec{u}dV^o + \int_{S^o} \vec{t}\cdot d\vec{u}dS^o \ , \\ đW_{int} &= -\int_{V^o} \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}dV^o \ . \end{aligned}\right\} \tag{4.6.5}$$

Integrandi (vrt. kaava (5.6.12))

$$\{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} = \overleftrightarrow{\sigma}:d\overleftrightarrow{\varepsilon} = \sigma_{aa}d\varepsilon_{aa} + \sigma_{ab}d\varepsilon_{ab} + \ldots \tag{4.6.6}$$

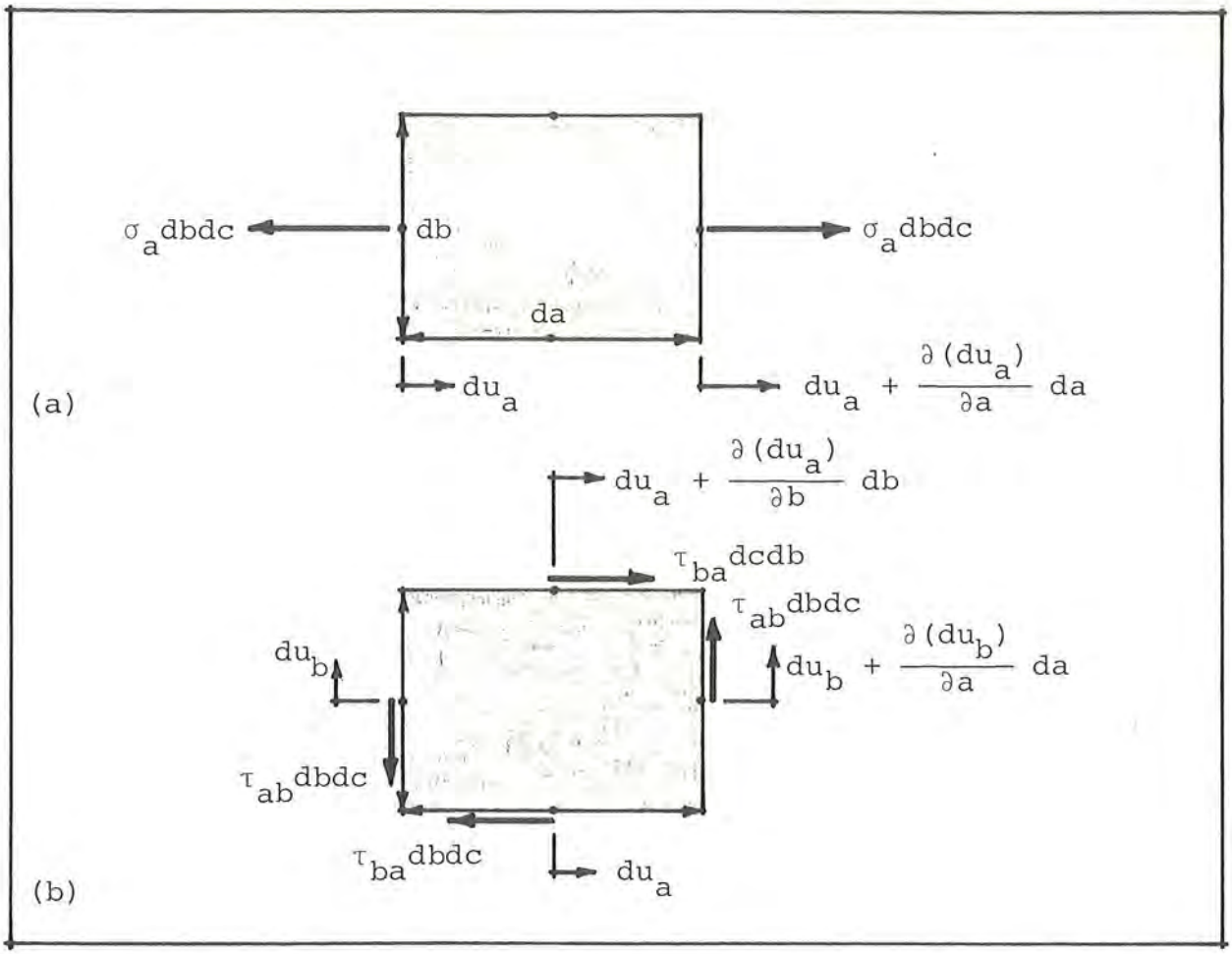
$$\begin{aligned} &= \sigma_a d\varepsilon_a + \sigma_b d\varepsilon_b + \sigma_c d\varepsilon_c + \\ &+ \tau_{bc}d\gamma_{bc} + \tau_{ca}d\gamma_{ca} + \tau_{ab}d\gamma_{ab} \ , \end{aligned} \tag{4.6.6'}$$

$$\begin{aligned} &= (-p+\sigma^*_a)d\varepsilon_a + (-p+\sigma^*_b)d\varepsilon_b + (-p+\sigma^*_c)d\varepsilon_c + \\ &+ \tau_{bc}d\gamma_{bc} + \tau_{ca}d\gamma_{ca} + \tau_{ab}d\gamma_{ab} \\ &= -p(d\varepsilon_a+d\varepsilon_b+d\varepsilon_c) + \sigma^*_a d\varepsilon_a + \sigma^*_b d\varepsilon_b + \sigma^*_c d\varepsilon_c + \\ &+ \tau_{bc}d\gamma_{bc} + \tau_{ca}d\gamma_{ca} + \tau_{ab}d\gamma_{ab} \\ &= -pd\varepsilon_V + \{\sigma^*\}^T d\{\varepsilon\} = -pd\varepsilon_V + \overleftrightarrow{\sigma}^*:d\overleftrightarrow{\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.6.6''}$$

on siis sisäisten voimien miinusmerkkinen differentiaalinen työ tilavuutta kohti. Sen fysikaalisen merkityksen selvittämiseen voidaan käyttää kohdassa 5.6.1 esitettyä jännitystehon tiheyden $\{\sigma\}^T\{d\}$ tarkastelussa esitetyn tulkinnan analogista vastinetta. Täten kuvan 5.6.2 sijalle saadaan kuva 4.6.1. Nopeuskentän $\vec{v}(\vec{r},t)$ sijasta käsitellään nyt ajassa dt syntyvää siirtymäkentän $\vec{u}(\vec{r}^o,t)$ differentiaalista muutosta

$$d\vec{u}(\vec{r}^o,t) = \vec{u}(\vec{r}^o,t+dt) - \vec{u}(\vec{r}^o,t) = \vec{v}(\vec{r}^o,t)dt \ . \tag{4.6.7}$$

Kuvassa (a) on tarkasteltu pelkästään jännityskomponentista σ_a



Kuva 4.6.1 (a) Jännityskomponentin σ_a tekemän differentiaalisen työn laskeminen. (b) Jännityskomponenttien τ_{ab} ja τ_{ba} tekemän differentiaalisen työn laskeminen.

syntyvien, ainealkion tahkoihin vaikuttavien pintavoimien tekemää differentiaalista työtä. Saadaan (vrt. kaava (2.3.45))

$$\begin{aligned} đW &= -\sigma_a dbdc \cdot du_a + \sigma_a dbdc \cdot (du_a + \frac{\partial(du_a)}{\partial a} da) \\ &= \sigma_a \frac{\partial(du_a)}{\partial a} dadbdc = \sigma_a d(\frac{\partial u_a}{\partial a}) dadbdc \\ &= \sigma_a d\varepsilon_a dV^o \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

eli

$$\frac{đW}{dV^o} = \sigma_a d\varepsilon_a \ . \tag{4.6.9}$$

Kuvassa (b) on taas tarkasteltu pelkästään jännityskomponenteista τ_{ab} ja τ_{ba} syntyvien pintavoimien työtä. Saadaan

$$\not{d}W = -\tau_{ab}dbdc\cdot du_b + \tau_{ab}dbdc\cdot(du_b + \frac{\partial(du_b)}{\partial a}da) +$$

$$- \tau_{ba}dcda\cdot du_a + \tau_{ba}dcdb\cdot(du_a + \frac{\partial(du_a)}{\partial b}db)$$

$$= \tau_{ab}\frac{\partial(du_b)}{\partial a}dadbdc + \tau_{ba}\frac{\partial(du_a)}{\partial b}dadbdc$$

$$= \tau_{ab}d(\frac{\partial u_b}{\partial a})dV^o + \tau_{ba}d(\frac{\partial u_a}{\partial b})dV^o$$

$$= \tau_{ab}d(\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a})dV^o = \tau_{ab}d\gamma_{ab}dV^o \qquad (4.6.10)$$

eli

$$\frac{\not{d}W}{dV^o} = \tau_{ab}d\gamma_{ab} \ . \qquad (4.6.11)$$

Muista jännityskomponenteista kertyvät termit saadaan vastaavaan tapaan.

Useat kuvan 5.6.2 yhteydessä tehdyt huomautukset pätevät analogisina myös tässä. Kaavojen (4.6.8) ja (4.6.10) johdoissa esiintyvien verrattain kömpelöiden merkintöjen suhteen on todettava ensinnäkin, että differentiaalien du_a ja du_b syynä on siis tässä kaavan (4.6.7) perusteella ajan muutos. (Nämä differentiaalit on piirretty kuvaan 4.6.1 luonnollisestikin voimakkaasti liioiteltuina.) Lisäksi on käytetty hyväksi differentioinnin ja derivoinnin paikan suhteen vaihdannaisuutta.

Integroimalla vielä yhtälöt (4.6.1) ja (4.6.1') puolittain tietyn äärellisen ajan välin (t_1,t_2) yli saadaan vastaavasti kaavat

$$\boxed{W = \Delta K} \qquad (4.6.12)$$

eli

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta K \ , \qquad (4.6.12')$$

jossa

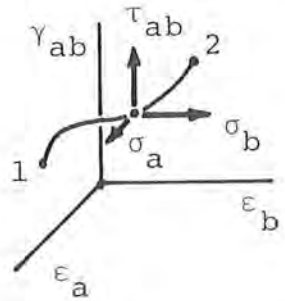
$$W_{ext} = W_{ext}^{V} + W_{ext}^{S} \tag{4.6.13}$$

ja

$$W_{int} = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{V^o} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}^{\bullet} dV^o \right) dt = -\int_{V^o} \left(\int_{t_1}^{t_2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}^{\bullet} dt \right) dV^o \tag{4.6.14}$$

$$= -\int_{V^o} \left(\int_{1}^{2} \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} \right) dV^o \ . \tag{4.6.15}$$

Tässä ei ole kirjoitettu kaikkien lausekkeiden yksityiskohtaisia muotoja näkyviin. Sen sijaan tarkastellaan hieman perusteellisemmin sisäisten voimien tekemän työn W_{int} lausekkeita (4.6.14) ja (4.6.15). Edellisessä muodossa työ on laskettu ensin tehon aikaintegraalina ja koska alue V^o ei riipu ajasta, integroimisjärjestys voidaan vaihtaa (vrt. kaavat (2.3.53), (2.3.55)). Jälkimmäisessä muodossa (Huomataan, että $d\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^{\bullet} dt$.) työ on laskettu ensin viivaintegraalina kunkin ainealkion osalta. Voimme kuvitella kuhunkin alkioon liitetyksi kuusidimensioisen ns. venymäavaruuden (engl. strain space), jonka karteesiset koordinaatit ovat ε_a, ε_b,..., γ_{ab}. Jännityskomponentit σ_a, σ_b,..., τ_{ab} voidaan ajatella vastaaviin koordinaattiakselien suuntiin vaikuttavina voimakomponentteina. Asetelmaa on havainnollistettu kuvassa 4.6.2 kolmidimensioisessa tapauksessa. Lauseke $\int_1^2 \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}$ tai täsmällisemmin lauseke



Kuva 4.6.2 Venymäavaruus.

$$\int_{\{\varepsilon\}_1}^{\{\varepsilon\}_2} \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} = \int_{\{\varepsilon\}_1}^{\{\varepsilon\}_2} (\sigma_a d\varepsilon_a + \sigma_b d\varepsilon_b + \ldots + \tau_{ab} d\gamma_{ab}) \ , \tag{4.6.16}$$

jossa rajat $\{\varepsilon\}_1$ ja $\{\varepsilon\}_2$ ovat kullekin alkiolle yleensä erilaiset, saa täten tavanomaisen voiman työn lausekkeen (2.3.47):

$$\left.\begin{aligned}\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_1^2 (F_a dx + F_b dy + F_c dz)\\ &= \int_1^2 (F_a du_a + F_b du_b + F_c du_c)\end{aligned}\right\} \qquad (4.6.17)$$

johdosta tiettyä lisävalaistusta.

<u>Energian taseen periaate</u>. Kaavojen (5.6.26) vastineena saadaan <u>energiayhtälö</u>

$$\boxed{\rho^o \frac{\partial e}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \overleftrightarrow{\sigma}:\frac{\partial}{\partial t}\overleftrightarrow{\varepsilon}} \qquad (4.6.18)$$

eli

$$\rho^o \frac{\partial e}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_a}{\partial a} + \frac{\partial q_b}{\partial b} + \frac{\partial q_c}{\partial c}\right) + \sigma_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} + \sigma_a \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial t} + \sigma_c \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} +$$

$$+ \tau_{bc} \frac{\partial \gamma_{bc}}{\partial t} + \tau_{ca} \frac{\partial \gamma_{ca}}{\partial t} + \tau_{ab} \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} \qquad (4.6.18')$$

eli

$$\rho^o \frac{\partial e}{\partial t} = -\{\nabla\}^T\{q\} + \{\sigma\}^T \frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\} \ . \qquad (4.6.18'')$$

On siirrytty käyttämään Lagrangen esityksen merkinnän $D(\ )dt \equiv (\ )^{\bullet} \equiv \partial(\ )/\partial t$ viimeistä, kirjallisuudessa tavanomaisimmin näkyvää muotoa.

<u>Energiayhtälön erityismuotoja</u>. Ensinnäkin suoritetaan kohdan 5.6.2 huomautuksen 1 mukaiset muutokset ja asetetaan (vrt. kaava (5.6.29)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \vec{\nabla}\cdot\vec{q}^c - \rho^o r \ . \qquad (4.6.19)$$

Otaksutaan lisäksi kimmoisen aineen sisäenergian differentiaalin lauseke (4.2.48):

$$\partial e = \frac{1}{\rho^o}(\{\sigma\}+[D]\{\alpha\}T)^T\partial\{\varepsilon\} + c_\varepsilon \partial T \qquad (4.6.20)$$

sekä Fourierin lämmönjohtumislaki (4.2.55):

$$\vec{q}^{\,c} = -\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}T) \quad . \tag{4.6.21}$$

Kaava (4.6.20) on kirjoitettu alkuperäisestä muodosta poiketen ($d \to \partial$) korostamaan tässä sitä, että ko. differentiaalit koskevat luonnollisesti aina tiettyä ainealkiota, jolloin vastaavat aineelliset aikaderivaatat saadaan muodollisesti jakamalla yhtälö (4.6.20) puolittain ajan differentiaalilla ∂t. Sijoittamalla lausekkeet (4.6.19), (4.6.20) ja (4.6.21) yhtälöön (4.6.18) saadaan ensiksi

$$\rho^o\left[\cancel{\frac{1}{\rho^o}\{\sigma\}^T\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\}} + \frac{1}{\rho^o}([D]\{\alpha\}T)^T\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\} + c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t}\right] =$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}T)) + \rho^o r + \cancel{\overleftrightarrow{\sigma}:\frac{\partial}{\partial t}\overleftrightarrow{\varepsilon}} \tag{4.6.22}$$

ja energiayhtälö tulee siis olemaan

$$\boxed{\rho^o c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} + ([D]\{\alpha\}T)^T\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\} = \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}T)) + \rho^o r} \tag{4.6.23}$$

eli

$$\rho^o c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} + ([D]\{\alpha\}T)^T\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\} =$$

$$\frac{\partial}{\partial a}(k_{aa}\frac{\partial T}{\partial a} + k_{ab}\frac{\partial T}{\partial b} + k_{ac}\frac{\partial T}{\partial c}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial b}(k_{ba}\frac{\partial T}{\partial a} + k_{bb}\frac{\partial T}{\partial b} + k_{bc}\frac{\partial T}{\partial c}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial c}(k_{ca}\frac{\partial T}{\partial b} + k_{cb}\frac{\partial T}{\partial b} + k_{cc}\frac{\partial T}{\partial c}) + \rho^o r \tag{4.6.23'}$$

eli

$$\rho^o c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} + ([D]\{\alpha\}T)^T\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\} = \{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}T) + \rho^o r\,. \tag{4.6.23''}$$

Isotrooppisella aineella voidaan käyttää Fourierin lämmönjohtu-

mislain yksinkertaista muotoa (4.2.59) ja lisäksi esimerkin 4.2.2 kaavan (e) perusteella termi

$$([D]\{\alpha\}T)^T \partial\{\varepsilon\} = 3K\alpha T \partial\varepsilon_V \ . \qquad (4.6.24)$$

Energiayhtälöä (4.6.23) nimitetään usein lämmönjohtumisyhtälöksi (engl. differential equation of heat conduction) etenkin stationaarisessa tapauksessa, jolloin vallitseva muoto on

$$\vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}T)) + \rho^o r = 0 \qquad (4.6.25)$$

Epästationaarisessa tapauksessa energiayhtälössä nähdään olevan yleisessä tapauksissa kytkentä lämpötilan T ja siirtymien $\vec{u}$ ($\{\varepsilon\} = [{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}$) välillä. Kuitenkin vain hyvin nopeissa, shokkimaisissa lämpötilan muutoksissa on tarpeen pitää mukana venymänopeudet sisältävää termiä ja yleensä se voidaan jättää pois, jolloin kytkentä häviää [3.1, s. 291] ja saadaan tavanomainen lämmönjohtumisyhtälö

$$\rho^o c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}T)) + \rho^o r \ . \qquad (4.6.26)$$

Lämpövirran tiheys - lämpövuoyhteys. Kirjoitetaan kohdan 5.6.2 perusteella välittömästi kaavat

$$\boxed{q_n = \vec{n}^o\cdot\vec{q}} \qquad (4.6.27)$$

eli

$$q_n = n_a^o q_a + n_b^o q_b + n_c^o q_c \qquad (4.6.27')$$

eli vielä

$$q_n = \{n^o\}^T\{q\} \ , \qquad (4.6.27'')$$

jossa siis

$$\left.\begin{aligned} \{q\} &= [q_a \; q_b \; q_c]^T \; , \\ \{n^o\} &= [n_a^o \; n_b^o \; n_c^o]^T \; . \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.28)$$

4.6.2 Suuret siirtymät

Yleistä. Kuten jo kohdassa 4.4.2 on korostettu, Lagrangen esitystavan mukaisten suurten siirtymien formulaatioiden ymmärtämiseksi on oleellista muistaa seuraava: Kappaleeseen liittyvät fysikaaliset ilmiöt tapahtuvat aina kappaleen kullakin hetkellä täyttämässä avaruuden osassa, mutta "matemaattisessa mielessä kaikki tapahtuukin" kiinteässä alkutilan mukaisessa määrittelyalueessa.

Mekaanisen energian tase. Esimerkiksi kaavojen (4.6.1)...(4.6.3) vastineiksi saadaan

$$\boxed{P = K^{\bullet}} \tag{4.6.29}$$

eli

$$P_{ext} + P_{int} = K^{\bullet} \tag{4.6.29'}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} P_{ext} &= P^{V}_{ext} + P^{S}_{ext} = \int_{V^o} \rho^o \vec{b}\cdot\vec{u}^{\bullet} dV^o + \int_{S^o} p\vec{t}\cdot\vec{u}^{\bullet} dS^o \ , \\ P_{int} &= -\int_{V^o} \{p_\sigma\}^T \{g_\varepsilon\}^{\bullet} dV^o \end{aligned}\right\} \tag{4.6.30}$$

ja vielä

$$K = \frac{1}{2}\int_{V^o} \rho^o \vec{u}^{\bullet}\cdot\vec{u}^{\bullet} dV^o \ . \tag{4.6.31}$$

Yhtälö (4.6.29) voidaan johtaa vastaavasti kuin on esitetty taulukossa 5.6.1. Manipulaatio alkaa nyt vain kertomalla Cauchyn liikeyhtälöt (4.4.29) skalaarisesti nopeudella $\vec{v} = \vec{u}^{\bullet} = \partial\vec{u}/\partial t$. Jätetään johto tässä suorittamatta, mutta pyritään havainnollistamaan etenkin sisäisten voimien tehon lauseketta.

Ulkoisten voimien tehon lauseke on helppo ymmärtää, kun muistetaan, että $dm = \rho dV = \rho^o dV^o$ (kaava (4.3.10)) ja että

$\vec{t}dS = {}^{p}\vec{t}dS^{o}$ (kuva 4.4.7).

Sisäisten voimien tehon P_{int} lausekkeessa esiintyvät merkinnät $\{{}^{p}\sigma\}$ ja $\{{}^{g}\varepsilon\}$ ovat (ks. kaavat (4.2.38))

$$\left.\begin{aligned} \{{}^{p}\sigma\} &= [{}^{p}\sigma_a \; {}^{p}\sigma_b \; {}^{p}\sigma_c \; {}^{p}\sigma_{bc} \; {}^{p}\tau_{ca} \; {}^{p}\tau_{ab}]^T , \\ \{{}^{g}\varepsilon\} &= [{}^{g}\varepsilon_a \; {}^{g}\varepsilon_b \; {}^{g}\varepsilon_c \; {}^{g}\gamma_{bc} \; {}^{g}\gamma_{ca} \; {}^{g}\gamma_{ab}]^T , \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.32)$$

jossa siis vielä yksityiskohtaisti erityisesti <u>tasotapauksessa</u> (vrt. kaavat (3.3.33)

$$\left.\begin{aligned} {}^{g}\varepsilon_a &\equiv {}^{g}\varepsilon_{aa} = \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_a}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_b}{\partial a}\right)^2 \right] , \\ {}^{g}\varepsilon_b &\equiv {}^{g}\varepsilon_{bb} = \frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_a}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_b}{\partial b}\right)^2 \right] , \\ {}^{g}\gamma_{ab} &\equiv 2\,{}^{g}\varepsilon_{ab} = \frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial a}\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial u_b}{\partial b} . \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.33)$$

Jännitystehon tiheyden (alkutilavuutta kohti) lauseke on täten (vrt. kaava (5.6.12))

$$\{{}^{p}\sigma\}^T\{{}^{g}\varepsilon\}^{\bullet} = {}^{p}\overleftrightarrow{\sigma}:{}^{g}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{\bullet} = {}^{p}\sigma_{aa}\,{}^{g}\dot{\varepsilon}_{aa} + {}^{p}\sigma_{ab}\,{}^{g}\dot{\varepsilon}_{ab} + \ldots \qquad (4.6.34)$$

$$= {}^{p}\sigma_a\,{}^{g}\dot{\varepsilon}_a + {}^{p}\sigma_b\,{}^{g}\dot{\varepsilon}_b + {}^{p}\sigma_c\,{}^{g}\dot{\varepsilon}_c +$$

$$+ {}^{p}\tau_{bc}\,{}^{g}\dot{\gamma}_{bc} + {}^{p}\tau_{ca}\,{}^{g}\dot{\gamma}_{ca} + {}^{p}\tau_{ab}\,{}^{g}\dot{\gamma}_{ab} . \qquad (4.6.34')$$

Kertomalla äskeinen tulos ajan differentiaalilla dt saadaan sisäisten voimien miinusmerkkinen differentiaalinen työ alkutilavuutta kohti (vrt. kaava (4.6.6)):

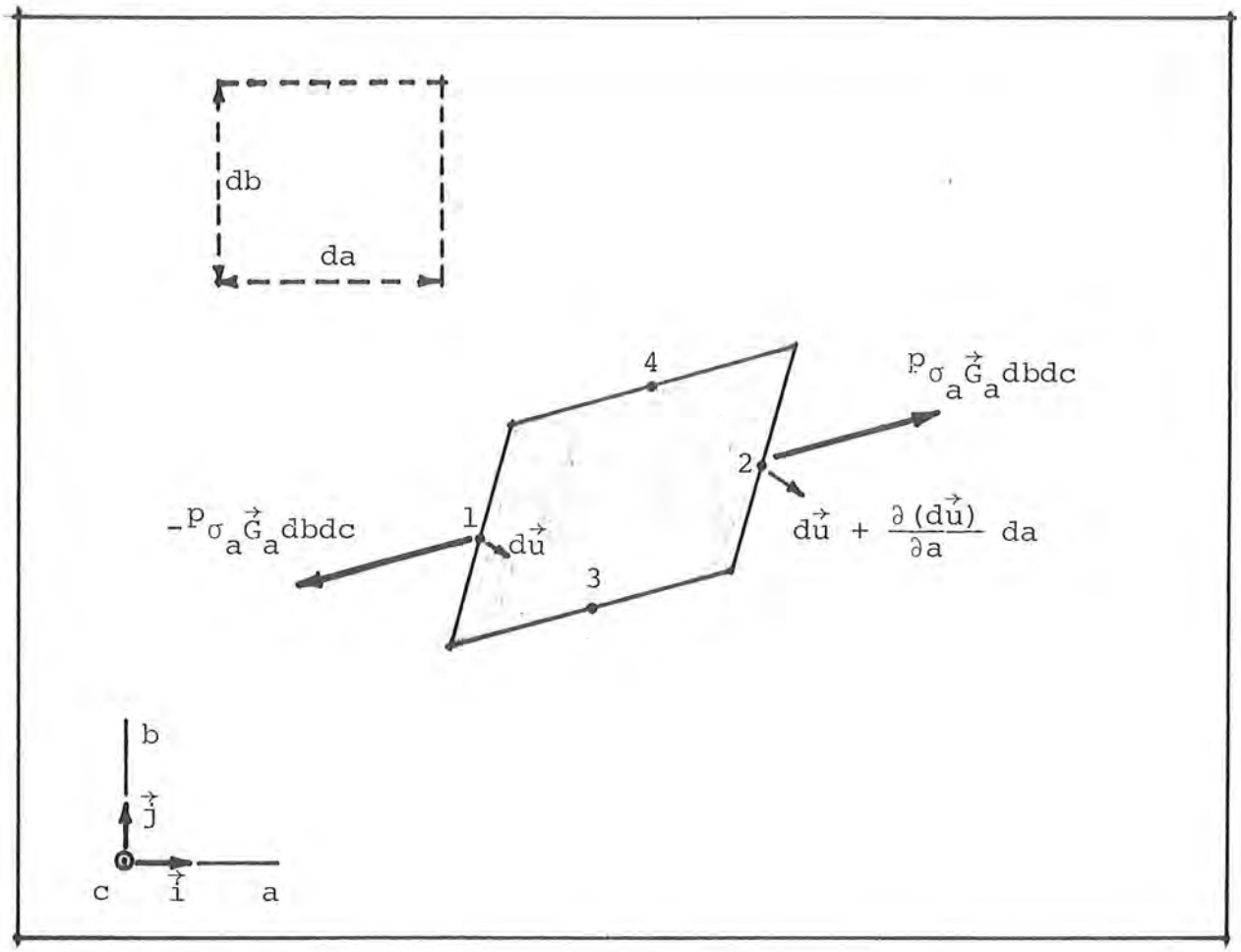
$$\{{}^{p}\sigma\}^T d\{{}^{g}\varepsilon\} = {}^{p}\overleftrightarrow{\sigma}:d\,{}^{g}\overleftrightarrow{\varepsilon} = {}^{p}\sigma_{aa}\,d\,{}^{g}\varepsilon_{aa} + {}^{p}\sigma_{ab}\,d\,{}^{g}\varepsilon_{ab} + \ldots \qquad (4.6.35)$$

$$= {}^{p}\sigma_a\,d\,{}^{g}\varepsilon_a + {}^{p}\sigma_b\,d\,{}^{g}\varepsilon_a + {}^{p}\sigma_c\,d\,{}^{g}\varepsilon_c +$$

$$+ {}^{p}\tau_{bc}\,d\,{}^{g}\gamma_{bc} + {}^{p}\tau_{ca}\,d\,{}^{g}\gamma_{ca} + {}^{p}\tau_{ab}\,d\,{}^{g}\gamma_{ab} . \qquad (4.6.35')$$

Tarkastellaan tämän tuloksen ymmärtämiseksi kuvia 4.6.3 ja 4.6.4, jotka ovat kuvien 4.6.1 (a) ja (b) vastineita suurten siirtymien yhteydessä. Tarkastelu eroaa aikaisemmasta siinä, että nyt on kätevintä soveltaa vektorimerkintöjä (vrt. myös kuva 4.5.1).

Alkio on siirtynyt ajassa t kuvassa 4.6.3 esitettyyn asemaan



Kuva 4.6.3 Pseudojännityskomponentin $^p\sigma_a$ tekemän differentiaalisen työn laskeminen.

ja kokee ajassa dt lisäsiirtymän

$$d\vec{u}(\vec{r}_o,t) = du_a\vec{i} + du_b\vec{j} \tag{4.6.36}$$

Jännityskomponentin $^p\sigma_a$ tekemä vastaava differentiaalinen työ

$$dW = -\,^p\sigma_a\vec{G}_a dbdc\cdot d\vec{u} + {}^p\sigma_a\vec{G}_a dbdc\cdot(d\vec{u} + \frac{\partial(d\vec{u})}{\partial a} da)$$

$$= {}^{p}\sigma_a \vec{G}_a \cdot \frac{\partial(d\vec{u})}{\partial a}\, dadbdc =$$

$$= {}^{p}\sigma_a \left[\vec{G}_a \cdot \vec{i}\, \frac{\partial(du_a)}{\partial a} + \vec{G}_a \cdot \vec{j}\, \frac{\partial(du_b)}{\partial a} \right] dV^o$$

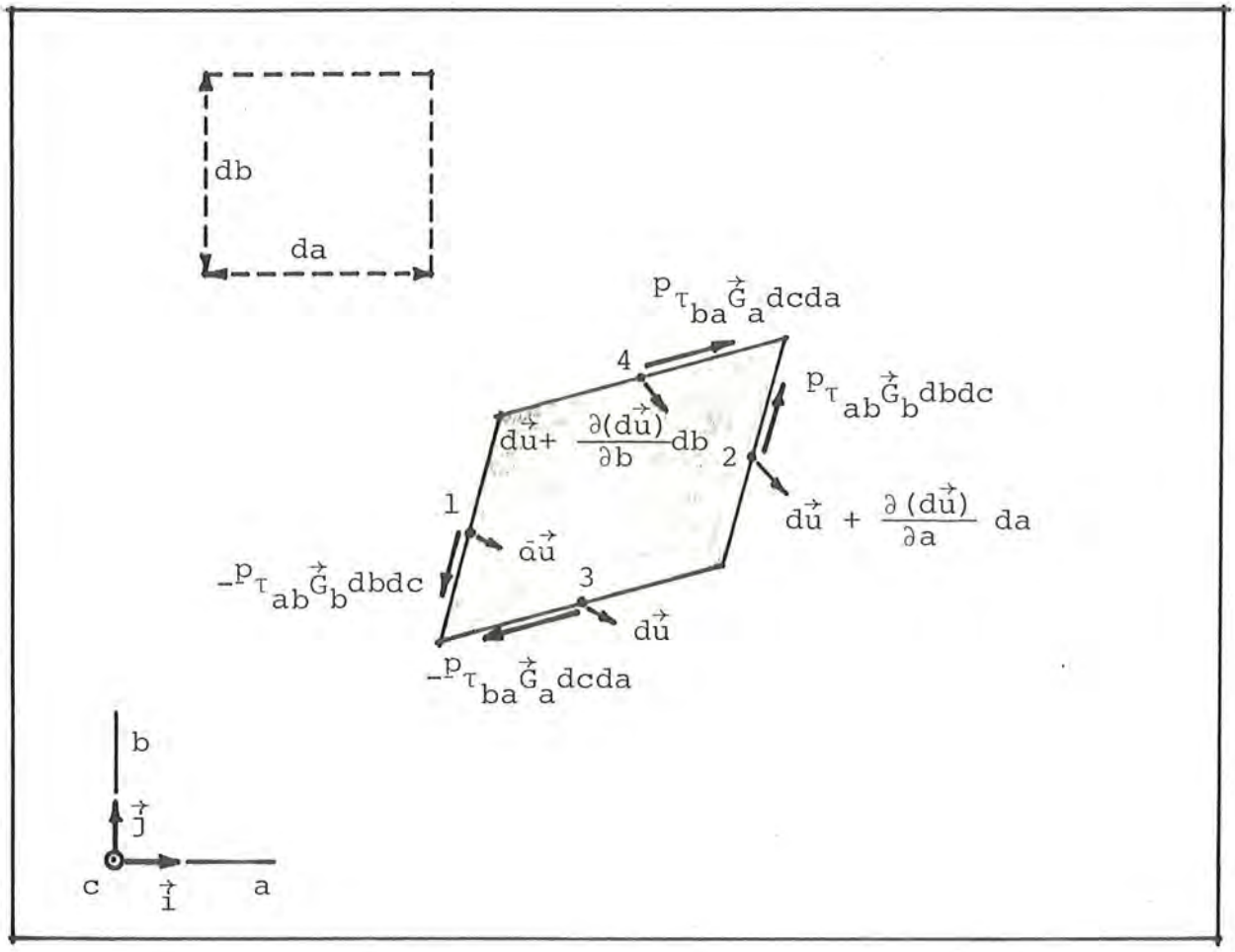
$$= {}^{p}\sigma_a \left[(1+ \frac{\partial u_a}{\partial a})\, d\, \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\, d\, \frac{\partial u_b}{\partial a} \right] dV^o$$

$$= {}^{p}\sigma_a d^g \varepsilon_a dV^o \qquad (4.6.37)$$

eli

$$\frac{dW}{dV^o} = {}^{p}\sigma_a d^g \varepsilon_a \,. \qquad (4.6.38)$$

Kuvan 4.6.4 esittämässä tapauksessa saadaan



Kuva 4.6.4 Pseudojännityskomponenttien ${}^{p}\tau_{ab}$ ja ${}^{p}\tau_{ba}$ tekemän differentiaalisen työn laskeminen.

$$
\begin{aligned}
đW &= -{}^{p}\tau_{ab}\vec{G}_b dbdc\cdot d\vec{u} + {}^{p}\tau_{ab}\vec{G}_b dbdc\cdot(d\vec{u} + \frac{\partial(d\vec{u})}{\partial a}da) + \\
&\quad - {}^{p}\tau_{ba}\vec{G}_a dcda\cdot d\vec{u} + {}^{p}\tau_{ba}\vec{G}_a dcda\cdot(d\vec{u} + \frac{\partial(d\vec{u})}{\partial b}db) \\
&= {}^{p}\tau_{ab}\vec{G}_b\cdot\frac{\partial(d\vec{u})}{\partial a}dadbdc + {}^{p}\tau_{ba}\vec{G}_a\cdot\frac{\partial(d\vec{u})}{\partial b}dadbdc \\
&= {}^{p}\tau_{ab}\left[\vec{G}_b\cdot\vec{i}\,\frac{\partial(du_a)}{\partial a} + \vec{G}_b\cdot\vec{j}\,\frac{\partial(du_b)}{\partial a}\right]dV^o + \\
&\quad + {}^{p}\tau_{ba}\left[\vec{G}_a\cdot\vec{i}\,\frac{\partial(du_a)}{\partial b} + \vec{G}_a\cdot\vec{j}\,\frac{\partial(du_b)}{\partial b}\right]dV^o \\
&= {}^{p}\tau_{ab}\left[\frac{\partial u_a}{\partial b}\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial a} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial a}\right]dV^o + \\
&\quad + {}^{p}\tau_{ba}\left[(1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial b}\right]dV^o \\
&= {}^{p}\tau_{ab}\left[(1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial b} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial a} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial u_a}{\partial b}\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial b}\right]dV^o \\
&= {}^{p}\tau_{ab}\,d\,{}^{g}\gamma_{ab}\,dV^o
\end{aligned}
\tag{4.6.39}
$$

eli

$$
\frac{đW}{dV^o} = {}^{p}\tau_{ab}\,d\,{}^{g}\gamma_{ab}\ . \tag{4.6.40}
$$

Muista jännityskomponenteista kertyvät termit saadaan vastaavaan tapaan.

Lausekkeiden (4.6.38) ja (4.6.40) johtamisessa on käytetty hyväksi mm. kaavoja (4.4.35) ja tietoa, että kantavektorit $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ovat vakioita suureiden a ja b suhteen. Lisäksi on huomattava termien ${}^{g}\varepsilon_a$ ja ${}^{g}\gamma_{ab}$ differentiaaleille kaavoista (4.6.33) saatavat lausekkeet

$$d^g\varepsilon_a = d\,\frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[2\,\frac{\partial u_a}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial a} + 2\,\frac{\partial u_b}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial a}\right]$$

$$= (1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial a}\,, \qquad (4.6.41)$$

$$= (1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial(du_a)}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\,\frac{\partial(du_b)}{\partial a} \qquad (4.6.41')$$

ja

$$d^g\gamma_{ab} = d\,\frac{\partial u_a}{\partial b} + d\,\frac{\partial u_b}{\partial a} + d(\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_a}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial b} +$$

$$+ d(\frac{\partial u_b}{\partial a})\frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial b}$$

$$= (1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial b} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial a} +$$

$$+ \frac{\partial u_a}{\partial b}\,d\,\frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\,d\,\frac{\partial u_b}{\partial b}\,, \qquad (4.6.42)$$

$$= (1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial(du_a)}{\partial b} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial(du_b)}{\partial a} +$$

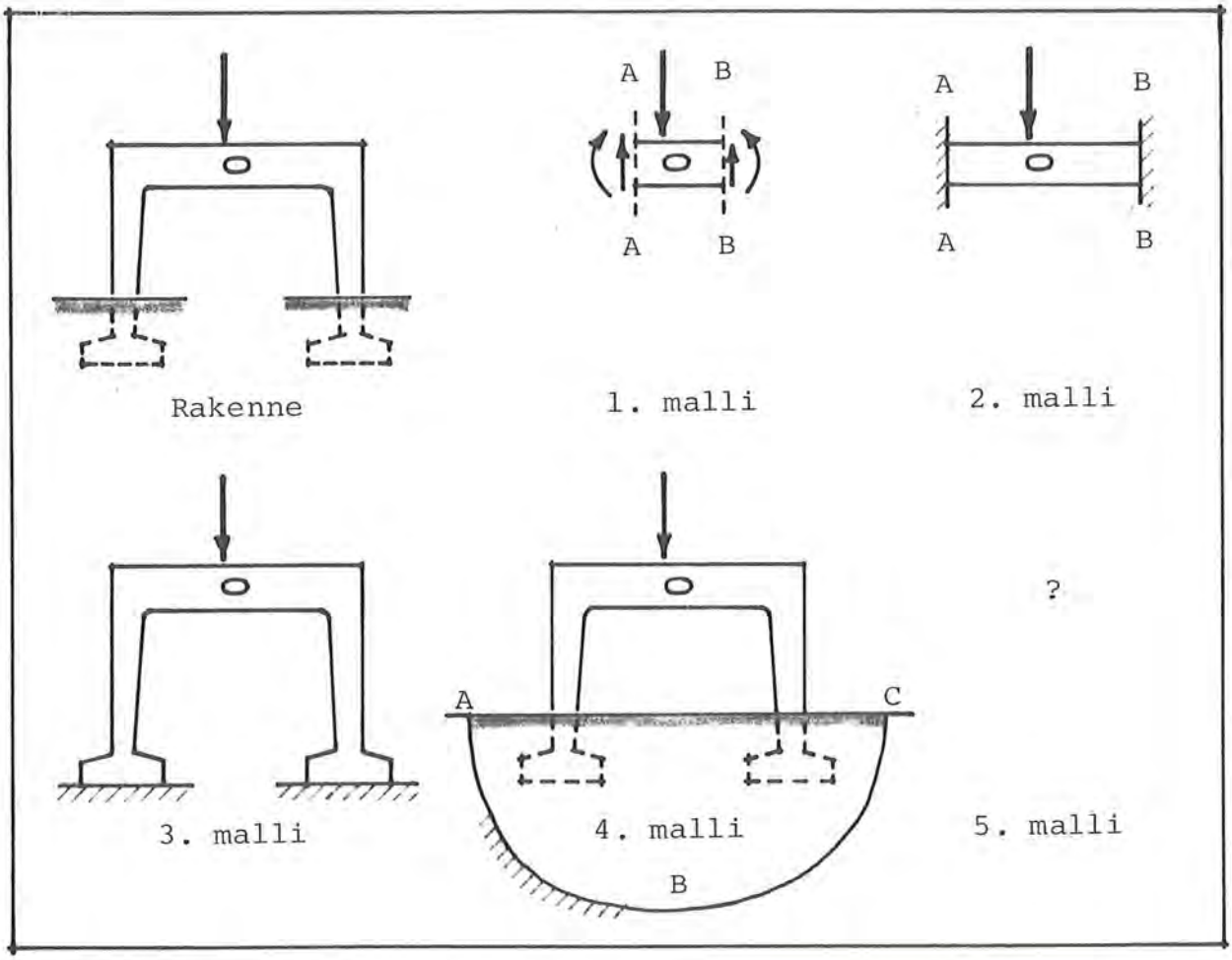
$$+ \frac{\partial u_a}{\partial b}\,\frac{\partial(du_a)}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\,\frac{\partial(du_b)}{\partial b}\,. \qquad (4.6.42')$$

Kaavat (4.6.34) ja (4.6.35) osoittavat, että jos suurten siirtymien teoriassa käytetään muodonmuutosmittana (engl. strain measure) Green-Lagrangen venymätensoria ${}^g\overleftrightarrow{\varepsilon}$, sopiva vastaava jännitysmitta (engl. stress measure) on juuri toinen Piola-Kirchhoffin jännitystensori ${}^p\overleftrightarrow{\sigma}$. Tällöin nimittäin sisäisten voimien tehon, differentiaalisen työn ja virtuaalisen työn (ks. kohta 4.9.2) lausekkeet (alkutilavuutta kohti) saavat yksinkertaiset muodot. Ne ovat tyypiltään vastaavia kuin diskreeteillä systeemeillä esiintyvät lausekkeet $\sum Q_j\dot{q}_j$, $\sum Q_j dq_j$ ja $\sum Q_j\delta q_j$ (ks. kaava (2.3.96)). Näin valittuja jännitys- ja venymämittoja nimitetään kirjallisuudessa usein [3.1, s. 232] konjugaattisiksi muuttujiksi (engl. conjugate variable).

4.7 Reuna-, alku- ja jatkuvuusehdot

4.7.1 Yleistä

Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 4.7.1 esittämää pistekuormituksen alaisena olevaa tasokehää. Kehän suunnittelija arvioi, että lujuuden kannalta vaarallisimmat jännitykset tulevat syntymään kehän keskellä olevan reiän välittömässä ympäristössä.



Kuva 4.7.1 Tehtävä ja sen mallitus.

Täten hän haluaa ottaa analysoitavakseen kehästä vain kiinnostuksen kohteen: reiän lähiympäristön (1. malli). Mutta leikkauksissa A-A ja B-B vallitsevat siirtymät ja traktiot ovat tuntemattomia eikä tehtävää voida ratkaista. Laskentamallia laajennetaan päistään jäykästi kiinnitetyksi vaakasauvaksi (2. malli). Siir-

tymien leikkauksissa A-A ja B-B on siis otaksuttu häviävän, mikä ei ole kuitenkaan oikein, koska myös kehän pystysauvat saavat varmasti muodonmuutoksia. Siirrytään siis 3. malliin, jossa kehän anturat on ajateltu tuetuiksi liikkumattomasti. Mutta maaperäkin antaa myöten, joten otetaan malliin mukaan myös maaperää rajapintaan ABC asti (4. malli), jolla siirtymien otaksutaan häviävän. Mutta tämäkään ei ole totta, joten laajennetaan jälleen mallia ... .

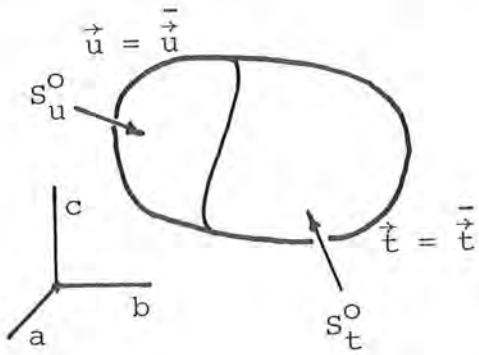
Äskeinen esimerkki oli tarkoitettu kuvaamaan erästä insinööriprobleemeihin liittyvää tyypillistä vaikeutta. Tarkasteltava systeemi on erotettava ympäröivästä maailmasta mahdollisuuksien mukaan siten, että systeemin ja ympäristön välinen vuorovaikutus systeemin rajapinnan läpi pystytään arvioimaan realistisesti. Tämä vuorovaikutus ilmaistaan ns. reunaehtojen (engl. boundary condition) avulla. Yleensä reunaehtoihin liittyy väkisin todellisuutta rikkovia otaksumia. Pyrkimyksenä on tietenkin valita tietyn tehtävän (esimerkiksi suunniteltava tietyt rasitukset kestävä rakenne, tietyn virtaaman antava pumppu) ratkaisemiseen liittyvä systeemi analysointikustannusten minimoimiseksi mahdollisimman pieneksi. Vaatimus mielekkäistä reunaehdoista aiheuttaa kuitenkin edellisen kanssa ristiriitaisen tilanteen. (On selvää, että hienoimmatkin analysointimenetelmät antavat arvottomia tuloksia, jos reunaehdot ovat epärealistiset.) Systeemin mielekäs valinta aina kulloisenkin tehtävän ratkaisemiseksi on täten oleellisen tärkeä vaihe ja insinöörikoulutuksen tulisi antaa suunnittelijoille taitoa tämäntapaisten asetelmien käsittelyyn (vrt. käsite "engineering judgment").

Tässä esityksessä tullaan kuvaamaan tavanomaisimpia reunaehtoja puuttumatta enää mallitusprobleemaan. Asetettujen reunaehtojen matemaattiseen oikeellisuuteen ei myöskään voida paneutua. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa esitetään mm. ns. karakteristikateorian (engl. theory of characteristics [4.2], [4.5]) avulla, minkätyyppisiä reunaehtoja voidaan yleensä liittää erityyppisten kenttäyhtälöiden yhteyteen, jotta probleemalla olisi ratkaisu. Etenkin nestemekaniikan tehtävissä tämä on vaikea aihepiiri. Eräs reunaehtojen asettelua helpottava keino on joskus seuraava. Ajatellaan, että voisimme tutkia systeemiämme kokeellisesti laboratoriossa. Jos nyt pystymme toteuttamaan tie-

tyt reunaehdot fysikaalisesti laboratoriojärjestelyin (riittää, että tehdään tällainen ajatuskoe) ainakin kohtuullisella tarkkuudella, voimme olla melko luottavaisia siitä, että nämä reunaehdot ovat myös matemaattiselta kannalta oikeellisia.

4.7.2 Mekaaniset reunaehdot

Perustapaus. Jaetaan kappaleen reuna mekaanisessa mielessä tässä ensin ei päällekkäisiin osiin S_u^o ja S_t^o, jotka yhdessä muodostavat koko reunan S^o (kuva 4.7.2). Täten joukko-opillisin merkinnöin $S_u^o \cap S_t^o = \emptyset$, $S_u^o \cup S_t^o = S^o$. ($\cap$ on leikkaus, $\cup$ on yhdiste ja $\emptyset$ on tyhjä joukko.) Osien S_u^o ja S_t^o ei tarvitse olla yhtenäisiä alueita (kuten kuvassa 4.7.2), vaan ne voivat koostua useasta erillisestä alueesta.



Kuva 4.7.2 Mekaaniset reunaehdot.

Reunalla S_u^o on siirtymä annettu:

$$\boxed{\vec{u} = \bar{\vec{u}}} \tag{4.7.1}$$

eli

$$\boxed{\{u\} = \{\bar{u}\}} \tag{4.7.1'}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} u_a &= \bar{u}_a\,, \\ u_b &= \bar{u}_b\,, \\ u_c &= \bar{u}_c\,. \end{aligned}\right\} \quad S_u^o\text{:lla} \tag{4.7.1''}$$

Viiva suureen tunnuksen päällä viittaa annettuun arvoon.

Reunalla S_t^o on traktio annettu:

$$\boxed{\vec{t} = \bar{\vec{t}}} \tag{4.7.2}$$

eli

$$\boxed{\{t\} = \{t\}} \qquad (4.7.2')$$

eli

$$\left.\begin{aligned} t_a &= \bar{t}_a \,, \\ t_b &= \bar{t}_b \,, \\ t_c &= \bar{t}_c \,. \end{aligned}\right\} \quad S_t^o\text{:llä} \qquad (4.7.2'')$$

Esimerkkinä voisi olla valitun kappaleen kannalta hyvin jäykkään alustaan kiinnitetty systeemi. Kiinnitetty reuna olisi osa S_u^o, jolla siirtymät siis likimain häviävät: $\vec{\bar{u}} = \vec{0}$. Muuhun kappaleen pintaan voisi vaikuttaa vaikka annettu nesteen paine p, jolloin traktio $\vec{\bar{t}} = -p\vec{n}^o$.

On syytä korostaa, että samassa reunan pisteessä ei voida antaa samanaikaisesti sekä siirtymää että traktiota vaan vain jompikumpi. Jos traktio on annettu, vastaava siirtymä on tuntematon, joka seuraa koko systeemin ratkaisusta. Jos siirtymä on annettu, vastaava traktio on taas tuntematon. (Ks. kohdan 5.7.2 huomautus 2.)

Huomautus 1. Jos kappaleen reuna on kokonaan tyyppiä S_t^o eli siirtymiä ei ole ollenkaan annettu reunaehtoina (esimerkkinä avaruusalus), kappaleeseen vaikuttavia ulkoisia voimia ei voida antaa täysin mielivaltaisesti, mikäli kyseessä on tasapainotila. Ulkoisten voimien tulee muodostaa tällöin tunnetusti nollavoimasysteemi [2.1, s. 236] eli ulkoisten voimien resultantti ja ulkoisten voimien momentti mielivaltaisen pisteen suhteen häviävät. Nämä ehdot saadaan tasapainoyhtälöistä (4.4.5") ($\vec{a} = \vec{0}$) manipuloimalla niitä sopivasti. Esimerkiksi integroimalla ensimmäinen yhtälö (4.4.5") puolittain alueen V^o yli, soveltamalla kaavoja (L.2.10) ja ensimmäistä traktio-jännitysyhteyttä (4.4.21") saadaan tulos

$$\int_{V^o} \rho^o b_a dV^o + \int_{S^o} t_a dS^o = 0 \,, \qquad (4.7.3)$$

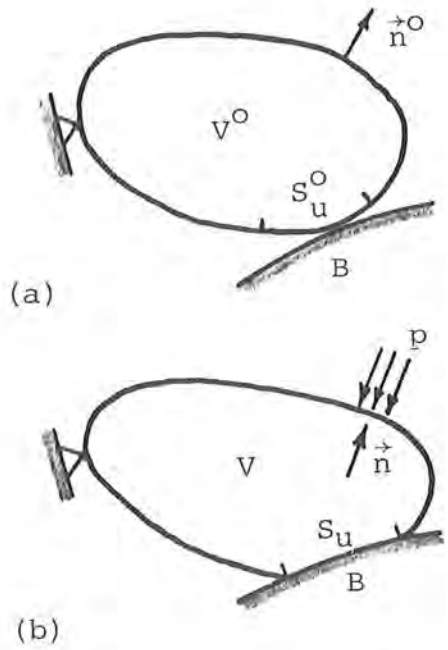
jonka mukaan ulkoisten voimien resultantin a-akselin suuntaisen komponentin tulee hävitä.

Jos b_a on annettu (Yleensä ei ole tapana pitää suureen $\vec{b}$ päällä yläviivaa, vaikka se on yleensä annettu suure.) ja jos koko reuna on tyyppiä S_t^o, myös $t_a = \bar{t}_a$ on annettu ja mm. ehdon (4.7.3) tulee tällöin toteutua. Jos osa reunaa on sitä vastoin tyyppiä S_u^o, ulkoiset voimat voidaan antaa vapaasti ja osalle S_u^o syntyy automaattisesti sellainen traktiojakautuma, että mm. ehto (4.7.3) toteutuu.

Jos vielä koko reuna on tyyppiä S_t^o, kappaleen siirtymät eivät määräydy yksikäsitteisesti. Käsittely voidaan suorittaa tasapainotehtävän yhteydessä siten, että kappale varustetaan jollakin vähimmällä jäykän kappaleen liikkeet estävällä tuennalla. Tällöin siirtymät määräytyvät yksikäsitteisesti ja tukireaktiot häviävät. Saatuun siirtymäkenttään voidaan lisätä lopuksi mielivaltainen jäykän kappaleen liikkeen siirtymä ja uusi siirtymäkenttä on jälleen tehtävän ratkaisu.

Dynaamisissa tehtävissä ulkoiselle kuormitukselle ei tarvitse asettaa rajoituksia, vaikka koko reuna olisi tyyppiä S_t^o.

Huomautus 2. Reunaehtoja on tarkasteltu edellä (ja tarkastellaan jatkossa) lähinnä pienten siirtymien teorian kannalta. Kuva 4.7.3 esittää tyypillisiä suurten siirtymien teorian yhteydessä syntyviä ongelmia. Kappale on kuvassa (a) alkutilassa ja kuvassa (b) deformoituneena. Reunan osa S_u^o, jolla kappale on kosketuksessa tukeen B on tuntematon ja täytyy määrittää osana ratkaisua kullakin ajan hetkellä (tai kuormituksen arvolla). Jos kuormituksena vaikuttaa esimerkiksi annettu nesteen paine p, traktio $\vec{t} = -p\vec{n}$, mutta suurten siirtymien yhteydessä joudutaan yleensä operoimaan pseudotraktion (ks. kuva 4.4.7) $p\vec{t} = (dS/dS^o)\vec{t}$ avulla. Koska vektori $\vec{n}$ ja suhde dS/dS^o ovat myös aluksi tuntemattomia, käsittely tulee siis pakosti komplisoiduksi.

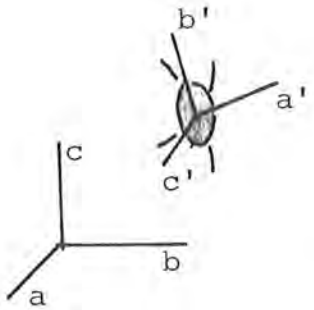


Kuva 4.7.3 Kosketusprobleema.

Ensimmäinen yleistys. Perustapauksessa reunaehdot esitettiin merkinnällisistä mukavuussyistä johtuen siten, että osalla S_u^o kaikki siirtymäkomponentit olivat annettuja ja osalla S_t^o taas kaikki traktiokomponentit. Ehdot saadaan tällöin matriisimerkinnöin yksinkertaiseen muotoon. Yleisemmin reunaehdot ovat kussakin reunan pisteessä seuraavat:

$$\boxed{\begin{aligned} u_{a'} &= \bar{u}_{a'} \quad \text{tai} \quad t_{a'} = \bar{t}_{a'} \,, \\ u_{b'} &= \bar{u}_{b'} \quad \text{tai} \quad t_{b'} = \bar{t}_{b'} \,, \\ u_{c'} &= \bar{u}_{c'} \quad \text{tai} \quad t_{c'} = \bar{t}_{c'} \,. \end{aligned}} \tag{4.7.4}$$

Kultakin riviltä tulee valita aina jompikumpi ehto mutta ei molempia. Tässä kuhunkin reunan pisteeseen asetetaan paikallinen suorakulmainen karteesinen koordinaatisto a'b'c' siten, että yhden koordinaattiakselin (kuvassa 4.7.4 a'-akselin) suunta yhtyy tavallisesti reunapinnan ulkoisen normaalin suuntaan. Pilkuilla varustetut suureet tarkoittavat vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{t}$ komponentteja paikallisen koordinaatiston kannassa. Eri kannoissa esitetyille komponenteille saadaan haluttaessa yhteydet



Kuva 4.7.4 Kierretty paikallinen koordinaatisto.

$$\left.\begin{aligned} \{u'\} &= [L]\{u\} \,, \\ \{u\} &= [L]^T\{u'\} \end{aligned}\right\} \tag{4.7.5}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} \{t'\} &= [L]\{t\} \,, \\ \{t\} &= [L]^T\{t'\} \,, \end{aligned}\right\} \tag{4.7.6}$$

jossa muunnosmatriisi

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{a'a} & l_{a'b} & l_{a'c} \\ l_{b'a} & l_{b'b} & l_{b'c} \\ l_{c'a} & l_{c'b} & l_{c'c} \end{bmatrix} \tag{4.7.7}$$

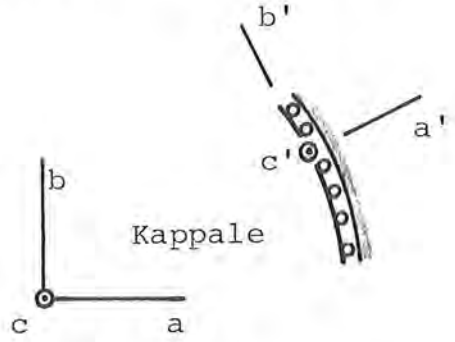
on ortogonaalinen:

$$[L]^T[L] = [L][L]^T = [I] \ . \qquad (4.7.8)$$

Alkiot l ovat koordinaattiakselien välisten kulmien kosineja; esimerkiksi $l_{a'b} = l_{ba'} = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i}'$.

Käsittely tulee merkinnällisesti raskaaksi. Jos ehtoihin (4.7.4) liittyviä alueita merkitään vastaavasti tunnuksilla ${}^1S_u^o$ ja ${}^1S_t^o$, ${}^2S_u^o$ ja ${}^2S_t^o$ sekä ${}^3S_u^o$ ja ${}^3S_t^o$, näille pätee siis ${}^1S_u^o \cap {}^1S_t^o = \emptyset$, ${}^1S_u^o \cup {}^1S_t^o = S^o$ jne.

Kuvan 4.7.5 esittämä esimerkkitapaus antaa kaavojen (4.7.4) sovellutuksena ehdot



$$\left.\begin{aligned} u_{a'} &= \text{annettu} = 0 \\ t_{b'} &= \text{annettu} = 0 \\ t_{c'} &= \text{annettu} = 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (4.7.9)$$

Kuva 4.7.5 Kitkaton jäykkä vino reuna.

Kyseessä on ns. kitkaton jäykkä reuna (engl. smooth rigid boundary). Reuna on siis valituin merkinnöin osaa alueista ${}^1S_u^o$, ${}^2S_t^o$ ja ${}^3S_t^o$.

Jos ko. pisteessä on annettu joko kaikki siirtymäkomponentit tai kaikki traktiokomponentit, ei ole yleensä mitään erityistä syytä käyttää kierrettyä koordinaatistoa ja tällöin päästään takaisin perustapaukseen.

<u>Toinen yleistys</u>. Perustapauksessa reunalla S_t^o vallitsevien ehtojen (4.7.2) sijasta voidaan kirjoittaa yleisemmin

$$\boxed{\vec{t} = \overleftrightarrow{\alpha} \cdot \vec{u} + \vec{\beta}} \qquad (4.7.10)$$

eli

$$\boxed{\{t\} = [\alpha]\{u\} + \{\beta\}} \tag{4.7.10'}$$

eli

$$\begin{Bmatrix} t_a \\ t_b \\ t_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{aa} & \alpha_{ab} & \alpha_{ac} \\ \alpha_{ba} & \alpha_{bb} & \alpha_{bc} \\ \alpha_{ca} & \alpha_{cb} & \alpha_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_a \\ \beta_b \\ \beta_c \end{Bmatrix} \tag{4.7.10''}$$

eli vielä

$$\left.\begin{aligned} t_a &= (\alpha_{aa}u_a + \alpha_{ab}u_b + \alpha_{ac}u_c) + \beta_a \,, \\ t_b &= (\alpha_{ba}u_a + \alpha_{bb}u_b + \alpha_{bc}u_c) + \beta_b \,, \\ t_c &= (\alpha_{ca}u_a + \alpha_{cb}u_b + \alpha_{cc}u_c) + \beta_c \,. \end{aligned}\right\} \tag{4.7.10'''}$$

Suureet α ja β ovat annettuja vakioita. Traktion otaksutaan siis riippuvan lineaarisesti reunan siirtymästä. Jos asetetaan $[\alpha] = [0]$, saadaan uudestaan ehdot (4.7.2) ($\{\beta\} \mathrel{\hat{=}} \{\bar{t}\}$).

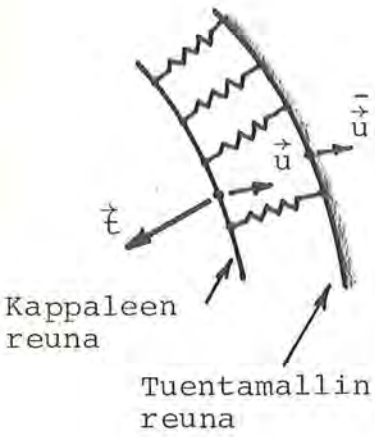
Esimerkiksi ns. kimmoisesti tuetun reunan tapauksessa otaksutaan tavallisesti konstitutiivinen yhteys

$$\boxed{\{t\} = -[k]\{u\} \,,} \tag{4.7.11}$$

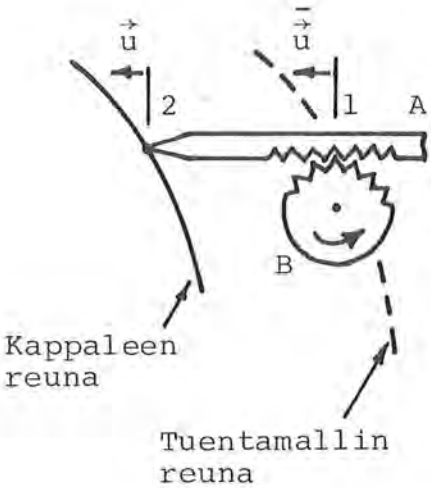
jossa matriisi [k] on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Toisin sanoen tukivoimien otaksutaan olevan verrannollisia siirtymiin ja niiden suhteen vastakkaissuuntaisia (vrt. kaava (2.3.20)). Yhteyden (4.7.11) nähdään selvästi olevan kaavan (4.7.10') erikoistapaus ($[\alpha] \mathrel{\hat{=}} -[k]$ ja $\{\beta\} \mathrel{\hat{=}} \{0\}$).

Huomautettakoon, että kaavan (4.7.11) mukainen esitys vastaa ns. Winkerin alustamallin käyttöä [4.6, s. 305]. Matriisin [k] alkioita nimitetään alustakertoimiksi (engl. modulus of foundation) (tässä $[k] = \mathrm{Nm}^{-3}$). Todellisuudessahan traktio tietyssä pisteessä tulee riippumaan paitsi ko. pisteen siirtymästä myös tuetun reunan muiden pisteiden siirtymistä.

Winklerin mallin mukaista kimmoista tuentaa voitaisiin kuvata symbolisesti vielä äskeistä hieman yleisemmin kuvan 4.7.6 esityksellä. Kappaleen reunan ajatellaan lepäävän äärettömän tiheästi



Kuva 4.7.6 Kimmoinen tuenta.



Kuva 4.7.7 Eräs koejärjestely.

sijaitsevien, toisistaan irrallaan olevien lineaaristen jousten välityksellä varsinaisen tuentamallin reunan varassa. Jousten kokoonpuristuma riippuu kappaleen reunan siirtymän $\{u\}$ ja tuen siirtymän $\{\bar{u}\}$ erotuksesta. Täten traktio

$$\{t\} = -[k](\{u\}-\{\bar{u}\}) \quad . \qquad (4.7.12)$$

Annetun siirtymän $\{\bar{u}\}$ voidaan ajatella esittävän esimerkiksi kuvan 4.7.7 ajatuskoejärjestelyyn liittyvää sauvan A siirtymää pisteessä 1. Pyrimme antamaan kappaleen reunalle (piste 2) tämän siirtymän arvon kiertämällä pyörää B siirtymää vastaavan määrän. Mutta sauva A ei ole välillä 1-2 täysin jäykkä ja piste 2 saakin tuntemattoman siirtymän $\{u\}$. Yhtälö (4.7.12) kuvaisi tätä asetelmaa ja matriisi $[k]$ liittyisi ko. mekanismin jäykkyyteen. Esitys (4.7.12) on edelleen yleisen yhteyden (4.7.10') erikoistapaus ($[\alpha] \mathrel{\hat{=}} -[k]$, $\{\beta\} \mathrel{\hat{=}} [k]\{\bar{u}\}$).

Jos nyt ajatellaan matriisin $[k]$ kasvavan rajatta, esitys (4.7.12) lähestyy epämääräistä muotoa $\{t\} = -[\infty]\{0\}$ eli päästään lopuksi ehtoon (4.7.1): $\{u\} = \{\bar{u}\}$. (Päättely perustuu siihen, että traktion $\{t\}$ arvon tulee fysikaalisista syistä ilmeisesti säilyä äärellisenä olipa tuenta kuinka jäykkä hyvänsä, jos vain itse kappale on muotoaan muuttava. Tällöin rajatta kasvavan matriisin $[k]$ kertoman pystyvektorin $\{u\}-\{\bar{u}\}$ täytyy lähestyä nollaa eli $\{u\} \to \{\bar{u}\}$, jotta $\{t\}$ pysyisi äärellisenä.)

Kyseessä on vastaava tilanne, jota on selostettu kohdassa 2.3.1 kuvan 2.3.4 yhteydessä. Kun $[k]$ on äärellinen, yhtälö (4.7.11) tai (4.7.12) antaa traktion konstitutiivisen yhteyden

eli traktio on silloin konstitutiivinen (yleistetty) voima. Ehtoon (4.7.1) siirryttäessä traktiolle ei ole enää konstitutiivista yhteyttä ja silloin traktio on ajateltava (yleistetyksi) rajoitevoimaksi. Tämä seikka tulee tärkeänä esille virtuaalisen työn periaatetta sovellettaessa. Koska mikään tuki ei ole todellisuudessa täysin jäykkä, voitaisiin ajatella, että käytettäisiin ehdon (4.7.1) sijasta aina ehtoa (4.7.12) ja valittaisiin [k] riittävän suureksi. Näin tehdäänkin usein, mutta käsittelyyn liittyy tietyissä tapauksissa numeerisia ongelmia. Ko. menettelyä nimitetään kirjallisuudessa sakkomenettelyksi (engl. penalty method).

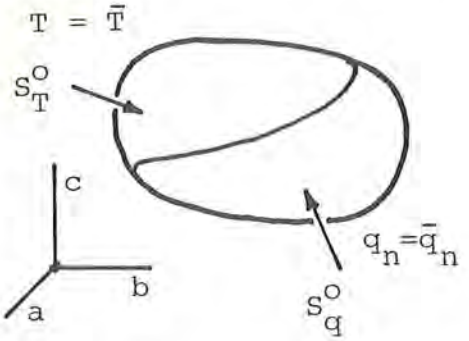
Huomautus 3. Edellä esitettyjen ensimmäisen ja toisen yleistyksen sekamuotoja voidaan ilmeisesti myös synnyttää. Jos esimerkiksi kuvan 4.7.5 jäykkä tuenta korvattaisiin Winklerin alustamallilla, ehtojen (4.7.9) sijasta saataisiin ehdot

$$\left.\begin{aligned} t_{a'} &= -ku_{a'} \,, \\ t_{b'} &= 0 \,, \\ t_{c'} &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.7.13)$$

Huomautus 4. Edellä ei ole luonnollisestikaan pystytty kuvaamaan kaikkia mahdollisia käytännössä esilletulevia reunaehtotapauksia. Esimerkiksi kappaleen kitkallinen kosketus ympäristön kappaleiden kanssa on vaikea mallitettava. Paitsi että itse kosketusalue on yleensä aluksi tuntematon (vrt. kuva 4.7.3), sopivan kitkalain löytäminen ja sisällyttäminen laskelmiin voi olla hankalaa. Tässä viitataan lisäksi kohdan 5.7.2 huomautukseen 3.

4.7.3 Termiset reunaehdot

Perustapaus. Jaetaan kappaleen reuna termisessä mielessä ei päällekkäisiin osiin S_T^o ja S_q^o, jotka yhdessä muodostavat koko reunan S^o (kuva 4.7.8).



Kuva 4.7.8 Termiset reunaehdot.

Reunalla S_T^o on lämpötila annettu:

$$\boxed{T = \bar{T}} \quad S_T^o\text{:llä} \; . \qquad (4.7.14)$$

Reunalla S_q^o on lämpövirran tiheys annettu

$$\boxed{q_n = \bar{q}_n} \quad S_q^o\text{:lla} \; . \qquad (4.7.15)$$

On syytä korostaa, että samassa reunan pisteessä ei voida antaa samanaikaisesti sekä lämpötilaa että lämpövirran tiheyttä vaan vain jompikumpi. (Ks. kohdan 5.7.3 huomautus 1.)

Tavallisin esimerkki ehdosta (4.7.15) on otaksuma ns. adiabaattisesta reunasta eli täydellisesti lämpöeristetystä reunasta jolloin $\bar{q}_n = 0$.

Huomautus 1. Jos kappaleen reuna on kokonaan tyyppiä S_q^o eli lämpötilaa ei ole ollenkaan annettu reunaehtona, kappaleen saamaa lämpötehoa ei voida antaa täysin mielivaltaisesti, mikäli kyseessä on stationaarinen tapaus. Integroimalla esimerkiksi yhtälö (4.6.18') stationaarisessa tapauksessa puolittain alueen V^o yli, soveltamalla kaavoja (L.2.10) ja lämpövirran tiheys-lämpövuoyhteyttä (4.6.27') saadaan tulos

$$-\int_{S^o} q_n dS^o = 0 \qquad (4.7.16)$$

eli stationaarisessa tapauksessa kappaleen ympäristöstään saaman nettolämpötehon tulee hävitä. (Jos stationaarinen energiayhtälö kirjoitetaan merkintöjä (4.6.19) käyttäen muotoon $-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}^c + \rho^o r = 0$ ehto (4.7.16) muuttuu vastaavasti.)

Jos koko reuna on tyyppiä S_q^o, $q_n = \bar{q}_n$ on annettu ja ehdon (4.7.16) tulee tällöin toteutua. Jos osa reunaa on sitä vastoin

tyyppiä S_T^o, lämpöteho voidaan antaa vapaasti ja osalle S_T^o syntyy ratkaisun kautta automaattisesti sellainen lämpövirran tiheysjakautuma, että ehto (4.7.16) toteutuu.

Jos vielä koko reuna on tyyppiä S_q^o, kappaleen lämpötila ei määräydy yksikäsitteisesti. Käsittely voidaan suorittaa stationaarisessa tapauksessa siten, että annetaan mielivaltaisessa kappaleen pisteessä mielivaltainen lämpötilan arvo. Tällöin lämpötila määräytyy yksikäsitteisesti. Saatuun lämpötilakenttään voidaan lisätä lopuksi mielivaltainen vakioarvo ja uusi lämpötilakenttä on jälleen tehtävän ratkaisu (mikäli konstitutiivinen yhteys on riippumaton lämpötilasta).

Epästationaarisissa tehtävissä lämpöteholle ei tarvitse asettaa rajoituksia vaikka koko reuna olisi tyyppiä S_q^o.

Yleistys. Perustapauksessa reunalla S_q^o vallitsevan ehdon 4.7.15) sijasta voidaan kirjoittaa yleisemmin

$$\boxed{q_n = \alpha T + \beta \ ,} \tag{4.7.17}$$

jossa α ja β ovat annettuja vakioita. Lämpövirran tiheyden reunalla otaksutaan siis riippuvan lineaarisesti reunan lämpötilasta. Jos asetetaan $\alpha = 0$, saadaan uudestaan ehto (4.7.15) ($\beta \triangleq \bar{q}_n$).

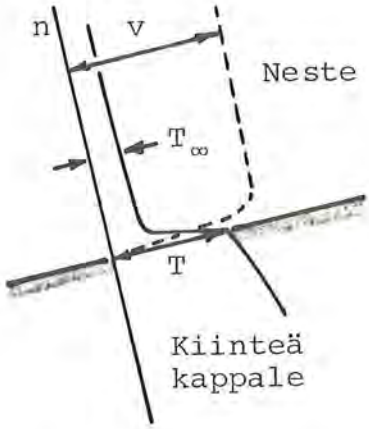
Ns. konvektiivisessa lämmönsiirrossa pinnalta ympäristöön otaksutaan tavallisesti konstitutiivinen yhteys

$$\boxed{q_n^c = h_c(T-T_\infty) \ .} \tag{4.7.18}$$

Tässä h_c ($[h_c] = \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$) on ns. konvektion lämmönsiirtymiskerroin (engl. convection heat transfer coefficient), T pinnan lämpötila ja T_∞ kappaletta ympäröivän nesteen lämpötila. Kaavan (4.7.18) tyyppinen yhteys kulkee usein nimellä Newtonin jäähtymislaki (engl. Newton's law of cooling) [4.7]. Jos lämmönsiirron ajatellaan tapahtuvan pelkästään johtumalla, yhteyden (4.7.18) nähdään sisältyvän tapaukseen (4.7.17) ($\alpha \triangleq h_c$, $\beta \triangleq -h_c T_\infty$).

Lämmönsiirtymiskertoimen arvo riippuu voimakkaasti olosuhteista; esimerkiksi siitä, vallitseeko ympäröivässä nesteessä vapaa

vai pakotettu konvektiovirtaus (ks. kohta 5.2). Alan teoksissa esitetään kertoimen h_c arvojen arvioita eri tilanteissa sekä selostetaan, kuinka lämpötila T_∞ on tällöin kulloinkin määritelty.



Kuva 4.7.9 Lämpötilan T ja virtausvauhdin v jakautumat lähellä kappaleen pintaa suoralla n.

Lämpötilan jakautuma lähellä kappaleen pintaa voi olla tyypillisesti kuvan 4.7.9 esittämän tapainen. Jos neste virtaa verrattain nopeasti kappaleen ohi, myös lämpötilan jakautumassa voi esiintyä rajakerros, jossa lämpötilan muutosvoimakkuus on suuri, jonka jälkeen lämpötila on miltei vakio (T_∞). Tässä tapauksessa juuri tämä arvo otetaan yleensä referenssilämpötilaksi T_∞.

Kaavan (4.7.18) yhteydessä voi herättää ihmetystä, että olemme käyttäneet kohdassa 3.4.5 esitettyä indeksiä c, joka viittaa johtumiseen ja kuitenkin edellä puhuttiin lähinnä konvektiivisesta lämmönsiirrosta. Mutta kuvan 4.7.9 perusteella ymmärretään, että neste on takertumisehdon johdosta levossa kiinteän kappaleen pinnan suhteen ja lämmönsiirto voi siis tapahtua aluksi vain johtumalla (jos säteilyä ei ole mukana) nesteeseen. Lämpövirran tiheys nesteessä rajapinnan kohdalla määräytyisi siis konstitutiivisen yhteyden (Fourierin lain) perusteella, mikäli tarkka lämpötilajakautuma nesteessä tunnettaisiin. Mutta kun tätä ei yleensä tiedetä, meidän on tyydyttävä yhtälön (4.7.18) antamaan approksimaatioon. (Perusteellisempi käsittely merkitsisi, että systeemi tulisi laajentaa kiinteän kappaleen ulkopuolelle ja olisi ratkaistava samanaikaisesti sekä kiinteää ainetta että nestettä koskeva probleema.)

Huomataan kaavojen (4.7.18) ja (4.7.12) samankaltaisuus. Huomataan vielä, että jos kirjoitamme kaavan (4.7.18) muotoon $q_n = h(T-\bar{T})$ ja annamme h:n arvon kasvaa rajatta, päädymme tilanteeseen, jossa lämpövirran tiheyden arvoa ei saada enää konstitutiivisesta yhteydestä ja joudutaan lopuksi ehtoon (4.7.14): $T = \bar{T}$. Kohdassa 4.7.2 esitetyt useat kommentit pätevät täten analogisina tässäkin. Kuvan 4.7.9 perusteella ymmärretään myös,

että reunaehto (4.7.14) ei ole yleensä täysin realistisesti toteutettavissa — vrt. ehto (4.7.1). Jos pyrkisimme pitämään kappaleen pinnan halutussa lämpötilassa $\bar{T}$ (sanotaan vaikka $0^{o}C$), se voisi tapahtua esimerkiksi huuhtelemalla kappaleen pintaa voimakkaasti "jäisellä" vedellä. Vaikka lämmönsiirtymiskerroin h saataisiinkin hyvin suureksi, vasta arvo ääretön tuottaisi siis halutun tuloksen.

Edellä kaavaa (4.7.18) on tarkasteltu tapauksessa, jossa lämmönsiirron ajatellaan tapahtuvan johtumalla ympäristöön. Säteilyyn liittyvä osuus q_n^r on myös voimakkaasti kappaleen ympäristön olosuhteista riippuva. Tavanomainen esitysmuoto on [4.7]

$$\boxed{q_n^r = \varepsilon\sigma(T^4-T_{sur}^4) \ .} \qquad (4.7.19)$$

Tässä T ja T_{sur} ovat pinnan ja ympäristön (nimenomaan termodynaamiset) lämpötilat, $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ on Stefan-Boltzmannin vakio ja ε ($[\varepsilon] = -$) ko. pinnan emissiivisyys (engl. emissivity). Kaavan (4.7.19) muoto edellyttää, että ko. pintaa ympäröi huomattavasti suurempi lämpötilassa T_{sur} oleva pinta ja että pintojen välissä oleva väliaine ei vaikuta säteilyyn [4.7].

Termi $(T^4-T_{sur}^4)$ manipuloidaan usein muotoon $(T+T_{sur})(T^2+T_{sur}^2)\cdot(T-T_{sur})$. Kaava (4.7.19) voidaan kirjoittaa tällöin seuraavasti:

$$\boxed{q_n^r = h_r(T-T_{sur}) \ ,} \qquad (4.7.20)$$

jossa kerroin

$$h_r = \varepsilon\sigma(T+T_{sur})(T^2+T_{sur}^2) \qquad (4.7.21)$$

on ns. säteilyn lämmönsiirtymiskerroin (engl. radiation heat transfer coefficient) ($[h_r] = Wm^{-2}K^{-1}$). Säteily esitetään kaavan (4.7.20) avulla vastaavaan tapaan kuin johtuminen kaavassa (4.7.18) näennäisesti lineaarisena Newtonin jäähtymislakina. Koska kerroin h_r riippuu kuitenkin pinnan aluksi tuntemattomasta lämpötilasta T, käsittely joudutaan suorittamaan iteratiivisesti päivittämällä kertoimen h_r arvoa laskelmien antamien tulosten

perusteella. (Myös kerroin h_c on usein lämpötilan funktio.)

Johtumisen ja säteilyn kautta yhteensä syntyvä lämpövirran tiheys on siis edellä esitettyjä kaavoja käyttäen muotoa

$$\boxed{q_n = h_c(T-T_\infty) + h_r(T-T_{sur}) \ .} \tag{4.7.22}$$

Tämä on jälleen esityksen (4.7.17) erikoistapaus ($\alpha \triangleq h_c + h_r$, $\beta \triangleq -h_cT_\infty - h_rT_{sur}$). Säteilyn osuuden perusteellisemman käsittelyn suhteen viitataan tässä lämmönsiirron kirjallisuuteen kuten [4.7] ja [4.8].

Huomautus 2. Tavallisin tapaus on se, jossa säteily kappaleen sisällä voidaan jättää huomiotta eli siellä $\vec{q}^r = \vec{0}$. Säteilyä voi silti tapahtua kappaleen pinnalta käsin ympäristöön. Reunalla tulee tällöin kirjoittaa yhteys

$$(q_n^c)^- = (q_n^c)^+ + (q_n^r)^+ \ , \tag{4.7.23}$$

joka sanoo, että kappaleen sisältä johtumalla kappaleen reunalle saapuva lämpövirta poistuu pinnalta ympäristöön sekä johtumalla sekä säteilemällä. Merkinnät - ja + viittaavat kohdan 4.7.5 esitykseen.

Kehitetään yhtälöä (4.7.23) jatkoa varten vielä hieman eteenpäin. Otaksutaan, että johtuminen kappaleen sisällä tapahtuu isotrooppisen Fourierin lain (4.2.59") mukaan ja että pinnalla voidaan soveltaa kaavaa (4.7.17), jossa α ja β on valittu sopivasti. Reunaehto (4.7.23) saa silloin muodon

$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha T + \beta \tag{4.7.24}$$

eli

$$\alpha T + k\frac{\partial T}{\partial n} = -\beta \ . \tag{4.7.24'}$$

Huomautus 3. Tehdään joitakin reunaehtojen terminologiaan liittyviä kommentteja.

Skalaarisuuretta f koskeva lineaarinen reunaehto on tavallisimmin joku tyypeistä

$$f = \bar{f} \,, \qquad \text{(Dirichlet)} \tag{4.7.25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = g \,, \qquad \text{(Neumann)} \tag{4.7.26}$$

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n} = h \,. \qquad \text{(Cauchy, Robin, mixed)} \tag{4.7.27}$$

Tässä $\partial f/\partial n$ on suureen f derivaatta alueen ulkoisen normaalin suunnassa eli ns. normaaliderivaatta (engl. normal derivative) ja $\bar{f}$, g, α, β ja h ovat (aina tietyssä reunan pisteessä) annettuja vakioita. Reunaehtojen viereen on merkitty sulkuihin niistä kirjallisuudessa tavallisimmin käytetyt nimitykset. Sana mixed viittaa siihen, että kyseessä on funktion arvon ja sen normaaliderivaatan arvon lineaarikombinaatio eli "sekoitus". Cauchy-ehdon erikoistapauksina saadaan sekä Dirichlet-ehto että Neumann-ehto. (Esityksessä (4.7.27) voidaan tietenkin vielä saattaa niin haluttaessa joko α tai β ykköseksi jakamalla yhtälö puolittain joko kertoimella α tai β.) Jos reunaehtojen (4.7.25)...(4.7.27) oikeat puolet häviävät, ehtoja sanotaan homogeenisiksi (engl. homogeneous).

Yhtälö (4.7.24') on esimerkki Cauchy-ehdosta. Valitsemalla yhtälössä (4.7.23) adiabaattinen reuna, jolloin yhtälön oikea puoli häviää, päädytään vastaavasti homogeeniseen Neumann-ehtoon $\partial T/\partial n = 0$. Lopuksi yhtälö (4.7.14) on esimerkki Dirichlet-ehdosta.

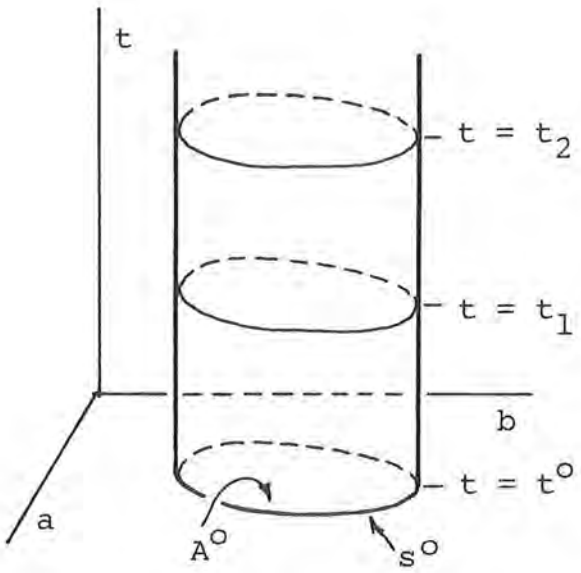
— — —

4.7.4 Alkuehdot

Epästationaarisissa tehtävissä tarvitaan reunaehtojen — jotka voivat samoin riippua ajasta — lisäksi myös ns. alkuehdot (engl. initial condition). Ne ilmaisevat tiedon systeemin tilasta alueessa V^o hetkellä, jona ko. ilmiötä aletaan tarkastella. Alkuehtojen käyttö on tuttua partikkelimekaniikasta, jossa partikkelin liikkeen ennustamiseksi täytyy tietää partikkelin asema ja nopeus alkuhetkellä $t = t^o$ (ks. kohta 2.3.2).

Se, mitä tietoja tulee antaa alkuehdoissa, riippuu kenttäyhtälöiden formuloinnista (ks. kohta 4.8). Alkuehdot koskevat valittuja perustuntemattomia sekä mahdollisesti niiden aikaderivaattoja. Jos perustuntemattomina ovat esimerkiksi siirtymä $\{u\}$ ja lämpötila T, alkuehtoina tulee antaa suureiden $\{u\}$, $\partial\{u\}/\partial t$ ja T jakautumat alueessa V^o. (Kaksi ensimmäistä näistä ehdoista ovat ymmärrettävissä partikkelimekaniikan perusteella.) Huomautettakoon, että alkuehtojen — tarkasteltuina alueen V^o reunalla — tulee tietenkin olla sopusoinnussa siellä alkuhetkellä esitettyjen reunaehtojen kanssa.

Sen sijaan, että pitäisimme paikkakoordinaatteja ja aikaa eri asemassa, voimme myös ajatella tehtävää suoraan nelidimensioisessa paikka-aika-avaruudessa. Kuva 4.7.10 pyrkii havainnollistamaan tätä, kun paikkakoordinaatteja on vain kaksi. Määrittelyalueena on abt-avaruudessa suorapohjainen puoliääretön sylinteri, koska Lagrangen esitystavassa määrittelyalue on paikan suhteen muuttumaton alkutilan asema. Alkuehdot annetaan sylinterin pohjalla A^o. Itse asiassa alkuehtoja voitaisiin nimittää aika-akselin suhteen täydennetyn määrittelyalueen kannalta yhtä hyvin alueen



Kuva 4.7.10 abt-avaruus.

tietyllä reunalla vallitseviksi reunaehdoiksi. Varsinaiset reunaehdot pätevät sylinterin vaipalla. Esimerkkinä kuvan 4.7.10 esittämästä tapauksesta voisi olla vaikka tasolevyssä vallitsevan lämpötilakentän T(a,b,t) määrittäminen.

Komplisoitujen ainemallien — kuten viskokimmoiset aineet — yhteydessä alkuehdoiksi eivät välttämättä riitä pelkästään tiedot suureiden tai niiden aikaderivaattojen arvoista kuten on todettu kohdassa 4.2.

Huomautus 1. Tehdään joitakin terminologiaan liittyviä kommentteja.

Ajasta riippuvat probleemat ovat yleensä ns. etenemistehtäviä (ks. kohta 4.1). Etenemistehtäville on tyypillistä, että määrittelyalueen tietyllä reunalla (esimerkiksi kuvassa 4.7.10 reunalla $t \to \infty$) ei ole annettu mitään ehtoja. Etenemistehtävään liittyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat matemaattisen terminologian mukaan hyperbolisia tai parabolisia (engl. hyperbolic, parabolic).

Tasapaino- ja ominaisarvotehtäviä (ks. kohta 4.1) nimitetään taas usein etenemistehtävä-termin vastakohtana reuna-arvotehtäviksi (engl. boundary value problem), koska niissä annetaan alueen kaikilla reunoilla ehtoja. Reuna-arvotehtävään liittyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat matemaattisen terminologian mukaan elliptisiä (engl. elliptic).

Etenemistehtävistä käytetään joskus myös havainnollista nimitystä marssimisprobleema (engl. marching problem) [4.2, s. 351]. Tehtävänä on marssittaa ratkaisu eteenpäin tietyssä suunnassa siltä alueen reunalta käsin tulevan tiedon varassa, jolla ehtoja on annettu. Kuvan 4.7.10 tapauksessa etenemissuunta eli marssimissuunta on t-akselin positiivinen suunta. Etenemistehtävä voi esiintyä myös ajasta riippumattomissa tapauksissa (ks. kohta 6.8).

Kuva 4.7.10 osoittaa, että määrittelyalueen reuna on ajan suhteen päinvastoin kuin yleensä paikan suhteen aina hyvin yksinkertainen: $t = t^o$ = vakio. Huomataan myös, että jos alkuehtona annetaan jonkin suureen f aikaderivaatta $\partial f/\partial t$, kyseessä on kohdan 4.7.3 huomautuksessa 3 esitetyn terminologian mukaan itse asiassa Neumannin reunaehto, koska aika-akseli on reunalla $t = t^o$ yhdensuuntainen määrittelyalueen ulkoisen normaalin kanssa.

— — —

Huomautus 2. Numeerisia menetelmiä käytettäessä ajasta riippuvat tehtävät ratkaistaan tavallisimmin marssimalla äärellisin askelin aika-akselin suunnassa. Kun systeemin tila tunnetaan tietyillä perättäisillä ajan diskreeteillä arvoilla, tilan määritys tulevaisuudessa askeleen Δt päästä tapahtuu yleensä periaatteeltaan laskennallisesti hyvin yksinkertaisella algoritmilla. Tämä on johtanut siihen, että myös stationaarinen tehtävä voidaan joskus ratkaista kätevästi muodollisesti ajasta riippuvana. Jos systeemissä nimittäin on — tai siihen keinotekoisesti lisätään — sopivasti vaimennustyyppisiä efektejä (kuten nopeudesta riippuvia, sille vastakkaissuuntaisia voimia), systeemi pyrkii ajan kasvaessa asettumaan alkuehdoista riippumatta tiettyyn pysyvään tilaan, mikäli systeemiin vaikuttavat herätteet eivät riipu ajasta. Näin on siis saatu stationaarinen ratkaisu. Esitetty ratkaisufilosofia ei ole mitenkään luonnoton, koska todellisuudessahan jokaisella tapahtumalla on alkunsa ja loppunsa ja mahdollinen stationaarinen tila on vain osa tapahtuman historiasta.

— — —

4.7.5 Jatkuvuusehdot

Käsittely pohjautuu voimallisesti kohdan 5.7.5 esitykseen. Todettakoon vain, että aineparametrien arvojen hyppäyksistä johtuvat vallitsevien suureiden epäjatkuvuudet ovat paljon tavallisempia kiinteän aineen mekaniikassa kuin nestemekaniikassa. Nesteissähän diffuusio yleensä tasoittaa mahdolliset epäjatkuvuudet.

Kaavojen (5.7.38), (5.7.39), (5.7.44) ja (5.7.46) vastineet tulevat olemaan siirtymän jatkuvuusehto

$$\boxed{\vec{u}^{+} = \vec{u}^{-} \,,} \tag{4.7.28}$$

lämpötilan jatkuvuusehto

$$\boxed{T^{+} = T^{-} \,,} \tag{4.7.29}$$

traktion jatkuvuusehto

$$\boxed{\vec{t}^{+} = \vec{t}^{-}} \tag{4.7.30}$$

ja lämpövirran tiheyden jatkuvuusehto

$$\boxed{q_n^{+} = q_n^{-} \,.} \tag{4.7.31}$$

Nämähän ovat muuten samoja kuin kohdassa 5.7.5 paitsi yhtälö (4.7.28), koska nyt operoidaan Lagrangen esityksen johdosta nopeuden sijasta siirtymän avulla.

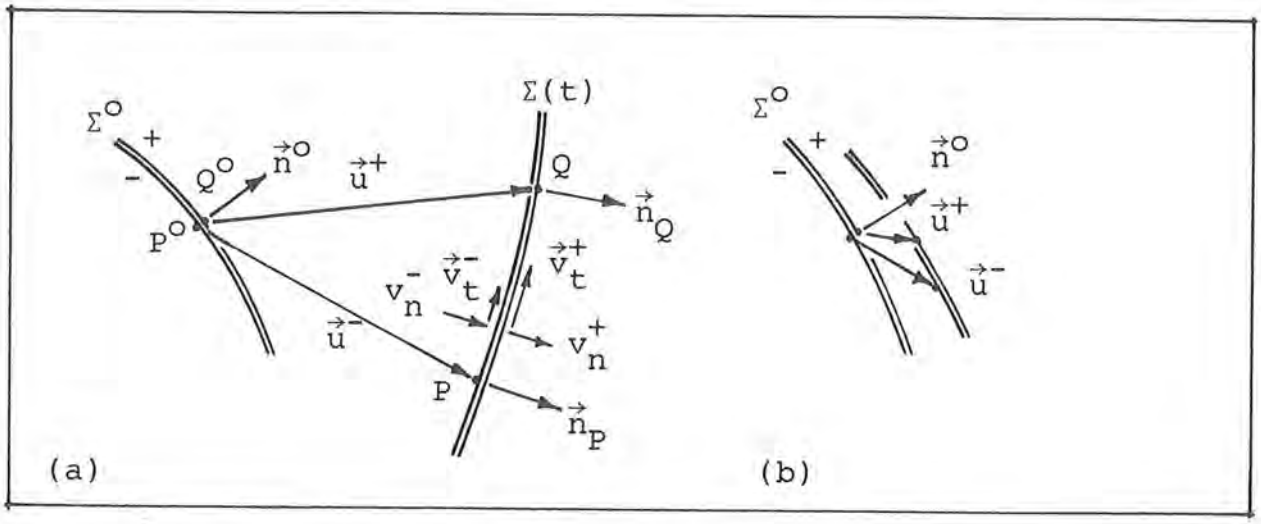
Siirtymän jatkuvuusehto ei tietenkään pidä paikkaansa pinnoilla, joissa kappaleeseen syntyy esimerkiksi säröjä, halkeamia tai liukumia. Siirtymän jatkuvuusehto voidaan esittää kaavojen (5.7.40) ja (5.7.41) tyyliin jälleen erikseen läpitunkemattomuusehtona

$$\boxed{u_n^{+} = u_n^{-}} \tag{4.7.32}$$

ja liukumattomuusehtona

$$\boxed{\vec{u}_t^+ = \vec{u}_t^- \,.} \tag{4.7.33}$$

Katsotaan vielä tarkemmin liukumisesta johtuvaa epäjatkuvuuspintaa (kuva 4.7.11). Kyseessä on toisiaan koskettavien ainepintojen Σ^+ ja Σ^- liukuminen toisiaan pitkin. Tällainen asetelma voi syntyä mm. maaperämekaniikassa (engl. soil mechanics) ns. liukupinta-analyysissä ja kalliomekaniikassa (engl. rock mechanics) rakoilleen kallioaineksen liikkeessä. Liukumisessa pätee siis $[\![v_n]\!] = 0$, $[\![\vec{v}_t]\!] \neq \vec{0}$ eli $v_n^+ = v_n^-$, $\vec{v}_t^+ \neq \vec{v}_t^-$. (Tarkasti ottaen todellista hyppäystä $[\![\vec{v}_t]\!]$ ei ehkä esiinnykään, vaan hyvin ohuessa kerroksessa syntyy hyvin voimakas leikkausmuodonmuutos.) Pinnan $\Sigma(t)$ tietyssä pisteessä pätee $du_n = v_n dt$ ja $d\vec{u}_t = \vec{v}_t dt$ ja siis $du_n^+ = du_n^-$ ja $d\vec{u}_t^+ \neq d\vec{u}_t^-$. Havaitaan kuitenkin, että ehdosta $du_n^+ = du_n^-$ ei voida johtaa suurten siirtymien tapauksessa integroimalla enää ehtoa $u_n^+ = u_n^-$, jos näillä merkinnöillä tarkoitetaan: $u_n = \vec{n}^o \cdot \vec{u}$. Kuvan (a) alkutilassa toisiaan koskevilla vastinpartikkeleilla P ja Q on nimittäin hetken päästä pinnalla $\Sigma(t)$ eri yksikkönormaalit ja kuvasta nähdään, että $\vec{n}^o \cdot \vec{u}^+ \neq \vec{n}^o \cdot \vec{u}^-$.

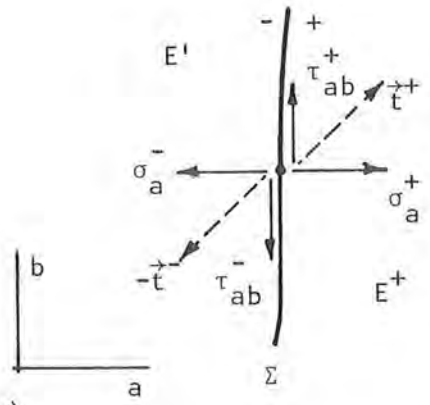


Kuva 4.7.11 Liukuminen. (a) Suuret siirtymät. (b) Pienet siirtymät.

Pienten siirtymien tapauksessa $\vec{n} \approx \vec{n}^o$ ja ehdosta $v_n^+ = v_n^-$ seuraa toisiaan ehto $u_n^+ = u_n^-$, kuten kuva (b) näyttää osoittavan. Täten

termit läpitunkemattomuusehto ja liukumattomuusehto eivät ole kaavojen (4.7.32) ja (4.7.33) yhteydessä suurten siirtymien tapauksessa enää tarkasti ottaen sopivia.

Esimerkki 4.7.1 Jännitys- ja venymäkomponenttien epäjatkuvuus. Tarkastellaan tasomuodonmuutostapausta (ks. kohta 6.3.1) ab-tasossa (kuva (a)).



(a)

Kyseessä on pitkälti esimerkissä 5.7.2 esitetyn käsittelyn toisto. Olkoon mahdollinen epäjatkuvuuspinta Σ merkintöjen yksinkertaistamiseksi tarkasteltavassa pisteessä b-akselin suuntainen. Otaksutaan isotrooppisesti kimmoinen aine ja että epäjatkuvuudet johtuvat siitä, että kimmokertoimella on eri arvot (E^+ ja E^-) pinnan eri puolilla.

Otaksutaan siirtymä tavanomaiseen tapaan kaavan (4.7.28) mukaisesti jatkuvaksi. Tällöin

$$u_a^+ = u_a^- , \quad u_b^+ = u_b^- \tag{a}$$

ja siis derivoimalla b:n suhteen (ollaan edelleen pinnalla Σ)

$$\frac{\partial u_a^+}{\partial b} = \frac{\partial u_b^-}{\partial b} , \tag{b}$$

$$\frac{\partial u_b^+}{\partial b} = \frac{\partial u_b^-}{\partial b} . \tag{c}$$

Kaava (c) on toisin kirjoitettuna (ks. merkinnät (3.3.36))

$$\varepsilon_b^+ = \varepsilon_b^- \equiv (\varepsilon_b)_\Sigma . \tag{c'}$$

Tällä on helposti ymmärrettävä merkitys: toisiaan koskettavat b-akselin suuntaiset viiva-alkiot saavat saman venymän.

a-akselia vastaan kohtisuorassa olevaan pinta-alkioon vaikuttavan traktion esitys on tässä

$$\vec{t} = \sigma_a \vec{i} + \tau_{ab} \vec{j} . \tag{d}$$

Ehto (4.7.30) on siis

$$\sigma_a^+ \vec{i} + \tau_{ab}^+ \vec{j} = \sigma_a^- \vec{i} + \tau_{ab}^- \vec{j} \tag{e}$$

eli

$$\sigma_a^+ = \sigma_a^- , \tag{f}$$

$$\tau_{ab}^{+} = \tau_{ab}^{-} \ . \tag{g}$$

Konstitutiiviset yhteydet ovat (ks. kaavat (4.2.14))

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a &= 2G\varepsilon_a \ , \\ \sigma_b &= 2G\varepsilon_b \ , \\ \tau_{ab} &= G\gamma_{ab} \ . \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

Tässä on otettu käsittelyn lyhentämiseksi erikoistapaus $\nu = 0$, jolloin kaavojen (4.2.16) mukaan $G = E/2$ ja $\lambda = 0$.

Kaavan (f) perusteella

$$2G^{+}\varepsilon_a^{+} = 2G^{-}\varepsilon_a^{-} \ , \tag{i}$$

joten yleensä

$$\varepsilon_a^{+} \neq \varepsilon_a^{-} \ . \tag{j}$$

Tämä tulos poikkeaa luonteeltaan esimerkin 5.7.2 vastinkaavasta (f'), koska emme tee nyt kokoonpuristumattoman aineen otaksumaa.

Kaavan (c') perusteella

$$\sigma_b^{+} = 2G^{+}(\varepsilon_b)_\Sigma \ , \quad \sigma_b^{-} = 2G^{-}(\varepsilon_b)_\Sigma \ , \tag{k}$$

joten yleensä

$$\sigma_b^{+} \neq \sigma_b^{-} \ . \tag{l}$$

Kaavan (g) perusteella

$$G^{+}\gamma_{ab}^{+} = G^{-}\gamma_{ab}^{-} \ , \tag{m}$$

joten yleensä

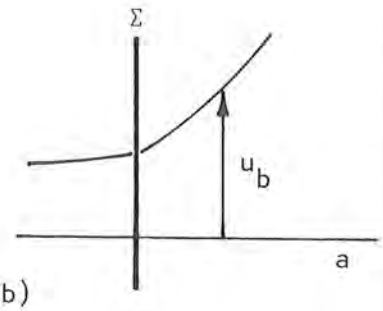
$$\gamma_{ab}^{+} \neq \gamma_{ab}^{-} \ . \tag{n}$$

Koska

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a} \ , \tag{o}$$

Kaavan (b) avulla saadaan lisäksi tulos

$$\frac{\partial u_b^{+}}{\partial a} \neq \frac{\partial u_b^{-}}{\partial a} \ , \tag{p}$$

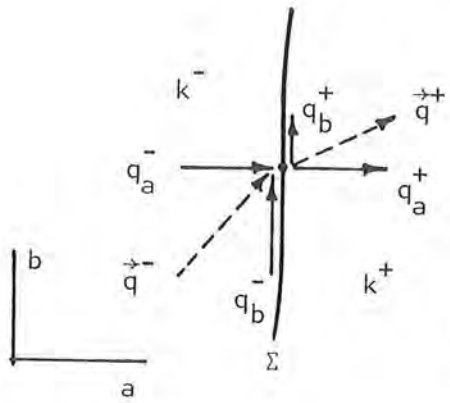


(b)

jota kuvan (b) esitys pyrkii havainnollistamaan.

Tästä esimerkistä käy selvästi ilmi se, että jännityskomponenttien käyttö perustuntemattomina (ks. kohta 4.8) voi olla mahdollisten epäjatkuvuuksien (kaava (1)) johdosta hankalaa. On huomattava, että jos epäjatkuvuuspinta ei ole a- tai b-akselin suuntainen, kaikkien komponenttien σ_a, σ_b ja τ_{ab} arvot saavat hyppäyksen. Kaavojen (j) ja (p) perusteella havaitaan, että myös siirtymän derivaatat voivat olla epäjatkuvia.

Esimerkki 4.7.2 Lämpövuovektorin epäjatkuvuus. Tarkastellaan vastaavaa tapausta kuin esimerkissä 4.7.1, mutta nyt lämmönsiirron kannalta (kuva (a)).



(a)

Epäjatkuvuuspinta Σ aiheutuu lämmönjohtavuuden k arvon hyppäyksestä. Otaksutaan, että $\vec{q}$ syntyy pelkästään lämmön johtumisesta ja että isotrooppinen Fourierin lämmönjohtumislaki on voimassa.

Otaksutaan lämpötila tavanomaiseen tapaan kaavan (4.7.29) mukaan jatkuvaksi. Tällöin

$$T^+ = T^- \tag{a}$$

ja siis derivoimalla b:n suhteen (ollaan edelleen pinnalla Σ)

$$\frac{\partial T^+}{\partial b} = \frac{\partial T^-}{\partial b} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)_\Sigma . \tag{b}$$

a-akselia vastaan kohtisuorassa olevaan pinta-alkioon liittyvä lämpövirran tiheys on tässä

$$q_n = \vec{i}\cdot\vec{q} = q_a . \tag{c}$$

Ehto (4.7.31) on siis

$$q_a^+ = q_a^- . \tag{d}$$

Konstitutiiviset yhteydet ovat (ks. kaavat (4.2.59''))

$$\left.\begin{aligned} q_a &= -k\,\frac{\partial T}{\partial a} , \\ q_b &= -k\,\frac{\partial T}{\partial b} . \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Kaavan (d) perusteella

$$-k^{+}\frac{\partial T^{+}}{\partial a} = -k^{-}\frac{\partial T^{-}}{\partial a}\,, \qquad \text{(f)}$$

joten yleensä

$$\frac{\partial T^{+}}{\partial a} \neq \frac{\partial T^{-}}{\partial a}\,. \qquad \text{(g)}$$

Kaavan (b) perusteella

$$q_b^{+} = -k^{+}\left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)\,, \quad q_b^{-} = -k^{-}\left(\frac{\partial T}{\partial b}\right) \qquad \text{(h)}$$

joten yleensä

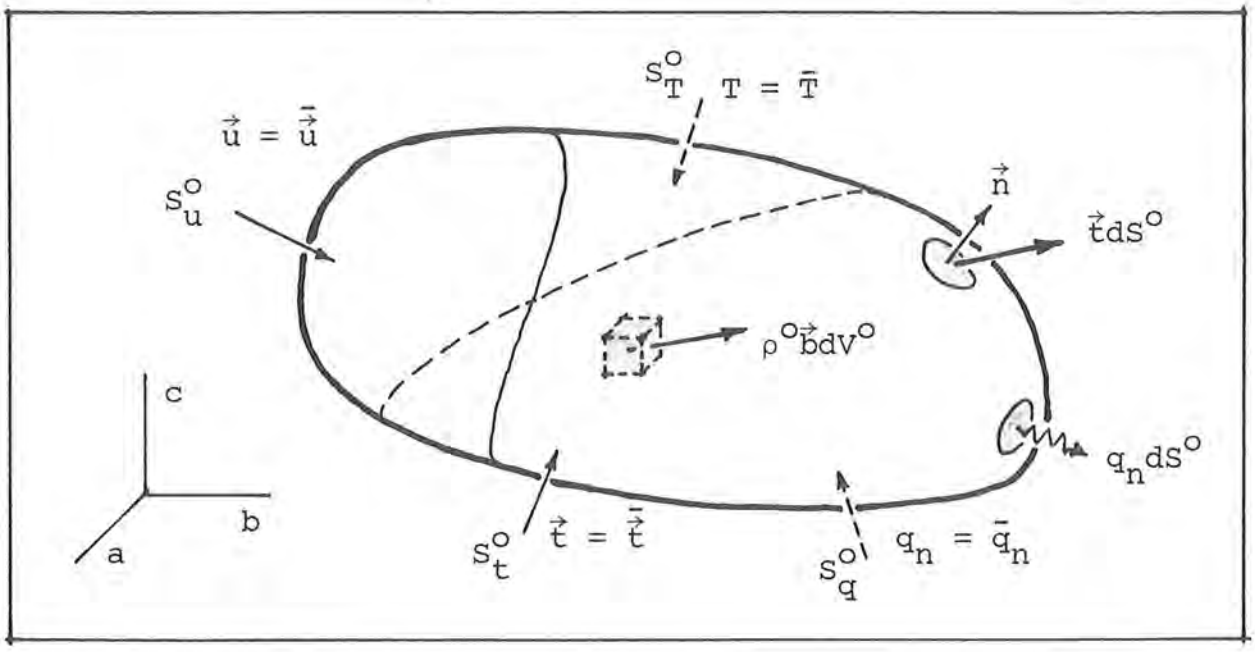
$$q_b^{+} \neq q_b^{-}\,. \qquad \text{(i)}$$

Täten lämmönjohtavuuden epäjatkuvuuden nähdään (kaava (i)) tosiaan aiheuttavan kuvan (a) esityksen mukaisesti epäjatkuvuutta myös lämpövuovektoriin. Jos epäjatkuvuuspinta ei ole a- tai b-akselin suuntainen, kummankin komponentin q_a ja q_b arvot saavat hyppäyksen. Lämpövuokomponenttien käyttö perustuntemattomina voi siten olla hankalaa. Kaavan (g) perusteella havaitaan, että myös lämpötilan derivaatat voivat olla epäjatkuvia.

4.8 Yhteenveto

Yleistä. Tässä kohdassa kootaan edellä käsitellyt kiinteän aineen mekaniikan tyypilliset riippuvuudet matemaattiselta kannalta tarkasteltavaksi yhtenäiseksi yhtälösysteemiksi.

Kuvassa 4.8.1 palautetaan vielä mieleen eräitä käytettyjä merkintöjä. Kyseessä on siis Lagrangen esitystapa. Rajoitetaan käsittely pienten siirtymien teorian mukaiseen tapaukseen ja käytetään yhtälöiden matriisiversiota. Aikaisempiin kaavanumeroihin



Kuva 4.8.1 Eräitä merkintöjä.

ei enää viitata. Syntyvät pikakirjoitusmuotoiset yhtälöt ovat — vaikkei kaikkien tunnusten aivan tarkkoja merkityksiä muistettaisikaan — sopivia havainnollistamaan eri suureiden keskinäisiä riippuvuussuhteita.

Kenttäyhtälöt. Cauchyn I liikelain mukaiset liikeyhtälöt ovat

$$\rho^o\{b\} + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma\} = \rho^o\{a\} \ . \quad (3 \text{ kpl}) \qquad (4.8.1)$$

Cauchyn II liikelain mukaiset yhtälöt ilmaisevat parittaisten leikkausjännitysten yhtäsuuruuden. Tämä seikka on otettu jo

huomioon määrittelemällä pystyvektori $\{\sigma\}$ vain kuusi alkiota sisältäväksi, joten nämä yhtälöt on syytä jättää tässä yhteydessä kirjaamatta.

Energiayhtälö on

$$\rho^o \frac{\partial e}{\partial t} = -\{\nabla\}^T\{q\} + \{\sigma\}^T \frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\} \ . \quad (1 \text{ kpl}) \tag{4.8.2}$$

Kinematiikka antaa lisäksi kiihtyvyys-siirtymäyhteyden

$$\{a\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\} \quad (3 \text{ kpl}) \tag{4.8.3}$$

sekä venymä-siirtymäyhteyden

$$\{\varepsilon\} = [{}_\varepsilon\partial_u]\{u\} \ . \quad (6 \text{ kpl}) \tag{4.8.4}$$

Yhtälöt (4.8.1)...(4.8.4) perustuvat aksioomiin ja kinematiikkaan ja ovat siten täysin yleispäteviä (pienten siirtymien teoriassa). Ne eivät kuitenkaan riitä, vaan systeemi on täydennettävä konstitutiivisilla yhteyksillä. Kuten on jo korostettu, nämä voivat olla tapauksesta riippuen hyvin monimuotoisia ja tässä yhteydessä voimme käsitellä vain joitakin esimerkkitapauksia.

Jännityksen riippuvuus voi olla mm. muotoa

$$\{\sigma\} = \{\sigma(\{\varepsilon\},T)\} \ , \quad (6 \text{ kpl}) \tag{4.8.5}$$

josta esimerkkinä yleistetty Hooken laki

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^o\}) + \{\sigma^o\} \ , \tag{4.8.5'}$$

jossa tässä $\{\varepsilon^o\} = \{\alpha\}(T-T^o)$.

Sisäenergian riippuvuus voi olla mm. muotoa

$$e = e(\{\varepsilon\},T) \ , \quad (1 \text{ kpl}) \tag{4.8.6}$$

josta esimerkkinä differentiaalinen muoto

$$de = \frac{1}{\rho^o}(\{\sigma\}+[D]\{\alpha\}T)^T d\{\varepsilon\} + c_\varepsilon dT \ . \tag{4.8.6'}$$

Lämpövuon riippuvuus voi olla lämmönjohtumisen suhteen mm. muotoa

$$\{q^c\} = \{q^c(\{\nabla\}T)\} \ , \quad (3 \text{ kpl}) \qquad (4.8.7)$$

josta esimerkkinä Fourierin lämmönjohtumislaki

$$\{q^c\} = -[k]\{\nabla\}T \ . \qquad (4.8.7')$$

On syytä korostaa seuraavaa asetelmaa. Lagrangen esityksessä varsinaisia riippumattomia muuttujia (engl. independent variable) ovat aineelliset paikkakoordinaatit a, b, c ja aika t. Tehtävän riippuvista muuttujista (engl. dependent variable) osa on annettuja ja osa tuntemattomia. Tässä ovat annettuja (kenttä-) suureita mm. massavoiman intensiteetti {b}, tiheys alkutilassa ρ^o sekä tietenkin konstitutiivisissa yhteyksissä esiintyvät aineparametrit tai funktiomuodot. Kaikki muut suureet kuten $\{\sigma\}$ (6 kpl), {a} (3 kpl), e (1 kpl), {q} (3 kpl), $\{\varepsilon\}$ (6 kpl) {u} (3 kpl), T (1 kpl) ovat tuntemattomia, jotka tulee määrittää riippumattomien muuttujien a, b, c ja t funktioina. Tuntemattomien lukumäärä on valinnassamme 23 ja kenttäyhtälöitä (4.8.1)... (4.8.7) on yhteensä samoin 23, joten ainakin tässä suhteessa asetelma on oikeellinen. (Jotkut yhtälöt — kuten (4.8.3), jota voidaan myös pitää kiihtyvyyden määritelmänä — ovat rakenteeltaan niin yksinkertaisia, että tiettyjä muuttujia — kuten kiihtyvyys — ei oteta alan kirjallisuudessa usein edes mukaan tuntemattomien luetteloon.)

Käytännössä kaikkia tuntemattomia ei yritetä ratkaista yhtä aikaa. Sopivasti yhtälöitä kombinoimalla voidaan osa tuntemattomista (yleensä) helposti eliminoida ja saadaan alkuperäistä pienempi yhtälösysteemi, jossa samanaikaisesti esiintyviä tuntemattomia voidaan nyt nimittää ko. formulaation perustuntemattomiksi (engl. basic unknown). Kun perustuntemattomat on määritetty, muut tehtävän tuntemattomat saadaan tarvittaessa (yleensä) helposti jälkikäsittelyn avulla. Esimerkiksi jos siirtymä {u} tunnetaan, yhtälöt (4.8.3) antavat välittömästi kiihtyvyyden.

Kiinteän aineen mekaniikassa tavallisin formulaatio on se,

jossa perustuntemattomiksi valitaan siirtymä $\{u\}$ ja lämpötila T; yhteensä siis 4 kpl. Suorittamalla tarvittavat eliminoinnit soveltaen lisäksi konstitutiivisia yhteyksiä (4.8.5'), (4.8.6'), (4.8.7') saadaan taulukossa 4.8.1 esitetyt yhtälöt. Nämä yhtälöt

Taulukko 4.8.1 Kenttäyhtälöitä.

Liikeyhtälöt

$$\rho^o\{b\} + [{}_f\partial_\sigma]([D][{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}) + $$
$$- [{}_f\partial_\sigma]([D]\{\varepsilon^o\}) + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma^o\} = \rho^o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\}$$

Energiayhtälö

$$\rho^o c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + ([D]\{\alpha\}T)^T \frac{\partial}{\partial t}([{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}) = \{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}T) + \rho^o r$$

ovat esiintyneet jo aikaisemmin miltei sellaisinaan; ks. kaavat (4.4.18) ja (4.6.23").

Kuten on todettu jo kohdissa 4.1 ja 4.6.1, normaalisti kytkentä termisen ja mekaanisen probleeman välillä voidaan jättää huomiotta. Tällöin lämpötila T ratkaistaan ensin tarvittaessa energiayhtälön avulla ja sen jälkeen siirrytään puhtaasti mekaanisen probleeman käsittelyyn, jossa T on annettu. Mekaanisen probleeman formuloinnissa on tapana puhua etenkin elementtimenetelmän yhteydessä mm. siirtymämenetelmästä (engl. displacement method), voimamenetelmästä (engl. force method) ja sekamenetelmästä (engl. mixed method). Siirtymämenetelmässä perustuntemattomat ovat siirtymiä, voimamenetelmässä jännityksiä tai yleensä voimasuureita ja sekamenetelmässä siirtymiä ja jännityksiä. Siirtymämenetelmä on ylivoimaisesti tavallisin ja suoraviivaisin formulaatio. Taulukon 4.8.1 liikeyhtälöt edustavat juuri tätä formulaatiota kenttäyhtälöiden osalta, kun $\{\varepsilon^o\}$ pidetään annettuna.

Reuna- ja alkuehdot. Kuvassa 4.8.1 esiintyvät reunaehdot muodostuvat matriisimerkinnöin mekaanisista reunaehdoista

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \ , \quad S_u^o \tag{4.8.8}$$

$$\{t\} = \{\bar{t}\} \ , \quad S_t^o \tag{4.8.9}$$

ja termisistä reunaehdoista

$$T = \bar{T} \ , \quad S_T^o \tag{4.8.10}$$

$$q_n = \bar{q}_n \ . \quad S_q^o \tag{4.8.11}$$

Aksioomien seurauksina saadaan lisäksi reunaehdoissa tarvittavat traktio-jännitysyhteys

$$\{t\} = [n^o]\{\sigma\} \tag{4.8.12}$$

ja lämpövirran tiheys - lämpövuoyhteys

$$q_n = \{n^o\}^T\{q\} \ . \tag{4.8.13}$$

Jos otetaan {u} ja T perustuntemattomiksi, vastaavat reunaehdot saavat eliminointien ja konstitutiivisten yhteyksien (4.8.5') ja (4.8.7') soveltamisen jälkeen taulukossa 4.8.2 esitetyt muodot. Viimeisessä ehdossa katkokaarisuluissa oleva, kappaleen

Taulukko 4.8.2 Reunaehtoja.

Mekaaniset ehdot	
$\{u\} = \{\bar{u}\}$	S_u^o
$[n^o][D][{}_\varepsilon\partial_u]\{u\} - [n^o][D]\{\varepsilon^o\} + [n^o]\{\sigma^o\} = \{\bar{t}\}$	S_t^o
Termiset ehdot	
$T = \bar{T}$	S_T^o
$-\{n^o\}^T[k]\{\nabla\}T + \left(\{n^o\}^T\{q^r\}\right) = \bar{q}_n$	S_q^o

sisällä tapahtuvasta lämmön säteilystä kertyvä osuus jätetään

tavallisesti pienenä terminä pois. Jos se on mukana, suurelle $\{q^r\}$ tulee myös esittää jokin konstitutiivinen yhteys. Taulukon 4.8.2 mekaaniset reunaehdot edustavat siirtymämenetelmän ehtoja, kun $\{\varepsilon^o\}$ pidetään annettuna.

Ajasta riippuvissa probleemoissa on lisäksi esitettävä kohdassa 4.7.4 selostettuun tapaan tarvittavat alkuehdot eli esimerkiksi taulukoiden 4.8.1 ja 4.8.2 esittämässä $\{u\}$, T-formulaatiossa tiedot siirtymästä $\{u\}$, nopeudesta $\partial\{u\}/\partial t$ ja lämpötilasta T alkuhetkellä alueessa ja sen reunalla.

Yleistyksiä. Vallitsevat yhtälöt on esitetty edellä käsittelyn tiivistämiseksi lähinnä jonkinlaisissa perusmuodoissaan. Kun ne on ymmärretty, voidaan sitten yleensä suorittaa verrattain helposti täydennys tilanteesta riippuviin monimutkaisempiin tapauksiin. Tässä tarkoituksessa tullaan jatkossa soveltamaan usein sijoitusmerkkiä :=. Tällä tarkoitetaan, että merkin vasemmalla puolella olevan suureen tilalle sijoitetaan oikealla puolella oleva suure. Esimerkiksi reunaehto (4.8.11) voidaan täydentää ehdoksi (4.7.17) asettamalla edellisessä

$$\bar{q}_n := \alpha T + \beta \ . \tag{4.8.14}$$

Tarkastellaan toisena esimerkkinä vielä vaimennusvoimien (engl. damping forces) tapausta. Kontinuumin yhteydessä otaksutaan joskus, että sen kuhunkin massa-alkioon vaikuttaa sen liikesuunnalle vastakkainen voima alkutilavuutta kohti

$$\vec{f}^d = -c\vec{v} = -c\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \tag{4.8.15}$$

eli

$$\{f^d\} = -c\{v\} = -c\,\frac{\partial}{\partial t}\{u\} \ . \tag{4.8.15'}$$

Tässä kerroin c on positiivinen vakio tai paikan funktio. Tällaista nopeuteen verrannollista vaimennusta nimitetään yleensä viskoosiksi vaimennukseksi; ks. myös kuva 2.3.11. (On selvää, että kaavan (4.8.15) mukainen esitys ei voi olla kovin realistista. Esimerkiksi kappaletta ympäröivän väliaineen aiheuttama

vaimennushan tapahtuu kappaleen pintaan vaikuttavien voimien kautta.) Vaimennus tulee mukaan taulukon 4.8.1 liikeyhtälöihin sijoituksella

$$\rho^{o}\{b\} := \rho^{o}\{b\} + \{f^{d}\} \ . \qquad (4.8.16)$$

Termi $\rho^{o}\{b\}$ kaavan oikealla puolella tarkoittaa edelleen eksplisiittisesti annettua massavoimaa tilavuutta kohti.

4.9 Virtuaalinen työ

4.9.1 Pienet siirtymät

Yleistä. Jos kontinuumimekaniikan probleemaa yritetään ratkaista analyyttisesti, kohdassa 4.8 esitetty differentiaaliyhtälösysteemiformulaatio on luontevin lähtökohta. On kuitenkin sanomattakin selvää, että analyyttisen täsmällisen ratkaisun löytäminen voi onnistua vain aniharvoissa voimakkaasti yksinkertaistetuissa tapauksissa. Käytännössä on turvauduttava numeerisiin tietokoneavusteisiin menetelmiin; ns. diskreetteihin (engl. discrete) menetelmiin. Esimerkiksi ns. differenssimenetelmä (engl. finite difference method) on klassillinen diskreetti menetelmä, jonka lähtökohtana on yleensä samoin ollut differentiaaliyhtälösysteemiformulaatio. Esiintyvät derivaatat korvataan vain likimääräisesti erotusosamäärillä. Uudempi likimenetelmä, ns. elementtimenetelmä (engl. finite element method), käyttää sen sijaan lähtökohtanaan vallitsevista differentiaaliyhtälöistä kehitettyjä ns. heikkoja muotoja (engl. weak form, weak formulation) tai variaatioperiaatteita.

Osoittautuu, että ikivanha virtuaalisen työn periaate on eräs tällainen heikko muoto ja se antaa siten valmiin perustan mm. elementtimenetelmän käyttöön. Virtuaalisen työn periaate on insinöörikoulutusta saaneelle henkilölle yleensä jo partikkelimekaniikan kautta toivon mukaan jonkin verran tuttu ja fysikaalista havainnollisuutta omaava asia. Sen laajennus kontinuumia koskevaksi synnyttää samalla sivutuotteena mahdollisuuksia ymmärtää analogioiden kautta myös muiden kuin liikeyhtälöiden heikkojen muotojen johdoissa tehtäviä manipulaatioita.

Virtuaalisen työn periaate. Pyritään suorittamaan johto samaan henkeen kuin partikkelisysteemin yhteydessä kohdassa 2.3.7, jotta analogiset piirteet korostuisivat. Kirjallisuudessa on kuitenkin usein tapana käsitellä tehtävää ensin yksinkertaisimmillaan staattisessa tapauksessa ja täydentää esitys sitten mm. hitausvoima-ajattelun kautta. Toimitaan tässäkin vastaavasti. Saavutetaan pedagogista etua, kun johto viedään aluksi läpi mahdollisimman pelkistetyssä muodossa ja yleistys tapahtuu sijoi-

tusmerkkiä := soveltamalla ilman, että koko käsittelyä tarvittaisiin toistaa aina uudestaan. Vaihtoehtoinen tapa aloittaa heti täysin yleisestä muodosta tulee nimittäin merkinnällisesti turhan raskaaksi.

Kirjoitetaan liikeyhtälöiden (4.4.5) tasapainoversiot ja traktio-jännitysyhteydet (4.4.21) muotoihin

$$\rho^o\vec{b} + \vec{f}^\sigma = \vec{0} \qquad V^o\text{:ssa} \tag{4.9.1}$$

ja

$$\vec{t} - \vec{t}^\sigma = \vec{0} \qquad S^o\text{:lla} \tag{4.9.2}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \rho^o b_a + f_a^\sigma &= 0 \,, \\ \rho^o b_b + f_b^\sigma &= 0 \,, \\ \rho^o b_c + f_c^\sigma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad V^o\text{:ssa} \tag{4.9.1'}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} t_a - t_a^\sigma &= 0 \,, \\ t_b - t_b^\sigma &= 0 \,, \\ t_c - t_c^\sigma &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \qquad S^o\text{:lla} \tag{4.9.2'}$$

On siis käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\vec{f}^\sigma \equiv \frac{\partial\vec{t}^{(a)}}{\partial a} + \frac{\partial\vec{t}^{(b)}}{\partial b} + \frac{\partial\vec{t}^{(c)}}{\partial c} \tag{4.9.3}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} f_a^\sigma &\equiv \frac{\partial\sigma_a}{\partial a} + \frac{\partial\tau_{ba}}{\partial b} + \frac{\partial\tau_{ca}}{\partial c} \,, \\ f_b^\sigma &\equiv \frac{\partial\tau_{ab}}{\partial a} + \frac{\partial\sigma_b}{\partial b} + \frac{\partial\tau_{cb}}{\partial c} \,, \end{aligned}\right\} \tag{4.9.3'}$$

$$f_c^\sigma \equiv \frac{\partial \tau_{ac}}{\partial a} + \frac{\partial \tau_{bc}}{\partial b} + \frac{\partial \sigma_c}{\partial c}$$

ja

$$\vec{t}^\sigma \equiv n_a^o \vec{t}^{(a)} + n_b^o \vec{t}^{(b)} + n_c^o \vec{t}^{(c)} \tag{4.9.4}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} t_a^\sigma &\equiv n_a^o \sigma_a + n_b^o \tau_{ba} + n_c^o \tau_{ca} , \\ t_b^\sigma &\equiv n_a^o \tau_{ab} + n_b^o \sigma_b + n_c^o \tau_{cb} , \\ t_c^\sigma &\equiv n_a^o \tau_{ac} + n_b^o \tau_{bc} + n_c^o \sigma_c . \end{aligned}\right\} \tag{4.9.4'}$$

Yläviite σ korostaa, että ko. suureet on ajateltava lasketuiksi jännityskentästä. Havaitaan, että yhtälöiden (4.9.1) ja (4.9.2) muodostama systeemi eroaa tyypiltään yhtälöistä (2.3.82) staattisessa tapauksessa traktioita koskevalta osaltaan (ks. kuitenkin huomautus 3).

Kerrotaan yhtälöt (4.9.1) ja (4.9.2) skalaarisesti mielivaltaisella vektorilla $\vec{w}(a,b,c) = w_a(a,b,c)\vec{i} + w_b(a,b,c)\vec{j} + w_c(a,b,c)\vec{k}$ ja integroidaan syntyvät yhtälöt vastaavasti määrittelyalueittensa V^o ja S^o ylitse ja lasketaan näin saadut yhtälöt vielä yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_{V^o} (\rho^o \vec{b} + \vec{f}^\sigma) \cdot \vec{w} dV^o + \int_{S^o} (\vec{t} - \vec{t}^\sigma) \cdot \vec{w} dS^o = 0 . \tag{4.9.5}$$

Sama tulos seuraa operoimalla vastaavasti mielivaltaisilla skalaarifunktioilla w_a, w_b ja w_c yhtälöiden (4.9.1') ja (4.9.2') suhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_{V^o} [(\rho^o b_a + f_a^\sigma) w_a + (\rho^o b_b + f_b^\sigma) w_b + (\rho^o b_c + f_c^\sigma) w_c] dV^o +$$

$$+ \int_{S^o} [(t_a - t_a^\sigma) w_a + (t_b - t_b^\sigma) w_b + (t_c - t_c^\sigma) w_c] dS^o = 0 . \tag{4.9.5'}$$

Koska vektori $\vec{w}$ eli sen komponentit w_a, w_b ja w_c ovat täysin mielivaltaisia, yhtälö (4.9.5) on täysin samanarvoinen yhtälöiden (4.9.1) ja (4.9.2) kanssa (ks. huomautus 4).

Yhtälön (4.9.5) voidaan ajatella esittävän tietynlaista painotettua tasapainoyhtälöä koko systeemille funktion $\vec{w}$ toimiessa painona.

Yhtälön (4.9.5) muotoa muutetaan osittaisintegroimalla siten, että jännityksiin kohdistuvat osittaisderivaatat häviäisivät. Toisin sanoen muunnetaan termi $\int \vec{t}^{\sigma} \cdot \vec{w} dV^o$. Käsittely on täsmälleen vastaava kuin kohdassa 5.6.1 termiin $\int \vec{t}^{\sigma} \cdot \vec{v} dV$ kohdistettu manipulaatio, joten sen askeleen 5 perusteella voidaan kirjoittaa heti (ks. huomautus 1)

$$\int_{V^o} \vec{t}^{\sigma} \cdot \vec{w} dV^o = \int_{S^o} \vec{t}^{\sigma} \cdot \vec{w} dS^o - \int_{V^o} [\sigma_a \frac{\partial w_b}{\partial a} + \sigma_b \frac{\partial w_b}{\partial b} + \sigma_c \frac{\partial w_c}{\partial c} +$$

$$+ \tau_{bc}(\frac{\partial w_b}{\partial c} + \frac{\partial w_c}{\partial b}) + \tau_{ca}(\frac{\partial w_c}{\partial a} + \frac{\partial w_a}{\partial c}) + \tau_{ab}(\frac{\partial w_a}{\partial b} + \frac{\partial w_b}{\partial a})] dV^o \ . \tag{4.9.6}$$

Huomautus 1. Yläviitteen σ ilmestyminen kaavan (4.9.6) oikealle puolelle selittyy seuraavasti. Virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä on hyödyllistä ajatella jännitysten avulla kappaleen sisältä käsin laskettua traktiota $\vec{t}^{\sigma} = n_a^o \vec{t}^{(a)} + n_b^o \vec{t}^{(b)} + n_c^o \vec{t}^{(c)}$ ja kappaleen pintaan vaikuttavaa — esimerkiksi annettua — ulkoista traktiota $\vec{t}$ eri olioina, vaikka ne tarkassa ratkaisussa ovatkin yhtä suuria kuten yhtälö (4.9.2) osoittaa.

— — —

Lausekkeen (4.9.6) sijoitus yhtälöön (4.9.5) poistaa termin $\vec{t}^{\sigma}$ ja saadaan yhtälö

$$\int_{V^o} \rho^o \vec{b} \cdot \vec{w} dV^o + \int_{S^o} \vec{t} \cdot \vec{w} dS^o - \int_{V^o} [\sigma_a \frac{\partial w_a}{\partial a} + \sigma_b \frac{\partial w_b}{\partial b} + \sigma_c \frac{\partial w_c}{\partial c} +$$

$$+ \tau_{bc}(\frac{\partial w_b}{\partial c} + \frac{\partial w_c}{\partial b}) + \tau_{ca}(\frac{\partial w_c}{\partial a} + \frac{\partial w_a}{\partial c}) + \tau_{ab}(\frac{\partial w_a}{\partial b} + \frac{\partial w_b}{\partial a})] dV^o = 0 \tag{4.9.7}$$

Yhtälön (4.9.7) havainnollisuus lisääntyy, jos vektori $\vec{w}$ valitaan siten, että sillä on tietty fysikaalinen merkitys. Otetaan

$$\vec{w} = \delta\vec{r} = \delta\vec{u} = \delta u_a\vec{i} + \delta u_b\vec{j} + \delta u_c\vec{k} \ , \tag{4.9.8}$$

eli $w_a = \delta u_a$, $w_b = \delta u_b$, $w_c = \delta u_c$. Suure $\delta\vec{r}(a,b,c) = \delta\vec{u}(a,b,c)$ on paikkavektorin (3.3.1) tai siirtymän (3.3.13) variaatio eli virtuaalinen siirtymä. Riippuvuus ajasta on jätetty tässä merkinnöistä pois, koska keskitytään vain tilanteeseen tietyllä hetkellä. Merkkiä δ koskevat vastaavat huomautukset kuin kohdassa 2.3.7.

Havaitaan, että

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_a}{\partial a} = \frac{\partial(\delta u_a)}{\partial a} = \delta\frac{\partial u_a}{\partial a} = \delta\varepsilon_a \ , \\
&\frac{\partial w_b}{\partial c} + \frac{\partial w_c}{\partial b} = \frac{\partial(\delta u_b)}{\partial c} + \frac{\partial(\delta u_c)}{\partial b} = \delta\frac{\partial u_b}{\partial c} + \delta\frac{\partial u_c}{\partial b} \\
&\qquad = \delta\left(\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}\right) = \delta\gamma_{bc} \ , \\
&\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.9}$$

On sovellettu taulukossa 2.3.2 esitettyjä varioinnin laskusääntöjä. Suureet $\delta\varepsilon_a$, $\delta\gamma_{bc}$ jne ovat venymäkomponenttien variaatioita eli ns. virtuaalisia venymiä (engl. virtual strain). Matriisimerkintöjä käytettäessä havaitaan, että $\{\delta u\}$ ja $\{\delta\varepsilon\}$ voidaan kirjoittaa yhtä hyvin muodoissa $\delta\{u\}$ ja $\delta\{\varepsilon\}$. Lisäksi yhteyden $\{\varepsilon\} = [{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}$ lineaarisuudesta seuraa, että

$$\delta\{\varepsilon\} = [{}_\varepsilon\partial_u]\delta\{u\} \ . \tag{4.9.10}$$

Ottaen huomioon merkinnät (4.9.8) ja (4.9.9) yhtälö (4.9.7) saadaan siis muotoon

$$\int_{V^o} \rho^o\vec{b}\cdot\delta\vec{u}dV^o + \int_{S^o} \vec{t}\cdot\delta\vec{u}dS^o +$$

$$- \int_{V^o} (\sigma_a\delta\varepsilon_a+\sigma_b\delta\varepsilon_b+\sigma_c\delta\varepsilon_c+\tau_{bc}\delta\gamma_{bc}+\tau_{ca}\delta\gamma_{ca}+\tau_{ab}\delta\gamma_{ab})dV^o = 0 \tag{4.9.11}$$

eli

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0 \tag{4.9.12}$$

eli

$$\boxed{\delta W = 0 \ .} \tag{4.9.13}$$

Tämä on <u>virtuaalisen työn periaate</u> eli kappaleeseen vaikuttavien voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ on nolla jokaisen virtuaalisen siirtymätilan suhteen.

Edellä

$$\left.\begin{aligned}
\delta W_{ext} &= \int_{V^o} \rho^o \vec{b}\cdot\delta\vec{u}dV^o + \int_{S^o} \vec{t}\cdot\delta\vec{u}dS^o \ , \\
&= \int_{V^o} \rho^o \{b\}^T\delta\{u\}dV^o + \int_{S^o} \{t\}^T\delta\{u\}dS^o \ , \\
&= \int_{V^o} \{f\}^T\delta\{u\}dV^o + \int_{S^o} \{t\}^T\delta\{u\}dS^o
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.14}$$

on kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ ja

$$\left.\begin{aligned}
\delta W_{int} &= -\int_{V^o} \overleftrightarrow{\sigma}:\delta\overleftrightarrow{\varepsilon}dV^o = -\int_{V^o} (\sigma_{aa}\delta\varepsilon_{aa}+\sigma_{ab}\delta\varepsilon_{ab}+\ldots)dV^o \ , \\
&= -\int_{V^o} (\sigma_a\delta\varepsilon_a+\sigma_b\delta\varepsilon_b+\sigma_c\delta\varepsilon_c+ \\
&\qquad +\tau_{bc}\delta\gamma_{bc}+\tau_{ca}\delta\gamma_{ca}+\tau_{ab}\delta\gamma_{ab})dV^o \ , \\
&= -\int_{V^o} \{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}dV^o
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.15}$$

on kappaleeseen vaikuttavien sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ. Termi $\{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}$ on sisäisten voimien miinusmerkkinen virtuaalinen työ tilavuutta kohti. Sille voidaan johtaa kaavan (4.4.6")

tapaan myös esimerkiksi esitys

$$\{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\} = -p\delta\varepsilon_V + \{\sigma^*\}^T\delta\{\varepsilon\} \ . \tag{4.9.16}$$

Pidämme virtuaalista työyhtälöä (4.9.11), (4.9.12) tai (4.9.13) tässä perusmuotona, jota täydennetään tarpeen mukaan sijoitusmerkkiä := soveltamalla. Päinvastoin kuin partikkelimekaniikassa emme kuitenkaan ota enää käyttöön yläviitettä * (ks. esimerkiksi kaavat (2.3.87) ja (2.3.88) muistuttamaan siitä, että kyseessä on esimerkiksi hitausvoimilla täydennetty muoto.

Esimerkiksi hitausvoimien ja vaimennusvoimien vaikutus saadaan mukaan sijoituksella

$$\left.\begin{aligned} \rho^o\vec{b} &:= \rho^o\vec{b} - \rho^o\vec{a} - c\vec{v} \\ &= \rho^o\vec{b} - \rho^o\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - c\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{4.9.17}$$

tai

$$\left.\begin{aligned} \rho^o\{b\} &:= \rho^o\{b\} - \rho^o\{a\} - c\{v\} \\ &= \rho^o\{b\} - \rho^o\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\} - c\frac{\partial}{\partial t}\{u\} \end{aligned}\right\} \tag{4.9.17'}$$

tai

$$\{f\} := \{f\} + \{f^I\} + \{f^d\} \tag{4.9.17''}$$

kaavoihin (4.9.14). Täten

$$\not\delta W_{ext} := \not\delta W_{ext} + \not\delta W^I + \not\delta W^d \ , \tag{4.9.18}$$

jossa siis hitausvoimien tekemä virtuaalinen työ

$$\left.\begin{aligned} \not\delta W^I &= -\int_{V^o}\rho^o\vec{a}\cdot\delta\vec{u}dV^o \ , \\ &= -\int_{V^o}\rho^o\{a\}^T\delta\{u\}dV^o \ , \end{aligned}\right\} \tag{4.9.19}$$

$$= \int_{V^o} \{f^I\}^T \delta\{u\} dV^o$$

ja vaimennusvoimien tekemä virtuaalinen työ

$$\left.\begin{aligned} \delta W^d &= - \int_{V^o} c\vec{v}\cdot\delta\vec{u} dV^o \ , \\ &= - \int_{V^o} c\{v\}^T \delta\{u\} dV^o \ , \\ &= \int_{V^o} \{f^d\}\delta\{u\} dV^o \ . \end{aligned}\right\} \qquad (4.9.20)$$

Traktio kappaleen reunalla voi samoin riippua kappaleen liikkeestä ja suuretta $\vec{t}$ tai $\{t\}$ kaavoissa (4.9.13) voidaan täydentää vastaavaan tapaan.

Huomautus 2. Miksi painofunktio $\vec{w}$ otetaan virtuaalisen työn periaatteessa valinnalla $\vec{w} = \delta\vec{u}$ äärettömän pieneksi ja miksi ylipäänsä se tulee ajatella juuri siirtymän dimension omaavaksi.

Ensinnäkin on todettava, että käytettiinpä ko. tulkintaa tai ei, lopuksi päädytään kuitenkin aina samanarvoisiin yhtälöihin. On oleellista, että painofunktio esiintyy vallitsevissa yhtälöissä lineaarisesti (ensimmäisessä potenssissa), vaikka itse yhtälöt olisivat kuinka epälineaarisia tahansa. Tällöin vain painofunktion jakautuman muoto ratkaisee syntyvän yhtälön tyypin. Tämän painofunktion kertominen tai jakaminen jollain luvulla merkitsee vain vastaavan yhtälön : jotain = 0, kertomista tai jakamista ko. luvulla.

Usein virtuaalisia siirtymiä ei ajatellakaan rakenteiden mekaniikassa todellisen siirtymän $\vec{u}$ variaationa $\delta\vec{u}$. Tästähän on ollut puhetta jo kohdan 2.3.7 huomautuksessa 1, jossa esitetyn tulkinnan vastine on kontinuumille $\vec{w} = \vec{v}^{virt}(a,b,c)$, jossa $\vec{v}^{virt}$ on ns. virtuaalinen nopeus. Sitä ei pidetä tavallisesti infinitesimaalisena ja silti päästään lopuksi samoihin yhtälöihin kuin tulkinnalla $\vec{w} = \delta\vec{u}$.

Joskus rakenteiden mekaniikassa otetaan myös tulkinta $\vec{w} = \vec{u}^{virt}$, jossa $\vec{u}^{virt}$ on itsenäinen, todelliseen siirtymään liittymätön, äärellinen "virtuaalinen" siirtymä; ei variaatio. Suuretta $\vec{u}^{virt}$ vastaavat sitten kaavan $\{\varepsilon\} = [{}_{\varepsilon}\partial_u]\{u\}$ mukaan lasketut "virtuaaliset" venymät $\{\varepsilon\}^{virt} = [{}_{\varepsilon}\partial_u]\{u\}^{virt}$. On kuitenkin syytä huomata, että näin määritellyt venymät ovat tarkasti ottaen vailla selkeää fysikaalista merkitystä, koska yhtälö $\{\varepsilon\} = [{}_{\varepsilon}\partial_u]\{u\}$ on mielekäs vain pienten siirtymien teoriassa. Valinta $\vec{w} = \delta\vec{u}$ johtaa kaavan $\delta\{\varepsilon\} = [{}_{\varepsilon}\partial_u]\delta\{u\}$ kautta tässä suhteessa fysikaalisempaan esitykseen. Eräs toinen syy tulkinnan $\vec{w} = \delta\vec{u}$ käyttöön on se, että potentiaalienergian stationaarisuuden periaate saadaan silloin virtuaalisen työn periaatteen erikoistapaukseksi ja syntyy siis kytkentää näiden kahden periaatteen välille.

Huomautus 3. Virtuaalisen työn periaate johdetaan kirjallisuudessa tavallisimmin lähtemällä liikkeelle pelkästään kenttäyhtälöistä (4.9.1). Manipuloimalla niitä painofunktiolla kertomisen ja osittaisintegroinnin avulla päädytään ensin muotoon

$$\int_{V^o} \rho^o \vec{b}\cdot\vec{w}dV^o + \int_{S^o} \vec{t}^{\sigma}\cdot\vec{w}dS^o +$$

$$- \int_{V^o} [\sigma_a \frac{\partial w_a}{\partial a} + \sigma_b \frac{\partial w_b}{\partial b} + \ldots]dV^o = 0 \ . \qquad (4.9.21)$$

Kun tässä sitten vielä otetaan huomioon reunaehto $\vec{t}^{\sigma} = \vec{t}$, joudutaan jälleen yhtälöön (4.9.7).

Tämä johtamistapa on tavallaan edellä käyttämäämme tapaa luontevampi ja suoraviivaisempi. Sanokaamme vaikka, että olisimme sattuneet kirjoittamaan esimerkiksi yhtälöt (4.9.2) merkit vaihdetussa muodossa $\vec{t}^{\sigma} - \vec{t} = \vec{0}$. Tällöin meidän olisi pitänyt keksiä kertoa nämä yhtälöt juuri painofunktiolla $-\vec{w}$, jotta olisimme päässeet haluttuun lopputulokseen. Muotoa (4.9.21) käytettäessä ei tule tällaisia ongelmia.

Syy valitsemamme raskaamman lähestymistavan käyttöön on seuraava. Yleisesti jäännösformulaatiota sovellettaessa kenttäyhtälöiden ja reunaehtojen painottamiseen käytetyt funktiot — merki-

tään vastaavasti w ja $\hat{w}$ — voivat olla eri suureita; toisin sanoen funktion $\hat{w}$ ei tarvitse olla välttämättä funktion w alueen reunalla saama arvo. Esimerkiksi yhtälön (4.9.5) sijasta voitaisiin täten kirjoittaa lähtökohdaksi esitys

$$\int_{V^o} (\rho^o\vec{b}+\vec{f}^\sigma)\cdot\vec{w}dV^o + \int_{S^o} (\vec{t}-\vec{t}^\sigma)\cdot\vec{\hat{w}}dS^o = 0 \ , \qquad (4.9.22)$$

jossa $\hat{w}$ ja $\vec{\hat{w}}$ ovat mielivaltaisia ja määritellyt erikseen V^o:ssa ja S^o:ssa. Osittaisintegrointi tuottaa muodon, jota voidaan myös soveltaa numeeristen laskelmien pohjana, mutta sen käyttökelpoisuus osoittautuu parhaaksi, kun otetaan $\vec{\hat{w}} = \vec{w}$ alueen reunalla. Esimerkissä 4.9.1 käsitellään hieman muodon (4.9.22) erästä sovellutusta (ks. esimerkin 4.9.1 kuva (g)).

Miksi sitten virtuaalisen työn periaatteen tavanomaisen muodon synnyttämisessä käytetään ylipäänsä hyväksi osittaisintegrointia? Jos probleemassa esiintyvät funktiot ovat riittävän sileitä, ennen osittaisintegrointia tai sen jälkeen saadut muodot ovat periaatteessa samanarvoisia. Mutta likimenetelmissä käytetyt funktiot eivät ole yleensä kovin sileita ja eri muotojen käyttökelpoisuudessa on tällöin oleellisia eroja. Esimerkiksi siirtymämenetelmää sovellettaessa muodossa (4.9.5) esiintyy termin $\vec{f}^\sigma$ kautta kimmoisen aineen tapauksessa loppujen lopuksi siirtymän toisen kertaluvun paikkaderivaattoja. Muodossa (4.9.7) esiintyy sen sijaan enää ensimmäisen kertaluvun derivaattoja. Tämä on ratkaiseva helpotus. Esimerkin 4.9.1 tarkastelut havainnollistavat tätä piirrettä.

Huomautus 4. Tarkastellaan esimerkiksi yhtälöä (4.9.22). Miten tämä yksi integraalimuotoinen yhtälö voi olla täysin samanarvoinen pisteettäisesti voimassaolevien vektoriyhtälöiden (4.9.1) ja (4.9.2) kanssa? Johto perustuu siihen, että funktioiden $\vec{w}$ ja $\vec{\hat{w}}$ kulku voidaan valita äärettömän monella tavalla, koska funktiot ovat mielivaltaisia.

Todistuksessa käytetään hyväksi vastaoletusta vähän samaan tapaan kuin yhtälön (4.3.9) johdossa. Otaksutaan, että esimerkiksi yhtälö $\rho^o b_a + f_a^\sigma = 0$ ei pidä paikkaansa kaikkialla, vaan että sen vasen puoli saa vaikka positiivisen arvon tietyssä pisteessä P. Otetaan $\vec{\hat{w}} \equiv \vec{0}$ ja $w_b \equiv 0$, $w_c \equiv 0$ sekä $w_a = 0$ kaikkial-

la paitsi pisteen P pienessä ympäristössä, jossa w_a otetaan positiiviseksi. Kun suure $\rho^o b_a + f_a^\sigma$ otaksutaan jatkuvaksi, se on positiivinen myös pisteen P pienessä ympäristössä. Mutta tällöin yhtälön (4.9.22) vasen puoli tuottaa integroituna positiivisen arvon, joten yhtälö ei toteudu ja vastaotaksuma oli väärä. Vastaavaan tapaan voidaan todistaa myös muiden komponenttiyhtälöiden (4.9.1') ja (4.9.2') toteutuminen.

Edellä esitetyn tapaista ajatuskulkua sovelletaan paljon variaatiolaskennassa. Mielivaltaisina suureina esiintyvät silloin argumenttifunktioiden variaatiot.

— — —

Rajoitteet ja virtuaalinen siirtymä. Tämän otsikon alaisuudessa pätevät vastaavasti kohdassa 2.7.3 esitetyt seikat pitkälti analogisina. Kontinuumin kinemaattisina rajoitteina ovat ensinnäkin siirtymiä koskevat reunaehdot $\vec{u} = \bar{\vec{u}}$ reunalla S_u^o. Vastaavat traktiot ovat rajoitevoimia. Niiden mukaantulo yhtälöihin vältetään niin haluttaessa (ks. lause (2.3.94)) valitsemalla virtuaaliset siirtymät reunaehtojen suhteen kinemaattisesti luvallisiksi eli ottamalla

$$\delta\vec{u} = \vec{0} \qquad S_u^o\text{:lla} \ . \tag{4.9.23}$$

Virtuaalinen työyhtälö (4.9.13) saadaan tällöin mm. muotoon

$$\boxed{\begin{aligned} -\delta W \equiv & \int_{V^o} \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV^o - \int_{V^o} \{f\}^T \delta\{u\} dV^o + \\ & - \int_{S_t^o} \{\bar{t}\}^T \delta\{u\} dS^o = 0 \ , \quad \delta\{u\} = \{0\} \quad S_u^o\text{:lla.} \end{aligned}} \tag{4.9.24}$$

On vaihdettu merkkejä eli käytetty muotoa $-\delta W = 0$, jotta päästäisiin lähemmäksi tavanomaisinta sovellutusmuotoa. Reunalla S_t^o on voitu käyttää tunnuksen $\{t\}$ sijasta tunnusta $\{\bar{t}\}$, koska traktio on siellä annettu.

Jos reunaehdot ovat yleisessä muodossa (4.7.4), voidaan todeta seuraavaa. Ensinnäkin pintavoimien tekemä virtuaalinen työ

$$\int_{S^o} \{t\}^T \delta\{u\} dS^o = \int_{S^o} (t_a \delta u_a + t_b \delta u_b + t_c \delta u_c) dS^o \tag{4.9.25}$$

voidaan esittää myös muodossa

$$\int_{S^o} \{t'\}^T \delta\{u'\} dS^o = \int_{S^o} (t_{a'} \delta u_{a'} + t_{b'} \delta u_{b'} + t_{c'} \delta u_{c'}) dS^o \ . \tag{4.9.26}$$

Virtuaalinen työ on nimittäin skalaari, jonka arvo ei riipu koordinaatiston kierrosta. Kinemaattisesti luvallisten virtuaalisten siirtymäkomponenttien tulee hävitä suunnissa, joilla siirtymäkomponentit ovat annettuja. Yhtälössä (4.9.24) tulee vastaavasti asettaa

$$\int_{S_t^o} \{\bar{t}\}^T \delta\{u\} dS^o := \int_{{}^1S_t^o} \bar{t}_{a'} \delta u_{a'} dS^o +$$

$$+ \int_{{}^2S_t^o} \bar{t}_{b'} \delta u_{b'} dS^o + \int_{{}^3S_t^o} \bar{t}_{c'} \delta u_{c'} \ , \tag{4.9.27}$$

jossa merkintöjen suhteen viitataan kohtaan 4.7.2.

Jos taas reunaehdon (4.7.1) sijasta esiintyy esimerkiksi ehto (4.7.10), yhtälössä (4.9.24) voidaan suorittaa sijoitus

$$\{\bar{t}\} := [\alpha]\{u\} + \{\beta\} \ . \tag{4.9.28}$$

Kontinuumin sisäisinä rajoitteina voidaan pitää ensinnäkin vaatimuksia siirtymien kohtuullisesta jatkuvuudesta. Tämä tarkoittaa, että kinemaattisesti luvallisten virtuaalisten siirtymien tulee olla niin jatkuvia, että osittaisintegrointi eli Gaussin lauseen soveltaminen voi tapahtua tavanomaiseen tapaan ilman epäjatkuvuuksista johtuvia lisätermejä (ks. loppuhuomautuksia).

Jos tehdään otaksuma kokoonpuristumattomasta aineesta, tämä aiheuttaa sisäisen rajoitteen (4.3.19'):

$$\varepsilon_V = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial b} + \frac{\partial u_c}{\partial c} = 0 \qquad (4.9.29)$$

ja paine esiintyy vastaavasti rajoitevoimana. Varioidun siirtymän $\vec{u} + \delta\vec{u}$ tulee myös toteuttaa ehto $\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}+\delta\vec{u}) = 0$ eli $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{u})= 0$. Ottaen huomioon yhtälö (4.9.29) saadaan siis luvallisia virtuaalisia siirtymiä koskeva ehto

$$\delta\varepsilon_V = \delta\varepsilon_a + \delta\varepsilon_b + \delta\varepsilon_c = \delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$$

$$= \vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{u}) = \frac{\partial\delta u_a}{\partial a} + \frac{\partial\delta u_b}{\partial b} + \frac{\partial\delta u_c}{\partial c} = 0 \ . \qquad (4.9.30)$$

Jos virtuaaliset siirtymät toteuttavat tämän ehdon eli ovat tässä suhteessa kinemaattisesti luvallisia, paine häviää formulaatiosta (ks. lause (2.3.94)). Tämä nähdään suoraan lausekkeesta (4.9.16).

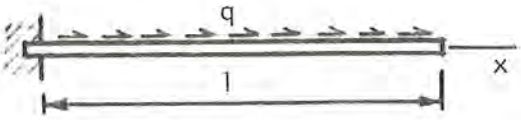
Terminologiaa. Tiettyjä kenttäyhtälöitä ja reunaehtoja vastaavalla heikolla muodolla tarkoitetaan matemaattisessa kirjallisuudessa tavallisesti juuri esimerkiksi yhtälön (4.9.5) tai (4.9.24) tyyppistä differentiaaliyhtälömuotoisen esityksen vastakohtana olevaa integraalimuotoista esitystä. Kenttäyhtälöiden ja reunaehtojen kertomisessa käytettyjä funktioita (yhtälössä (4.9.5) funktio $\vec{w}$ tai yhtälössä (4.9.24) funktio $\delta\{u\}$) nimitetään painofunktioiksi tai testifunktioiksi (engl. weight function, test function). Etenkin jälkimmäinen nimitys on hyvin kuvaava: testataan vallitsevien kenttäyhtälöiden ja reunaehtojen toteutumista eri testifunktioiden suhteen: Toteutuuko heikko muoto? Sana heikko viittaa siihen, että integraalimuotoisen esityksen ratkaisuilta tarvitsee yleensä vaatia vähäisempiä eli heikompia sileys- eli jatkuvuusominaisuuksia kuin differentiaaliyhtälömuotoisen esityksen ratkaisuilta. (Matemaatikot esittävät nämä asiat määrittelemällä huolellisesti ne ns. funktioavaruudet, joissa ratkaisun ja testifunktioiden tulee kulloinkin olla.) Näin on etenkin silloin, kun heikko muoto on saavutettu — kuten on tavallista — suorittamalla lisäksi manipulointeja osittaisintegrointien avulla.

Heikkoa muotoa nimitetään matemaattisessa kirjallisuudessa

usein myös variaatiomuodoksi (engl. variational form). Tässä esityksessä tarkoitamme kuitenkin variaatiomuodolla tai variaatiomenetelmällä (engl. variational method) tai variaatioformulaatiolla insinöörikirjallisuuden tavanomaisen käytännön mukaan nimenomaan tapausta, jossa kyseessä on ns. variaatioperiaatteen (engl. variational principle) käyttö. Toisin sanoen käytetään hyväksi tietyn funktionaalin stationaarisuutta (ks. kohdan 4.10 huomautus 1).

Kun siirrytään likiratkaisuihin, heikon muodon käyttöä nimitetään usein jäännösmenetelmäksi (engl. method of weighted residuals) tai jäännösformulaatioksi. Testifunktioiden tyyppien mukaiseen luokitukseen perustuvat jäännösmenetelmän tavallisimmat versiot ovat Galerkinin keino, osa-aluekeino (engl. subdomain method, subdomain collocation), kollokaatio (engl. collocation, point collocation) ja pienimmän neliön keino (engl. least squares method) [4.2, s. 230]. Esimerkissä 4.9.1 selostetaan joitakin niiden piirteitä.

Esimerkki 4.9.1 Vetosauva. Tarkastellaan kuvassa (a) esitetyn kimmoisen vetosauvan siirtymä- ja jännitystilan määrittämistä staattisessa tapauksessa.



(a)

Vallitsevat yhtälöt on esitetty kohdassa 6.1.5, esimerkki 6.1.1. Noudatetaan siellä käytettyjä merkintöjä. (Huomautettakoon, että mm. Lagrangen koordinaattia merkitään nyt tunnuksen a sijasta tunnuksella x.)

Vallitseva tasapainoyhtälö on

$$q + \frac{dS}{dx} = 0 , \quad 0 < x < l . \tag{1}$$

Traktio-jännitysyhteyden vastineet ovat

$$\left.\begin{aligned} H_0 + S(0) &= 0 , \\ H_l - S(l) &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Venymä-siirtymäyhteys on

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} . \tag{3}$$

Konstitutiivinen yhteys on

$$S = EA\varepsilon \ . \tag{4}$$

Vallitsevat reunaehdot ovat

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= 0 \ , \\ H_l &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(Sauvan vasen pää on kiinnitetty ja oikeaan päähän ei vaikuta voima a.) Edellä q on sauvan akselin suuntainen kuormitus pituutta kohti ($[q] = Nm^{-1}$), S on sauvassa vallitseva normaalivoima, H on sauvan päähän vaikuttava voima, u on aksiaalinen siirtymä, ε on aksiaalinen venymä ja EA on sauvan vetojäykkyys. Otetaan tässä sekä q että EA vakioiksi.

Yhtälöiden (1) ja (2) merkitys selviää esimerkin 6.1.1 kuvan (a) esittämien vapaakappalekuvioiden perusteella. Yhtälöt (1) ja (2) ovat yleisten yhtälöiden (4.9.1) ja (4.9.2) vastineita. Tässähän alueen reuna muodostuu vain kahdesta erillisestä pisteestä x = 0 ja x = l.

Asetelma on pelkistetyn yksinkertainen, mutta se palvelee hyvin jäännösmenetelmän eräiden piirteiden kuvaamisessa.

Eliminointien kautta saadaan pelkästään siirtymää u koskeva differentiaaliyhtälömuotoinen formulaatio

$$q + EA\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \ , \qquad 0 < 0 < l \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= 0 \ , \\ EA\frac{du}{dx}(l) &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Analyyttiseksi ratkaisuksi saadaan

$$u = \frac{ql^2}{EA}\left[\frac{x}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{l}\right)\right] \tag{8}$$

ja normaalivoimaksi tulee kaavojen (3) ja (4) avulla

$$S = ql\left(1 - \frac{x}{l}\right) \ . \tag{9}$$

Tässä on kyseessä ns. staattisesti määrätty tapaus ja sama normaalivoiman lauseke syntyy myös suoraan systeemin

$$q + \frac{dS}{dx} = 0 \ , \qquad 0 < x < l \tag{10}$$

$$H_l - S(l) = 0 \quad \left(H_l = 0\right) \tag{11}$$

ratkaisuna.

Yhtälöt (6) ja (7) esittävät formulaatiota, jossa siirtymä on perustuntemattomana (siirtymämenetelmä). Vastaavasti yhtälöiden (10) ja (11) esittämässä formulaatiossa normaalivoima on perustuntemattomana (voimamenetelmä). (Jos kyseessä on staattisesti määräämätön tapaus, voimamenetel-

män formulointi ei ole yhtä suoraviivaista kuin edellä.)

Yhtälöitä (1) ja (2) vastaavaksi heikoksi muodoksi saadaan ensin

$$\int_0^1 [q + \frac{dS}{dx}]wdx + [H_0 + S(0)]\hat{w}(0) + [H_1 - S(1)]\hat{w}(1) = 0 . \tag{12}$$

Tämä on yleisen yhtälön (4.9.22) vastine — tai jos otetaan $\hat{w} = w$, yhtälön (4.9.5) vastine. Jos yhtälö (12) esitetään siirtymän avulla lausuttuna, päädytään muotoon

$$\int_0^1 [q + EA \frac{d^2u}{dx^2}]wdx + [H_0 + EA \frac{du}{dx}(0)]\hat{w}(0) + [H_1 - EA \frac{du}{dx}(1)]\hat{w}(1) = 0. \tag{13}$$

Jos yhtälössä (12) (muodossa $\hat{w} = w$) sovelletaan osittaisintegrointia (ks. kaava (L.2.11''))

$$\int_0^1 \frac{dS}{dx} wdx = \Big|_0^1 Sw - \int_0^1 S \frac{dw}{dx} dx$$

$$= S(1)w(1) - S(0)w(0) - \int^1 S \frac{dw}{dx} dx , \tag{14}$$

saadaan toinen heikko muoto

$$\int_0^1 qwdx + H_0w(0) + H_1w(1) - \int_0^1 S \frac{dw}{dx} dx = 0 . \tag{15}$$

Tämä on yleisen yhtälön (4.9.7) vastine. Jos yhtälö esitetään siirtymän avulla lausuttuna, päädytään muotoon (vaihdetaan merkit ja termien järjestystä)

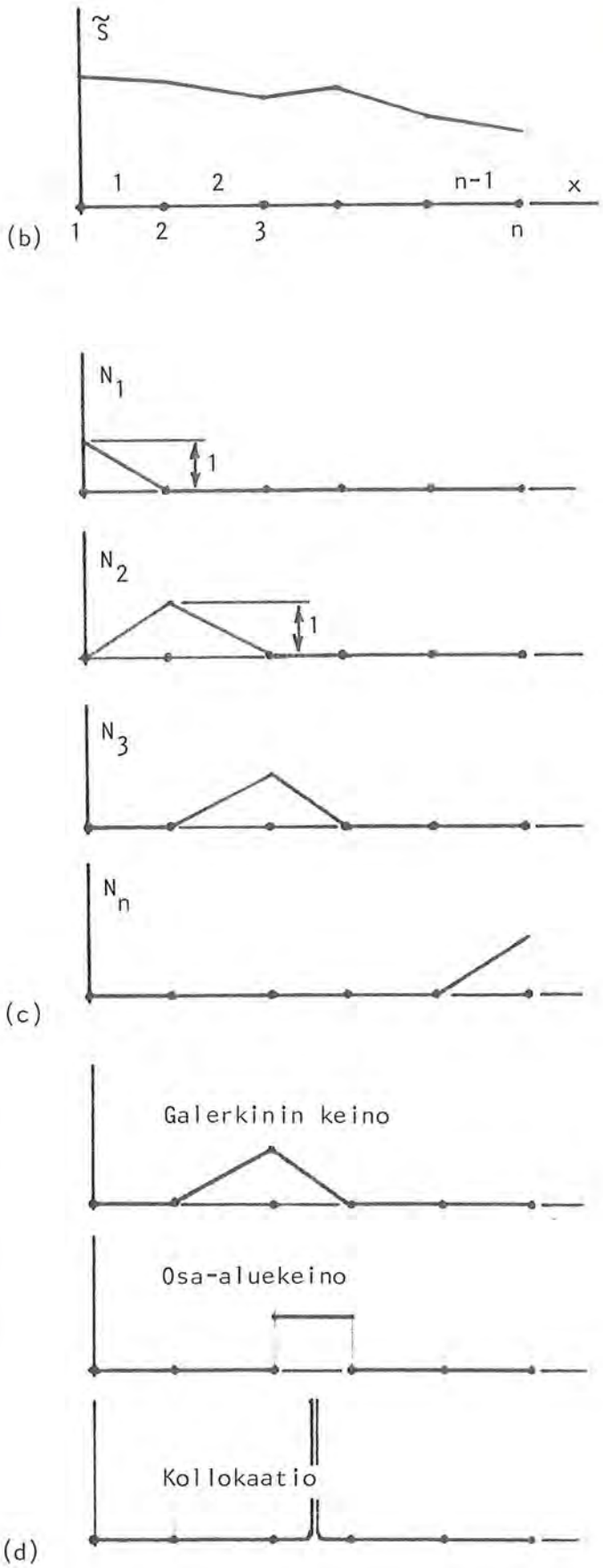
$$\int_0^1 EA \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} dx - \int_0^1 qwdx - H_0w(0) - H_1w(1) = 0 . \tag{16}$$

Tarkastellaan ensin heikon muodon (12) käyttöä normaalivoiman S määrittämiseksi. Otetaan elementtityyppinen approksimaatio

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)S_j = \underset{1\times n}{[N]} \underset{n\times 1}{\{a\}} \tag{17}$$

Tässä suureet N_j ovat valittuja ns. <u>muotofunktioita</u> (engl. shape function) ja suureet $S_j \equiv a_j$ ovat normaalivoiman ns. <u>solmuarvoja</u> (engl. nodal value). Käytetään ns. kaksisolmuisia lineaarisia viivaelementtejä. Kuva (b) esittää approksimaation (17) periaatteellista kulkua ja kuvassa (c) näkyy muutaman tyypillisen muotofunktion kuvaaja.

Kun approksimaatio (17) sijoitetaan yhtälöön (12), painofunktion w kertomina olevia hakasulkulausekkeita nimitetään <u>jäännöksiksi</u> eli residuaaleiksi (engl. residual). Nimitys tulee siitä, että tarkan ratkaisun mu-

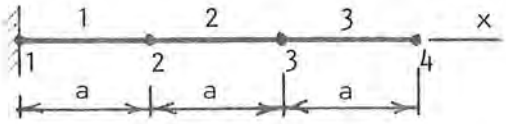


kaanhan hakasulkulausekkeiden tulisi olla täsmälleen nollia. Approksimaatioita käytettäessä tähän ei yleensä päästä, vaan lausekkeet saavat jonkin — toivon mukaan mahdollisimman pienen — nollasta eroavan arvon eli jäännöksen. Jäännösmenetelmän eri versiot poikkeavat toisistaan sen kriteerin perusteella, jolla jäännökset pyritään pitämään pieninä. Ideana on valita sopiva määrä riippumattomia paino- eli testifunktioita ja vaatia heikon muodon toteutumista erikseen kunkin painofunktion suhteen. Näin saadaan algebrallisten yhtälöiden ryhmä, joista tuntemattomat solmuarvot voidaan määrittää. Kuva (d) esittää Galerkinin keinossa, osa-aluekeinossa ja kollokaatiossa käytettyjen testifunktioiden tyyppejä. Galerkinin keinossa painofunktiot otetaan tuntemattomien approksimoinnissa käytetyistä yritefunktioista eli elementtimenetelmässä muotofunktioista. Osa-aluekeinossa vaaditaan jäännösten integraalien otettuina sopivien alueen osien yli häviämistä. Tämä voidaan tulkita toisin kuvan (d) esittämään tapaan osa-alueen kohdalla ykkösen ja muualla nollan arvoisen painofunktion käytöksi. Kollokaatiossa vaaditaan jäännöksen häviämistä tietyissä pisteissä. Tämä voidaan tulkita myös Diracin deltafunktioiden käyttönä painofunktioina. Pienimmän neliön keinon ajatusta selostetaan hieman myöhemmin.

Tarkastellaan nyt eri versioilla syntyviä diskreettejä yhtälöitä. Otetaan vain kolmen vakiopi-

tuisen elementin verkko (kuva (e)), jolloin solmuja on neljä ja approksimaatio (17) saa muodon

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{4} N_j S_j = N_1 S_1 + N_2 S_2 + N_3 S_3 + N_4 S_4 \ . \tag{18}$$



(e)

Kenttäyhtälön (10) jäännöksen

$$\tilde{A}(x) \equiv q + \frac{d\tilde{S}}{dx} = q + \sum_{j=1}^{4} \frac{dN_j}{dx} S_j \tag{19}$$

nähdään olevan tässä tapauksessa kussakin elementissä vakio; q on vakio ja esimerkiksi kuvan (b) perusteella dS/dx on myös vakio. Esimerkiksi elementissä 1

$$\tilde{A}^{(1)} = q + \frac{S_2 - S_1}{a} \ . \tag{20}$$

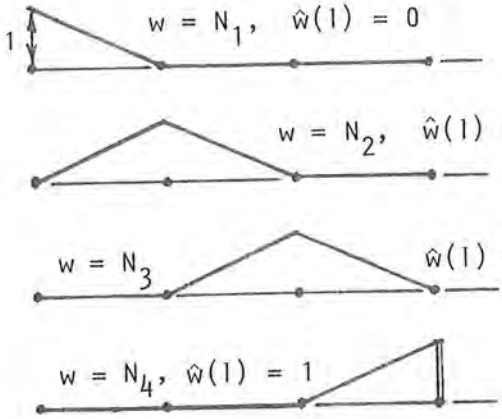
Nämä jäännökset on siis helppo "tappaa" identtisesti kussakin elementissä. Otetaan heikossa muodossa (12) tässä $w(0) = 0$ ja $H_1 = 0$. (Ehtoa $H_0 + S(0) = 0$ ei haluta mukaan, koska se ei esiinny yhtälöiden (10) ja (11) kuvaamassa formulaatiossa.) Approksimaation (18) sijoitus heikkoon muotoon antaa siis yhtälön

$$\int_0^l (q + \frac{d\tilde{S}}{dx}) w dx - \tilde{S}(l)\hat{w}(l) = 0 \tag{21}$$

eli

$$\int_0^l \tilde{A} w dx - S_4 \hat{w}(l) = 0 \ . \tag{22}$$

<u>Galerkinin keino</u>. Sijoitetaan yhtälöön (22) peräkkäin kuvan (f) esittämät neljä painofunktioiden valintaa. Miltei päässälaskua käyttäen saadaan vastaavasti diskreetit yhtälöt



$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,qa + \tfrac{1}{2}(S_2-S_1) = 0\,, \\ &qa + \tfrac{1}{2}(S_2-S_1) + \tfrac{1}{2}(S_3-S_2) = 0\,, \\ &qa + \tfrac{1}{2}(S_3-S_2) + \tfrac{1}{2}(S_4-S_3) = 0\,, \\ &\tfrac{1}{2}\,qa + \tfrac{1}{2}(S_4-S_3) - S_4 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

(f)

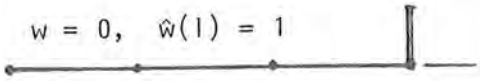
Näistä tulee hieman järjestelemällä yhtälöryhmä

$$\left.\begin{aligned} &S_1 - S_2 + 0 + 0 = qa\,, \\ &S_1 + 0 - S_3 + 0 = 2qa\,, \\ &0 + S_2 + 0 - S_4 = 2qa\,, \\ &0 + 0 + S_3 + S_4 = qa\,. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Tämän ratkaisuksi saadaan tarkkaa analyyttistä tulosta (9) vastaavat solmuarvot

$$S_1 = 3qa\,,\quad S_2 = 2qa\,,\quad S_3 = qa\,,\quad S_4 = 0\,. \qquad (25)$$

Viimeinen yhtälö (23) on selvästi jonkinlainen sekoitus kenttäyhtälöstä ja reunaehdosta. Jos halutaan mukaan pelkästään reunaehto, kuvan (e) viimeinen valinta voidaan korvata kuvan (g) esittämällä tavalla. Viimeinen yhtälö (23) korvautuu tällöin yhtälöllä

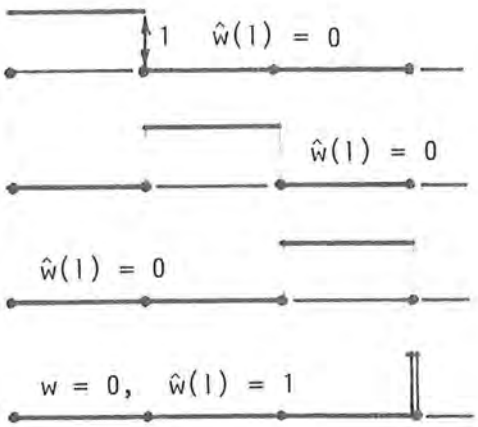


$$-S_4 = 0\,, \qquad (26)$$

(g)

mutta vastaavan yhtälöryhmän ratkaisu tulee olemaan silti edelleen kaavojen (25) mukainen.

Osa-aluekeino. Sijoitetaan yhtälöön (22) peräkkäin kuvan (h) esittämät neljä painofunktioiden valintaa. Saadaan vastaavasti yhtälöt



$$\left.\begin{aligned} qa + S_2 - S_1 &= 0 \ , \\ qa + S_3 - S_2 &= 0 \ , \\ qa + S_4 - S_3 &= 0 \ , \\ -S_4 &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

(h)

Näistä tulee järjestelemällä yhtälöryhmä

$$\left.\begin{aligned} S_1 - S_2 + 0 + 0 &= qa \ , \\ 0 + S_2 - S_3 + 0 &= qa \ , \\ 0 + 0 + S_3 - S_4 &= qa \ , \\ 0 + 0 + 0 + S_4 &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

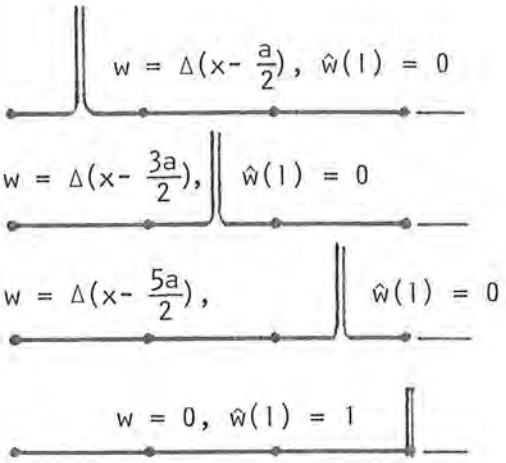
Tämän ratkaisu on taas (25). Ryhmän (28) toinen ja kolmas yhtälö poikkeavat Galerkinin keinolla saaduista yhtälöistä. Mutta jos otetaankin esimerkiksi kuvan (i) esittämät valinnat, saadaankin yhtälöt

$$\left.\begin{aligned} qa + \tfrac{1}{2}(S_2-S_1) + \tfrac{1}{2}(S_3-S_2) &= 0 \\ qa + \tfrac{1}{2}(S_3-S_2) + \tfrac{1}{2}(S_4-S_3) &= 0 \ , \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

(i)

jotka vastaavat Galerkinin keinon antamaa tulosta.

Kollokaatio. Sijoitetaan yhtälöön (22) peräkkäin kuvan (j) esittämät neljä painofunktioiden valintaa. (Merkitään Diracin deltafunktiota tässä tunnuksella Δ. Saadaan vastaavasti yhtälöt



$$\left.\begin{aligned} q + \frac{S_2 - S_1}{a} &= 0 \,, \\ q + \frac{S_3 - S_2}{a} &= 0 \,, \\ q + \frac{S_4 - S_3}{a} &= 0 \,, \\ -S_4 &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

(j)

Näistä tulee järjestelemällä yhtälöryhmä

$$\left.\begin{aligned} S_1 - S_2 + 0 + 0 &= qa \,, \\ 0 + S_2 - S_3 + 0 &= qa \,, \\ 0 + 0 + S_3 + S_4 &= qa \,, \\ 0 + 0 + 0 + S_4 &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Tämä on täsmälleen sama kuin osa-aluekeinolla saatu ryhmä. Koska jäännökset ovat elementeittäin vakioita, kollokaatiopisteet voidaan valita itse asiassa mihin kohtaan hyvänsä kussakin elementissä ja silti saadaan aina samat yhtälöt.

Kaikki kolme versiota johtivat siis edellä samaan diskreettiin lopputulokseen, joka vielä sattuu olemaan tehtävän yksinkertaisuuden vuoksi täsmälleen oikea. Entä mitä olisi seurannut, jos olisimmekin käyttäneet pohjana osittaisintegroimalla saatua muotoa (15)? Galerkinin keinossa painofunktiot ovat jatkuvia, mutta osa-aluekeinossa ja kollokaatiossa eivät. Muodossa (22) tai (12) ei esiinny painofunktion derivaattaa päinvastoin kuin muodossa (15). Tästä johtuen osoittautuu, että Galerkinin keino toimii edelleen, mutta osa-aluekeino ja kollokaatio eivät tuota enää mielekkäitä ratkaisuja.

Pienimmän neliön keino. Kirjoitetaan lauseke

$$\Pi(S) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(q + \frac{dS}{dx}\right)^2 dx \,. \qquad (32)$$

Tämä on ns. pienimmän neliön funktionaali, jossa ns. luvallisen argumenttifunktion S tulee toteuttaa reunaehto (11): S(l) = 0. (ks. termien merkityksen suhteen kohdan 4.10 huomautusta 1.) Vaaditaan, että lauseke (32)

saa minimiarvon. Minimiarvoa ($\Pi = 0$) vastaava S on ilmeisestikin kenttäyhtälön (10) ratkaisu. Jos kenttäyhtälö ei nimittäin toteutuisi joissakin kohdin, Π:n arvosta tulisi selvästi positiivinen.

Sijoitetaan nyt approksimaatio (18) Π:n lausekkeeseen, jolloin funktionaali muuttuu – kun tarvittavat integroinnit on ajateltu suoritetuiksi – tavalliseksi solmuarvojen funktioksi

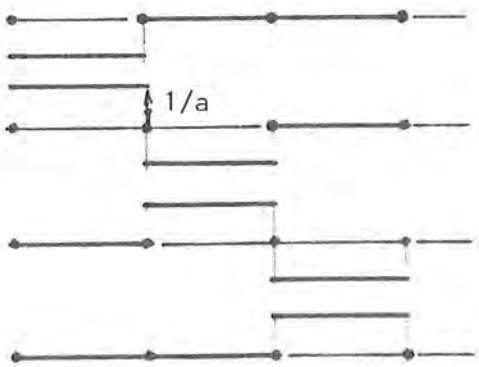
$$\tilde{\Pi}(\{a\}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (q+\frac{d\tilde{S}}{dx})^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \tilde{A}^2 dx \ . \tag{33}$$

Solmuarvojen luonnollinen valinta on se, joka antaa funktiolle $\tilde{\Pi}$ minimiarvon. Saadaan siis ehdot (vrt. kaava (19))

$$\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial S_i} \equiv \int_0^1 \tilde{A}\,\frac{\partial\tilde{A}}{\partial S_i}\,dx = \int_0^1 (q+\frac{d\tilde{S}}{dx})\frac{dN_i}{dx}\,dx = 0 \ , \qquad i = 1,2,3,4 \ . \tag{34}$$

Näiden yhtälöiden vertailu yhtälön (21) kanssa osoittaa, että myös pienimmän neliön keino voidaan tulkita jäännösmenetelmäksi, jossa painofunktiot valitaan seuraavasti: $w = \partial\tilde{A}/\partial a_i$.

Tässä tapauksessa painofunktiot tulevat olemaan kuvan (k) esittämiä ja vastaavat yhtälöt ovat



$$\left.\begin{aligned} -q - \frac{S_2 - S_1}{a} &= 0 \ , \\ \frac{S_2 - S_1}{a} - \frac{S_3 - S_2}{a} &= 0 \ , \\ \frac{S_3 - S_2}{a} - \frac{S_4 - S_3}{a} &= 0 \ , \\ q + \frac{S_4 - S_3}{a} &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

(k)

Näistä tulee järjestelemällä yhtälöryhmä

$$\left.\begin{aligned} S_1 - S_2 + 0 + 0 &= qa \ , \\ - S_1 + 2S_2 - S_3 + 0 &= 0 \ , \\ 0 - S_2 + 2S_3 - S_4 &= 0 \ , \\ 0 + 0 - S_3 + S_4 &= -qa \ . \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Tämän viimeistä yhtälöä eli yhtälöä $\partial\tilde{\Pi}/\partial S_4 = 0$ ei saada kuitenkaan muodostaa näin, koska luvallisen funktion tuli toteuttaa ehto $S(l) = 0$, joten

pisteessä x = l funktiota ei saada varioida. Viimeinen yhtälö tulee korvata reunaehdon vastineella

$$S_4 = H_l \left(= 0 \right) . \tag{37}$$

Lopullinen yhtälöryhmä on tämän huomioonottaen

$$\left.\begin{aligned} S_1 - S_2 + 0 &= qa \ , \\ -S_1 + 2S_2 - S_3 &= 0 \ , \\ 0 - S_2 + 2S_3 &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Kerroinmatriisin havaitaan olevan symmetrisen päinvastoin kuin yleensä edellä. Tämä on eräs tyypillinen pienimmän neliön keinon käyttöön liittyvä etu. Ratkaisuksi saadaan jälleen tarkka tulos (25).

Tarkastelemme seuraavaksi siirtymäformulaatiota ja Galerkinin keinoa elementtimenetelmää soveltaen. Kyseessä on periaatteeltaan tehtävän muotoilu, joka on nykyään hyvin vallitseva rakenteiden mekaniikan sovellutuksissa.

Käyttäen edelleen kuvan (e) elementtijakoa otetaan nyt siirtymän approksimaatio

$$\tilde{u} = \sum_{j=2}^{4} N_j u_j = N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \ , \tag{39}$$

jossa muotofunktiot ovat vastaavia kuin esityksessä (18). Siirtymän solmuarvo $u_1 = 0$ ensimmäisen reunaehdon (7) perusteella ja termi $N_1 u_1$ on jätetty täten pois lausekkeesta (39).

Kenttäyhtälön (6) jäännöksen

$$\tilde{A}(x) \equiv q + EA \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} = q + EA \sum_{j=2}^{4} \frac{d^2 N_j}{dx^2} u_j \tag{40}$$

nähdään olevan tässä tapauksessa kussakin elementissä = q, koska $d^2N_j/dx^2 = 0$. Täten jäännöstä ei voida saattaa pieneksi millään solmuarvojen arvojen valinnoilla ja siis vielä esimerkiksi heikon muodon (13) avulla ei voida tuottaa mielekästä jäännösformulaatiota. Se saataisiin aikaan vasta käyttämällä approksimaatiota, jossa myös $\tilde{u}$:n ensimmäinen derivaatta olisi jatkuva elementtien välillä.

Mutta osittaisintegroimalla saatu heikko muoto (15) tai (16) on tässä yhteydessä sovelias. Asetetaan vielä w(0) = 0, koska H_0 on tässä reunaehdon u(0) = 0 perusteella rajoitevoima. Saadaan esitys

$$\int_0^l EA \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}\,dx - \int_0^l qw\,dx - H_l w(l) = 0 \ . \tag{41}$$

Sijoitetaan ensinnäkin

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{d\tilde{u}}{dx} = \Sigma \frac{dN_j}{dx} u_j \ . \tag{42}$$

Havaitaan, että dN_j/dx on kussakin elementissä vakio, joten myös venymän $\tilde{\varepsilon} = d\tilde{u}/dx$ ja sauvavoiman $\tilde{S} = EA\tilde{\varepsilon}$ approksimaatiot tulevat elementeittäin vakioiksi. Esimerkiksi elementissä 1

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \frac{u_2 - u_1}{a} \\ \tilde{S} &= EA\,\frac{u_2 - u_1}{a}\ , \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

joissa vielä $u_1 = 0$. Galerkinin keinoa käytettäessä otetaan peräkkäin painofunktiot $w = N_2$, $w = N_3$ ja $w = N_4$. Täten saadaan yhtälöryhmä

$$\int_0^1 EA\Big(\sum_{j=2}^{4} \frac{dN_j}{dx} u_j\Big)\frac{dN_i}{dx}\,dx +$$

$$- \int_0^1 qN_i dx - H_1\delta_{4i} = 0 \qquad i = 2,3,4\ , \tag{44}$$

jossa δ_{4i} viittaa Kroneckerin deltaan. Funktioiden N_j, dN_j/dx, $j = 2,3,4$ kulku näkyy kuvista (f) ja (k). Suorittamalla helpohkot laskelmat päädytään lopuksi yhtälöryhmään

$$\frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qa \\ qa \\ \frac{1}{2}\,qa+H_1 \end{Bmatrix}\ , \tag{45}$$

jonka kerroinmatriisin havaitaan olevan symmetrisen. Sen ratkaisu on tapauksessa $H_1 = 0$

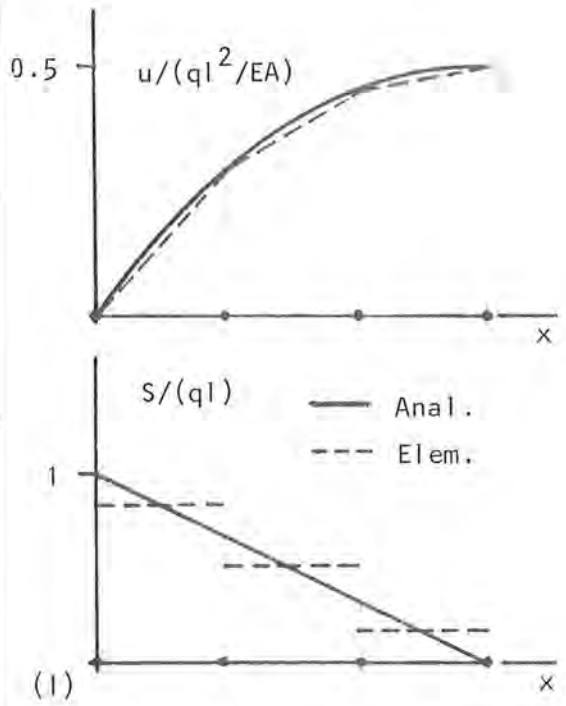
$$u_2 = 2{,}5\,\frac{qa^2}{EA}\ , \quad u_3 = 4\,\frac{qa^2}{EA}\ , \quad u_4 = 4{,}5\,\frac{qa^2}{EA}\ . \tag{46}$$

Sauvavoimien lausekkeiksi saadaan elementeittäin

$$\tilde{S}^{(1)} = 2{,}5qa\ , \quad \tilde{S}^{(2)} = 1{,}5qa\ , \quad \tilde{S}^{(3)} = 0{,}5qa\ . \tag{47}$$

Tuloksen on esitetty kuvassa (l). Siirtymän solmuarvot sattuvat yhtymään tarkkaan ratkaisuun. Sauvavoiman approksimaatiot ovat jo karkeampia vaikkakin keskimääräisessä mielessä parhaita mahdollisia. Kun verkkoa pienennetään, virheetkin pienenevät.

Edellä ei ole käytetty ollenkaan tulkintaa, jonka mukaan painofunktio ajatellaan virtuaaliseksi siirtymäksi. Esimerkiksi yleisen yhtälön (4.9.24) tyyppiseen muotoon päästään yhtälöstä (15) ottamalla $w = \delta u$, käyttämällä merkintöjä $\varepsilon = du/dx$, $\delta\varepsilon = d\delta u/dx$ ja asettamalla $w(0) = \delta u(0) = 0$:



$$\int_0^1 S\delta\varepsilon dx - \int_0^1 q\delta u dx - H_1\delta u(1) = 0 \ . \tag{48}$$

Loppuhuomautuksia. Elementtimenetelmää sovellettaessa voi olla tietyissä tapauksissa — kuten esimerkiksi ohuen laatan käsittelyssä — vaikeaa löytää virtuaalisten siirtymien esitys (sekä todellisten siirtymien approksimaatio), joka täyttäisi kaikki kulloisetkin sileysvaatimukset. Epäjatkuvat virtuaaliset siirtymät synnyttävät kappaleeseen kuviteltuja positiivisia ja negatiivisia rakoja ja liukupintoja. Näissä epäjatkuvuuspinnoissa vaikuttavien traktioiden tekemät virtuaaliset työt tulee ottaa huomioon virtuaalisessa työyhtälössä. Tarvittavat muutokset saadaan selville suorittamalla osittaisintegrointimanipulaatio huolellisesti $\delta\vec{u}$:n mahdolliset epäjatkuvuudet huomioiden.

Kappaleen reunalla S_u^o vallitseva traktio häviää formulaatiosta virtuaalisen työyhtälön perusversiota (4.9.24) sovellettaessa. Usein tämän traktion jakautuma tarvitaan myös osana ratkaisua. Tähän tarkoitukseen voidaan soveltaa jälleen virtuaalisen työn periaatetta nyt jälkikäsittelymielessä valiten virtuaaliset siirtymät reunalla S_u^o kinemaattisesti luvattomiksi eli otta-

en siellä $\delta\{u\} \neq \{0\}$. Tällöin yhtälöä (4.9.24) täytyy tietenkin täydentää takaisin yleisempään muotoon lisäämällä reunalta S_u^o kertyvä osuus $-\int\{t\}^T\delta\{u\}dS^o$. Näin menetellen traktiolle voidaan saada parempi approksimaatio kuin suoraan likimääräisestä jännityskentästä $\{\tilde{\sigma}\}$ lausekkeen $[n^o]\{\tilde{\sigma}\}$ avulla laskettuna.

Virtuaalisen työn periaate ei sisällä (ks. esimerkiksi perusversiota (4.9.24)) konstitutiivisia yhteyksiä. Täten periaate on luonteeltaan täysin yleinen ja sovellettavissa yhtä hyvin esimerkiksi plastisuusteoriassa kuin kimmoteoriassakin.

Emme johda tässä Hamiltonin periaatetta kontinuumiin sovellettuna. Käsittely on vastaava kuin partikkelisysteemillä kohdassa 2.3.9 ja siellä johdetut lopulliset kaavat pätevät edelleen, kun vain tulkitaan termit $L = K-V$,, δW^n jne. kontinuumia koskevissa muodoissa. Elementtimenetelmän kannalta Hamiltonin periaatteen soveltaminen ei anna yleensä erityisiä etuja, vaan oleelliset diskreetit yhtälöt saadaan myös suoraan virtuaalisen työn periaatteen avulla.

Potentiaalienergian stationaarisuuden periaate on virtuaalisen työn periaatteeseen verrattuna huomattavasti rajoitetumpi vaatiessaan sekä sisäisten että ulkoisten voimien konservatiivisuutta. Sitä sovelletaan kuitenkin yleisesti kimmoisten rakenteiden yhteydessä ja täten sille on varattu jatkossa oma lukunsa. Lisäksi käsittely palvelee esimerkkinä variaatioperiaatteen ja heikon muodon erojen esittelyssä.

4.9.2 Suuret siirtymät

Yleistä. Kaikki kohdassa 4.9.1 esitetyt kommentit pätevät vastaavina myös suurten siirtymien yhteydessä. Rajoitetaan tarkastelua täten vain lyhyeen virtuaalisen työyhtälön johtoon.

Virtuaalisen työn periaate. Toistetaan kohdassa 4.9.1 esitetyt askeleet, mutta nyt vain tasotapauksessa. Kirjoitetaan liikeyhtälöiden (4.4.29) tasapainoversiot ja traktio-jännitysyhteydet (4.4.38) muotoihin

$$\rho^o\vec{b} + {}^p\vec{f}^\sigma = \vec{0} \qquad V^o\text{:ssa} \tag{4.9.31}$$

ja

$$\vec{p_t} - \vec{p_t}^\sigma = \vec{0} \qquad S^o\text{:lla} \tag{4.9.32}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \rho^o b_a + {}^p f_a^\sigma &= 0 \,, \\ \rho^o b_b + {}^p f_b^\sigma &= 0 \end{aligned}\right\} \quad V^o\text{:ssa} \tag{4.9.31'}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} {}^p t_a - {}^p t_a^\sigma &= 0 \,, \\ {}^p t_b - {}^p t_b^\sigma &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \quad S^o\text{:lla} \tag{4.9.32'}$$

On siis käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\vec{p_f}^\sigma \equiv \frac{\partial \vec{p_t}(a)}{\partial a} + \frac{\partial \vec{p_t}(b)}{\partial b} \tag{4.9.33}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} {}^p f_a^\sigma \equiv \frac{\partial}{\partial a}\left[{}^p\sigma_a\left(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}\right) + {}^p\tau_{ab}\frac{\partial u_a}{\partial b}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial b}\left[{}^p\tau_{ba}\left(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}\right) + {}^p\sigma_b\frac{\partial u_a}{\partial b}\right] \,, \end{aligned}\right\} \tag{4.9.33'}$$

$$\left.\begin{aligned} {}^{p}f^{\sigma}_{b} \equiv \frac{\partial}{\partial a}[{}^{p}\sigma_{a}\frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\tau_{ab}(1+\frac{\partial u_b}{\partial b})] + \\ + \frac{\partial}{\partial b}[{}^{p}\tau_{ba}\frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\sigma_{b}(1+\frac{\partial u_b}{\partial b})] \end{aligned}\right|$$

ja

$$ {}^{p}\vec{t}^{\sigma} \equiv n^{o}_{a}\,{}^{p}\vec{t}(a) + n^{o}_{b}\,{}^{p}\vec{t}(b) \tag{4.9.34}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} {}^{p}t^{\sigma}_{a} &\equiv n^{o}_{a}[{}^{p}\sigma_{a}(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}) + {}^{p}\tau_{ab}\frac{\partial u_a}{\partial b}] + \\ &+ n^{o}_{b}[{}^{p}\tau_{ba}(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}) + {}^{p}\sigma_{b}\frac{\partial u_a}{\partial b}] , \\ {}^{p}t^{\sigma}_{b} &\equiv n^{o}_{a}[{}^{p}\sigma_{a}\frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\tau_{ab}(1+\frac{\partial u_b}{\partial b})] + \\ &+ n^{o}_{b}[{}^{p}\tau_{ba}\frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\sigma_{b}(1+\frac{\partial u_b}{\partial b})] . \end{aligned}\right\} \tag{4.9.34'}$$

Yhtälön (4.9.5) vastineeksi saadaan

$$\int_{V^o}(\rho^{o}b+{}^{p}\vec{f}^{\sigma})\cdot\vec{w}dV^{o} + \int_{S^o}({}^{p}\vec{t}-{}^{p}\vec{t}^{\sigma})\cdot\vec{w}dS^{o} = 0 . \tag{4.9.35}$$

Seuraava askel on termin $\int {}^{p}\vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{w}dV^{o}$ muuntaminen osittaisintegroinnilla. Pienten siirtymien teorian kaavojen (4.9.3') ja (4.9.4') vertailu suurten siirtymien teorian kaavojen (4.9.33') ja (4.9.34') kanssa osoittaa, että kyseessä ovat matemaattisesti samantyyppiset lausekkeet, joissa analogiset termit ovat

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{a} &\hat{=} {}^{p}\sigma_{a}(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}) + {}^{p}\tau_{ab}\frac{\partial u_a}{\partial b} , \\ \tau_{ba} &\hat{=} {}^{p}\tau_{ba}(1+\frac{\partial u_a}{\partial a}) + {}^{p}\sigma_{b}\frac{\partial u_a}{\partial b} , \end{aligned}\right\} \tag{4.9.36}$$

$$\tau_{ab} \triangleq {}^{p}\sigma_a \frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\tau_{ab}(1+ \frac{\partial u_b}{\partial b}) \ ,$$

$$\sigma_b \triangleq {}^{p}\tau_{ba} \frac{\partial u_b}{\partial a} + {}^{p}\sigma_b(1+ \frac{\partial u_b}{\partial b}) \ .$$

Kaavaa (4.9.6) soveltamalla voitaisiin täten kirjoittaa melko suoraan tarvittava lopputulos. Viedään kuitenkin johto tässä malliksi läpi ilman analogian hyväksikäyttöä. Täten

$$\int_{V^o} {}^{p}\vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{w}dV^o = \int_{V^o}(\frac{\partial {}^{p}\vec{t}^{(a)}}{\partial a}\cdot\vec{w} + \frac{\partial {}^{p}\vec{t}^{(b)}}{\partial b}\cdot\vec{w})dV^o$$

$$= \int_{S^o}(n_a^{o}{}^{p}\vec{t}^{(a)}\cdot\vec{w} + n_b^{o}{}^{p}\vec{t}^{(b)}\cdot\vec{w})dS^o +$$

$$- \int_{S^o}({}^{p}\vec{t}^{(a)}\cdot \frac{\partial\vec{w}}{\partial a} + {}^{p}\vec{t}^{(b)}\cdot \frac{\partial\vec{w}}{\partial b})dV^o$$

$$= \int_{S^o}(n_a^{o}{}^{p}\vec{t}^{(a)}+n_b^{o}{}^{p}\vec{t}^{(b)})\cdot\vec{w}dS^o +$$

$$- \int_{V^o}[{}^{p}\sigma_a\vec{G}_a+{}^{p}\tau_{ab}\vec{G}_b)\cdot(\frac{\partial w_a}{\partial a}\vec{i}+ \frac{\partial w_b}{\partial a}\vec{j}) +$$

$$+ ({}^{p}\tau_{ba}\vec{G}_a+{}^{p}\sigma_b\vec{G}_b)\cdot(\frac{\partial w_a}{\partial b}\vec{i}+ \frac{\partial w_b}{\partial b}\vec{j})]dV^o$$

$$= \int_{S^o}{}^{p}\vec{t}^{\sigma}\cdot\vec{w}dS^o +$$

$$- \int_{V^o}\{{}^{p}\sigma_a[(1+ \frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial w_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial w_b}{\partial a}] +$$

$$+ {}^{p}\tau_{ab}[\frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial w_a}{\partial a} + (1+ \frac{\partial u_b}{\partial b})\cdot \frac{\partial w_b}{\partial a}] +$$

$$+ {}^{p}\tau_{ba}[(1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial w_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial w_b}{\partial b}] +$$

$$+ {}^{p}\sigma_b[\frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial w_a}{\partial b} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial w_b}{\partial b}]\}dV^o$$

$$= \int_{S^o} {}^{p}\vec{t}^{\sigma}\cdot\vec{w}dS^o +$$

$$- \int_{V^o}\{{}^{p}\sigma_a[(1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial w_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial w_b}{\partial a}] +$$

$$+ {}^{p}\sigma_b[(1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial w_b}{\partial b} + \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial w_a}{\partial b}] +$$

$$+ {}^{p}\tau_{ab}[(1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial w_a}{\partial b} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial w_b}{\partial a} +$$

$$+ \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial w_b}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial w_b}{\partial b}]\}dV^o \ . \qquad (4.9.37)$$

Johdossa on käytetty hyväksi mm. kaavoja (L.2.11') ja (4.4.35).

Yhtälön (4.9.7) vastineeksi saadaan siis tulos

$$\int_{V^o}\rho^o\vec{b}\cdot\vec{w}dV^o + \int_{S^o}{}^{p}\vec{t}\cdot\vec{w}dS^o +$$

$$- \int_{V^o}\{{}^{p}\sigma_a[(1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial w_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial w_b}{\partial a}] +$$

$$+ {}^{p}\sigma_b[(1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial w_b}{\partial b} + \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial w_a}{\partial b}] +$$

$$+ {}^{p}\tau_{ab}[(1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial w_a}{\partial b} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial w_b}{\partial a} +$$

$$+ \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial w_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial w_b}{\partial b}]\}dV^o = 0 \ . \qquad (4.9.38)$$

Otetaan jälleen

$$\vec{w} = \delta\vec{r} = \delta\vec{u} = \delta u_a\vec{i} + \delta u_b\vec{j} + \delta u_c\vec{k} \tag{4.9.39}$$

eli

$$w_a = \delta u_a\ , \quad w_b = \delta u_b\ , \quad w_c = \delta u_c \tag{4.9.39'}$$

Venymäkomponenttien ${}^g\varepsilon_a$, ${}^g\varepsilon_b$ ja ${}^g\gamma_{ab}$ lausekkeista (4.6.33) saadaan varioimalla

$$\left.\begin{aligned}
\delta{}^g\varepsilon_a &= (1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial\delta u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial\delta u_b}{\partial a}\ ,\\
\delta{}^g\varepsilon_b &= (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial\delta u_b}{\partial b} + \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial\delta u_a}{\partial b}\ ,\\
\delta{}^g\gamma_{ab} &= (1+\frac{\partial u_a}{\partial a})\frac{\partial\delta u_a}{\partial b} + (1+\frac{\partial u_b}{\partial b})\frac{\partial\delta u_b}{\partial a} +\\
&\quad + \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial\delta u_a}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial a}\frac{\partial\delta u_b}{\partial b}\ .
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.40}$$

Nämä lausekkeet syntyvät täsmälleen vastaavalla tavalla kuin differentioimalla saadut lausekkeet (4.6.41') ja (4.6.42'). Jos pidetään kiinni tulkinnasta (4.9.39), yhtälön (4.9.38) jännityskomponenttien kertoimien nähdään esiintyvän kaavoissa (4.9.40). Yhtälö (4.9.38) saadaan siis muotoon

$$\int_{V^o}\rho^o\vec{b}\cdot\delta\vec{u}dV^o + \int_{S^o}{}^p\vec{t}\cdot\delta\vec{u}dS^o +$$

$$-\int_{V^o}({}^p\sigma_a\delta{}^g\varepsilon_a + {}^p\sigma_b\delta{}^g\varepsilon_b + {}^p\tau_{ab}\delta{}^g\gamma_{ab})dV^o = 0\ . \tag{4.9.41}$$

Tämä yleistyy kolmessa dimensiossa <u>virtuaalisen työn periaatteeksi</u>

$$\int_{V^o}\rho^o\vec{b}\cdot\delta\vec{u}dV^o + \int_{S^o}{}^p\vec{t}\cdot\delta\vec{u}dS^o +$$

$$- \int_{V^o} ({}^p\sigma_a \delta {}^g\varepsilon_a + {}^p\sigma_b \delta {}^g\varepsilon_b + {}^p\sigma_c \delta {}^g\varepsilon_c +$$

$$+ {}^p\tau_{bc}\, {}^g\gamma_{bc} + {}^p\tau_{ca}\, {}^g\gamma_{ca} + {}^p\tau_{ab}\, {}^g\gamma_{ab}) dV^o = 0 \qquad (4.9.42)$$

eli

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0 \qquad (4.9.43)$$

eli

$$\boxed{\delta W = 0 \ .} \qquad (4.9.44)$$

Standardimuodon (4.9.24) vastineeksi saadaan ilmeisin matriisimerkinnöin

$$\boxed{\begin{aligned} -\delta W \equiv & \int_{V^o} \{{}^p\sigma\}^T \delta\{{}^g\varepsilon\} dV^o - \int_{V^o} \{f\}^T \delta\{u\} dV^o + \\ & - \int_{S_t^o} \{{}^p\bar{t}\}^T \delta\{u\} dS^o = 0 \ , \quad \delta\{u\} = \{0\} \quad S_u^o\text{:lla} \ . \end{aligned}} \qquad (4.9.45)$$

Tämä yhtälö on suurten siirtymien tapauksessa tavanomainen elementtimenetelmän lähtökohta. Kimmoteoriassa jännitykset $\{{}^p\tilde{\sigma}\}$ voidaan ilmaista suoraan venymien ja siis siirtymien avulla ja yhtälöä (4.9.45) voidaan soveltaa siirtymien määrittämiseksi samaan tapaan kuin esimerkissä 4.9.1. Koska syntyvät yhtälöt ovat epälineaarisia, ratkaisu on kuitenkin etsittävä iteratiivisesti. Sitävastoin esimerkiksi kimmoplastisella aineella jännitykset riippuvat muodonmuutoshistoriasta ja jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet voidaan ilmaista vain differentiaalisia muutoksia koskevassa ns. inkrementaalisessa muodossa. Vastaavasti rakenteen analysointi on suoritettava kvasistaattisessakin tapauksessa kasvattamalla kuormituksia ja annettuja siirtymiä tietyn ohjelman mukaisesti pieninä lisäyksinä huolehtien siitä, että yhtälö (4.9.45) tai (4.9.24) on aina kunkin lisäyksen jälkeen voimassa valittujen virtuaalisten siirtymien suhteen.

4.10 Potentiaalienergian stationaarisuus

Jos kappaleeseen vaikuttavat ulkoiset ja sisäiset voimat (jännitykset) ovat konservatiivisia, kyseessä on konservatiivinen systeemi ja virtuaalisen työn periaatteesta saadaan staattisessa tapauksessa potentiaalienergian stationaarisuuden periaate vastaavasti kuin on esitetty kohdassa 2.3.10. Rajoitetaan käsittely seuraavassa pienten siirtymien tapaukseen.

Jännitysten konservatiivisuudella tarkoitetaan, että kohdassa 4.6.1 tarkasteltu viivaintegraalin $\int\{\sigma(\{\varepsilon\})\}^T d\{\varepsilon\}$ arvo on venymäavaruudessa kuljetusta reitistä riippumaton aivan vastaavasti kuin oli asian laita tavallisen konservatiivisen kenttävoiman $\vec{F}(\vec{r})$ tekemän työn $\int\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ suhteen. Äskeisestä seuraa, että on olemassa ns. muodonmuutosenergiatiheysfunktio $U^\sigma(\{\varepsilon\})$ siten, että (ks. kaavat (4.2.12))

$$\sigma_a = \frac{\partial U^\sigma}{\partial \varepsilon_a}, \quad \tau_{bc} = \frac{\partial U^\sigma}{\partial \gamma_{bc}}, \ldots \tag{4.10.1'}$$

eli

$$\boxed{\{\sigma\} = \frac{\partial U^\sigma}{\partial \{\varepsilon\}}.} \tag{4.10.1}$$

Tällä tarkoitetaan vielä tavallisesti toisin sanoen sitä, että aine on kimmoista. Kaavoja (4.10.1) on syytä verrata kaavoihin (2.3.11). Miinusmerkin puuttuminen voidaan ymmärtää kohdan 5.6.1 huomautuksen 1 perusteella.

Jos U^σ on olemassa, niin sen variaatioksi variaatioiden $\delta\{\varepsilon\}$ johdosta saadaan

$$\delta U^\sigma = \frac{\partial U^\sigma}{\partial \varepsilon_a}\delta\varepsilon_a + \frac{\partial U^\sigma}{\partial \varepsilon_b}\delta\varepsilon_b + \ldots = \left(\frac{\partial U^\sigma}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^T \delta\{\varepsilon\}$$

$$= \sigma_a\delta\varepsilon_a + \sigma_b\delta\varepsilon_b + \ldots = \{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}. \tag{4.10.2}$$

Täten sisäisten voimien (jännitysten) tekemä virtuaalinen työ (ks. kaava (4.9.15))

$$\delta W_{int} = -\int_{V^o} \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV^o = -\int_{V^o} \delta U^\sigma dV$$

$$= -\delta \int_{V^o} U^\sigma dV^o = -\delta V_{int} , \qquad (4.10.3)$$

jossa siis

$$\boxed{V_{int} = \int_{V^o} U^\sigma dV^o} \qquad (4.10.4)$$

on kappaleen sisäisten voimien potentiaalienergia eli muodonmuutosenergia eli kimmoenergia.

Muodonmuutosenergiatiheyden lauseke voidaan määrittää (jos se on olemassa) esimerkiksi arvaamalla ja kokeilemalla ovatko yhtälöt (4.10.1) voimassa. Toinen mahdollisuus on soveltaa kaavaa

$$U^\sigma(\{\varepsilon\}) = \int_{\{\varepsilon\}_1}^{\{\varepsilon\}} \{\sigma(\{\varepsilon'\})\}^T d\{\varepsilon'\} . \qquad (4.10.5)$$

Tässä $\{\varepsilon\}_1$ on mielivaltainen kiinteä venymäavaruuden piste (jossa U^σ saa arvon nolla), $\{\varepsilon\}$ on yleinen piste ja integroimistie on mielivaltainen. Integroimismuuttujaa on merkitty tunnuksella $\{\varepsilon'\}$ korostamaan sitä, että integraali (4.10.5) on ylärajansa funktio. Lausekkeeseen (4.10.5) voidaan lisätä mielivaltainen vakio, ts. muutetaan vertailupisteen paikkaa. (Huomautettakoon, että tavanomaisen konservatiivisen kenttävoiman potentiaalienergian lausekkeen määrittämiseen voidaan myös käyttää kaavan (4.10.5) tyyppistä viivaintegraalia.)

Kun rajoitutaan lineaarisesti kimmoiseen aineeseen, yleistetty Hooken laki laajennettuna muotoon (4.2.24) on

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^o\}) + \{\sigma^o\} . \qquad (4.10.6)$$

Integroimalla esimerkiksi suoraviivaista tietä pitkin saadaan tulos

$$\boxed{U^{\sigma} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon^o\} + \{\varepsilon\}^T\{\sigma^o\}\ ,} \qquad (4.10.7)$$

jossa kaavassa (4.10.5) on valittu $\{\varepsilon\}_1 = \{0\}$. Derivoimalla voidaan kääntäen todeta (ks. kaavat (L.2.4) ja (L.2.6)), että kaava (4.10.1) pitää tässä tapauksessa todella paikkansa. Jos alkuvenymiä ja -jännityksiä ei ole, lauseke (4.10.7) saa yksinkertaisemman muodon

$$U^{\sigma} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}\ . \qquad (4.10.8)$$

Muodonmuutosenergia esitetään potentiaalienergian stationaarisuuden periaatteessa siirtymän $\{u\}$ funktiona. Täten esityksen

$$V_{int} = \int_{V^o} (\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon^o\} + \{\varepsilon\}^T\{\sigma^o\})dV^o \qquad (4.10.9')$$

sijasta on korrektimpaa kirjoittaa (käytetään taulukon 3.3.2 matriisimerkintöjä)

$$V_{int}(\{u\}) = \int_{V^o} (\frac{1}{2}([{}_{\varepsilon}\partial_u]\{u\})^T[D][{}_{\varepsilon}\partial_u]\{u\} +$$

$$- ([{}_{\varepsilon}\partial_u]\{u\})^T[D]\{\varepsilon^o\} + ([{}_{\varepsilon}\partial_u]\{u\})^T\{\sigma^o\})dV^o. \qquad (4.10.9)$$

Konservatiivisille (voimakentistä johtuville) massa- ja pintavoimille on olemassa funktiot $U_b(\{u\})([U^b] = Jkg^{-1})$ ja $U^t([U^t] = Jm^{-2})$ siten, että (vrt. kaavat (2.3.13))

$$b_a = -\frac{\partial U^b}{\partial u_a}\ , \quad b_b = -\frac{\partial U^b}{\partial u_b}\ , \quad b_c = -\frac{\partial U^b}{\partial u_c} \qquad (4.10.10')$$

eli

$$\boxed{\{b\} = -\frac{\partial U^b}{\partial\{u\}}} \qquad (4.10.10)$$

ja

$$t_a = -\frac{\partial U^t}{\partial u_a}, \quad t_b = -\frac{\partial U^t}{\partial u_b}, \quad t_c = -\frac{\partial U^t}{\partial u_c} \tag{4.10.11'}$$

eli

$$\boxed{\{t\} = -\frac{\partial U^t}{\partial \{u\}}} \qquad S_t^o\text{:llä} . \tag{4.10.11}$$

Näissä kaavoissa esiintyvä siirtymä $\{u\}$ tarkoittaa luonnollisesti ko. kontinuumialkion (, johon kohdistuu intensiteetti $\{b\}$ tai $\{t\}$) siirtymää. Kaavat (4.10.11) pätevät vain reunalla $S_t^o \equiv S^o - S_u^o$, jossa S_u^o on se reunan osa, jolla siirtymät ovat annetut. Tämä johtuu siitä, että osalla S_u^o vallitsevat traktiot ovat rajoitevoimia, eikä niille näin ollen voida esittää konstitutiivisia yhteyksiä. Kaavat (4.10.10) voidaan yhtä hyvin korvata voimia $\{f\} = \rho^o\{b\}$ koskevilla kaavoilla

$$\boxed{\{f\} = -\frac{\partial U^f}{\partial \{u\}}} \tag{4.10.12}$$

jossa

$$U^f = \rho^o U^b . \tag{4.10.13}$$

Jos suureet U^b ja U^t ovat olemassa, niiden variaatioiksi variaatioiden $\delta\{u\}$ johdosta saadaan

$$\delta U^b = \frac{\partial U^b}{\partial u_a}\delta u_a + \frac{\partial U^b}{\partial u_b}\delta u_b + \frac{\partial U^b}{\partial u_c}\delta u_c = \left(\frac{\partial U^b}{\partial \{u\}}\right)^T \delta\{u\}$$

$$= -(b_a\delta u_a + b_b\delta u_b + b_c\delta u_c) = -\{b\}^T\delta\{u\} \tag{4.10.14}$$

ja

$$\delta U^t = \frac{\partial U^t}{\partial u_a}\delta u_a + \frac{\partial U^t}{\partial u_b}\delta u_b + \frac{\partial U^t}{\partial u_c}\delta u_c = \left(\frac{\partial U^t}{\partial \{u\}}\right)^T \delta\{u\}$$

$$= -(t_a\delta u_a + t_b\delta u_b + t_c\delta u_c) = -\{t\}^T\delta\{u\} . \tag{4.10.15}$$

Täten ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ (ks. kaava (4.9.14))

$$\delta W_{ext} = \int_{V^o} \rho^o \{b\}^T \delta\{u\} dV^o + \int_{S_t^o} \{t\}^t \delta\{u\} dS^o$$

$$= -\int_{V^o} \rho^o \delta U^b dV^o - \int_{S_t^o} \delta U^t dS^o$$

$$= -\delta\left(\int_{V^o} \rho^o U^b dV^o + \int_{S_t^o} U^t dS^o\right) = -\delta V_{ext} \,, \qquad (4.10.16)$$

jossa

$$\boxed{V_{ext} = \int_{V^o} \rho^o U^b dV^o + \int_{S_t^o} U^t dS^o} \qquad (4.10.17)$$

tai

$$\boxed{V_{ext} = \int_{V^o} U^f dV^o + \int_{S_t^o} U^t dS^o} \qquad (4.10.18)$$

on kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien potentiaalienergia. Edellisessä johdossa on huomattava, että ρ^o on alkutilaan liittyvä tiheys, joka on siis varioinnin suhteen vakio.

Esimerkiksi kuvan 2.3.6 esittämien tapausten avulla on helppo esittää tavanomaisimmat kontinuumia koskevat suureiden U^b tai U^f ja U^t lausekkeet. Tässä kirjoitetaan näkyviin vain kaikkein tavallisin tapaus:

$$U^b = -(b_a u_a + b_b u_b + b_c u_c) \qquad (4.10.19')$$

eli

$$\boxed{U^b = -\{b\}^T\{u\}} \tag{4.10.19}$$

tai

$$U^f = -(f_a u_a + f_b u_b + f_c u_c) \tag{4.10.20'}$$

eli

$$\boxed{U^f = -\{f\}^T\{u\}} \tag{4.10.20}$$

ja

$$U^t = -(\bar{t}_a u_a + \bar{t}_b u_b + \bar{t}_c u_c) \tag{4.10.21'}$$

eli

$$\boxed{U^t = -\{\bar{t}\}^T\{u\}\ .} \tag{4.10.21}$$

Kyseessä on siis tilanne, jossa massa- ja pintavoimien intensiteetit ovat suuntansa ja suuruutensa suhteen vakioita; siis annetut $\{b\}$ tai $\{f\}$ ja $\{\bar{t}\}$ eivät riipu siirtymistä $\{u\}$ (ne voivat kyllä vaihdella arvojaan paikan suhteen). Ylivoimaisesti tavallisin äskeisen erikoistapaus on tietenkin vakiopainovoimakentästä syntyvä intensiteetti $\vec{b} = \vec{g}$ eli $b_a = g_a$, $b_b = g_b$, $b_c = g_c$, jossa $|\vec{g}| = g \approx 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ on putoamiskiihtyvyyden arvo ja jossa $\vec{g}$-vektori osoittaa luotisuoran suuntaan.

Erityisesti kaavojen (4.10.20) ja (4.10.21) ollessa voimassa systeemin ulkoinen potentiaalienergia

$$V_{ext}(\{u\}) = -\int_{V^o} \{f\}^T\{u\}dV^o - \int_{S_t^o} \{\bar{t}\}^T\{u\}dS^o\ . \tag{4.10.22}$$

Konservatiivisen systeemin kokonaispotentiaalienergia (vrt. kaavat (2.3.72))

$$V = V_{int} + V_{ext} \; . \tag{4.10.23}$$

Kaavojen (4.10.3) ja (4.10.16) perusteella virtuaalisen työn periaate $-\delta W \equiv -\delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0$, jossa lähtökohtana on tässä esitys (4.9.24), saa nyt muodon

$$\boxed{\delta V = 0} \tag{4.10.24}$$

eli kappale on tasapainotilassa, jos ja vain jos potentiaalienergialla on stationaarinen arvo.

Funktionaali V on käsiteltävä potentiaalienergian stationaarisuuden periaatetta (4.10.24) sovellettaessa siirtymien $\{u\}$ funktioksi. Kuten esitetystä johdosta ilmenee, luvallisten funktioiden $\{u\}$ tulee olla kinemaattisesti luvallisia eli toteuttaa ehdot $\{u\} = \{\bar{u}\}$ reunalla S_u^o ja olla niin jatkuvia, ettei kappaleeseen synny rakoja.

Erityisesti kaavoja (4.10.9) ja (4.10.22) käytettäessä potentiaalienergian lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} V(\{u\}) = \int_{V^o} & \left(\tfrac{1}{2}([{}_\varepsilon\partial_u]\{u\})^T[D][{}_\varepsilon\partial_u]\{u\} + \right. \\ & \left. - ([{}_\varepsilon\partial_u]\{u\})^T[D]\{\varepsilon^o\} + ([{}_\varepsilon\partial_u]\{u\})^T\{\sigma^o\}\right)dV^o + \\ & - \int_{V^o} \{f\}^T\{u\}dV^o - \int_{S_t^o} \{\bar{t}\}^T\{u\}dS^o \; . \end{aligned} \tag{4.10.25}$$

Tässä tapauksessa potentiaalienergialla V on absoluuttinen minimiarvo stationaarisessa pisteessä, sillä voidaan osoittaa, että siinä saadaan tarkasti potentiaalienergian muutokseksi

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2}\,\delta^2 V = 0 + \frac{1}{2}\,\delta^2 V = \frac{1}{2}\,\delta^2 V \; , \tag{4.10.26}$$

jossa ns. toisen variaation puolikas

$$\frac{1}{2}\,\delta^2 V = \frac{1}{2}\int_V ([{}_\varepsilon\partial_u]\delta\{u\})^T[D][{}_\varepsilon\partial_u]\delta\{u\}dV \; . \tag{4.10.27}$$

Koska [D] on fysikaalisista syistä positiivisesti definiitti matriisi kimmoiselle materiaalille, $\frac{1}{2}\,\delta^2 V \geq 0$ ja väite on siis totta. (Integrandi $\delta\{\varepsilon\}^T[D]\delta\{\varepsilon\}$ on positiivisesti definiitti neliömuoto muuttujien $\delta\{\varepsilon\}$ suhteen. Täten koko integraali tulee olemaan suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla.) Lauseen (2.3.136) perusteella kaavan (4.10.25) mukainen systeemi on siis stabiili.

Huomautus 1. Kohdassa 2.3.7 on jo esitelty hieman variaatiolaskennan terminologiaa. Jatketaan tässä lisää samasta aiheesta.

Funktionaalilla (engl. functional) tarkoitetaan operaatiota, joka liittää jokaiseen sovittujen funktioiden joukkoon kuuluvaan funktioon reaaliluvun; ts. funktionaali on kuvaus eli funktio joukosta, jonka alkiot ovat funktioita, reaalilukujen joukkoon. Kaavan (4.10.25) esittämä potentiaalienergia $V(\{u\})$ on esimerkki funktionaalista. Kun valitaan tietty $\{u\}$, funktionaalin (4.10.25) arvo voidaan laskea ja tulokseksi saadaan siis tietty reaaliluku. Variaatiolaskennan tehtävänä on löytää se argumenttifunktio, joka antaa funktionaalille stationaarisen arvon (engl. stationary value). Tällä tarkoitetaan karkeasti sanoen, että tällöin funktionaalin arvon muutos pienten argumenttifunktion muutosten suhteen häviää. Vastaavaa argumenttifunktiota nimitetään stationaariseksi funktioksi. Funktionaalissa keskenään kilpailevien argumenttifunktioiden tulee toteuttaa tiettyjä sileysvaatimuksia ja yleensä lisäksi joitakin reunaehtoja. Esimerkiksi funktionaalissa (4.10.25) $\{u\}$:n tulee toteuttaa ehto $\{u\} = \{\bar{u}\}$ reunalla S_u^o. Näin määriteltyjä argumenttifunktioita nimitetään usein luvallisiksi funktioiksi (engl. admissible function). Luvallisilta funktioilta vaadittuja reunaehtoja nimitetään oleellisiksi reunaehdoiksi (engl. essential, forced, rigid boundary condition).

Stationaarisuusehdon perusteella voidaan johtaa ns. Eulerin differentiaaliyhtälöt eli ns. Euler-Lagrangen differentiaaliyhtälöt sekä oleellisia reunaehtoja täydentävät ns. luonnolliset reunaehdot (engl. natural, free, additional boundary condition), joiden ratkaisu antaa ko. stationaarisen funktion. Esimerkissä 4.10.1 esitetään hieman tähän liittyviä ajatuskulkuja. Kuitenkin variaatioperiaatteiden käytännössä tärkein ominaisuus on se, että ne muodostavat erityisen helpon ja luotettavan lähtökohdan

diskreettien likiratkaisujen synnyttämiselle. Esimerkissä 4.10.1 on myös tätä koskeva sovellutus.

Huomautus 2. Potentiaalienergian stationaarisuuden periaate koskee puhtaana variaatioperiaatteena vain staattisia tapauksia. Kuitenkin sitä näkee joskus sovellettavan myös dynaamisissa tilanteissa asettamalla $\{f\} := \{f\} + \{f^I\} + \{f^d\}$. Suureet $\{f^I\}$ ja $\{f^d\}$ riippuvat kuitenkin argumenttifunktion $\{u\}$ aikaderivaatoista. Jotta päästäisiin oikeellisiin tuloksiin, nämä riippuvuudet on hetkeksi unohdettava stationaarisuusehtoa sovellettaessa ja otettava huomioon vasta lopuksi tämän askeleen suorittamisen jälkeen. Näin tulkitusta lausekkeesta käytetään kirjallisuudessa joskus nimitystä kvasifunktionaali tai pseudofunktionaali (engl. quasifunctional, pseudofunctional).

Esimerkki 4.10.1 Vetosauva. Tarkastellaan esimerkissä 4.9.1 käsiteltyä kimmoista vetosauvaa (kuva (a)) nyt potentiaalienergian stationaarisuuden periaatteen kannalta.

(a)

Sauvan potentiaalienergian lauseke on (ks. kohta 6.1.5)

$$V(u) = \frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + - \int_0^l qu\,dx - H_l u(l) \ , \qquad \text{(a)}$$

jossa luvallisen argumenttifunktion $u(x)$ tulee toteuttaa oleellinen reunaehto

$$u(0) = 0 \ . \qquad \text{(b)}$$

Lauseke (a) on esityksen (4.10.25) erikoistapaus.

Tutkitaan stationaarisuusvaatimuksen antamia seuraamuksia. Lasketaan V:n variaatio soveltaen taulukon 2.3.2 antamia laskusääntöjä:

$$\delta V = \int_0^l EA\,\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx}\,dx - \int_0^l q\delta u\,dx - H_l\,\delta u(l) \ . \qquad \text{(c)}$$

Seuraava askel perustuu siihen, että variaatio δu on mielivaltainen. Lausekkeesta (c) ei voida vetää tämän tiedon avulla vielä johtopäätöksiä, koska mukana on myös termi $d(\delta u)/dx$. Se poistetaan osittaisintegroimalla (vrt. kaava (L.2.11''); $g \triangleq EA\,\frac{du}{dx}$, $h \triangleq \delta u$):

$$\delta V = \Big|_0^l EA\frac{du}{dx}\delta u - \int_0^l \frac{d}{dx}(EA\frac{du}{dx})\delta u dx - \int_0^l q\delta u dx - H_l\delta u(l)$$

$$= -\int_0^l [q + \frac{d}{dx}(EA\frac{du}{dx})]\delta u dx + [EA\frac{du}{dx}(l) - H_l]\delta u(l) +$$

$$- EA\frac{du}{dx}(0)\cancel{\delta u(0)} \ . \qquad \text{(d)}$$

Stationaarisuusehto vaatii, että tämän lausekkeen tulee hävitä mielivaltaisen luvallisen variaation δu suhteen. Koska luvallisten argumenttifunktioiden tulee toteuttaa ehto (b): $u(0) = 0$, myös varioidulle funktiolle $u(0) + \delta u(0) = 0$ ja siis luvallisen variaation tulee toteuttaa ehto $\delta u(0) = 0$, joka tulos on otettu jo huomioon lausekkeessa (d). Stationaarisuusehto antaa siis yhtälön (vrt. esimerkin 4.9.1 kaava (13))

$$-\int_0^l [q + \frac{d}{dx}(EA\frac{du}{dx})]\delta u dx + [EA\frac{du}{dx}(l) - H_l]\delta u(l) = 0 \ . \qquad \text{(e)}$$

Koska δu on mielivaltainen, yhtälö voi toteutua vain mikäli

$$q + \frac{d}{dx}(EA\frac{du}{dx}) = 0 \ , \qquad 0 < x < l \qquad \text{(f)}$$

ja

$$EA\frac{du}{dx}(l) - H_l = 0 \qquad \text{(g)}$$

Johtopäätös tehdään samaan tapaan kuin on selostettu kohdan 4.9.1 huomautuksessa 4. Differentiaaliyhtälö (f) ja ehto (g) ovat variaatioperiaatteen $\delta V = 0$ Eulerin yhtälö ja luonnollinen reunaehto. Ne kuvaavat yhdessä oleellisen reunaehdon (b) kanssa oikein siirtymämenetelmän mukaisen differentiaaliyhtälömuotoisen formulaation. Huomattakoon, että yhtälö (f) pätee myös tapauksessa, jossa sauvan vetojäykkyys ei ole vakio.

Siirrytään sitten erään likiratkaisun käsittelyyn. Sovelletaan esimerkissä 4.9.1 käytettyä approksimaatiota (39):

$$\tilde{u} = \sum_{j=2}^{4} N_j u_j = \underset{1\times 3}{[N]}\ \underset{3\times 1}{\{a\}} \qquad \text{(h)}$$

Tämän jälkeen toimitaan aivan vastaavasti kuin esimerkin 4.9.1 kohdassa "pienimmän neliön keino". Funktionaali (a) muuttuu approksimaation sijoituksen jälkeen solmuarvojen funktioksi

$$\tilde{V}(\{a\}) = \frac{1}{2}\int_0^l EA(\sum_{j=2}^{4}\frac{dN_j}{dx}u_j)^2 dx - \int_0^l q(\sum_{j=2}^{4} N_j u_j)dx - H_l u_4 \ . \qquad \text{(i)}$$

Vallitseva yhtälöryhmä on

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i} \equiv \int_0^1 EA\left(\sum_{j=2}^{4} \frac{dN_j}{dx} u_j\right)\frac{dN_i}{dx}\,dx - \int_0^1 qN_i\,dx - H_1\delta_{4i} = 0 \qquad i = 2,3,4\,. \qquad \text{(j)}$$

Sen havaitaan olevan täsmälleen sama kuin virtuaalisen työn periaatteen ja Galerkinin keinon avulla saatu ryhmä (Esimerkki 4.9.1, kaavat (44)), joten ratkaisukin on identtinen ja ei jatketa tässä enää yksityiskohtaisesti eteenpäin.

Variaatioperiaatteen soveltaminen on jäännösmenetelmien käyttöön verrattuna paljon suoraviivaisempaa. Riittää, kun tehdään argumenttifunktioita koskeva approksimaatioesitys kuten (h). Tämän jälkeen vastaava diskreetti yhtälösysteemi syntyy automaattisella tavalla ilman lisäharkintaa. Esimerkissä 4.9.1 käsitellyt sovellutukset osoittivat, että jäännösmenetelmissä joudutaan lisäksi miettimään sopivien testifunktioiden valintoja. Toisaalta jäännösformulaatio on esitettävissä periaatteessa minkä hyvänsä differentiaaliyhtälösysteemin yhteydessä; variaatioformulaatio ei.

4.11 Energiayhtälön heikko muoto

4.11.1 Pienet siirtymät

Yleistä. Partikkelimekaniikassa ei esiinny termisiä käsitteitä. Täten partikkelimekaniikka ei anna vihjeitä eikä valmista terminologiaa siirrettäväksi kontinuumimekaniikan energiayhtälön manipulointiin. Liikeyhtälöiden yhteydessähän meillä oli käytettävissämme virtuaalisen työn periaate jo partikkelimekaniikassa.

Heikko muoto. Kirjoitetaan energiayhtälö (4.6.18) ja lämpövirran tiheys- lämpövuoyhteys (4.6.27) tässä muotoihin

$$\frac{\partial q_a}{\partial a} + \frac{\partial q_b}{\partial b} + \frac{\partial q_c}{\partial c} - Q = 0 \tag{4.11.1}$$

ja

$$q_n - n_a^o q_a - n_b^o q_b - n_c^o q_c = 0 \ . \tag{4.11.2}$$

Suure Q on ns. lähdetermi, johon kätketään loput yhtälön suureista. Esimerkiksi stationaarisessa tapauksessa, jos $\vec{q}$ lisäksi liittyy vain lämmönjohtumiseen,

$$Q = \rho^o r \ . \tag{4.11.3}$$

Tässä ei ole erityistä tarvetta käyttää kaavojen (4.9.3) tai (4.9.4) tapaisia lisälyhennysmerkintöjä, koska syntyvät lausekkeet pysyvät muutenkin kohtuullisen pituisina.

Toimitaan vastaavasti kuin kaavojen (4.9.1) ja (4.9.2) yhteydessä. Saadaan siis ensin yhtälö

$$\int_{V^o} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} + \frac{\partial q_b}{\partial b} + \frac{\partial q_c}{\partial c} - Q\right) w dV^o +$$

$$+ \int_{S^o} (q_n - n_a^o q_a - n_b^o q_b - n_c^o q_c) w dS^o = 0 \ , \tag{4.11.4}$$

jossa w on nyt skalaariarvoinen testifunktio. Muutetaan yhtälön muotoa osittaisintegroimalla siten, että lämpövuovektorin komponentteihin kohdistuvat osittaisderivaatat häviävät. Kaavoja (L.2.11) soveltamalla saadaan

$$\int_{V^o} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} w + \frac{\partial q_b}{\partial b} w + \frac{\partial q_c}{\partial c} w\right) dV^o =$$

$$= \int_{S^o} (n_a^o q_a w + n_b^o q_b w + n_c^o q_c w) dS^o +$$

$$- \int_{V^o} \left(q_a \frac{\partial w}{\partial a} + q_b \frac{\partial w}{\partial b} + q_c \frac{\partial w}{\partial c}\right) dV^o \ . \qquad (4.11.5)$$

Tämän lausekkeen sijoitus yhtälöön (4.11.4) antaa yhtälön

$$\boxed{\begin{aligned} &-\int_{V^o} \left(q_a \frac{\partial w}{\partial a} + q_b \frac{\partial w}{\partial b} + q_c \frac{\partial w}{\partial c}\right) dV^o + \\ &-\int_{V^o} Q w dV^o + \int_{S^o} q_n w dS^o = 0 \ . \end{aligned}} \qquad (4.11.6)$$

Tämä on eräs energiayhtälön heikko muoto.

Energiayhtälön heikkoon muotoon liittyvä terminologia ei ole vakiintunutta. Täten eri termeille ei yleensä ole käytössä erityisiä merkintöjä kuten δW_{ext} jne.

<u>Reunaehtojen käsittely</u>. Tämän otsikon alainen aihe on lähinnä kohdan 4.9.1 otsikon "rajoitteet ja virtuaalinen siirtymä" alaisen aiheen vastine.

Reunan osalla S_T^o lämpötilaa koskeva reunaehto $T = \bar{T}$ merkitsee, että vastaava lämpövirran tiheys on tuntematon. Sen mukaantulo yhtälöihin vältetään valitsemalla testifunktiot siten, että

$$w = 0 \quad S_T^o\text{:llä} \ . \qquad (4.11.7)$$

Yhtälö (4.11.6) saa tavanomaisen sovellutusmuodon

$$\boxed{\begin{aligned} &- \int_{V^o} \left(q_a \frac{\partial w}{\partial a} + q_b \frac{\partial w}{\partial b} + q_c \frac{\partial w}{\partial c}\right) dV^o + \\ &- \int_{V^o} Q w dV^o + \int_{S_q^o} \bar{q}_n w dS^o = 0 \ , \quad w = 0 \quad S_T^o\text{:llä} \ . \end{aligned}} \tag{4.11.8}$$

Perusmuotoa (4.11.8) voidaan taas täydentää tuttuun tyyliin. Jos esimerkiksi reunaehdon (4.7.15) sijasta esiintyy ehto (4.7.17), tehdään vain sijoitus

$$\bar{q}_n := \alpha T + \beta \ . \tag{4.11.9}$$

Esimerkiksi epästationaarista yhtälöä (4.6.26) käsiteltäessä taas

$$Q := Q - \rho^o c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} \ , \tag{4.11.10}$$

jos on lähdetty liikkeelle esityksestä (4.11.3).

<u>Lisämerkintöjä</u>. Joskus on tapana ottaa tulkinta

$$w = \delta T \ . \tag{4.11.11}$$

Toisin sanoen testifunktio w ajatellaan lämpötilan T variaatioksi eli ns. <u>virtuaaliseksi lämpötilaksi</u>. Sopivien matriisikaavojen esittämiseksi otetaan vielä käyttöön joitakin lisämerkintöjä.

Merkitään lämpötilagradientin $\vec{\nabla}T$ komponentteja seuraavasti:

$$\gamma_a \equiv \frac{\partial T}{\partial a} \ , \quad \gamma_b \equiv \frac{\partial T}{\partial b} \ , \quad \gamma_c \equiv \frac{\partial T}{\partial c} \tag{4.11.12'}$$

eli

$$\{\gamma\} = \{\nabla\} T \ . \tag{4.11.12}$$

Saadaan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial a} &= \frac{\partial \delta T}{\partial a} = \delta \frac{\partial T}{\partial a} = \delta \gamma_a \ , \\ \frac{\partial w}{\partial b} &= \frac{\partial \delta T}{\partial b} = \delta \frac{\partial T}{\partial b} = \delta \gamma_b \ , \end{aligned}\right\} \tag{4.11.13}$$

$$\frac{\partial w}{\partial c} = \frac{\partial \delta T}{\partial c} = \delta \frac{\partial T}{\partial c} = \delta\gamma_c \ .$$

Suureita $\delta\gamma_a$, $\delta\gamma_b$ ja $\partial\gamma_c$ voitaisiin nimittää vaikka virtuaalisiksi lämpötilagradienttikomponenteiksi. Ne ovat virtuaalisten venymäkomponenttien vastineita. Kaava (4.11.12) antaa vielä matriisimerkinnöin

$$\delta\{\gamma\} = \{\nabla\}\delta T \ . \tag{4.11.14}$$

Yhtälö (4.11.8) saadaan näitä merkintöjä käyttäen näyttämään seuraavalta

$$\boxed{\begin{aligned} &- \int_{V^o} \{q\}^T \delta\{\gamma\} dV^o - \int_{V^o} Q\delta T dV^o + \\ &+ \int_{S_q^o} \bar{q}_n \delta T dS^o = 0 \ , \quad \delta T = 0 \quad S_T^o\text{:llä} \ . \end{aligned}} \tag{4.11.15}$$

Tämä heikko muoto on saatettu siis muistuttamaan ulkonäöltään virtuaalista työyhtälöä (4.9.24). Täten yhtälöä (4.11.15) voitaisiin nimittää puolileikillisesti vaikka virtuaalisen lämmön periaatteeksi tai virtuaalisten lämpötilojen periaatteeksi. Huomattakoon kuitenkin, että joissakin lähteissä termillä virtuaalisen lämmön periaate tarkoitetaan jotain aivan muuta kuin yhtälöä (4.11.15).

<u>Eräs variaatioperiaate</u>. Jos lämpövuovektori syntyy pelkästään johtumisesta ja jos Fourierin lämmönjohtumislain voidaan otaksua olevan voimassa, saadaan (ks. kaavat (4.2.55') ja (4.11.11))

$$\{q\} = -[k]\{\gamma\} \ . \tag{4.11.16}$$

Muodostamalla lauseke (vrt. kaava (4.10.8))

$$U^q = \frac{1}{2}\{\gamma\}^T[k]\{\gamma\} \tag{4.11.17}$$

havaitaan, että

$$\frac{\partial U^q}{\partial\{\gamma\}} = [k]\{\gamma\} = -\{q\} \ . \tag{4.11.18}$$

Täten variaatio

$$\delta U^q = \left(\frac{\partial U^q}{\partial\{\gamma\}}\right)^T \delta\{\gamma\} = -\{q\}^T\delta\{\gamma\} \tag{4.11.19}$$

ja yhtälön (4.11.14) ensimmäinen termi

$$-\int_{V^o} \{q\}^T\delta\{\gamma\}dV^o = \int_{V^o} \delta U^q dV^o = \delta\int_{V^o} U^q dV^o$$

$$= \delta\int_{V^o} \frac{1}{2}\{\gamma\}^T[k]\{\gamma\}dV^o \ . \tag{4.11.20}$$

Lisäksi, jos Q ja $\bar{q}_n$ eivät riipu lämpötilasta T, yhtälön (4.11.14) loppuosa

$$-\int_{V^o} Q\delta T dV^o + \int_{S_q^o} \bar{q}_n \delta T dS^o = -\delta\int_{V^o} QT dV^o + \delta\int_{S_q^o} \bar{q}_n T dS^o \ . \tag{4.11.21}$$

Täten yhtälö (4.11.14) voidaan esittää variaatioperiaatteena

$$\boxed{\delta\Pi = 0 \ ,} \tag{4.11.22}$$

jossa funktionaali (vrt. lauseke (6.8.68))

$$\Pi(T) = \frac{1}{2}\int_{V^o} (\{\nabla\}T)^T[k](\{\nabla\}T)dV^o +$$

$$- \int_{V^o} QT dV^o + \int_{S_q^o} \bar{q}_n T dS^o \ . \tag{4.11.23}$$

Luvallisen argumenttifunktion T tulee toteuttaa oleellinen reunaehto $u = \bar{u}$ S_T^o:llä. Funktionaali (4.11.23) on tavanomainen lähtökohta elementtimenetelmän yhteydessä, vaikkakin myös yleisemmästä muodosta (4.11.15) päästään samoihin yhtälöihin.

Reunaehdon (4.7.17) esittämä tapaus voidaan myös sisällyttää variaatioperiaatteeseen korvaamalla pintaintegraali lausekkeella (Huom. sijoitusta (4.11.9) ei saada nyt käyttää)

$$\int_{S_q^o} (\frac{1}{2}\alpha T^2+\beta T)dS^o \ . \qquad (4.11.24)$$

Tämä voidaan todeta johtamalla vastaavaan funktionaaliin liittyvä luonnollinen reunaehto. Jos tehtävä on epälineaarinen esimerkiksi siten, että [k] riippuu lämpötilasta, ratkaisua voidaan edelleen etsiä funktionaalin avulla päivittämällä lämmönjohtavuuden arvoja iteratiivisesti.

5 NESTEMEKANIIKKA

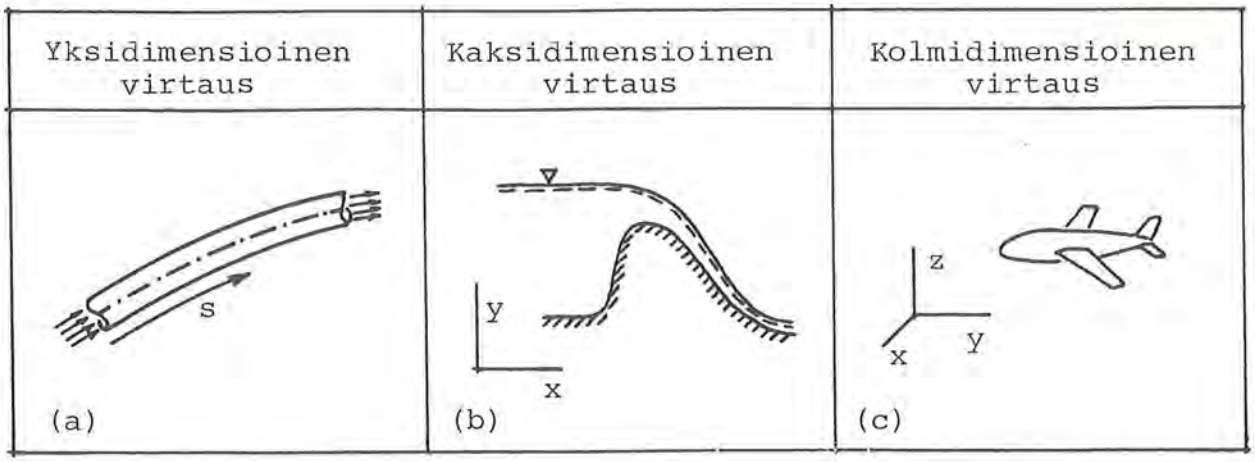
5.1 Yleistä

Syyt Eulerin esityksen käyttöön nestemekaniikassa tulivat esille jo kohdassa 4.1. Tässä luvussa selostetaan jälleen yleisten aksioomien nyt Eulerin esityksessä saamia yksityiskohtaisia muotoja. Lisäksi käsitellään esimerkkitapauksena Newtonin nesteen mallin yhteydessä syntyviä yleisten yhtälöiden erityisversioita.

Nestemekaniikassa ei olla useinkaan niinkään kiinnostuneita suoranaisesti vallitsevista jännityksistä ja niiden maksimiarvoista (kuten esimerkiksi lujuusopissa) vaan jännitysten tietyistä integroiduista vaikutuksista kuten vastus tiettyyn kappaleeseen, vaadittava pumpun teho jne. Nestemekaniikassa — etenkin kaasumekaniikassa — on yleensä kiinteän aineen mekaniikkaan verrattuna voimakkaampi kytkentä mekaanisten ja termisten prosessien välillä, mikä seikka tekee käsittelyn luonnollisesti vaikeaksi. Varsinaisten nesteiden tapauksessa kytkentä voi olla heikohko ja usein puhtaasti mekaaninen probleema voidaan ratkaista ensin ja tarvittaessa vasta jälkikäteen määritetään aksioomasta (4) johtuvan energiayhtälön avulla lämpötilajakautuma alueessa.

Probleemien luokittelun suhteen kuvan 4.1.1 jaottelua vastaa lähinnä virtauksen käsittely yksi-, kaksi- tai kolmidimensioisena sen mukaan montako riippumatonta paikkakoordinaattia virtauksen kuvaamiseen tarvitaan. Tätä on esitetty kuvassa 5.1.1 kolmen esimerkkitapauksen avulla.

Todellisuudessa kaikki virtaukset ovat kolmidimensioisia. On kuitenkin paljon tapauksia, joissa yksi- tai kaksidimensioinen käsittely on käytännön tarpeiden kannalta riittävän tarkka tai ainakin parempi kuin ei mitään. Yksidimensioinen käsittely riittää esimerkiksi putkivirtauksessa ja avouomavirtauksessa yleensä, mikäli uoman poikkileikkaus muuttuu hitaasti ja uoman kaarevuudet ovat pienehköjä. Riippumattomana paikkakoordinaattina voi olla esimerkiksi uoman pohjaa pitkin mitattu kaarenpituus s (vrt. ku-



Kuva 5.1.1 (a) Virtaus putkessa. (b) Äärettömän pitkän padon yli tapahtuva virtaus. (c) Lentokoneen liikkeen synnyttämä virtaus.

va 5.1.1 (a)). Yksidimensioisessa käsittelyssä ei olla yleensä kiinnostuneita virtauksen yksityiskohdista vaan tietyistä keskimääräisistä arvoista tietyissä poikkileikkauksissa.

Kuvan 5.1.1 (b) esittämässä tapauksessa kysymyksessä on ns. tasovirtaus (engl. plane flow), jossa kaikki nopeusvektorit ovat tietyn tason — kuvassa xy-tason — suuntaisia ja yhtäsuuria tämän tason normaaleilla. Todellisuudessa kuvan äärettömän pitkää patoa ei tietenkään voi olla olemassa, mutta virtaus voi olla pitkähkön padon keskialueella lähellä tasovirtausta ja padon päistä johtuvat häiriöt tähän on arvioitava erikseen. Pyörähdyssymmetrinen virtaus (engl. axially symmetric flow), jossa virtausnopeus riippuu vain sylinterikoordinaatiston muuttujista r ja z, mutta ei muuttujasta θ on toinen esimerkki kaksidimensioisesta virtauksesta. Kolmantena esimerkkinä mainittakoon ns. voitelu-probleemat (engl. lubrication problems), joissa tutkitaan laitteiden liikkuvien osien välisissä hyvin ohuissa nestekalvoissa tapahtuvia virtauksia ja paineen jakautumista. Nämä tehtävät käsitellään yleensä kaksidimensioisina.

Tässä esityksessä selostetaan jälleen aluksi yleisessä kolmidimensioisessa tapauksessa syntyviä yhtälöitä. Luvussa 6 käsitellään erikoistapauksia.

Varsinaisten nesteiden virtauksessa nesteen kokoonpuristuvuus voidaan jättää usein kokonaan huomiotta, jolloin puhutaan ns. kokoonpuristumattomasta nesteestä tai kokoonpuristumattomasta virtauksesta (engl. incompressible flow). Koska vesi (kreik. hydor) on yleisimmin esiintyvä varsinainen neste, kokoonpuristumattoman nesteen mekaniikkaa nimitetään usein hydromekaniikaksi (engl. hydromechanics) ja erityisesti rakennustekniikan sovellutusten yhteydessä myös hydrauliikaksi (engl. hydraulics). Kuitenkin tietyissä ilmiöissä varsinaisten nesteidenkin kokoonpuristuvuus on otettava huomioon; esimerkiksi ääniaaltojen eteneminen nesteessä tai lämpötilaeroista johtuvien tiheyserojen synnyttämä ns. vapaa konvektiovirtaus.

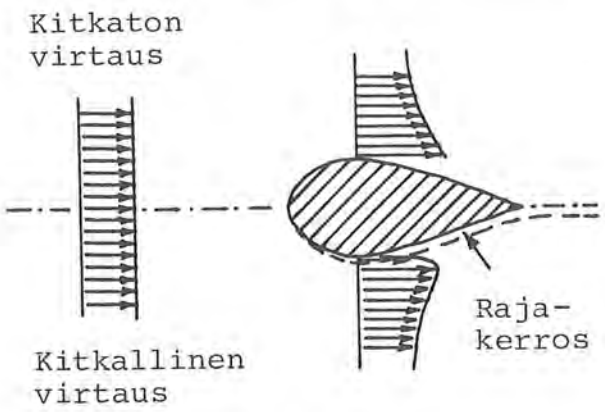
Kaasujen liike on käsiteltävä yleisessä tapauksessa kokoonpuristuvana virtauksena (engl. compressible flow). Koska taas ilma (kreik. aer) on yleisimmin esiintyvä kaasu, kokoonpuristuvan nesteen mekaniikkaa nimitetään usein myös aeromekaniikaksi (engl. aeromechanics) tai yleisemmin kaasumekaniikaksi (engl. gasmechanics). Kokoonpuristuvan virtauksen tyyppi riippuu ns. Machin luvusta

$$Ma = \frac{v}{a} , \qquad (5.1.1)$$

jossa v on virtausvauhti ja a äänen etenemisvauhti ko. nesteessä ko. paikassa. Virtaus luokitellaan subsoniseen, transsoniseen, supersoniseen ja hypersoniseen virtaukseen sen mukaan, onko koko alueessa $Ma < 1$, vaihteleeko se arvon 1 molemmin puolin, onko koko alueessa $Ma > 1$ tai $Ma > 5$. Nämä virtauslajit johtavat kukin matemaattiselta kannalta erityyppiseen käsittelyyn. Voidaan osoittaa, että Machin luvun ollessa riittävän pieni — luokkaa $< 0,3$ — virtauksessa esiintyvät nopeuserot aiheuttavat normaalioloissa siksi pieniä paine-eroja, että virtaus voidaan käsitellä riittävällä tarkkuudella kokoonpuristumattomana.

Ns. kitkattomassa virtauksessa (engl. inviscid flow) eli ideaalinesteen (engl. ideal fluid, perfect fluid) mallin mukaisessa virtauksessa otaksutaan, että nesteessä ei esiinny lainkaan leikkausjännityksiä, vaikka liukumanopeudet olisivat nollasta eroavia.

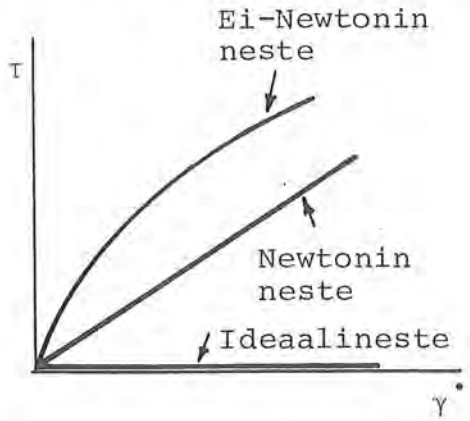
Todellisuudessa näin ei ole ja siis ns. todellisen nesteen eli reaalisen nesteen (engl. real fluid) yhteydessä syntyy tällöin leikkausjännityksiä ja puhutaan vastaavasti kitkallisesta tai viskoosista virtauksesta (engl. viscous flow). Myös virtauksen käyttäytyminen seinämien läheisyydessä eroaa kuvitellussa kitkattomassa ja todellisessa kitkallisessa virtauksessa oleellisella tavalla. Kuva 5.1.2 esittää kaaviollisesti vaakanopeuksien jakautumista tasovirtauksessa tasaisessa virtauskentässä olevan kiinteän kappaleen läheisyydessä tietyssä pystyleikkauksessa. Kaikki todelliset nesteet tarttuvat tehtyjen havaintojen mukaan kiinni nesteen koskemien kappaleiden pintoihin (ns. takertumisehto), joten nesteen nopeusvektorin arvo näillä pinnoilla on sama kuin vastaavien kappaleiden partikkelien nopeus ja siis nolla, jos kappaleet ovat liikkumattomia. Kitkattomassa virtauksessa ideaalinesteen malli edellyttää sitä vastoin vain pinnan normaalin suuntaisten nopeuskomponenttien yhtäsuuruutta, mutta pinnan tangenttitason suunnassa nesteen ja seinämän vastinpartikkeleilla on yleensä eri nopeuskomponentit eli siis ideaalinesteen ajatellaan liukuvan vapaasti pintaa pitkin. Vaikka ideaalinesteen käyttäytyminen on siis reunaehtojenkin suhteen epärealistista, tämä malli on kuitenkin käyttökelpoinen tietyissä tapauksissa kuten esimerkiksi siipiprofiilien käsittelyssä. Tällöin nimittäin voimakkaasti kitkallinen virtaus on rajoittunut vain ohueen siiven pinnan läheiseen alueeseen eli ns. rajakerrokseen (engl. boundary layer), jonka ulkopuolisessa alueessa virtaus on likimain kitkatonta.



Kuva 5.1.2 Kitkattoman ja kitkallisen virtauksen ero reunaehtojen suhteen.

Edelliseen liittyy läheisesti virtauksen jako virtausta rajoittavien esteiden tyypin mukaan ns. sisäiseen virtaukseen (engl. internal flow) kuten esimerkiksi putkivirtaus ja ns. ulkoiseen virtaukseen (engl. external flow) kuten esimerkiksi virtaus lai-

van rungon ympärillä. Näiden yhdistelmiä voi myös luonnollisesti esiintyä. Sisäisissä virtauksissa ideaalinesteen mallilla ei ole useinkaan paljon käyttöä, koska ainakin virtaussuunnassa pitkähköissä geometrioissa rajakerros täyttää pian koko virtausalueen.



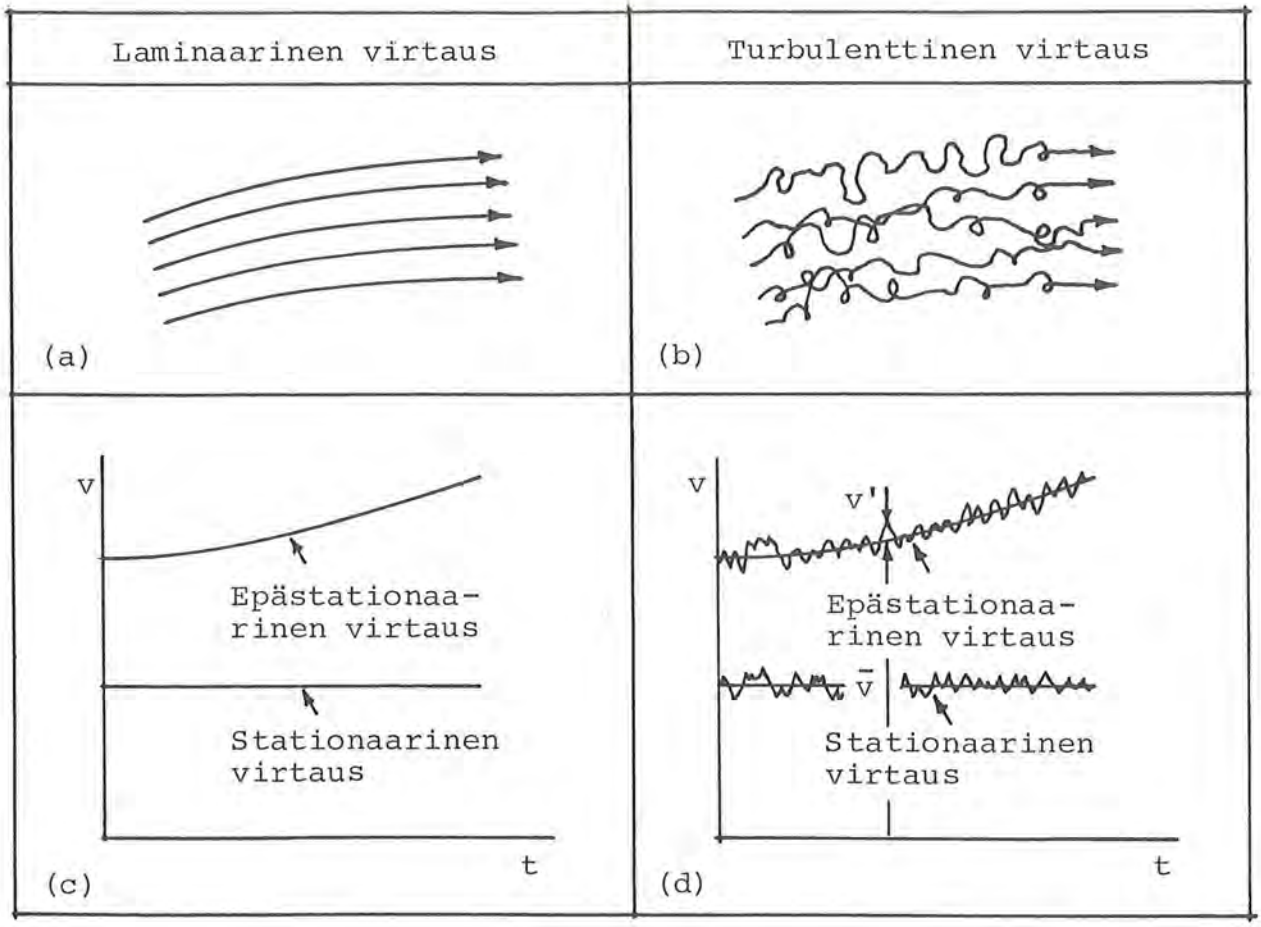
Kuva 5.1.3 τ-$\dot{\gamma}$ riippuvuus.

Otaksutun jännitys-deformaationopeusyhteyden perusteella puhutaan ns. Newtonin nesteestä (engl. Newtonian fluid), mikäli leikkausjännityksen τ ja liukumanopeuden $\dot{\gamma}$ välinen riippuvuus on lineaarista muotoa (kuva 5.1.3)

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \quad . \qquad (5.1.2)$$

(Tämä yhteys yleistetään myöhemmin.) Kerroin μ on ko. nesteen ns. viskositeetti (engl. viscosity). Useat nesteet, kuten mm. vesi ja ilma, noudattavat melko tarkasti tätä kaavaa. Jos kaava ei päde riittävällä tarkkuudella, puhutaan ei-Newtonin nesteestä (engl. non-Newtonian fluid). Sen käsittelyn katsotaan yleensä kuuluvan reologian piiriin. Esimerkiksi veri ja sula metalli ovat ei-Newtonin nesteitä. Ideaalineste saadaan muodollisesti Newtonin nesteen erikoistapauksena asettamalla $\mu = 0$. Huomautettakoon, että kiinteän aineen mekaniikassa otaksutaan lineaarisesti kimmoisen aineen mallin yhteydessä leikkausjännityksen τ ja liukuman γ välille kaavan (5.1.2) kanssa analoginen yhteys $\tau = G\gamma$, jossa G on ko. aineen liukukerroin.

Virtauksen sanotaan olevan laminaarista (engl. laminar), kun virtaus tapahtuu kuvitelluissa kerroksissa ilman kerrosten välistä makroskooppista sekoittumista (kuva 5.1.4 (a) ja (c)). Turbulenttisessa (engl. turbulent) eli turbulentissa virtauksessa nestealkioiden radat ovat voimakkaasti mutkittelevia ja kerrosten sekoittumista tapahtuu (kuva 5.1.4 (b) ja (d)). Turbulenttisen virtauksen voidaan ajatella muodostuvan päävirtauksesta (viittaus tunnuksella ($\bar{\ }$)), joka kuvaa keskimääräistä tietyllä lyhyellä aikavälillä otettua arvoa sekä tähän lisätystä satunnaisesti vaihtelevasta virtauksesta (viittaus tunnuksella ( )').



Kuva 5.1.4 Nestealkioiden ratoja (a) laminaarisessa ja (b) turbulenttisessa virtauksessa. Tietyn virtausnopeuskomponentin v kuvaaja ajan t funktiona tietyssä pisteessä (c) laminaarisessa ja (d) turbulenttisessa virtauksessa.

Täten esimerkiksi virtausnopeus $\vec{v}$ esitetään muodossa (vrt. kuva 5.1.4 (d))

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}' \ . \qquad (5.1.3)$$

Yleensä ollaan kiinnostuneita vain keskimääräisestä arvosta $\bar{\vec{v}}$, mutta valiitseviin yhtälöihin jää mukaan satunnaistermin $\vec{v}'$ osuus, jonka käsittely johtaa matemaattiselta kannalta tavattoman vaikeisiin tehtäviin. Mitään yleispätevää käyttökelpoista turbulenttisen virtauksen analysoimistapaa ei ole vielä edes olemassakaan — eikä ehkä koskaan tule olemaankaan — vaan joudutaan turvautumaan kokeiden perusteella saatuihin puoliempiirisiin teorioihin. Turbulenssi lisää oleellisesti esimerkiksi merkkiaineen

konsentraation tai lämpötilan tasoittumista voimakkaan sekoittumisen kautta laminaariseen tapaukseen verrattuna. Esimerkiksi putkivirtauksessa virtaus on laminaarista tai turbulenttista sen mukaan, onko ns. Reynoldsin luku

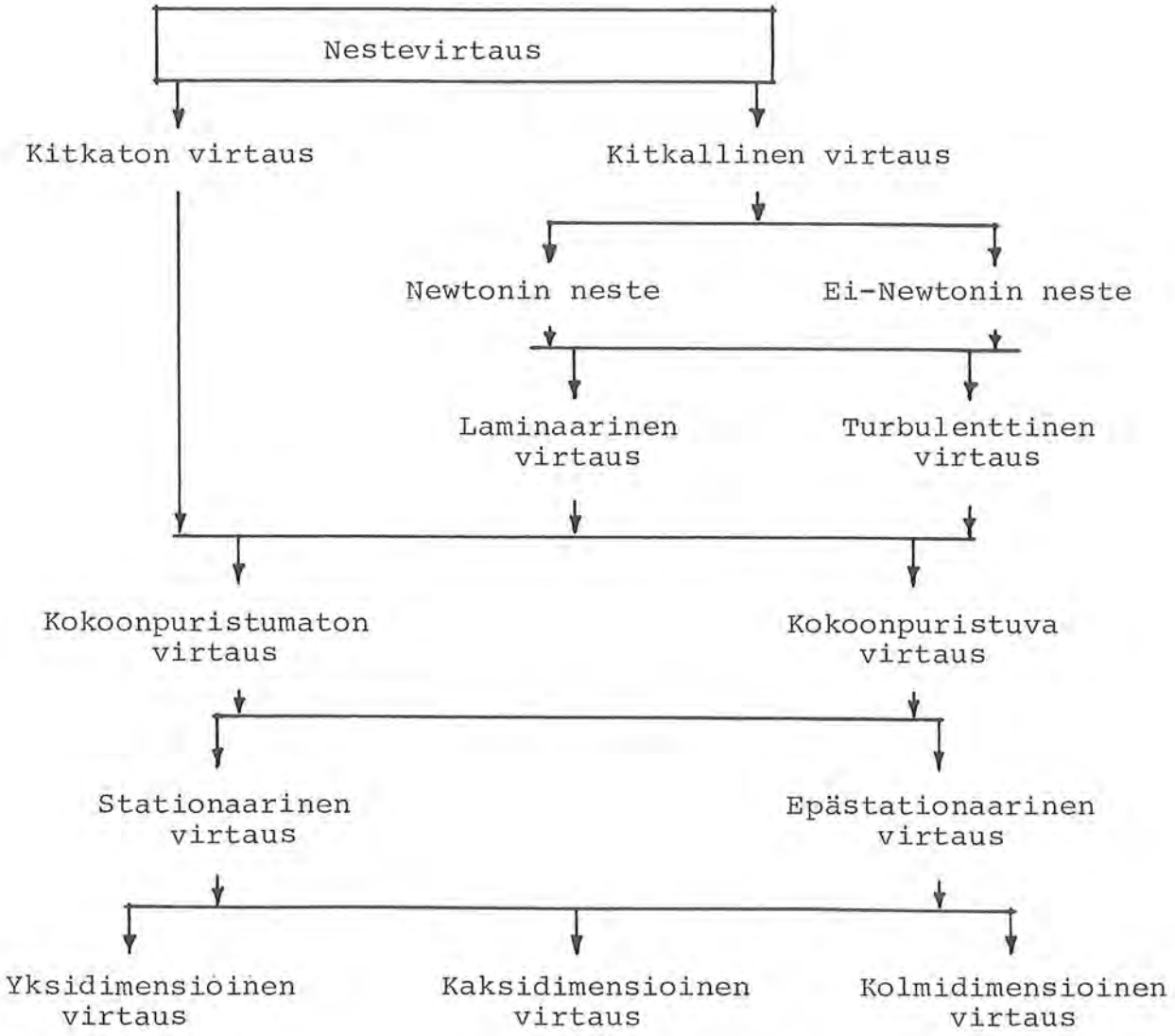
$$Re = \frac{\rho L v}{\mu} , \qquad (5.1.4)$$

pienempi tai suurempi kuin tietty kriittinen arvo. Edellä ρ on nesteen tiheys, μ viskositeetti, L sovittu karakteristinen pituus (esimerkiksi putken halkaisija) ja v sovittu karakteristinen virtausnopeus. Luonnossa esiintyvä virtaus on tavallisimmin turbulenttista.

Nesteen liiketilan ajallisen riippuvuuden mukaan virtauksen sanotaan olevan stationaarista (engl. stationary) eli pysyvää (engl. steady), mikäli nopeus, paine, lämpötila jne. kussakin alueen pisteessä eivät muutu ajan mukana; muulloin virtaus on epästationaarista (engl. unsteady) eli transienttia (engl. transient) (vrt. kuva 5.1.4). Tulos riippuu joskus koordinaatiston valinnasta. Jos lentokone lentää maanpinnan suhteen vakionopeudella maanpinnan suhteen lepotilassa olevassa ilmassa, lentokoneen liikkeestä syntyvä virtaus on epästationaarinen maanpintaan kiinnitetyn koordinaatiston kannalta. Tarkastelemalla virtausta lentokoneeseen kiinnitetyn ja sen mukana liikkuvan koordinaatiston suhteen saadaankin sitä vastoin stationaarinen tilanne. Turbulenttinen virtaus ei ole tarkasti ottaen koskaan stationaarista; ko. termiä käytetään viittaamaan keskimääräisen virtauksen käyttäytymiseen (vrt. kuva 5.1.4 (d)). Pysyvän virtauksen erikoistapauksena saadaan tilanne, jossa virtausnopeus häviää kaikkialla alueessa; tätä tapausta käsitellään nestestatiikassa. Nestestatiikan tehtävät ovat kiinteän aineen statiikan tehtäviin verrattuina — jatkuvassa lepotilassa olevan nesteen isotrooppisen jännitystilan yksinkertaisuudesta johtuen — tavallisesti hyvin helppoja ratkaista.

Kuva 5.1.5 esittää yhteenvetona virtauksen luokittelua. Matemaattinen käsittely on yleisesti ottaen sitä vaikeampaa, mitä enemmän oikealta kuvan kulkukaaviossa joudutaan kulkemaan. Täten

helpoin tapaus on kitkattoman kokoonpuristumattoman nesteen stationaarinen yksidimensioinen virtaus ja vaikein kitkallisen ei-Newtonin nesteen turbulenttinen kokoonpuristuva epästationaarinen kolmidimensioinen virtaus.



Kuva 5.1.5 Virtauksen luokittelua.

Edellä ei ole ilmeisestikään käsitelty läheskään kaikkia nestemekaniikkaan liittyviä ilmiöitä. Mainittakoon lisäksi mm. nesteseosten virtaukset, kemialliset reaktiot virtaavassa nesteessä, kavitaatio jne.

Matemaattiselta kannalta probleemat voidaan jälleen luokitella tasapaino-, ominaisarvo- ja etenemistehtäviin. Näistä olisivat esimerkkeinä vastaavasti ideaalinesteen tapauksessa stationaarinen subsoninen virtaus, seisova aaltoliike vapaan pinnan omaavassa nesteessä sekä supersoninen virtaus.

Eulerin esitystavan käyttö aiheuttaa aineellisen aikaderivaatan lausekkeen kautta epälineaarisuutta yhtälöihin. Poikkeuksellisesti hyvin hitaassa virtauksessa (Re on pieni) hitausvoimat voidaan jättää kitkavoimien rinnalla huomioonottamatta, jolloin liikeyhtälöt tulevat lineaarisiksi ja käsittely helpottuu. Mahdollinen konstitutiivisten lakien epälineaarisuus (esim. ei-Newtonin neste) aiheuttaa lisäepälineaarisuutta.

Turbulenttisuus yhdistettynä edellä mainittuun vallitsevaan epälineaarisuuteen tekee nestemekaniikan probleemat yleensä kiinteän aineen mekaniikan probleemoja oleellisesti vaikeammiksi.

5.2 Nesteiden konstitutiivisia yhteyksiä

Yleistä. Samoin kuin kiinteillä aineilla myös eri nesteillä pätevät konstitutiiviset yhteydet voivat olla hyvinkin mutkikkaita ja jatkossa oleva käsittely rajoittuu pakosta vain eräiden esimerkkitapausten esittelyyn. Kohta 4.2 on syytä käydä läpi ennen tähän kohtaan tutustumista.

Tilanyhtälö. Nesteillä yleistetyn Hooken lain osuuden (4.2.36) vastineena on lähinnä tilanyhtälö (engl. equation of state)

$$\boxed{f(\rho,p,T) = 0\ ,} \tag{5.2.1}$$

joka sitoo lepotilassa olevassa nestealkiossa esiintyvien tiheyden ρ, paineen p ja lämpötilan T arvoja toisiinsa. (Jatkossa tunnus T voi viitata joko tavanomaiseen lämpötilaan ($[T] = {}^{o}C$) tai myös tarvittaessa termodynaamiseen lämpötilaan ($[T] = K$).) Ainakin periaatteessa yhtälöstä (5.2.1) voidaan ratkaista aina yksi muuttuja muissa lausuttuna, jolloin tilanyhtälö saa muodot

$$\rho = \rho(p,T)\ , \quad p = p(T,\rho)\ , \quad T = T(\rho,p)\ . \tag{5.2.2}$$

Juhlallinen nimitys tilanyhtälö — joskus käytetään myös nimitystä terminen tai kineettinen tilanyhtälö (engl. kinetic equation of state) erotuksena myöhemmin esitettävästä kalorisesta tilanyhtälöstä — tarkoittaa siis vain erästä konstitutiivista yhteyttä. (Kyseessä on yksinkertaisen kokoonpuristuvan aineen mallin mukainen tapaus, koska kaksi riippumatonta tilasuuretta määrittää systeemin tilan. Lisäksi havaitaan, että yhteys on tietyssä mielessä kimmoinen; esimerkiksi paineen arvo riippuu vain tiheyden ja lämpötilan hetkellisistä arvoista.) Tilanyhtälöä ei pystytä yleensä esittämään yksinkertaisten kaavojen avulla vaan on käytettävä taulukoituja arvoja.

Ns. ihannekaasulle (engl. perfect gas) on kuitenkin olemassa yksinkertainen tilanyhtälö

$$\boxed{p = R\rho T} \quad (= p(\rho,T))\ , \tag{5.2.3}$$

jossa R ($[R] = Jkg^{-1}K^{-1}$) on ko. kaasun kaasuvakio (engl. gas constant) ja T on termodynaaminen lämpötila.

Varsinaisilla nesteillä tiheyden muutokset ovat vähäisiä ja tilanyhtälö esitetään usein differentiaalisessa muodossa kaavana

$$\frac{d\rho}{\rho} = \kappa_T dp - \gamma_p dT \ , \tag{5.2.4}$$

jota sovelletaan tavallisesti vastaavana myös äärellisten muutosten $\Delta\rho$, Δp ja ΔT suhteen. Jälkimmäisessä tapauksessa saadaan siis tulos

$$\frac{\rho-\rho^o}{\rho^o} = \kappa_T(p-p^o) - \gamma_p(T-T^o) \tag{5.2.4'}$$

eli vielä

$$\rho = \rho^o + \kappa_T\rho^o(p-p^o) - \gamma_p\rho^o(T-T^o) \quad (= \rho(p,T)) \ . \tag{5.2.4''}$$

Suureet ρ^o, p^o ja T^o ovat alkion tiettyyn samaan tilaan liittyviä arvoja. Suureet κ ja γ ovat kertoimia (ne voivat riippua suureista p ja T), jotka ovat olleet esillä jo kohdassa 4.2 ja joihin palataan kohta.

Jos tilanyhtälö (5.2.1) saadaan kirjoitettua muotoon

$$\boxed{f(\rho,p) = 0} \tag{5.2.5}$$

tai siis muotoihin

$$\rho = \rho(p) \ , \quad p = p(\rho) \tag{5.2.6}$$

niin, että lämpötila T ei ole enää mukana, tapauksen, virtauksen tai prosessin sanotaan olevan barotrooppinen (engl. barotropic). Näin käy esimerkiksi isotermisessä muutoksessa. Barotrooppisessa tapauksessa kytkentä mekaanisen ja termisen probleeman välillä saadaan usein kokonaan hävitettyä ja tämän vuoksi barotrooppiseen tilanteeseen pyritään puoliväkisin. Täten kaasumekaniikassa käytetään paljon ns. polytrooppista lakia (engl. polytropic law)

$$p\rho^{-n} = \text{vakio} \tag{5.2.7}$$

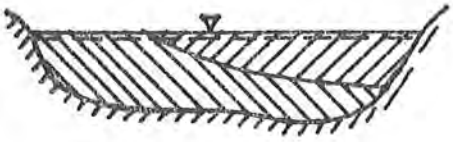
nestealkiolle. Tässä n on vakio, joka valitaan kussakin tapauksessa mahdollisimman sopivaksi. Ideaalikaasun isotermisessä virtauksessa vakio n = 1 kaavan (5.2.3) perusteella. Ihannekaasun adiabaattisessa kitkattomassa virtauksessa voidaan osoittaa, että $n = \gamma \equiv c_p/c_v$, jossa γ ($[\gamma] = -$) on ns. adiabaattivakio (esimerkiksi ilmalle $\gamma \approx 1{,}4$). Useissa tapauksissa n valitaan väliltä $[1, \gamma]$. (Tässä määritelty γ on luonnollisesti eri suure kuin kaavan (4.2.6) määrittelemä tilavuuden lämpötilakerroin.)

Täysin kokoonpuristumattoman virtauksen otaksumassa ensimmäinen kaava (5.2.6) saa muodon

$$\boxed{\rho = \text{vakio}} \tag{5.2.8}$$

tietylle nestealkiolle. Jälkimmäistä kaavaa (5.2.6) ei voida enää käyttää ja paine on nyt rajoitevoiman tyyppinen suure.

Tässä esityksessä rajoitutaan lähinnä ns. homogeenisten nesteiden käsittelyyn. Nesteen sanotaan yleensä olevan homogeenista (engl. homogeneous), jos kukin alueen nestealkio muodostuu "samanlajisesta" nesteestä; esimerkiksi puhtaasta vedestä. Vastakohtainen tapaus on ns. epähomogeeninen (engl. inhomogeneous) neste, jossa alueen nestealkiot voivat muodostua "erilajisista" nesteistä; esimerkiksi osa vedestä ja osa öljystä tai suolaisesta ja makeasta vedestä (kuva 5.2.1) tai vielä niiden seoksesta siten, että konsentraatiot eivät ole vakioita. Eulerin esitystapa tuottaa tiettyjä ongelmia epähomogeenisten nesteiden yhteydessä, koska siinä kadotetaan tieto kunkin nestealkion liikkeen historiasta. Otaksutaan, että tietyllä hetkellä tunnetaan tietyssä avaruuden pisteessä vaikka paine ja lämpötila. Ensimmäinen tilanyhtälön muoto (5.2.2) antaa tällöin homogeenisen nesteen tapauksessa heti myös nesteen tiheyden ko. pisteessä. Epähomogeenisen nesteen tapauksessa näin ei ole, koska ei tiedetä mitä erityistä tilanyhtälöä on käytettävä; veden, öljyn vai tietyn seoksen tilanyhtälö?



Kuva 5.2.1 Makea ja suolainen vesi.

Hydrauliikassa vesi otaksutaan tavallisesti homogeeniseksi ja kokoonpuristumattomaksi. Tämä merkitsee tapausta, jossa nesteen

tiheys on kaikkialla alueessa ja koko ajan sama vakio. Tästä tullaan käyttämään nimitystä vakiotiheysneste (engl. constant-density fluid). Tämä on erotettava tarkasti puhuttaessa kokoonpuristumattoman nesteen määritelmästä (5.2.8), jossa ko. vakio voi olla epähomogeenisen nesteen tapauksessa eri vakio eri nestealkioille.

Esimerkkeinä tapauksista, joissa veden kokoonpuristuvuus on otettava huomioon mainittakoon paineisku ja vapaa konvektiovirtaus.

Ns. paineisku (engl. water hammer) syntyy nesteen virratessa putkiverkostossa, kun virtaukseen aiheutetaan äkillinen häiriö esimerkiksi sulkemalla nopeasti tietty venttiili. Syntyy sysäyksen tapainen ilmiö ja paineelle saadaan epärealistisia arvoja, jollei nesteen kokoonpuristuvuutta (ja putkien seinämien muodonmuutoksia) oteta huomioon.

Ns. vapaa konvektiovirtaus (engl. free convection) — vastakohta on ns. pakotettu konvektiovirtaus (engl. forced convection) — syntyy nesteessä vallitsevien lämpötilaerojen aiheuttamien tiheyserojen ansiosta, jolloin vastaavat painovoimaerot panevat nesteen liikkeeseen. Tässä yhteydessä otetaan varsinaisten nesteiden yhteydessä tavallisesti käyttöön ns. mekaanisesti kokoonpuristumattoman (engl. mechanically incompressible) nesteen malli. Tällä tarkoitetaan nestettä, jonka tiheys otaksutaan muuttumattomaksi paineen muutosten suhteen — paine säilyy tällöin edelleen rajoitevoimana — mutta tiheyden muutos lämpötilan muutoksen johdosta otetaan huomioon. Kaavassa (5.2.4) asetetaan tällöin $\kappa_T = 0$ ja saadaan yhteys

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\gamma_p dT \ . \tag{5.2.9}$$

eli likimain

$$\rho = \rho^o - \gamma_p \rho^o (T-T^o) \quad (= \rho(T)) \ . \tag{5.2.9'}$$

Kokoonpuristuvuus ja lämpölaajeneminen. Tarkastellaan kohdassa 4.2 esitettyjä vastaavia käsitteitä yksinkertaisen kokoonpuristuvan aineen mallin kannalta. Esimerkiksi lähtemällä tilanyhtälön muodosta $\rho = \rho(p,T)$ saadaan differentioimalla ensin

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p dT \qquad (5.2.10)$$

tai vielä jakamalla puolittain tiheydellä ρ

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T dp + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p dT \ , \qquad (5.2.11)$$

jossa on käytetty termodynamiikan kirjallisuudessa esiintyvää tavanomaista merkintätapaa: osittaisderivaattamerkeissä alhaalla näkyvät tunnukset ilmaisevat riippumattomat muuttujat ja sulun ulkopuolella olevaa muuttujaa (muuttujia, jos riippumattomia tilasuureita on enemmän kuin kaksi) pidetään ko. derivaattaa laskettaessa vakiona (vakioina). (Kaavat (4.2.3) ja (4.2.6) näyttävät aluksi olevan ristiriidassa yleisen tuloksen (5.2.11) kanssa, koska edellisessä kaavassa ei esiinny termiä dT eikä jälkimmäisessä termiä dp. Selityksenä tälle on se, että kaavojen yhteydessä on lisäksi aina mainittava prosessi eli periaatteessa suureiden p ja T kulku ajan suhteen: $p = p(t)$, $T = T(t)$: Mutta tällöin voidaan periaatteessa ratkaista yhteydet $T = T(p)$ tai $p = p(T)$ ja siis tietyssä prosessissa ρ on vain yhden riippumattoman muuttujan funktio eli $\rho = \rho(p)$ tai $\rho = \rho(T)$.)

Kaavan (5.2.4) merkinnöille saadaan nyt selitys. Isotermisessä prosessissa (T = vakio, $dT = 0$) saadaan (vrt. kaavat (4.2.3), (5.2.4) ja (5.2.11)) ns. <u>isoterminen kokoonpuristuvuus</u>

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \ . \qquad (5.2.12)$$

Vastaavasti isobaarisessa prosessissa (p = vakio, $dp = 0$) saadaan (vrt. kaavat (4.2.6), (5.2.4) ja (5.2.11)) ns. <u>isobaarinen tilavuuden lämpötilakerroin</u>

$$\gamma_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \ . \qquad (5.2.13)$$

Varsinaisilla nesteillä kokoonpuristuvuus on kohtuullisten paineenmuutosten johdosta hyvin pieni. Esimerkiksi veden tiheyden kasvattaminen isotermisesti lämpötilassa 20°C määrällä 1 °/oo vaatii (ks. taulukko 5.2.1) paineen lisäyksen 22 bar. (1 bar = 0,1 MPa ≈ ilmakehässä n. 111 m korkeudella merenpinnasta keskimää-

rin vallitseva paine.) Ilmalla vastaava luku on 0,001 bar vallitsevan paineen ollessa 1 bar.

Voidaan osoittaa, että nesteessä tapahtuvien pienten painevärähtelyjen etenemisnopeus eli ns. äänen nopeus a ($[a] = ms^{-1}$) tai paremmin sanottuna äänen vauhti saadaan kaavasta

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} , \tag{5.2.14}$$

jossa K on ko. nesteen puristuvuuskerroin. Havainnot ovat osoittaneet, että tälläinen värähtely tapahtuu lähes adiabaattisesti, joten kaavassa on käytettävä ns. adiabaattista puristuvuuskerrointa $K_s = 1/\kappa_s$. Kirjallisuudessa käytetään yleensä viitettä s, koska värähtely tapahtuu myös melkein ilman kitkaa ja taas adiabaattinen kitkaton prosessi on isentrooppinen eli nestealkion ominaisentropia s säilyy muuttumatta. Suureet κ_T ja κ_s ja siis suureet K_T ja K_s eroavat toisistaan veden tapauksessa melko vähän (ks. taulukko 5.2.1); kaasuilla ero on huomattava. Kun lämpötila on 20°C ja paine $\approx$1 bar, äänen nopeus on vastaavasti vedessä ja ilmassa 1483 ms^{-1} ja 343 ms^{-1}.

Jos vielä tarkastellaan tilanyhtälöä muodossa $p = p(T,\rho)$ pitäen siis lämpötilaa ja tiheyttä riippumattomina muuttujina, saadaan

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho dT + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho . \tag{5.2.15}$$

Toisaalta kaavasta (5.2.4) seuraa

$$\left.\begin{aligned} dp &= \frac{\gamma_p}{\kappa_T} dT + \frac{1}{\rho\kappa_T} d\rho \\ &= K_T\gamma_p dT + \frac{K_T}{\rho} d\rho , \end{aligned}\right\} \tag{5.2.16}$$

joten lausekkeen (5.2.15) osittaisderivaatat saadaan aikaisemmin määriteltyjen kertoimien avulla kaavoista

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = K_T\gamma_p , \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{K_T}{\rho} . \tag{5.2.17}$$

Korostettakoon, että kaikki edellä määritellyt kertoimet on aina ajateltava valittujen riippumattomien muuttujien — kuten T ja p — funktioiksi. Yleensä riippuvuus paineesta on paljon heikompaa kuin riippuvuus lämpötilasta.

Esimerkki 5.2.1 Barotrooppinen neste. Johdetaan kokoonpuristuvuuden κ lauseke barotrooppisessa muutoksessa ja lisäksi erityisesti polytrooppisen lain tapauksessa.

Koska tilanyhtälö on muotoa $\rho = \rho(p)$, saadaan heti

$$d\rho = \frac{d\rho}{dp}\, dp \tag{a}$$

ja kaavan (4.2.3) perusteella kokoonpuristuvuus

$$\kappa = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} . \tag{b}$$

Prosessiin viittaavaa indeksiä ei nyt tarvita, koska valitun tilanyhtälön muodon johdosta κ on yksikäsitteinen.

Kirjoitetaan polytrooppinen laki (5.2.7) tässä muotoon

$$p\rho^{-n} = p^{o}(\rho^{o})^{-n} \tag{c}$$

jossa p^{o} ja ρ^{o} ovat mielivaltaisia samaan tilaan liittyviä paineen ja tiheyden referenssiarvoja. Saadaan ensin

$$\frac{p}{\rho^{n}} = \frac{p^{o}}{(\rho^{o})^{n}} , \quad \frac{p}{p^{o}} = \left(\frac{\rho}{\rho^{o}}\right)^{n} , \quad \frac{\rho}{\rho^{o}} = \left(\frac{p}{p^{o}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{d}$$

eli

$$\rho = \rho^{o}\left(\frac{p}{p^{o}}\right)^{\frac{1}{n}} . \tag{e}$$

Derivointi antaa lisäksi

$$\frac{d\rho}{dp} = \rho^{o}\,\frac{1}{n}\left(\frac{p}{p^{o}}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{1}{p^{o}} = \frac{1}{n}\,\frac{\rho^{o}}{p^{o}}\left(\frac{p}{p^{o}}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{p^{o}}{p} = \frac{1}{n}\,\frac{\rho^{o}}{p}\left(\frac{p}{p^{o}}\right)^{\frac{1}{n}} . \tag{f}$$

Täten kokoonpuristuvuus (ks. kaava (b))

$$\kappa = \frac{1}{np}\,\frac{\rho^{o}}{\rho}\left(\frac{p}{p^{o}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{np}\left(\frac{p^{o}}{p}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{p}{p^{o}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{np} . \tag{g}$$

Ihannekaasun isotermisessa prosessissa $n = 1$ ja tällöin $\kappa_T = 1/p$ ja $K_T = p$. Ideaalikaasun isentrooppisessa prosessissa $n = \gamma$ ja ilmalle $\gamma \approx 1{,}4$. Äänen nopeudeksi ilmassa saadaan täten (vrt. kaavat (5.2.14), (5.2.3) ja (5.2.47)) 20°C lämpötilassa

$$a = \sqrt{\frac{K_s}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa_s \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R \rho T}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}$$

$$= \left[1{,}4 \cdot 287 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot (273{,}15+20)K\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx \left(1{,}4 \cdot 287 \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot kg} \cdot 293\right)^{\frac{1}{2}} \approx 343 \text{ m/s} . \qquad \text{(h)}$$

Täysin kokoonpuristumattoman nesteen tapauksessa tilanyhtälö ρ = vakio nestealkiolle antaa tuloksen $d\rho/dp = 0$, joten $\kappa = 0$ ja $K = \infty$. Samoin teoriassa siis äänen nopeus $a = \infty$.

Deviaatiojännitys - deformaationopeus. Nesteen jännitysten riippuvuus eri seikoista saattaa olla samaan tapaan kuin kiinteillä aineilla monimuotoista ja riippuvuuksien kuvaamiseen voitaisiin jälleen soveltaa reologisia malleja.

Kun neste on lepotilassa, sen jännitystila on nesteen määritelmän johdosta isotrooppinen (vrt. kohta 3.4.3). Vasta nesteen liike — tarkemmin jäykän kappaleen liikkeestä poikkeava liike — synnyttää deviaatiojännityksiä eli ns. kitkaa.

Ns. Stokesin nesteen (engl. Stokesian fluid) mallissa otaksutaan, että deviaatiojännitysten arvot riippuvat vain deformaationopeuskomponenttien, tiheyden ja lämpötilan hetkellisistä arvoista. Riippuvuus on siis periaatteessa muotoa

$$\boxed{\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{\sigma}^*(\overleftrightarrow{d}, \rho, T) \ .} \qquad (5.2.18)$$

(Huomautettakoon, että kineettisen tilanyhtälön ensimmäisen muodon (5.2.2) johdosta äskeinen riippuvuus voitaisiin kirjoittaa myös yhteytenä $\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{\sigma}^*(\overleftrightarrow{d}, p, T)$.)

Suorittamalla jälleen jako $\sigma_x = -p + \sigma_x^*$ jne. eli käyttäen matriisimerkintöjä

$$\left.\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}\ \tau_{xy}]^T\ , \\
\{\sigma^*\} &= [\sigma^*_x\ \sigma^*_y\ \sigma^*_z\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}\ \tau_{xy}]^T\ , \\
\{p\} &= [p\ p\ p\ 0\ 0\ 0]^T = \{m\}^T p\ , \\
\{m\} &= [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]^T
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.19}$$

saadaan ensin esitys

$$\boxed{\{\sigma\} = -\{p\} + \{\sigma^*\}\ .} \tag{5.2.20}$$

Tässä rajoitutaan ns. Newtonin nesteen (engl. Newtonian fluid) malliin, jossa riippuvuuden deformaationopeuksista otaksutaan olevan lineaarinen. Matriisimerkinnöin saadaan siis yhteys (vrt. kaava (4.2.10))

$$\boxed{\{\sigma^*\} = [D^*]\{d\}\ ,} \tag{5.2.21}$$

jossa

$$\{d\} = [d_x\ d_y\ d_z\ g_{yz}\ g_{zx}\ g_{xy}]^T\ . \tag{5.2.22}$$

$[D^*]$ on 6×6 matriisi, jonka alkiot ovat vakioita $\{d\}$:n suhteen, mutta riippuvat tiheydestä (tai paineesta) ja lämpötilasta. Yleensä riippuvuus lämpötilasta on paljon voimakkaampi kuin riippuvuus paineesta.

Tavallisimmin Newtonin neste otaksutaan isotrooppiseksi, jolloin voidaan osoittaa, että riippumattomia ainevakioita on vain kaksi. Isotrooppisen Newtonin nesteen konstitutiiviset yhteydet tulevat olemaan ns. Navier-Poissonin laki (engl. Navier-Poisson law) eli ns. Stokesin kitkalaki (engl. Stokes' viscosity law) (vrt. kaavat (4.2.14))

$$\left.\begin{aligned}
\sigma^*_x &= 2\mu d_x + \lambda^*(d_x+d_y+d_z)\ , \quad & \tau_{yz} &= \mu g_{yz}\ , \\
\sigma^*_y &= 2\mu d_y + \lambda^*(d_x+d_y+d_z)\ , \quad & \tau_{zx} &= \mu g_{zx}\ , \\
\sigma^*_z &= 2\mu d_z + \lambda^*(d_x+d_y+d_z)\ , \quad & \tau_{xy} &= \mu g_{xy}\ .
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.23}$$

Ainevakio μ ($[\mu]$ = Pas) on nesteen ns. viskositeetti (engl. viscosity). (Joskus puhutaan tarkemmin myös dynaamisesta molekulaarisesta viskositeetista vastakohtana ns. kinemaattiselle viskositeetille μ/ρ sekä ns. turbulenttiselle viskositeetille.) Ainevakiota λ^* nimitetään joskus "toiseksi viskositeetiksi". Tavallisesti otetaan (ns. Stokesin ehto)

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu \,, \tag{5.2.24}$$

jolloin nesteen kuvaa vain yksi aineparametri: μ. Itse asiassa ilman valintaa (5.2.24) deviaatiojännityksiä koskeva kaava (3.4.18) ei toteutuisikaan. Ks. myös huomautus 1. Stokesin kitkalain katsotaan pitävän käytännössä hyvin paikkansa tavanomaisimmilla nesteillä kuten vesi ja ilma.

Matriisi $[D^*]$ on isotrooppisella nesteellä kaavojen (5.2.23) perusteella seuraava

$$[D^*] = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda^* & \lambda^* & \lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu+\lambda^* & \lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu+\lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Symmetrinen} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} . \tag{5.2.25}$$

Kohdassa 5.3 osoitetaan, että suure $d_V \equiv d_x + d_y + d_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = -1/\rho\cdot D\rho/Dt$ — ns. dilataationopeus — esittää ainealkion suhteellista tilavuudenmuutosnopeutta. Kokoonpuristumattomalla nesteellä dilataationopeus häviää, joten kertoimen λ^* arvolla ei ole merkitystä, kunhan se on äärellinen. Kaavat (5.2.23) ja (5.2.25) tulevat vastaavasti olemaan (on asetettu muodollisesti $\lambda^* = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^* &= 2\mu d_x \,, & \tau_{yz} &= \mu g_{yz} \,, \\ \sigma_y^* &= 2\mu d_y \,, & \tau_{zx} &= \mu g_{zx} \,, \\ \sigma_z^* &= 2\mu d_z \,, & \tau_{xy} &= \mu g_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{5.2.23'}$$

ja

$$[D^*] = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Symmetri-} & & & & \mu & 0 \\ \text{nen} & & & & & \mu \end{bmatrix} . \qquad (5.2.25')$$

Paineen p arvo määritetään edelleen (vaikka kyseessä on nyt liike eikä lepotila) kineettisen tilanyhtälön avulla (paitsi kokoonpuristumattoman nesteen tapauksessa, jolloin paine on rajoitevoima). Yhteenvetona saadaan siis kaavat

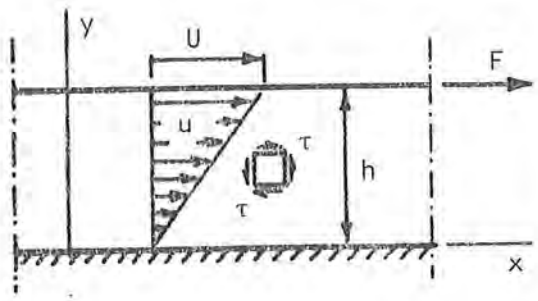
$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu d_x + \lambda^*(d_x+d_y+d_z) , & \tau_{yz} &= \mu g_{yz} , \\ \sigma_y &= -p + 2\mu d_y + \lambda^*(d_x+d_y+d_z) , & \tau_{zx} &= \mu g_{zx} , \\ \sigma_z &= -p + 2\mu d_z + \lambda^*(d_x+d_y+d_z) , & \tau_{xy} &= \mu g_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.26')$$

eli

$$\boxed{\{\sigma\} = -\{p\} + [D^*]\{d\} ,} \qquad (5.2.26)$$

joissa tavallisesti vielä $\lambda^* = -2\mu/3$.

Esimerkki 5.2.2 Viskositeetin μ fysikaalinen merkitys. Kuva (a) esittää koejärjestelyä, jossa ohut nestekerros on kahden nestekerroksen paksuuteen h verrattuna laajan yhdensuuntaisen levyn välissä. Alempi levy on paikoillaan ja ylempää levyä vedetään x-akselin suunnassa vaakasuoraan nopeudella U. Nesteeseen syntyy nopeusjakautuma, jossa ainoa nollasta eroava nopeuskomponentti on x-akselin suuntainen kasvaen lineaarisesti y-akselin suunnassa:



(a)

$$u \equiv v_x = \frac{y}{h} U , \quad v_y = 0 , \quad v_z = 0 . \qquad \text{(a)}$$

Kokeet osoittavat, että tavallisilla nesteillä ylemmän levyn liikuttamiseen vaadittava voima F on suoraan verrannollinen nopeuteen U ja levyn

pinta-alaan A sekä kääntäen verrannollinen paksuuteen h eli

$$F = \mu \frac{UA}{h} , \qquad \text{(b)}$$

jossa kerrointa μ nimitetään ko. nesteen viskositeetiksi. Levyn pintaan vaikuttava keskimääräinen leikkausjännitys $\tau = F/A$ ja kaavoista (b) ja (a) saadaan tulos

$$\tau = \mu \frac{U}{h} = \mu \frac{du}{dy} . \qquad \text{(c)}$$

Tämä tulos on Stokesin kitkalain (5.2.23) erikoistapaus. Ainoa nollasta eroava deformaationopeuskomponentti tulee olemaan (ks. kaavat (3.3.69))

$$g_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{U}{h} + 0 = \frac{U}{h} , \qquad \text{(d)}$$

joten ainoa nollasta eroava deviaatiojännityskomponentti

$$\tau \equiv \tau_{xy} = \mu g_{xy} = \mu \frac{U}{h} . \qquad \text{(e)}$$

Kuvan (a) esittämän tapainen nopeusjakautuma syntyy myös kiinteiden kappaleiden pinnan välittömässä läheisyydessä tapahtuvassa yleisessä virtauksessa ja kaava (c) ilmaisee itse asiassa (sopivasti tulkittuna) pintaan vaikuttavan paikallisen kitkan arvon.

Huomautus 1. Edellä käsittelyä on yksinkertaistettu sikäli, että täsmällisemmin ottaen yhteydessä (5.2.26) osuus $[D^*]\{d\}$ (ns. viskoosit jännitykset) ei esitä aina pelkästään deviaatiojännityksiä. On tehtävä ero tilanyhtälöstä seuraavan ns. termodynaamisen paineen p ja kohdassa 3.4.3 käsitellyn "keskipaineen" $\bar{p} \equiv -1/3(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$ välillä. Laskemalla nimittäin yhtälöiden (5.2.26') kolme vasemmanpuoleista yhtälöä puolittain yhteen saadaan tulos

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p + 2\mu(d_x+d_y+d_z) + 3\lambda^*(d_x+d_y+d_z) \qquad (5.2.27)$$

eli

$$\bar{p} = p - (\frac{2}{3}\mu+\lambda^*)(d_x+d_y+d_z) . \qquad (5.2.28)$$

Havaitaan, että keskipaine $\bar{p}$ ja termodynaaminen paine p yhtyvät arvoiltaan ainakin kolmessa tapauksessa:

(1) Lepotilassa, koska $d_x = d_y = d_z = 0$.

(2) Kokoonpuristumattomassa virtauksessa, koska tällöin $d_x + d_y + d_z = 0$.

(3) Kun viskositeetilla λ^* on arvo $-2\mu/3$.

Ehtoa

$$\kappa^* \equiv \frac{2}{3}\mu + \lambda^* = 0 \tag{5.2.29}$$

nimitetään Stokesin ehdoksi (engl. Stokes condition) ja kerrointa κ^* nimitetään tilavuusviskositeetiksi (engl. bulk viscosity). Yleensä tilavuusviskositeetin arvo on havaittu pieneksi ja sen luotettava arvo vaikeaksi mitata. Tavallisimmin käytännössä otaksutaankin Stokesin ehdon olevan voimassa. Jos näin ei tehdä, edellä esitetyt kaavat (kuten (5.2.20)) on tulkittava siten, että viskoosit jännitykset $\{\sigma^*\}$ eivät enää esitäkään deviaatiojännityksiä vaan vain poikkeaamaa termodynaamisen paineen p määrittämästä isotrooppisesta jännitystilasta $p\overleftrightarrow{I}$.

— — —

Huomautus 2. Todettakoon, että jos kaavan (5.2.20) $[D^*]$-matriisi on symmetrinen (kuten on laita Stokesin kitkalain yhteydessä) voidaan määritellä funktio $U^{\sigma^*}(\{d\})$ vastaavasti kun kohdassa 4.2 siten, että pätee

$$\sigma_x^* = \frac{\partial U^{\sigma^*}}{\partial d_x}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial U^{\sigma^*}}{\partial g_{yz}}, \ \ldots \tag{5.2.30'}$$

eli

$$\boxed{\{\sigma^*\} = \frac{\partial U^{\sigma^*}}{\partial \{d\}}\ .} \tag{5.2.30}$$

Funktion U^{σ^*} lausekkeeksi saadaan neliömuoto

$$\boxed{U^{\sigma^*} = \frac{1}{2}\{d\}^T[D^*]\{d\}\ .} \tag{5.2.31}$$

Suure $2U^{\sigma^*} = \{\sigma^*\}^T\{d\} \equiv \Phi$ ($[\Phi] = \mathrm{Wm}^{-3}$) on ns. dissipaatiofunktio

(engl. dissipation function), johon palataan tarkemmin kohdassa 5.6. (Dissipaatiofunktio Φ määritellään kirjallisuudessa usein edellisestä poiketen kaavalla $2U^{\sigma *} \equiv \mu\Phi$.)

Lämpökapasiteetti. Yksinkertaisen kokoonpuristuvan aineen tapauksessa ominaislämpökapasiteettien c_p ja c_V välille voidaan johtaa yhteys [5.1, s. 251]

$$c_p - c_V = \frac{T\gamma_p^2}{\rho\kappa_T} , \tag{5.2.32}$$

jossa T on termodynaaminen lämpötila.

Varsinaisilla nesteillä ja kiinteillä aineilla on suureen c_p kokeellinen määritys paljon helpompaa kuin suureen c_V, jonka arvo voidaan sitten laskea kaavan (5.2.32) avulla. Ihannekaasulle saadaan tämän kaavan erikoistapauksena tulos (ks. esimerkki 5.2.3)

$$c_p - c_V = R . \tag{5.2.33}$$

Termi κ_T on havaintojen mukaan kaikille aineilla positiivinen. Samoin ρ ja T ovat positiivisia ja $\gamma_p^2 \geq 0$. Täten kaavan (5.2.32) perusteella pätee kullekin aineelle aina yhteys $c_p \geq c_V$.

Esimerkki 5.2.3 Ihannekaasun lämpökapasiteetti. Johdetaan kaava (5.2.33). Lausekkeiden (5.2.13) ja (5.2.17) mukaan

$$\gamma_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p , \quad \frac{1}{\rho\kappa_T} = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T . \tag{a}$$

Yhteys (5.2.32) voidaan täten esittää edelleen yleisenä kaavana

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p^2\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T . \tag{b}$$

Ihannekaasun kineettisen tilanyhtälön (5.2.3) muodoista

$$\rho(p,T) = \frac{p}{RT} , \quad p(\rho,T) = R\rho T \tag{c}$$

saadaan vastaavasti tulokset

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{p}{RT^2}\,, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = RT\,. \tag{d}$$

Näiden sijoitus kaavaan (b) antaa

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho^2}\frac{p^2}{R^2T^4}RT = \frac{p^2}{R\rho^2T^2} = \frac{R^2\rho^2T^2}{R\rho^2T^2} = R\,. \tag{e}$$

Sisäenergia. Tarkastellaan yksinkertaista kokoonpuristuvaa ainetta. Jos otetaan esimerkiksi ρ ja T riippumattomiksi muuttujiksi, ominaissisäenergia $e = e(\rho,T)$. Tätä yhteyttä nimitetään nestemekaniikassa usein kaloriseksi tilanyhtälöksi (engl. caloric equation of state).

Differentioimalla saadaan ensin yhteys

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial\rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho dT\,. \tag{5.2.34}$$

Termodynamiikan keinoin [5.1, s. 249] tämä voidaan saattaa lopuksi mm. muotoon

$$\boxed{de = (p - TK_T\gamma_p)\frac{1}{\rho 2}\,d\rho + c_V dT\,.} \tag{5.2.35}$$

Ihannekaasun tapauksessa kaavan sulkulauseke häviää (kaavojen (5.2.15) ja (5.2.16) perusteella $K_T\gamma_p = (\partial p/\partial T)_\rho$, jonka arvo on ideaalikaasulle $R\rho$. Täten kerroin $TK_T\gamma_p = TR\rho = p$.) ja saadaan tulos

$$\boxed{de = c_V dT\,.} \tag{5.2.36}$$

Lisäksi ihannekaasun yhteydessä otaksutaan, että c_V on vain lämpötilan funktio; $c_V = c_V(T)$ ja siis myös $e = e(T)$.

Usein kaavaa (5.2.35) approksimoidaan käytännössä jättämällä sen ensimmäinen termi pois olipa sitten kyseessä varsinainen neste tai kiinteä aine. Lisäksi c otaksutaan monasti vakioksi. Tällöin $\Delta e = c\Delta T$ äärellisten muutosten Δe ja ΔT yhteydessä.

Kokoonpuristumattoman nesteen otaksuma antaisi tuloksen $d\rho = 0$,

mutta tämä ei ole tässä yhteydessä ajatuksena täysin tyydyttävä, koska useimmissa prosesseissa lämpötilan muutokseen liittyy myös tiheyden muutos. Jos otaksutaan vain mekaanisesti kokoonpuristumaton neste (ks. kaava (5.2.9)), saadaan

$$de = (p-TK_T\gamma_p)\frac{1}{\rho^2}(-\gamma_p\rho dT) + c_V dT$$

$$= (-p\frac{\gamma_p}{\rho} + \frac{TK_T\gamma_p^2}{\rho} + c_V)dT = (-p\frac{\gamma_p}{\rho} + c_p - c_V + c_V)dT$$

$$= (c_p - p\frac{\gamma_p}{\rho})dT \,, \qquad (5.2.37)$$

jossa on käytetty hyväksi kaavaa (5.2.32).

Mekaanisesti kokoonpuristumaton neste saatiin muodollisesti aikaan asettamalla kaavassa (5.2.4) $\kappa_T = 0$. Vaihtoehtoinen, fysikaalisesti realistisempi tulkinta on ottaa $dp = 0$ (isobaarinen muutos) tai vielä paremmin: kyseessä on tapaus, jossa $\kappa_T dp << \gamma_p dT$.

Esimerkki 5.2.4 Veden sisäenergia. Tarkastellaan kaavassa (5.2.37) esiintyvien termien c_p ja $p\gamma_p/\rho$ sekä vielä kaavan (5.2.32) termien c_p ja c_V keskinäistä suuruutta vedelle.

Taulukon 5.2.1 avulla saadaan arvot

$$c_p \approx 4200 \frac{J}{kg\cdot K} \,, \quad (T = 80^oC) \qquad (a)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_p &= 643\cdot 10^{-6}K^{-1} \,, \quad (T = 80^oC) \\ \rho &\approx 972 \frac{kg}{m^3} \qquad (T = 80^oC) \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

ja

$$\frac{p\gamma_p}{\rho} \approx \frac{1bar\cdot 643\cdot 10^{-6}K^{-1}}{972kg/m^3}$$

$$= \frac{0,1\cdot 10^6 N\cdot 643\cdot 10^{-6}m^3}{m^2\cdot 972kg\cdot K} \approx 0,066 \frac{J}{kg\ K} \qquad (c)$$

Tulos on laskettu lämpötilassa 80^oC, jolloin voimakkaimmin muuttuva termi γ_p on suurimmillaan. Termi (c) on vain noin 0,02 o/oo termistä (a) eli

häviävän pieni. Kaava (5.2.37) voitaneen siis käytännössä kirjoittaa muotoon $de = c_p dT$, vaikka paine olisi huomattavasti normaali-ilmanpainetta suurempi. (Otaksutaan siis, että γ_p, ρ ja c_p olisivat paineen kasvaessa edelleen samaa suuruusluokkaa kuin edellä.)

Kaavan (5.2.32) mukaan

$$c_p - c_V = \frac{T\gamma_p^2}{\rho\kappa_T} . \tag{d}$$

Kun otetaan arvot (b) ja vielä

$$\left.\begin{aligned} T &= (273{,}15 + 80)\,\mathrm{K} \approx 353\,\mathrm{K} , \\ \kappa_T &= 4{,}48\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{N} , \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

saadaan

$$\frac{T\gamma_p^2}{\rho\kappa_T} = \frac{353\mathrm{K}\cdot 643^2\cdot 10^{-12}\mathrm{K}^{-2}}{972\mathrm{kg/m}^3\cdot 4{,}48\cdot 10^{-10}\mathrm{m}^2/\mathrm{N}} \approx 340\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} . \tag{f}$$

Tämä on noin 8 % termistä c_p. Jos lämpötila on 20°C, termin suuruus on enää noin 0,7 % termistä c_p ja kun lämpötila on 4°C, $c_p = c_V$, koska tällöin $\gamma_p = 0$.

Usein käytännössä kaava (5.2.37) kirjoitetaankin muotoon

$$de = cdT \tag{g}$$

ja jätetään mainitsematta, mistä ominaislämpökapasiteetista on kysymys.

<u>Lämmönjohtavuus</u>. Fourierin lämmönjohtumislakia sovelletaan nesteillä aivan vastaavasti kuin kiinteillä aineilla. Tavallisesti nesteet otaksutaan lisäksi isotrooppisiksi lämmönjohtumisen suhteen. Täten käyttäen merkintöjä

$$\left.\begin{aligned} \vec{q}^{\,c} &= q_x^c\vec{i} + q_y^c\vec{j} + q_z^c\vec{k} , \\ \vec{\nabla}T &= \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} , \end{aligned}\right\} \tag{5.2.38}$$

Fourierin laki on muotoa

$$\boxed{\vec{q}^{\,c} = -\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}T)} \tag{5.2.39}$$

tai isotrooppisessa tapauksessa

$$\vec{q}^{c} = -k\vec{\nabla}T \ . \tag{5.2.40}$$

Matriisimerkintöjä

$$\left.\begin{aligned} \{q^c\} &= [q_x^c \ q_y^c \ q_z^c]^T \ , \\ \{\nabla\} &= [\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z}]^T \ , \\ \{\nabla\}T &= [\frac{\partial T}{\partial x} \ \frac{\partial T}{\partial y} \ \frac{\partial T}{\partial z}]^T \end{aligned}\right\} \tag{5.2.41}$$

käyttäen saadaan vastaavasti yhteys

$$\boxed{\{q^c\} = -[k]\{\nabla\}T} \tag{5.2.39'}$$

tai isotrooppisessa tapauksessa

$$\{q^c\} = -k\{\nabla\}T \tag{5.2.40'}$$

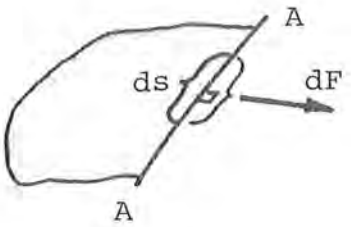
eli

$$q_x^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial x} \ , \quad q_y^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial y} \ , \quad q_z^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial z} \ . \tag{5.2.40''}$$

Höyrynpaine. Painetta p_v, jossa varsinainen neste kiehuu, nimitetään ko. nesteen höyrynpaineeksi eli kyllästymispaineeksi (engl. vapor pressure). Se riippuu lämpötilasta. Taulukossa 5.2.1 on annettu joitakin veden höyrynpaineen arvoja. Jos nesteen paine pääsee laskemaan jossain virtausalueella lähelle vastaavassa lämpötilassa vallitsevaa nesteen höyrynpainetta, on vaarana ns. kavitaatio (engl. cavitation; cavity = onkalo), jossa nesteeseen syntyy höyrykuplia. Kuplien luhistuessa syntyvät sysäykset voivat aiheuttaa laitteisiin huomattavia vaurioita ja haitata niiden toimintoja.

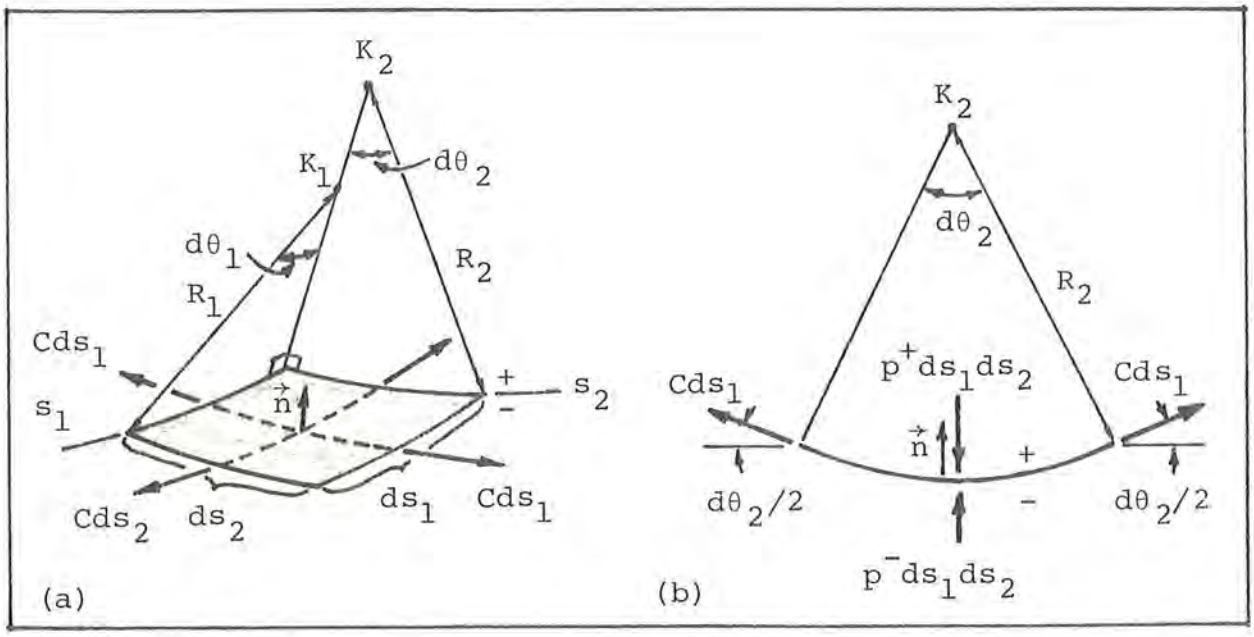
Pintajännitys. Varsinaisen nesteen ja kaasun tai myös kahden sekoittumattoman varsinaisen nesteen rajapinta käyttäytyy tunne-

tusti — fysiikassa tarkemmin selostetuista syistä johtuen — kuten jännitetty kalvo. Ns. pintajännitys (engl. surface tension) C ([C] = Nm^{-1}) vaikuttaa siis jokaisessa rajapinnan kuvitellussa leikkauksessa A-A siten, että viiva-alkioon dl syntyy rajapinnan tangenttitasossa kohtisuorassa viiva-alkiota vastaan oleva resultoiva differentiaalinen voima dF = C ds (kuva 5.2.2). Rajapinnan ollessa kaareva paineella on eri arvo pinnan eri puolilla. Pintajännityksellä on merkitystä pienimittakaavaisissa ilmiöissä kuten nesteen nousussa kapillaariputkissa sekä mallikokeissa, kun mallin mitat ovat pieniä. Huomautettakoon, että suureella C ei ole nimestään huolimatta tavanomaisen jännityksen dimensiota.



Kuva 5.2.2 Viiva-alkioon ds vaikuttava voima dF.

Kuva 5.2.3 (a) esittää liioiteltuna kahden nesteen rajapinnassa olevaa differentiaalista suorakulmaista pinta-alkiota, jonka sivujen pituudet ovat ds_1 ja ds_2. Valitaan pinnan toinen puoli positiiviseksi (ja suunnataan yksikkönormaalivektori $\vec{n}$ osoittamaan



Kuva 5.2.3 (a) Pinta-alkio. (b) Pinta-alkioon vaikuttavia voimia.

tällä puolelle) ja toinen negatiiviseksi ja merkitään paineen arvoja pinnan eri puolilla vastaavasti tunnuksilla p^+ ja p^-. Alkion sivujen kaarevuussäteet olkoot R_1 ja R_2 merkillä varustettuina (plus tai miinus) riippuen siitä, ovatko vastaavat kaarevuuskeskipisteet $\vec{n}$:n positiivisella vai negatiivisella suunnalla. Alkion sivuihin vaikuttavat voimat Cds_1 ja Cds_2 ja alkion pintoihin voimat $p^+ds_1ds_2$ ja $p^-ds_1ds_2$. Muodostetaan näiden voimien tasapainoyhtälö normaalin $\vec{n}$ suunnalle käyttäen kuvaa (b) apuna:

$$2Cds_1 \sin\frac{d\theta_2}{2} + 2Cds_2 \sin\frac{d\theta_1}{2} - p^+ds_1ds_2 + p^-ds_1ds_2 = 0. \quad (5.2.42)$$

Kun sinit korvataan argumenteillaan ja otetaan huomioon yhteydet

$$d\theta_1 = \frac{ds_1}{R_1}, \quad d\theta_2 = \frac{ds_2}{R_2}, \quad (5.2.43)$$

saadaan jakamalla vielä suureella ds_1ds_2 tulos

$$\boxed{[\![p]\!] \equiv p^+ - p^- = C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).} \quad (5.2.44)$$

Täten paine ei ole jatkuva, vaan saa kaavan osoittaman hyppäyksen $[\![p]\!]$ siirryttäessä pinnan negatiiviselta puolelta sen positiiviselle puolelle. Paine on suurempi pinnan koveralla puolella. Geometrian keinoin voidaan osoittaa, että suure $1/R_1 + 1/R_2$ eli ns. <u>keskikaarevuus</u> (engl. mean curvature) on tietyssä pinnan pisteessä invariantti suure eli sen arvo ei muutu olivatpa toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat suunnat s_1 ja s_2 valitut miten hyvänsä. Tämä tieto on sopusoinnussa kaavan (5.2.44) fysikaalisen merkityksen kanssa.

Äskeinen johto perustui liikemäärän taseen periaatteen soveltamiseen kuvan 5.2.3 (a) esittämään differentiaaliseen ainekaistaleeseen. Koska kaistaleen paksuus on äärimmäisen pieni, sen massan voidaan katsoa häviävän ja siis sen liikemäärä häviää myös kaistaleen liikkeessäkin. Täten kaava (5.2.44), joka johdettiin otaksuen aluksi lepotila pätee myös nesteen liikkeessäkin muodossa

$$\boxed{-[\![\sigma]\!] \equiv -(\sigma^+ - \sigma^-) = C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ,} \qquad (5.2.45)$$

jossa suureet $\sigma^+ = \vec{n}\cdot\vec{t}^+$ ja $\sigma^- = \vec{n}\cdot\vec{t}^-$ tarkoittavat vektorin $\vec{n}$ osoittamaan pinta-alkioon liittyvän normaalijännityksen arvoja heti rajapinnan eri puolilta otettuina. Toisin sanoen normaalijännitys saa pinnan läpi siirryttäessä kaavan (5.2.45) osoittaman hyppäyksen. Itse asiassa kaava (3.4.11) ei ole enää pintajännityksen yhteydessä voimassa, jos vektorit $\vec{n}$ ja $-\vec{n}$ ajatellaan rajapinnan eri puolilla vaikuttaviksi. Tämä merkitsee myös, että traktio-jännitysyhteyksiä (3.4.13) on tällöin täydennettävä sopivasti reunaehtoja muotoiltaessa. Deviaatiojännitysten hävitessä kaavan (5.2.45) nähdään palautuvan ($\sigma^+ = -p^+$, $\sigma^- = -p^-$) kaavaksi (5.2.44); ks. lausekkeet (3.4.16) ja (3.4.20').

<u>Ainevakioita.</u> Taulukoihin 5.2.1 ja 5.2.2 on kerätty sekalaisista lähteistä joitakin vettä ja ilmaa koskevia ainevakioiden arvoja. Pintajännityksen C arvo koskee veden ja ilman välistä rajapintaa.

Suure ν on ns. <u>kinemaattinen viskositeetti</u> (engl. kinematic viscosity) ($[\nu] = m^2s^{-1}$), joka määritellään kaavalla

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} . \qquad (5.2.46)$$

Nimitys kinemaattinen viskositeetti johtuu siitä, että ν:n yksikkö muodostuu pelkästään kinemaattisista suureista päinvastoin kuin μ:n. Merkintä (5.2.46) on otettu käyttöön, koska μ ja ρ esiintyvät tietyissä kaavoissa juuri yhdistelmänä μ/ρ.

Ilman kaasuvakion arvo on

$$R = 287 \ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}} . \qquad (5.2.47)$$

Muistettakoon vielä, että

$$1 \text{ bar} = 0{,}1 \text{ MPa} \approx 1 \text{ at} \approx 1 \text{ atm} . \qquad (5.2.48)$$

Taulukko 5.2.1 Veden ominaisuuksia eri lämpötiloissa normaaliilmanpaineessa.

T ^oC	ρ kgm^{-3}	μ Pas	ν m^2s^{-1}	κ_T Pa^{-1}	κ_s Pa^{-1}
0	999,8	$1,78 \cdot 10^{-3}$	$1,78 \cdot 10^{-6}$	$5,08 \cdot 10^{-10}$	$5,08 \cdot 10^{-10}$
4	1000,0	1,50•	1,50•		
10	999,6	1,30•	1,30•	4,81•	4,80•
20	998,2	1,00•	1,00•	4,58•	4,55•
40	992,2	$6,52 \cdot 10^{-4}$	$6,57 \cdot 10^{-7}$	4,38•	4,27•
60	983,2	4,70•	4,78•	4,37•	4,15•
80	971,8	3,56•	3,66•	4,48•	4,13•
100	958,3	2,82•	2,94•		

T ^oC	γ_p K^{-1}	c_p $Jkg^{-1}K^{-1}$	k $Wm^{-1}K^{-1}$	C Nm^{-1}	p_v kPa
0	$-67 \cdot 10^{-6}$	4 218	0,552	0,0754	0,61
4				0,0749	0,81
10	89•	4 192		0,0740	1,23
20	208•	4 182	0,597	0,0726	2,33
40	390•	4 179	0,628	0,0695	7,38
60	522•	4 184	0,651	0,0662	19,92
80	643•	4 196	0,668	0,0626	47,36
100			0,680	0,0584	101,32

Taulukko 5.2.2 Ilman ominaisuuksia eri lämpötiloissa normaaliilmanpaineessa.

T K	ρ kgm^{-3}	μ Pas	ν m^2s^{-1}	c_p $Jkg^{-1}K^{-1}$	k $Wm^{-1}K^{-1}$
100	3,6010	$0,692 \cdot 10^{-5}$	$1,923 \cdot 10^{-6}$	1027	0,00925
150	2,3675	1,028•	4,343•	1010	0,01374
200	1,7684	1,329•	7,490•	1006	0,01809
250	1,4128	1,488•	9,49 •	1005	0,02227
300	1,1774	1,983•	$1,568 \cdot 10^{-5}$	1006	0,02624
350	0,9980	2,075•	2,076•	1009	0,03003
400	0,8826	2,286•	2,590•	1014	0,03365
450	0,7833	2,484•	2,886•	1021	0,03707

5.3 Massan säilyminen

Jatkuvuusyhtälö. Kappaleen massa on vakio, joten kaavan (3.4.3) mukaisesti pätee

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho(x,y,z,t)dV = 0 \ . \tag{5.3.1}$$

Soveltamalla tämän vasempaan puoleen Reynoldsin lausetta (3.3.88') ($f \triangleq \rho$) saadaan yhtälö

$$\int [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho)]dV = 0 \ , \tag{5.3.2}$$

jonka tulee olla voimassa kirjoitettuna myös mille hyvänsä alueen V osa-alueelle ΔV. Tämän perusteella saadaan — vastaavalla ajattelulla kuin kohdassa 4.3 — alueen jokaisessa pisteessä pätevä yhtälö

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0} \tag{5.3.3}$$

eli

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \ . \tag{5.3.3'}$$

eli

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\nabla\}^T\{\rho v\} = 0 \ . \tag{5.3.3''}$$

Tämä on spatiaalikoordinaateissa lausuttu massan säilymisen periaatteen paikallinen muoto eli jatkuvuusyhtälö.

Lausekkeesta (5.3.3') saadaan kehittämällä

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}) = 0 \tag{5.3.4}$$

ja soveltamalla aineellisen aikaderivaatan määritelmää (3.3.60) vaihtoehtoinen muoto

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0} \tag{5.3.5}$$

eli

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{5.3.5'}$$

eli

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\{\nabla\}^T\{v\} = 0 \ . \tag{5.3.5''}$$

Pysyvässä virtauksessa (ks. huomautus 1) $\partial\rho/\partial t = 0$ ja yhtälöstä (5.3.3) tulee

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0} \tag{5.3.6}$$

eli

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \ . \tag{5.3.6'}$$

eli

$$\{\nabla\}^T\{\rho v\} = 0 \tag{5.3.6''}$$

Kokoonpuristumattoman nesteen — kullekin nestealkiolle pätee ρ = vakio, $D\rho/Dt = 0$ — virtauksessa yhtälöstä (5.3.5) saadaan tulos

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0} \tag{5.3.7}$$

eli

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{5.3.7'}$$

eli

$$\{\nabla\}^T\{v\} = 0 \ . \tag{5.3.7''}$$

eli merkintöjen (3.3.69) perusteella vielä

$$d_x + d_y + d_z = 0 \ . \qquad (5.3.7''')$$

eli

$$\{m\}^T\{d\} = 0 \ . \qquad (5.3.7'''')$$

Yhtälöä (5.3.7) nimitetään usein paitsi jatkuvuusyhtälöksi myös kokoonpuristumattomuusehdoksi. Yhtälö pätee luonnollisesti myös vakiotiheysnesteelle, joka on kokoonpuristumattoman nesteen erikoistapaus.

Jatkuvuusyhtälöllä on tärkeä asema nestemekaniikassa — päin vastoin kuin yleensä pienten siirtymien teorian mukaisessa kiinteän aineen mekaniikassa. Jatkuvuusyhtälöä käytetään lisäksi usein hyväksi vallitsevien yhtälöiden manipuloinneissa erilaisiin haluttuihin muotoihin.

Huomautus 1. Pysyvässä eli stationaarisessa virtauksessa nopeus, tiheys, paine, lämpötila jne. kussakin alueen pisteessä eivät muutu ajan mukana. Tällöin tyyppillisen funktion $f = f(x,y,z,t)$ riippuvuus ajasta häviää eli $f = f(x,y,z)$ ja siis myös lokaalinen derivaatta $\partial f/\partial t = 0$.

Huomautus 2. Edellä esiintynyt suure (vrt. kohta 4.3)

$$d_V \equiv d_x + d_y + d_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (5.3.8)$$

eli

$$d_V = \{m\}^T\{d\} = \{\nabla\}^T\{v\} \qquad (5.3.8')$$

on suhteellinen tilavuudenmuutosnopeus eli ns. dilataationopeus (engl. rate of dilatation). Se esiintyy useissa kaavoissa jatkossa. Jatkuvuusyhtälön (5.3.5) perusteella pätee myös kaava

$$d_V = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} . \tag{5.3.9}$$

Nimeen dilataationopeus liittyvä fysikaalinen merkitys selviää esimerkiksi yhtälöstä (4.2.2), kun se jaetaan puolittain ajan differentiaalilla dt:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} . \tag{5.3.10}$$

Koska kyseessä ovat ainealkion kokemat muutosnopeudet, kaava tulee täsmällisemmin ottaen kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = d_V \tag{5.3.11}$$

joka antaa selityksen käytetylle nimitykselle.

Huomataan, että kohdassa 4.3 esitetty dilataation muutosnopeus

$$\frac{D\varepsilon_V}{Dt} = -\frac{J}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \tag{5.3.12}$$

yhtyy arvoltaan tässä käsiteltyyn dilataationopeuteen, kun rajoitutaan pieniin siirtymiin, jolloin $J \approx 1$. Ero suurten siirtymien yhteydessä johtuu siitä, että dilataationopeus tarkastelee suhteellista tilavuudenmuutosta aina kunkinhetkiseen tilavuuteen verraten, kun taas dilataation muutosnopeutta tarkasteltaessa vertailutilavuus on alkutilaan liittyvä vakiosuure.

5.4 Liikemäärän tase

Cauchyn liikeyhtälöt. Liikemäärän taseen periaate saatettiin kohdassa 3.4 muotoon

$$\int_{V(t)} \rho\vec{b}dV + \int_{S(t)} \vec{t}dS = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\vec{v}dV \ . \tag{5.4.1}$$

Pintaintegraali

$$\begin{aligned}\int_S \vec{t}dS &= \int_S (n_x\vec{t}^{(x)}+n_y\vec{t}^{(y)}+n_z\vec{t}^{(z)})dS \ , \\ &= \int_V (\frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{t}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{t}^{(z)}}{\partial z})dV \ .\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

On sovellettu traktio-jännitysyhteyttä (3.4.12) ja Gaussin lauseen mukaisia kaavoja (L.2.10). Kun yhtälön (5.4.1) oikeaan puoleen sovelletaan vielä Reynoldsin lausetta (3.3.88'') ($f \triangleq \vec{v}$), saadaan siis yhtälö

$$\int_V \rho\vec{b}dV + \int_V (\frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{t}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{t}^{(z)}}{\partial z})dV = \int_V \rho\,\frac{D\vec{v}}{Dt}\,dV \ . \tag{5.4.3}$$

Näin ollen liikemäärän taseen periaatteen paikalliseksi muodoksi tulee yhtälö

$$\boxed{\rho\vec{b} + \frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{t}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{t}^{(z)}}{\partial z} = \rho\vec{a}} \tag{5.4.4'}$$

eli

$$\left.\begin{aligned}\rho b_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} &= \rho a_x \ , \\ \rho b_y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} &= \rho a_y \ , \\ \rho b_z + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} &= \rho a_z \ .\end{aligned}\right\} \tag{5.4.4''}$$

Näitä yhtälöitä nimitetään tavallisesti liikeyhtälöiksi (engl. equation of motion) (tarkemmin Cauchyn liikeyhtälöt tai ns. Cauchyn I liikelaki, Cauchy v. 1827), jotka pätevät siis mielivaltaiselle kontinuumille. Muita usein näkyviä nimityksiä ovat liikemääräyhtälöt (engl. momentum equations) tai voimayhtälöt.

Kirjoittamalla traktio kaavan (3.4.14) mukaisessa muodossa $\vec{t} = \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}$ ja soveltamalla termiin $\int \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}dS$ yleistettyä Gaussin lausetta (L.2.9') ($f \triangleq \overleftrightarrow{\sigma}$, $* \triangleq \cdot$) saadaan Cauchyn liikeyhtälöiden täysin yleinen koordinaatistosta riippumaton muoto

$$\boxed{\rho\vec{b} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma} = \rho\vec{a}\ .} \tag{5.4.4}$$

Termi $\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}$ on jännitystensorin divergenssi, [3.1, s. 59].

Matriisimerkintöjä käyttäen liikeyhtälöt (5.4.4'') voidaan vielä esittää mm. muodossa

$$\boxed{\rho\{b\} + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma\} = \rho\{a\}\ ,} \tag{5.4.4'''}$$

jossa siis

$$\left.\begin{aligned} \{b\} &= [b_x\ b_y\ b_z]^T\ , \\ [{}_f\partial_\sigma] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.5}$$

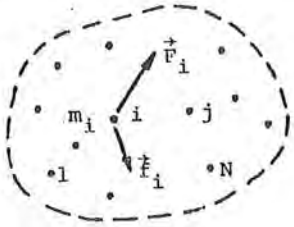
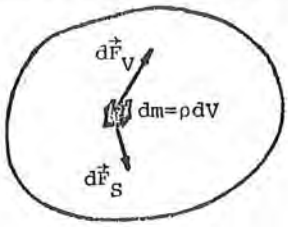
ja muut merkinnät ovat olleet esillä jo aikaisemmin.

Liikeyhtälöt esiintyvät miltei identtisen näköisinä myös pienten siirtymien teorian mukaisessa kiinteän aineen mekaniikassa (ks. kohta 4.4.1). Vastaavissa kiihtyvyyden lausekkeissa on kuitenkin selvä ero. Lagrangen esityksessä käytetään kaavoja (3.3.15) ja Eulerin esityksessä kaavoja (3.3.64).

Liikeyhtälö on johdettu taulukossa 5.4.1 myös differentiaaligeometrisella tarkastelulla (vrt. kohta 4.4.1) ja lisäksi on esitetty vertailun vuoksi partikkelisysteemin tyypillisen partikke-

lin liikeyhtälö. Vastintermit ovat selvästi havaittavissa.

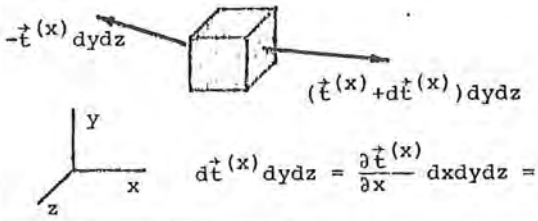
Taulukko 5.4.1 Cauchyn liikeyhtälön johtaminen.

Partikkelisysteemi	Kontinuumi
 $\vec{F}_i = \vec{b}m_i$ (1) $\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_{ij}$ (2)	 $d\vec{F}_V = \rho\vec{b}dV$ (1') $d\vec{F}_S = \vec{f}^{\sigma}dV$ (2')
Liikeyhtälö: $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i\vec{a}_i$ (3)	Liikeyhtälö / dV: $\rho\vec{b} + \vec{f}^{\sigma} = \rho\vec{a}$ (3')

Suureen $\vec{f}^{\sigma}$ lauseke

$$\vec{f}^{\sigma} = \frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{t}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{t}^{(z)}}{\partial z} \qquad (4')$$

saadaan tarkastelemalla oheisen kuvan esittämään tapaan differentiaalisen ainealkion tah-



$$d\vec{t}^{(x)}dydz = \frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x}dV$$

koihin vaikuttavia voimia. Kuvaan on merkitty näkyviin vain x-akselia vastaan kohtisuorassa oleviin tahkoihin vaikuttavat pintavoimat.

Ainealkion tahkoihin vaikuttavien pintavoimien resultanttia dF_S ainealkion tilavuudella dV jaettuna on siis merkitty mukavuussyystä lyhenteellä

$$\vec{f}^{\sigma} \equiv \frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{t}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{t}^{(z)}}{\partial z} = \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma} \qquad (5.4.6)$$

Huomautus 1. Liikeyhtälöiden oikea puoli $\rho\vec{a}$ esitetään tavallisesti laskemalla kiihtyvyys kaavan (3.3.64) avulla, jolloin

$$\rho\vec{a} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) . \qquad (5.4.7)$$

eli komponenttimuodossa

$$\left.\begin{aligned}
\rho a_x &= \rho\frac{Dv_x}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) ,\\
\rho a_y &= \rho\frac{Dv_y}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) ,\\
\rho a_z &= \rho\frac{Dv_z}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.7')$$

eli vielä matriisimerkinnöin

$$\rho\{a\} = \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\{v\} + \left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]\{v\}\right) . \qquad (5.4.7'')$$

Kuitenkin tietyissä yhteyksissä on hyödyllistä käyttää erästä vaihtoehtoista lauseketta, joka syntyy seuraavasti. Jos kaavan (5.4.1) oikeaan puoleen sovelletaankin Reynoldsin lauseen version (3.3.88'') sijasta versiota (3.3.88'), saadaan ($f \triangleq \rho\vec{v}$)

$$\frac{D}{Dt}\int \rho\vec{v}dV = \int \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho\vec{v})\right]dV . \qquad (5.4.8)$$

Täten liikeyhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\rho\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) \qquad (5.4.9)$$

eli komponenteittain

$$\left.\begin{aligned}
\rho a_x &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z) ,\\
\rho a_y &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_y v_z) ,\\
\rho a_z &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_z v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_z) .
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.9')$$

Nämä kaavat voidaan todeta oikeiksi myös kehittelemällä lausekkeita (5.4.7) tai (5.4.7') sopivasti auki osittaisderivoimalla ja käyttämällä lisäksi apuna jatkuvuusyhtälöä. Termi $\vec{v}\rho\vec{v} = \rho\vec{v}\vec{v}$ ns. <u>liikemäärävuotensori</u> (dyadi) (engl. momentum flux tensor).

Huomautus 2. Nestemekaniikassa toimitaan tavallisesti erottamalla jännitys isotrooppiseen paineosaan ja deviaatiojännitysosaan kuten on todettu jo kohdissa 3.4.3 ja 5.2. Liikeyhtälöiden (5.4.4), (5.4.4'') ja (5.4.4''') vastineet tulevat olemaan tällöin vastaavasti

$$\boxed{\rho\vec{b} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* = \rho\vec{a}\ ,} \tag{5.4.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
\rho b_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho a_x\ ,\\
\rho b_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho a_y\ ,\\
\rho b_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} &= \rho a_z\ ,
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.10'}$$

ja

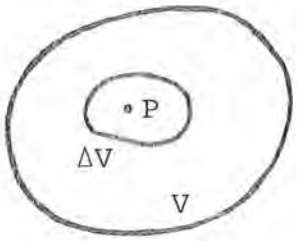
$$\rho\{b\} + [{}_f\partial_\sigma](-\{p\} + \{\sigma^*\}) = \rho\{a\}\ . \tag{5.4.10''}$$

Koska $\{p\} = \{m\}p$ ja koska on helppo todeta, että $[{}_f\partial_\sigma]\{m\} = \{\nabla\}$, yhtälö voidaan esittää myös muodossa

$$\boxed{\rho\{b\} - \{\nabla\}p + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma^*\} = \rho\{a\}\ .} \tag{5.4.10'''}$$

— — —

Huomautus 3. Kaavan (5.4.4) johdon yhteydessä ajatellaan tavallisesti, että kenttävoiman intensiteetin $\vec{b}(x,y,z,t)$ arvo tietyssä pisteessä tietyllä hetkellä on annettu suure, joka on riippumaton valitusta kappaleesta. Johdossa tarkastellaan kuitenkin valitun alueen V osa-alueita ΔV (vrt. kohta 4.3). Kullekin osa-alueelle ΔV termin $\int_{\Delta V}\rho\vec{b}dV = \vec{F}_{\Delta V}$ tulee esittää periaatteen (3.2.3) sanamuodon perusteella osa-alueen ΔV ulkopuolisesta massasta kertyvää kaukovaiku-



Kuva 5.4.1 Alue V ja sen osa-alue ΔV.

tusvoimien resultanttia. Täten ilmeisesti suureen $\vec{b}$ arvo tietyssä pisteessä P (kuva 5.4.1) äskeisessä kaavassa riippuu periaatteessa pistettä P ympäröivän osa-alueen ja vastaavan osakappaleen valinnasta. Suorittamalla johto huolellisesti havaitaan, että liikeyhtälöissä esiintyvä $\vec{b}$ tarkoittaa sitä raja-arvoa, jota intensiteetti lähestyy, kun pistettä P ympäröivä osa-alue ΔV kutistuu kohti tätä pistettä. $\vec{b}$ on siis periaatteessa kaikesta avaruuden massasta ko. pisteeseen kehittyvä kenttävoiman intensiteetti. Tämä tulos ymmärretään suoraan myös taulukossa 5.4.1 esitetyn differentiaaligeometrisen johdon perusteella. Tavallisissa käytännön tehtävissä $\vec{b}$:n riippuvuus ΔV:stä on kuitenkin mitätön. Esimerkiksi nestesäiliön painejakautumaa laskettaessa ei ole tarpeen ottaa huomioon nesteen eri osasten välisiä gravitaatiovoimia koko maapallon aiheuttaman gravitaatiovoiman rinnalla ja $\vec{b}$ voidaan otaksua riippumattomaksi ΔV:stä. Vastakohtainen esimerkki on vaikkapa kaukana avaruudessa leijuva kaasupilvi, jonka analyysissä eri osasten väliset gravitaatiovoimat ovat oleellisia.

— — —

Navier-Stokesin liikeyhtälöt. Cauchyn liikeyhtälöt (5.4.4) pätevät mielivaltaiselle kontinuumille. Jos aineen otaksutaan noudattavan Stokesin kitkalakia, deviaatiojännityksen lauseke on $\{\sigma^*\} = [D^*]\{d\}$. Siirrytään muutenkin taulukon 3.3.2 mukaisten matriisimerkintöjen käyttöön, jolloin $\{d\} = [{}_d\partial_v]\{v\}$ ja $\{a\} = \partial/\partial t\{v\} + [\partial v/\partial r]\{v\}$. Liikeyhtälöt (5.4.10''') saavat tässä tapauksessa siis muodon

$$\boxed{\rho\{b\} - \{\nabla\}p + [{}_f\partial_\sigma]([D^*][{}_d\partial_v]\{v\}) = \rho(\frac{\partial}{\partial t}\{v\}+[\frac{\partial v}{\partial r}]\{v\}).} \tag{5.4.11}$$

Nämä ovat nestemekaniikan kuuluisimmat kaavat, ns. Navier-Stokesin yhtälöt (Navier v. 1822, Stokes v. 1845). Ne ovat siis Newtonin nestettä koskevat, nopeuksissa lausutut liikeyhtälöt. Yhtälöt ovat toista kertalukua paikkakoordinaattien suhteen ja ensimmäistä kertalukua ajan suhteen.

Yhtälöiden loppuun asti kehitettyjä yksityiskohtaisia lausekkeita ei esitetä tässä, koska niistä tulee melko mutkikkaita, jos viskositeetti μ ja siis matriisi $[D^*]$ riippuu paikasta.

Näitä lausekkeita ei tulla tarvitsemaankaan, kun ratkaisun lähtökohtana pidetään virtuaalisen tehon periaatetta. Todettakoon vain, että kun kyseessä on vakioviskositeetin omaava neste, Navier-Stokesin yhtälöt voidaan saattaa klassilliseen muotoon

$$\rho\vec{b} - \vec{\nabla}p + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \mu\nabla^2\vec{v} = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) \tag{5.4.12}$$

eli komponenteittain

$$\left.\begin{aligned} &\rho b_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \\ &\quad + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \\ &\quad = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.4.12'}$$

Jos kyseessä on kokoonpuristumaton virtaus, dilataationopeus $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ ja kaavat yksinkertaistuvat hieman.

Eulerin liikeyhtälöt. Tarkastellaan vielä kitkattomaksi otaksuttua virtausta eli ideaalinesteen mallia. Vallitsevat liikeyhtälöt saadaan joko Navier-Stokesin yhtälöistä asettamalla viskositeetti μ nollaksi tai sitten suoraan Cauchyn liikeyhtälöistä asettamalla $\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$ eli $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$, jolloin saadaan ns. Eulerin liikeyhtälöt (Euler v. 1755)

$$\boxed{\rho\vec{b} - \vec{\nabla}p = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right)} \tag{5.4.13}$$

eli komponenttimuodossa

$$\left.\begin{aligned} &\rho b_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right), \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.4.13'}$$

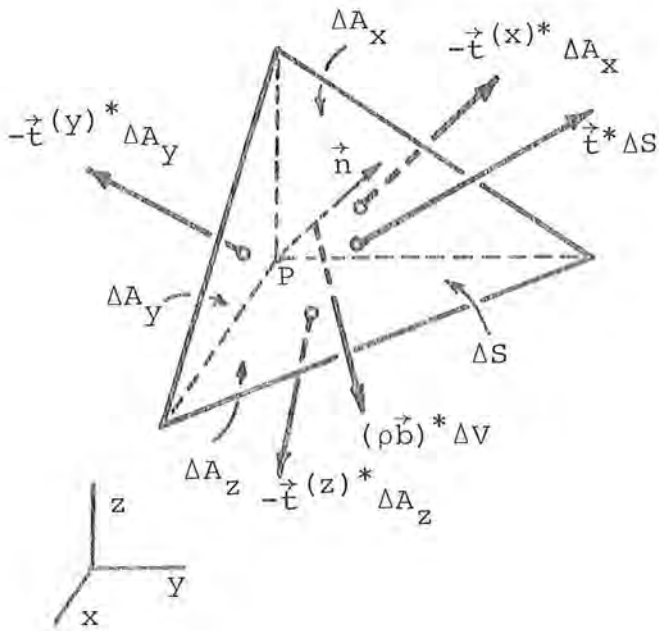
eli matriisimuodossa

$$\rho\{b\} - \{\nabla\}p = \rho(\frac{\partial}{\partial t}\{v\}+[\frac{\partial v}{\partial r}]\{v\}) \ . \qquad (5.4.13'')$$

Klassillinen hydromekaniikka käsittelee näitä yhtälöitä ja aiheesta on julkaistu valtava määrä kirjallisuutta. Tulosten käyttökelpoisuus rajoittuu kuitenkin vain sellaisiin tilanteisiin, joissa todellinen virtaus muistuttaa kitkatonta virtausta; siis lähinnä rajakerrosvirtauksen ulkopuolinen alue. Huomattakoon, että Eulerin liikeyhtälöt ovat enää vain ensimmäistä kertalukua paikan suhteen. Tämä seikka tulee näkymään myös vastaavien reunaehtojen asettelussa.

Traktio-jännitysyhteys. Otsikon esittämää yhteyttä on käytetty hyväksi jo liikeyhtälöitä johdettaessa. Suoritetaan kuitenkin nyt traktio-jännitysyhteyden johto ja kirjataan lisäksi näkyviin yhteenvetona kohdassa 3.4.3 jo esiintyneitä kaavoja sekä eräs matriisiversio.

Tarkastellaan kohdassa 3.4.3 kuvassa 3.4.13 esitettyä tetraedrin muodoista kappaletta (kuva 5.4.2) nyt kuitenkin varustettuna hieman eri merkinnöillä kuin aikaisemmin ja pyritään suorittamaan käsittely tällä kertaa verrattain täsmällisesti [3.1, s. 75].



Kuva 5.4.2 Tetraedrin muotoiseen kappaleeseen vaikuttavat voimat.

Tetraedrin kolme pisteen P kautta kulkevaa tahkoa ovat koordinaattitasojen suuntaisia ja neljäs tahko on näiden suhteen vinossa. Vinon tahkon ulkoinen yksikkönormaalivektori on $\vec{n}$.

Tahkojen pinta-aloja ΔA_x, ΔA_y, ΔA_z ja ΔS koskeva eräs yhteys saadaan seuraavasti. Yleistetty Gaussin lause (L.2.9) ($* \rightarrow$ tyhjä) antaa sovellettuna funktioon $f = 1$ tuloksen

$$\boxed{\int_S d\vec{S} \equiv \int_S \vec{n}dS = \vec{0}} \qquad (5.4.14)$$

eli umpinaisen pinnan yli laskettu vektoriaalinen pinta-ala häviää. Tuloksen muistamista helpottaa seuraava fysikaalinen tulkinta [5.2, s. 97]. Ajatellaan tietty kappale sijoitetuksi vapaasti nestesäiliön sisälle. Lisätään nestesäiliön painetta paikan suhteen vakioarvolla Δp. Kappaleeseen vaikuttavien pintavoimien resultantin muutoksen lauseke on $-\int_S \Delta p\vec{n}dS = -\Delta p\int_S \vec{n}dS$. Intuitio sanoo, että tasainen paineen muutos ei pyri liikuttamaan kappaletta mihinkään suuntaan, joten syntyvän lisävoiman arvon tuleekin olla nolla. Saadaan siis kaava (5.4.14).

Kaava (5.4.14) tulee kuvan 5.4.2 tetraedriin sovellettuna muotoon

$$\vec{n}\Delta S - \vec{i}\Delta A_x - \vec{i}\Delta A_y - \vec{j}\Delta A_z = \vec{0} \qquad (5.4.15)$$

eli

$$(n_x\vec{i}+n_y\vec{j}+n_z\vec{k})\Delta S = \vec{i}\Delta A_x + \vec{j}\Delta A_y + \vec{k}\Delta A_z \qquad (5.4.16)$$

eli vielä

$$\Delta A_x = n_x\Delta S\ , \quad \Delta A_y = n_y\Delta S\ , \quad \Delta A_z = n_y\Delta S\ . \qquad (5.4.17)$$

Nämä kaavat ilmaisevat siis, että koordinaattitasojen suuntaiset tahkot ovat vinon tahkon projektioita koordinaattitasoille.

Kuvassa 5.4.2 on esitetty tetraedriin vaikuttavat massavoimien ja pintavoimien resultantit redusoituina tetraedrin keskipisteeseen ja tahkojen keskipisteisiin. Syntyviä vastaavia momentteja ei ole esitetty, koska niitä ei tarvita liikemäärän taseen periaatteessa. Tähdet viittaavat tässä ko. suureiden keskimääräisiin arvoihin tetraedrissa ja sen kullakin tahkolla. Täten liikemäärän taseen periaate antaa tetraedrin sisällä olevaan kappaleeseen sovellettuna yhtälön

$$(\rho\vec{b})^*\Delta V + \vec{t}^*\Delta S - \vec{t}^{(x)*}\Delta A_x - \vec{t}^{(y)*}\Delta A_y - \vec{t}^{(z)*}\Delta A_z = \frac{D}{Dt}\int_{\Delta V}\rho\vec{v}dV\ . \qquad (5.4.18)$$

Yhtälön oikea puoli (sovelletaan Reynoldsin lausetta (3.3.88''))

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Delta V}\rho\vec{v}dV = \int_{\Delta V}\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}dV = \int_{\Delta V}\rho\vec{a}dV = (\rho\vec{a})^{*}\Delta V \ . \qquad (5.4.19)$$

Olkoon vielä pisteen P etäisyys vinosta tahkosta h. Tällöin tetraedrin tilavuus

$$\Delta V = \frac{1}{3}h\Delta S \ . \qquad (5.4.20)$$

Kun tehdään kaavojen (5.4.17), (5.4.19) ja (5.4.20) mukaiset sijoitukset yhtälöön (5.4.18) saadaan

$$(\rho\vec{b})^{*}\frac{1}{3}h\Delta S + \vec{t}^{*}\Delta S - \vec{t}^{(x)*}n_x\Delta S - \vec{t}^{(y)*}n_y\Delta S +$$

$$- t^{(z)*}n_z\Delta S = (\rho\vec{a})^{*}\frac{1}{3}h\Delta S \ . \qquad (5.4.21)$$

Jakamalla yhtälö puolittain ΔS:llä ja järjestelemällä termejä saadaan

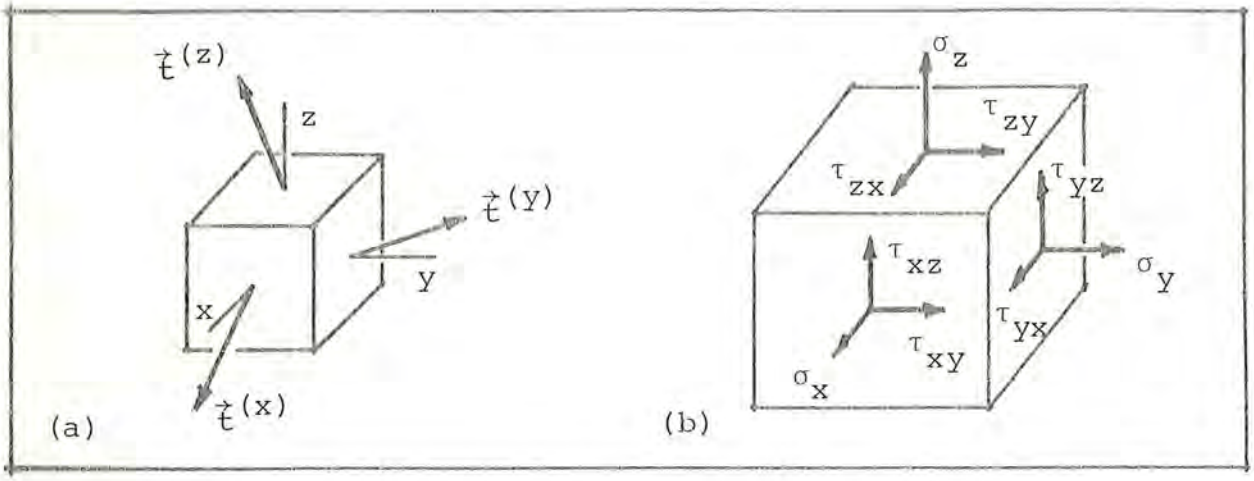
$$\vec{t}^{*} + \frac{1}{3}(\rho\vec{b})^{*}h = n_x\vec{t}^{(x)*} + n_y\vec{t}^{(y)*} + n_z\vec{t}^{(z)*} + \frac{1}{3}(\rho\vec{a})^{*}h \ . \qquad (5.4.22)$$

Annetaan nyt tetraedrin koon rajatta pienentyä antamalla $h \to 0$. Tällöin yhtälön kummankin puolen viimeiset termit lähestyvät nollaa. Samoin suureiden tähdellä merkityt arvot lähestyvät suureiden arvoja pisteessä P. Täten päädytään traktio-jännitysyhteyteen (3.4.12).

Kirjataan tähän vielä yhteenvetona Cauchyn eli Eulerin jännityksiä koskevia kaavoja Eulerin esityksen mukaisia merkintöjä käyttäen.

Koordinaattitasojen suuntaisiin pinta-alkioihin vaikuttavien traktioiden esitysmuodot ovat karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa (ks. kuva 5.4.3, joka on kuvan 3.4.10 toisinto)

$$\left.\begin{aligned}
\vec{t}^{(x)} &= \sigma_x\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k} \ , \\
\vec{t}^{(y)} &= \tau_{yx}\vec{i} + \sigma_y\vec{j} + \tau_{yz}\vec{k} \ , \\
\vec{t}^{(z)} &= \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \sigma_z\vec{k} \ .
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.23)$$



Kuva 5.4.3 (a) Kolmeen pinta-alkion suuntaan liittyvät jännitysvektorit. (b) Jännityskomponentit.

Huomautettakoon, että joissakin esityksissä leikkausjännitysten indeksien järjestys valitaan päinvastoin. Tässä siis aina ensimmäinen indeksi viittaa tahkoon, joka on kohtisuorassa ko. indeksin ilmaisemaa koordinaattiakselia vastaan ja jälkimmäinen indeksi taas viittaa siihen koordinaattiakseliin, jonka suunnassa leikkausjännitys vaikuttaa.

Traktio-jännitysyhteys on

$$\boxed{\vec{t} = \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}} \tag{5.4.24}$$

eli

$$\vec{t} = n_x\vec{t}^{(x)} + n_y\vec{t}^{(y)} + n_z\vec{t}^{(z)} \tag{5.4.24'}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} t_x &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx} \,, \\ t_y &= n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy} \,, \\ t_z &= n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z \end{aligned}\right\} \tag{5.4.24''}$$

eli

$$\boxed{\{t\} = [n]\{\sigma\} \,,} \tag{5.4.24'''}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} \{t\} &= [t_x \; t_y \; t_z]^T , \\ [n] &= \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.25)$$

Matriisikaavassa (5.4.24''') on jo käytetty hyväksi tietoa, että parittaiset leikkausjännitykset ovat yhtä suuria. Matriisin [n] rakenteen samankaltaisuus kaavan (5.4.5) matriisin $[{}_f\partial_\sigma]$ kanssa on silmiinpistävä.

Jos jännitys jaetaan paineosaan ja deviaatio-osaan (vrt. kaavat (4.2.42)), kaavojen (5.4.24) ja (5.4.24''') vastineiksi saadaan

$$\vec{t} = -\vec{n}p + \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* \qquad (5.4.26)$$

ja

$$\{t\} = -\{n\}p + [n]\{\sigma^*\} . \qquad (5.4.26')$$

Nämä muodot syntyvät yhteyksiä $\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{I} = \vec{n}$ ja $[n]\{m\} = \{n\}$ soveltamalla. Merkitsemällä $\vec{t}^* = \vec{t} + \vec{n}p$ kaava (5.4.26) saadaan vielä muotoon

$$\vec{t}^* = \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* . \qquad (5.4.27)$$

Suuretta $\vec{t}^*$ voidaan nimittää vaikka deviatoriseksi traktioksi.

5.5 Liikemäärämomentin tase

Liikemäärämomentin taseen periaate saatettiin kohdassa 3.4.4 muotoon

$$\int_{V(t)} \rho \vec{r}\times\vec{b}dV + \int_{S(t)} \vec{r}\times\vec{t}dS = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\vec{r}\times\vec{v}dV \ , \qquad (5.5.1)$$

jossa origo on otettu peruspisteeksi. Karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa saadaan siis ensin

$$\int_V \rho \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} dV + \int_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix} dS = \frac{D}{Dt}\int_V \rho \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} dV. \qquad (5.5.2)$$

Tarkastellaan tämän vektoriyhtälön ensimmäistä skalaarikomponenttiyhtälöä:

$$\int_V \rho(yb_z - zb_y)dV + \int_S (yt_z - zt_y)dS = \frac{D}{Dt}\int_V \rho(yv_z - zv_y)dV \ . \qquad (5.5.3)$$

Sovelletaan traktio-jännitysyhteyksiä (5.4.24'') ja Reynoldsin lausetta (3.3.88'') ($f \triangleq yv_z - zv_y$):

$$\int_V \rho(yb_z - zb_y)dV + \int_S (yn_x\tau_{xz} + yn_y\tau_{yz} + yn_z\sigma_z +$$

$$-zn_x\tau_{xy} - zn_y\sigma_y - zn_z\tau_{zy})dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt}(yv_z - zv_y)dV \ . \qquad (5.5.4)$$

Tämän jälkeen muunnetaan pintaintegraali tilavuusintegraaliksi Gaussin kaavojen (L.2.10) avulla ja kehitetään yhtälön oikeaa puolta:

$$\int_V \rho(yb_z - zb_y)dV + \int_V [\frac{\partial}{\partial x}(y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(y\tau_{yz} - z\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(y\sigma_z - z\tau_{zy})]dV =$$

$$= \int_V \rho(\frac{Dy}{Dt}v_z + y\frac{Dv_z}{Dt} - \frac{Dz}{Dt}v_y - z\frac{Dv_y}{Dt})dV. \qquad (5.5.5)$$

Tästä seuraa lokaalinen yhtälö (Huomataan, että $\partial y/\partial x = 0$, $\partial z/\partial x = 0$, $\partial y/\partial y = 1$, $\partial z/\partial y = 0$, $\partial y/\partial z = 0$, $\partial z/\partial z = 1$, $Dy/Dt = v_y$, $Dv_z/Dt = a_z$, $Dz/Dt = v_z$, $Dv_y/Dt = a_y$.)

$$\rho(yb_z - zb_y) + y\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} - z\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \tau_{yz} + y\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} +$$

$$- z\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + y\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} - \tau_{zy} - z\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} = \rho(\cancel{v_y v_z} + ya_z - \cancel{v_z v_y} - za_y). \quad (5.5.6)$$

Järjestelemällä termejä saadaan

$$y(\cancel{\rho b_z + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}} - \rho a_z) + \tau_{yz} +$$

$$- z(\cancel{\rho b_y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}} - \rho a_y) - \tau_{zy} = 0 . \quad (5.5.7)$$

Yhtälön kaarisulkulausekkeet häviävät liikeyhtälöiden (5.4.4'') perusteella, joten on vihdoin saatu lokaalinen yhtälö

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 . \quad (5.5.8)$$

Käsittelemällä yhtälön (5.5.2) kahta muuta komponenttiyhtälöä vastaavalla tavalla saadaan yhteisesti vallitsevat yhtälöt

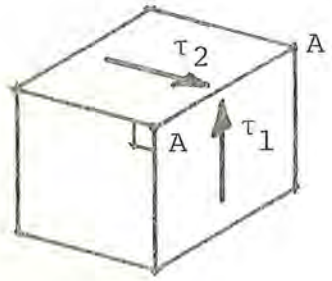
$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy} , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} , \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} .} \quad (5.5.9)$$

Nämä kaavat kulkevat nimellä Cauchyn II liikelaki (engl. Cauchy's second law of motion) tai parittaisten leikkausjännitysten yhtäsuuruus (engl. theorem of conjugate shear stresses).

Koska koordinaattiakselien suunnat voidaan valita mielivaltaisesti, tulos (5.5.9) voidaan ilmaista kuvan 5.5.1 merkintöjä käyttäen myös muodossa

$$\boxed{\tau_1 = \tau_2 .} \quad (5.5.10)$$

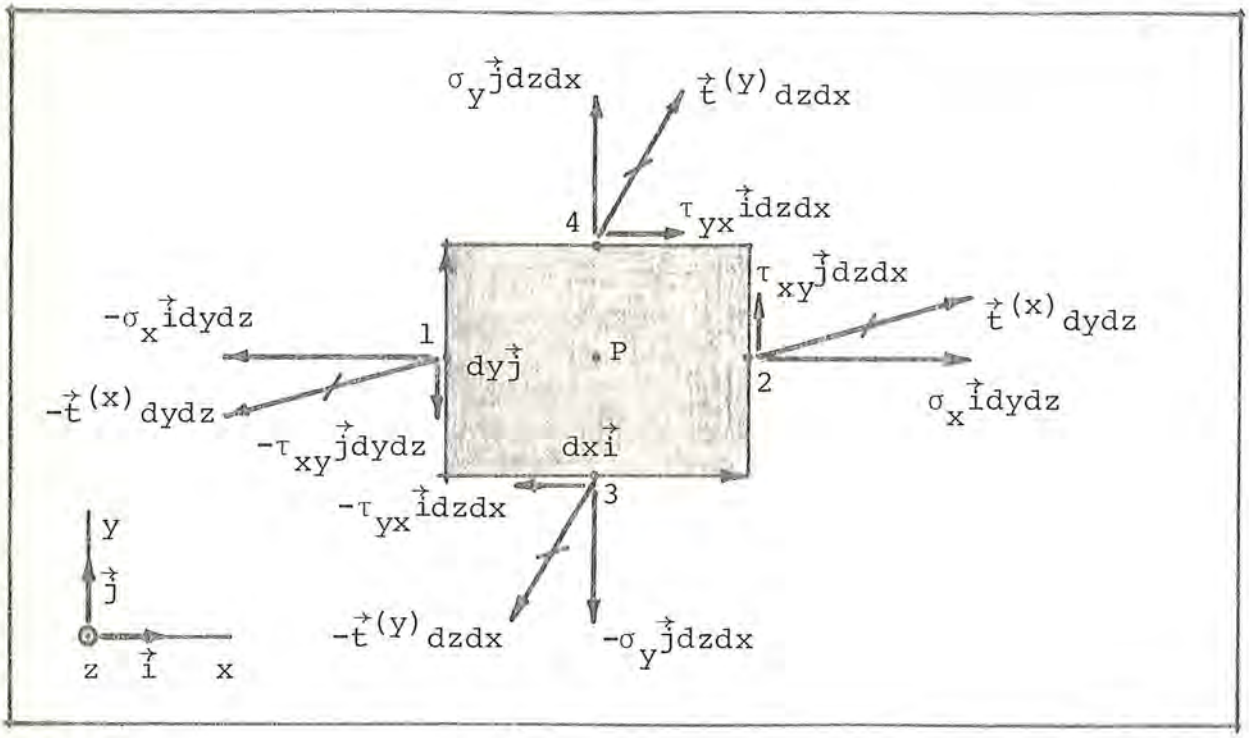
Kuvassa 5.5.1 mielivaltaisella tavalla kappaleeseen ajateltuun



Kuva 5.5.1 Parittaiset leikkausjännitykset.

viivaan eli särmään A-A liittyvät pinta-alkiot ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Suureet τ_1 ja τ_2 ovat näihin pinta-alkioihin vaikuttavien leikkausjännitysten $\vec{\tau}_1$ ja $\vec{\tau}_2$ särmää vastaan kohtisuorassa suunnassa vaikuttavat komponentit. τ_1 ja τ_2 ovat siis suunnatut aina joko kuvan esittämällä tavalla kumpikin kohti särmää tai sitten kumpikin särmästä poispäin.

Äskeinen johto tuntuu lopputuloksen yksinkertaisuuteen nähden ehkä kohtuuttoman raskaalta. Differentiaaligeometrinen johto perustuu kuvan 5.5.2 esittämään asetelmaan (On otettu tasotapaus,



Kuva 5.5.2 Alkioon vaikuttavat pintavoimat tasotapauksessa.

jotta kuva ei tulisi liian mutkikkaaksi.). Alkion tahkoihin vaikuttavat pintavoimat on redusoitu tahkojen keskipisteisiin 1, 2, 3 ja 4. Kun alkioon sovelletaan kulmaliikemäärän taseen periaatetta (5.5.1) (tai tässä havainnollisemmin muotoa $d\vec{M}_V + d\vec{M}_S = (d\vec{L})^{\bullet}$), tarkka suuruusluokkatarkastelu osoittaa, että alkion koon rajatta pienentyessä suureet $d\vec{M}_V$ ja $(d\vec{L})^{\bullet}$ ovat korkeamman kertaluvun pieniä

suureita kuin $d\vec{M}_S$. Täten liikemäärän taseen periaate saa kuvan 5.5.2 esittämässä tapauksessa lopuksi muodon $d\vec{M}_S = \vec{0}$.

Lasketaan pintavoimien momentti $d\vec{M}_S$ alkion keskipisteen P suhteen. Pisteeksi P voitaisiin valita mikä hyvänsä kiinteä piste (tai myös alkion massakeskiö, vaikka se liikkuukin). Pisteiden 1, 2, 3 ja 4 paikkavektorit pisteen P suhteen ovat vastaavasti $-dx\vec{i}/2$, $dx\vec{i}/2$, $-dy\vec{j}/2$ ja $dy\vec{j}/2$. Koska normaalijännitysvoimien vaikutussuorat kulkevat pisteen P kautta, näiden voimien momentti pisteen P suhteen häviää ja vain leikkausjännitysvoimien antamat termit tulee ottaa huomioon. Saadaan siis (Huomattakoon, että kuvassa 5.5.2 traktiot $\vec{t}^{(x)}$ ja $\vec{t}^{(y)}$ on esitetty arvoiltaan muuttumattomina alkion vastakkaisilla tahkoilla päinvastoin kuin esimerkiksi kuvassa 4.4.3. Voidaan kuitenkin osoittaa, että näiden suureiden differentiaalit eivät tule tässä näkyviin lopullisiin yhtälöihin, kun alkion koko rajatta pienenee.)

$$
\begin{aligned}
d\vec{M}_S = & -\frac{1}{2}\, dx\vec{i}\times(-\tau_{xy}\vec{j}dydz) + \frac{1}{2}\, dx\vec{i}\times\tau_{xy}\vec{j}dydz + \\
& -\frac{1}{2}\, dy\vec{j}\times(-\tau_{yx}\vec{i}dzdx) + \frac{1}{2}\, dy\vec{j}\times\tau_{yx}\vec{i}dzdx \\
= & \ \tau_{xy}dxdydz\vec{i}\times\vec{j} + \tau_{yx}dxdydz\vec{j}\times\vec{i} = \tau_{xy}dV\vec{k} - \tau_{yx}dV\vec{k} \\
= & \ (\tau_{xy}-\tau_{yx})dV\vec{k} \ . \qquad (5.5.11)
\end{aligned}
$$

Koska $d\vec{M}_S = \vec{0}$, saadaan näin ollen viimeinen kaavoista (5.5.9). Kaksi muuta kaavaa syntyvät helposti suorittamalla äskeisen tyyppinen johto ottamalla huomioon kaikki alkioon vaikuttavat pintavoimat kolmidimensioisessa tapauksessa.

5.6 Energian tase

5.6.1 Mekaanisen energian tase

Yleistä. Tarkastellaan ennen aksiooman (3.2.6) käsittelyä, minkälaisen vastineen partikkelimekaniikassa johdettu ns. energian periaate (2.3.60)

$$P = K^{\cdot} \tag{5.6.1}$$

saa kontinuumimekaniikassa. Tulos johdetaan manipuloimalla Cauchyn liikeyhtälöä (5.4.4), joten kysymyksessä ei ole uusi aksiooma. Kaavaa (5.6.1) tullaan nimittämään tässä mekaanisen energian taseen periaatteeksi, jotta sen ero varsinaisen aksiooman (3.2.6) kanssa korostuisi.

Kappaleeseen vaikuttavien voimien teho P koostuu siis ulkoisten ja sisäisten voimien tehosta:

$$P = P_{ext} + P_{int} , \tag{5.6.2}$$

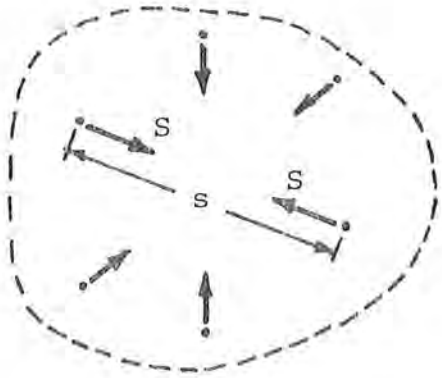
jossa ulkoisten voimien teho P_{ext} on lausekkeiden (3.4.30), (3.4.31) ja (3.4.32) mukaisesti

$$P_{ext} = P^V_{ext} + P^S_{ext} = \int_V \rho \vec{b}\cdot\vec{v}dV + \int_S \vec{t}\cdot\vec{v}dS \tag{5.6.3}$$

Sisäisten voimien tehon P_{int} lauseke ei ole sitävastoin heti nähtävissä kontinuumin tapauksessa. Partikkelisysteemillä sen lausekkeeksi saatiin lopuksi jälkimmäinen kaava (2.3.55):

$$P_{int} = -\sum_{ij} S\dot{s} , \tag{5.6.4}$$

jossa summa otetaan systeemin kaikkien partikkeliparien yli. (Vrt. kuva 5.6.1, johon on piirretty näkyviin selvyyden vuoksi vain osa parittaisista voimista S.)



Kuva 5.6.1 Partikkelisysteemi.

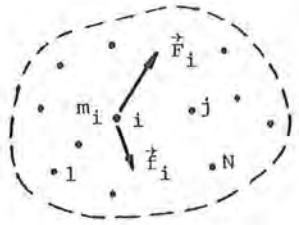
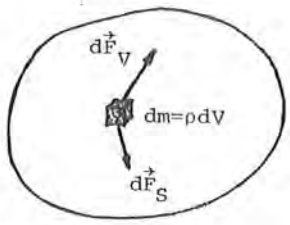
Kontinuumin sisäisten (makroskooppisten) voimien tehon lauseke

saadaan esille johtamalla kaava (5.6.1) vastaavasti kuin partikkelisysteemin yhteydessä. Johto on esitetty taulukossa 5.6.1, jossa on vielä kerrattu vertailun vuoksi partikkelisysteemin yhteydessä tarvittavat vastaavat vaiheet. Kaavan (4') oikea puoli on saatu Reynoldsin lauseen muodon (3.3.88'') avulla ($f \mathrel{\hat{=}} \vec{v}\cdot\vec{v}$):

$$K^{\bullet} = \frac{D}{Dt}\frac{1}{2}\int_V \rho\vec{v}\cdot\vec{v}dV = \frac{1}{2}\int_V \rho\frac{D}{Dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{a}) = \int_V \rho\vec{a}\cdot\vec{v}dV \ . \qquad (5.6.5)$$

Taulukko 5.6.1 Mekaanisen energian taseen periaatteen johtaminen.

Partikkelisysteemi	Kontinuumi
 $\vec{F}_i = \vec{b}m_i$ (1) $\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_{ij}$ (2) Liikeyhtälö: $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i\vec{a}_i$ (3)	 $dF_V = \rho b dV$ (1') $d\vec{F}_S = \vec{f}^{\sigma}dV$ (2') Liikeyhtälö / dV: $\rho\vec{b} + \vec{f}^{\sigma} = \rho\vec{a}$ (3')
Kerrotaan kunkin partikkelin i liikeyhtälö (3) skalaarisesti partikkelin nopeudella $\vec{v}_i$ ja lasketaan kaikki näin saadut yhtälöt yhteen: $\Sigma\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i + \Sigma\vec{f}_i\cdot\vec{v}_i = \Sigma m_i\vec{a}_i\cdot\vec{v}_i$ $= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Sigma m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i$. (4)	Kerrotaan kunkin kontinuumialkion liikeyhtälö (3') skalaarisesti alkion nopeudella $\vec{v}$ ja integroidaan näin saatu yhtälö yli kappaleen tilavuuden: $\int\rho\vec{b}\cdot\vec{v}dV + \int\vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{v}dV = \int\rho\vec{a}\cdot\vec{v}dV$ $= \frac{D}{Dt}\frac{1}{2}\int\rho\vec{v}\cdot\vec{v}dV$. (4')
Tämä tulos on mekaanisen energian taseen periaate $P \equiv P_{ext} + P_{int} = K^{\bullet}$. (5) Termi $P_{int} = \Sigma\vec{f}_i\cdot\vec{v}_i$ saadaan differentiaaligeometrista tarkastelua soveltamalla käyttökelpoisempaan muotoon $P_{int} = -\sum_{ij} S\dot{s}$ (7)	Tämä tulos on myös mekaanisen energian taseeh periaate $P \equiv P^V_{ext} + \int\vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{v}dS = K^{\bullet}$, (5') mutta siinä ei näy selvästi jako $P = P_{ext} + P_{int}$. Termi $\int\vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{v}dV$ saadaan Gaussin lausetta soveltamalla käyttökelpoisempaan muotoon $\int\vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{v}dS = P^S_{ext} - \int\{\sigma\}^T\{d\}dV$, joten kontinuumilla $P_{int} = -\int\{\sigma\}^T\{d\}dV$. (7')

Termin $\int \vec{f}^{\sigma} \cdot \vec{v} dV$ muuntaminen vaatii pitkähkön käsittelyn. Vastaava manipulaatio toistuu analogisena myös virtuaalisen tehon ja virtuaalisen työn periaatteiden johdoissa, joten se on syytä käydä kerran perusteellisesti läpi:

1. $$\int \vec{f}^{\sigma} \cdot \vec{v} dV = \int \left(\frac{\partial \vec{t}^{(x)}}{\partial x} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{t}^{(y)}}{\partial y} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{t}^{(z)}}{\partial z} \cdot \vec{v} \right) dV ,$$

2. $$= \int (n_x \vec{t}^{(x)} \cdot \vec{v} + n_y \vec{t}^{(y)} \cdot \vec{v} + n_z \vec{t}^{(z)} \cdot \vec{v}) dS +$$

$$- \int \left(\vec{t}^{(x)} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{t}^{(y)} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{t}^{(z)} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV ,$$

3. $$= \int (n_x \vec{t}^{(x)} + n_y \vec{t}^{(y)} + n_z \vec{t}^{(z)}) \cdot \vec{v} dS +$$

$$- \int \Big[(\sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}) \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \vec{k} \right) +$$

$$+ (\tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}) \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \vec{k} \right) +$$

$$+ (\tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k}) \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \vec{k} \right) \Big] dV ,$$

4. $$= \int \vec{t} \cdot \vec{v} dS +$$

$$- \int \left(\sigma_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \right.$$

$$+ \tau_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} +$$

$$\left. + \tau_{zx} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \sigma_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV ,$$

5. $$= \int \vec{t} \cdot \vec{v} dS +$$

$$- \int \Big[\sigma_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial v_z}{\partial z} +$$

$$+ \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \Big] dV ,$$

6. $= \int \vec{t}\cdot\vec{v}dS +$

$$- \int (\sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z + \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy}) dV ,$$

7. $= P^S_{ext} - \int \{\sigma\}^T \{d\} dV .$

Käytetyt askeleet ovat:

1. Sijoitetaan lyhennysmerkinnän $\vec{f}^\sigma$ lauseke (5.4.6).
2. Sovelletaan osittaisintegroinnin kaavoja (L.2.11).
3. Otetaan $\vec{v}$ yhteiseksi tekijäksi ja otetaan huomioon komponenttiesitykset (5.4.23) ja (3.3.57'').
4. Otetaan huomioon kaava (5.4.24').
5. Käytetään apuna kaavoja (5.5.9).
6. Otetaan huomioon määritelmät (3.3.69).
7. Käytetään apuna kaavaa (3.4.32) ja lyhennysmerkintöjä (5.2.19) ja (5.2.22).

On saatu lopputulos

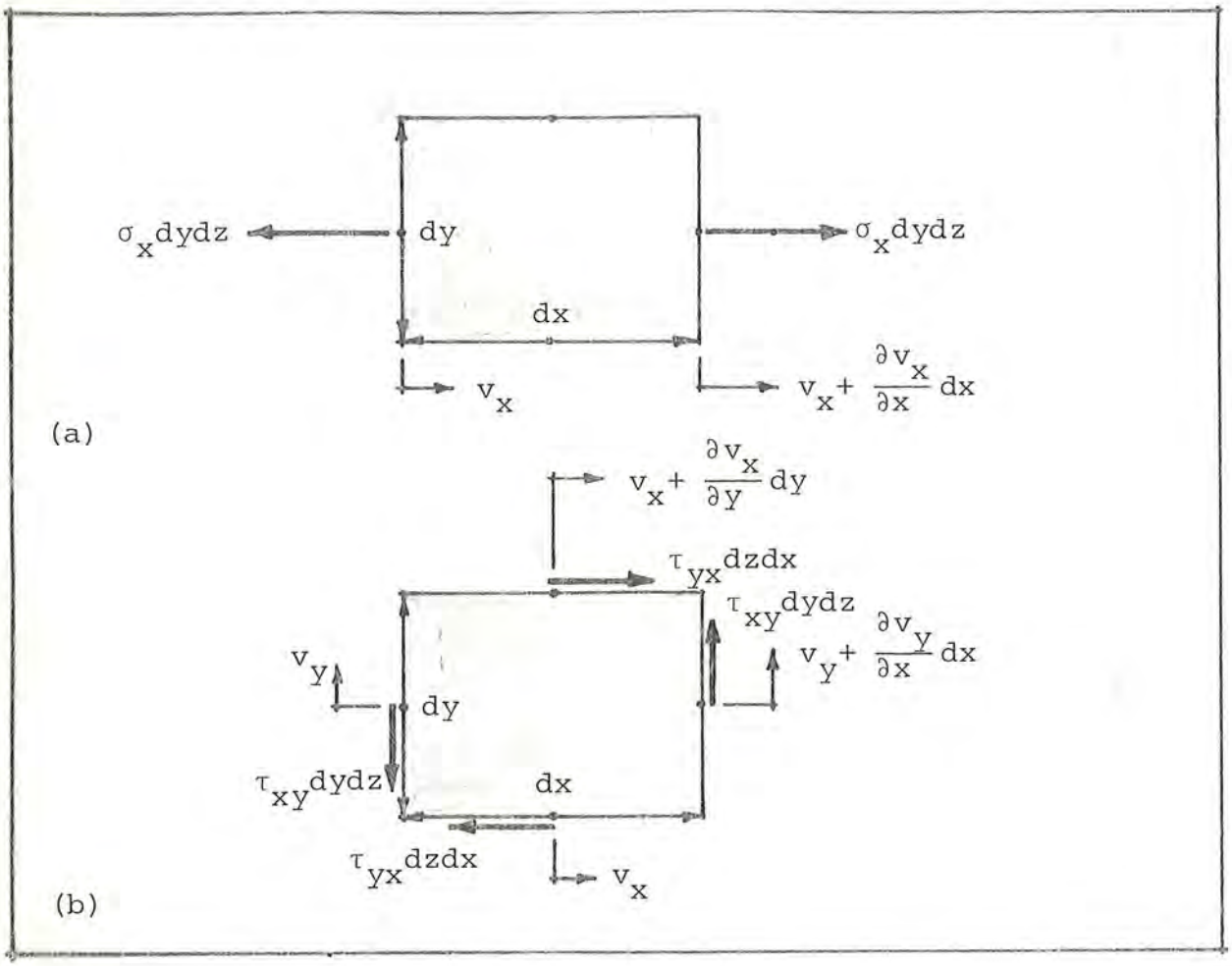
$$\int_V \vec{f}^\sigma \cdot \vec{v} dV = P^S_{ext} - \int_V \{\sigma\}^T \{d\} dV , \qquad (5.6.6)$$

jonka sijoitus yhtälöön (5') ja sen vertailu yhtälön (5) kanssa antaa tulkinnan: <u>kontinuumin sisäisten voimien tehon</u> lauseke

$$\boxed{P_{int} = -\int_V \{\sigma\}^T \{d\} dV .} \qquad (5.6.7)$$

Integrandia $\{\sigma\}^T\{d\} = \{d\}^T\{\sigma\}$ — sisäisten voimien miinusmerkkinen teho tilavuutta kohti — nimitetään tässä <u>jännitystehon tiheydeksi</u> (engl. stress power density). On mielenkiintoista todeta, että lausekkeissa (5.6.4) ja (5.6.7) on tiettyä samankaltaisuutta.

Jännitystehon tiheyden lausekkeen $\{\sigma\}^T\{d\} = \sigma_x d_x + \ldots$ eri termien fysikaalista merkitystä on pyritty havainnollistamaan kuvan 5.6.2 avulla. Kuvassa (a) on tarkasteltu pelkästään jännityskomponentista σ_x syntyvien ainealkion tahkoihin vaikuttavien pintavoimien tehoa dP. Saadaan (vrt. kaava (2.3.46))



Kuva 5.6.2 (a) Jännityskomponenttiin σ_x liittyvän tehon laskeminen. (b) Jännityskomponentteihin τ_{xy} ja τ_{yx} liittyvän tehon laskeminen.

$$dP = -\sigma_x dydz \cdot v_x + \sigma_x dydz \cdot (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx)$$

$$= \sigma_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz = \sigma_x d_x dV \qquad (5.6.8)$$

eli

$$\frac{dP}{dV} = \sigma_x d_x \ . \qquad (5.6.9)$$

Kuvassa (b) on taas tarkasteltu pelkästään jännityskomponenteista τ_{xy} ja τ_{yx} syntyvien pintavoimien tehoa. Saadaan

$$dP = -\tau_{xy}dydz\cdot v_y + \tau_{xy}dydz\cdot(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx) +$$

$$-\tau_{yx}dzdx\cdot v_x + \tau_{yx}dzdx\cdot(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy)$$

$$= \tau_{xy}\frac{\partial v_y}{\partial x}dxdydz + \tau_{yx}\frac{\partial v_x}{\partial y}dxdydz$$

$$= \tau_{xy}(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x})dV = \tau_{xy}g_{xy}dV \qquad (5.6.10)$$

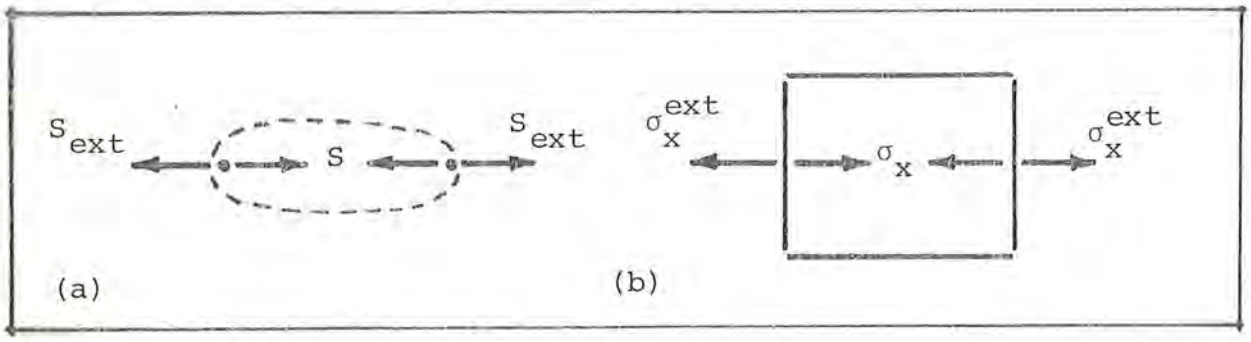
eli

$$\frac{dP}{dV} = \tau_{xy}g_{xy} \ . \qquad (5.6.11)$$

Muista jännityskomponenteista kertyvät termit saadaan vastaavaan tapaan.

Tarkastelussa on tehty tavanomaiseen tyyliin differentiaaligeometriseen käsittelyyn liittyviä yksinkertaistuksia. (Vrt. kuvan 4.4.3 yhteydessä esitetty kritiikki.) Lisäksi tässä on jätetty huomiotta jännitysten arvojen muutoksista kertyvät termit kuten $\partial\sigma_x/\partial x\cdot dxdydz\cdot v_x$. Niiden käsittely johtaa tulkintoihin, joista ei ole lausekkeen $\{\sigma\}^T\{d\}$ ymmärtämisen kannalta hyötyä.

Huomautus 1. Kaavassa (5.6.7) esiintyvä miinusmerkki voi herättää ihmetystä. Sen selittämiseksi tarkastellaan kuvan 5.6.3 sisältämää symboliikkaa. Kontinuumin ainealkion vastineeksi voi-



Kuva 5.6.3 (a) Tasapainotilassa oleva partikkelipari. (b) Tasaisen jännityksen σ_x alainen ainealkio.

daan partikkelisysteemillä ajatella tässä yhteydessä pikemminkin partikkeliparin muodostamaa perusosaa kuin yhtä partikkelia. Tämä siksi, että kontinuumin ainealkio voi muuttaa mittojaan samoin kuin kahden partikkelin systeemi, mutta yksi partikkeli on olio, jolle ei voida mitata muodon muutoksia. Partikkeliparin muodostaman alkion kannalta voimat S ovat sisäisiä ja voimat S_{ext} ulkoisia (kuva (a)). Voimme ajatella kontinuumialkiota analogisesti rasiana, jonka seinämiin vaikuttavat ulkopuolelta jännitykset σ_x^{ext} jne. ja sisäpuolelta vastakkaissuuntaiset jännitykset σ_x jne. Alkion kannalta juuri nämä jälkimmäiset jännitykset ovat sisäisiä (yleistettyjä) voimia. Mutta olemme itse asiassa kehitelleet edellä kaikki kaavamme käyttäen kuvan (b) suureesta σ_x^{ext} jne. "väärää" tunnusta σ_x jne. Täten jos haluamme laskea kuvaan 5.6.2 yhteydessä nimenomaan alkion sisäisten voimien tehoa, meidän on varustettava lausekkeet (5.6.9) ja (5.6.11) miinusmerkeillä. Yllä esitetty tulkinta on lainattu mukaillen lähteestä [5.3, s. 30]. Todettakoon vielä, että riippuen lähteestä termillä sisäisten voimien teho voidaan tarkoittaa usein myös kaavaa (5.6.7) plusmerkillä varustettuna.

— — —

Tarkastellaan jännitystehon tiheyden $\{\sigma\}^T\{d\}$ lausekkeen saamia eri muotoja. Ensinnäkin

$$\{\sigma\}^T\{d\} = \overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d} = \sigma_{xx}d_{xx} + \sigma_{xy}d_{xy} + \ldots \tag{5.6.12}$$

$$= \sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z +$$

$$+ \tau_{yz}g_{yz} + \tau_{zx}g_{zx} + \tau_{xy}g_{xy}\,, \tag{5.6.12'}$$

$$= (-p+\sigma_x^*)d_x + (-p+\sigma_y^*)d_y + (-p+\sigma_z^*)d_z +$$

$$+ \tau_{yz}g_{yz} + \tau_{zx}g_{zx} + \tau_{xy}g_{xy}$$

$$= -p(d_x+d_y+d_z) + \sigma_x^*d_x + \sigma_y^*d_y + \sigma_z^*d_z +$$

$$+ \tau_{yz}g_{yz} + \tau_{zx}g_{zx} + \tau_{xy}g_{xy}$$

$$= -pd_V + \{\sigma^*\}^T\{d\} = -pd_V + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d}\,, \tag{5.6.12''}$$

jossa siis dilataationopeus $d_V = dx + d_y + d_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = -1/\rho\cdot D\rho/Dt$. (Merkinnän $\overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d}$ suhteen viitataan kohdan 4.2 huomautukseen 2.) Erityisesti vielä:

(1) Ideaalinesteellä $\{\sigma^*\} = \{0\}$, joten

$$\{\sigma\}^T\{d\} = -\,pd_V\ . \tag{5.6.13}$$

(2) Kokoonpuristumattomalla ideaalinesteellä lisäksi $d_V = 0$ ja siis

$$\{\sigma\}^T\{d\} = 0 \tag{5.6.14}$$

eli sisäisten voimien teho häviää kokonaan.

(3) Newtonin nesteen tapauksessa saadaan sijoittamalla Stokesin kitkalain (5.2.23) tai (5.2.21) deviaatiojännityskomponenttien lausekkeet kaavaan (5.6.12'') lopuksi tulos

$$\{\sigma\}^T\{d\} = -pd_V + \Phi\ , \tag{5.6.15}$$

jossa dissipaatiofunktio

$$\Phi(\{d\}) \equiv \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} = \{\sigma^*(\{d\})\}^T\{d\} = \{d\}^T\{\sigma^*(\{d\}) \tag{5.6.16}$$

$$= \{d\}^T[D^*]\{d\}\ , \tag{5.6.16'}$$

$$= \mu\left[2(d_x^2+d_y^2+d_z^2) + g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2\right] + \lambda^* d_V^2\ . \tag{5.6.16''}$$

(4) Kokoonpuristumattomalla Newtonin nesteellä

$$\{\sigma\}^T\{d\} = \Phi\ , \tag{5.6.17}$$

jossa vielä dissipaatiofunktion lausekkeesta (5.6.16'') häviää dilataationopeuteen liittyvä termi $\lambda^* d_V^2$.

Mekaanisen energian taseen periaate. Edellä esitetyt tarkastelut ovat siis osoittaneet, että myös kontinuumille pätee mekaanisen energian taseen periaate

$$\boxed{P = K^{\bullet} \ ,} \tag{5.6.18}$$

eli

$$P_{ext} + P_{int} = K^{\bullet} \ , \tag{5.6.18'}$$

jossa siis vielä

$$\left.\begin{aligned} P_{ext} &= P^{V}_{ext} + P^{S}_{ext} = \int_V \rho\vec{b}\cdot\vec{v}dV + \int_S \vec{t}\cdot\vec{v}dS \ , \\ P_{int} &= -\int_V \{\sigma\}^T\{d\}dV \ . \end{aligned}\right\} \tag{5.6.19}$$

Huomautus 2. Newtonin nesteellä yhtälö (5.6.18') saa muodon

$$P_{ext} - \int_V pd_V dV - \int_V \Phi dV = K^{\bullet} \ . \tag{5.6.20}$$

Nimitys dissipaatiofunktio (engl. dissipation = tuhlaus, haaskaaminen) selittyy seuraavasti.

Dissipaatiofunktion Φ lausekkeen termejä järjestelemällä voidaan osoittaa, että Φ on ei-negatiivinen. Kokoonpuristumattoman nesteen tapauksessa tämä näkyy suoraan kaavasta (5.6.16'') ja tällöin vielä Φ on nolla vain, kun kaikki deformaationopeuskomponentit häviävät eli kun neste liikkuu kuten jäykkä kappale. Muulloin Φ ja siis myös integraali $\int\Phi dV$ on positiivinen. Integraali esittää nesteen sisäisen kitkan vaikutusta, joka pienentää jatkuvasti kappaleen mekaanisen energian K+V arvoa. Kaavan (5.6.20) yhteydessä tämä ymmärretään siitä, että ko. integraalin edessä yhtälön vasemmalla puolella on miinusmerkki, joten termi antaa vaatimuksen, että liike-energian muutosnopeuden tulee olla negatiivinen eli liike-energian tulee pienentyä ajan kasvaessa. (Termien P_{ext} ja $-\int pd_V dV$ osuudet voivat tietenkin vaikuttaa päinvastaiseen suuntaan.) Dissipaatiotermiä $\int\Phi dV$ nimitetään usein myös häviötermiksi tai häviöksi (engl. loss). Dissipaatiossa kappaleen mekaanista energiaa muuttuu sisäenergiaksi, lämpötila kohoaa ja energiaa siirtyy lämpönä ympäristöön. Dissipaatio on yleensä tietyn tuloksen saavuttamisen kannalta haitallinen

ilmiö; esimerkiksi tietyn pumpun tehon tarve alenisi, jos yhtälössä (5.6.20) voitaisiin asettaa $\Phi = 0$.

Lauseke (5.6.16'') voidaan manipuloida identiteetin

$$d_V^2 = 3(d_x^2+d_y^2+d_z^2) + \\ -(d_x-d_y)^2 - (d_y-d_z)^2 - (d_z-d_x)^2 \qquad (5.6.21)$$

ja arvon $\lambda^* = -2\mu/3$ sijoituksen jälkeen muotoon

$$\Phi = \mu\left\{\frac{2}{3}[(d_x-d_y)^2 + (d_y-d_z)^2 + (d_z-d_x)^2] + \\ + g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2\right\} . \qquad (5.6.22)$$

Tämä osoittaa, että neliömuoto Φ (ja vastaava matriisi [D*]) on positiivisesti semidefiniitti ja paitsi jäykän kappaleen liike myös isotrooppinen deformaationopeustila $d_x = d_y = d_z$, $g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0$ voi tämän mallin ($\lambda^* = -2\mu/3$) mukaan tapahtua ilman dissipaatiota. Jälkimmäinen tulos ei tunnu täysin realistiselta ja esimerkiksi ääniaaltojen värähtelyn vaimenemisen käsittelyssä Stokesin ehdosta täytyy luopua [3.1, s. 301].

5.6.2 Energian taseen periaate

Energiayhtälö. Energian taseen periaatteen paikallisen muodon johtaminen tapahtuu kätevimmin vähentämällä aksiooman (3.2.6) mukaisesta yhtälöstä $P_{ext} + P_Q = K^{\bullet} + E^{\bullet}$ puolittain edellä johdettu mekaanisen energian taseen periaatteen (5.6.18') mukainen yhtälö $P_{ext} + P_{int} = K^{\bullet}$, jolloin saadaan täysin yleinen tulos

$$\boxed{E^{\bullet} = P_Q - P_{int}} \tag{5.6.23}$$

eli kappaleen sisäenergian muutosnopeus on yhtä suuri kuin kappaleen saama lämpöteho miinus kappaleen sisäisten voimien teho.

Sijoittamalla yhtälöön (5.6.23) lausekkeet (3.4.37), (3.4.35) ja (5.6.7) saadaan ensin

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e dV = -\int_S \vec{n}\cdot\vec{q}dS + \int_V \{\sigma\}^T\{d\}dV \tag{5.6.24}$$

ja edelleen

$$\int_V \rho\,\frac{De}{Dt}\,dV = \int_V (-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}+\{\sigma\}^T\{d\})dV\ , \tag{5.6.25}$$

jossa on sovellettu Reynoldsin lausetta (3.3.88'') ($f \triangleq e$) ja Gaussin lausetta (L.2.9'') ($f \triangleq \vec{q}$). Täten energian taseen periaatteen paikallinen muoto on

$$\boxed{\rho\,\frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d}} \tag{5.6.26}$$

eli

$$\rho\,\frac{De}{Dt} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z +$$

$$+ \tau_{yz}g_{yz} + \tau_{zx}g_{zx} + \tau_{xy}g_{xy} \tag{5.6.26'}$$

eli

$$\rho\,\frac{De}{Dt} = -\{\nabla\}^T\{q\} + \{\sigma\}^T\{d\}\ . \tag{5.5.26''}$$

Yhtälöä (5.6.26) nimitetään kirjallisuudessa usein lyhyesti vain energiayhtälöksi (engl. energy equation).

Huomautus 1. Energiayhtälön (5.6.26) oikealla puolella esiintyy kirjallisuudessa usein vielä termi

$$\rho r \ , \tag{5.6.27}$$

jossa r ($[r] = \mathrm{Wkg}^{-1}$) on ns. lämpölähteen antoisuus massaa kohti (engl. heat source per unit mass). Tähän termiin sisällytetään tavallisesti säteilyn osuus seuraavasti. Kaavan (3.4.36) mukaan lämpövuovektori $\vec{q} = \vec{q}^c + \vec{q}^r$. Koska säteilyyn liittyvät konstitutiiviset yhteydet ovat mutkikkaita, termi

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \vec{\nabla}\cdot q^c + \vec{\nabla}\cdot\vec{q}^r \tag{5.6.28}$$

jätetään muotoon

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \vec{\nabla}\cdot\vec{q}^c - \rho r \ , \tag{5.6.29}$$

jossa on siis merkitty $\rho r = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q}^r$ ja termi ρr ajatellaan tavalla tai toisella tunnetuksi ja annetuksi. Usein myös esimerkiksi tiettyyn kemialliseen reaktioon tai radioaktiiviseen hajoamiseen liittyvä lämmönkehitys sisällytetään termiin ρr, vaikka kyseessä onkin tarkasti ottaen sisäenergian muutoksessa huomioon otettava ilmiö. Näin muutettuna energiayhtälön muodot ovat siis

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q}^c + \rho r + \overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d}} \tag{5.6.30}$$

eli

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\left(\frac{\partial q_x^c}{\partial x} + \frac{\partial q_y^c}{\partial y} + \frac{\partial q_z^c}{\partial z}\right) + \rho r + \sigma_x d_x +$$

$$+ \sigma_y d_y + \sigma_z d_z + \tau_{yz} q_{yz} + \tau_{zx} q_{zx} + \tau_{xy} q_{xy} \tag{5.6.30'}$$

eli

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\{\nabla\}^T\{q^c\} + \rho r + \{\sigma\}^T\{d\} \ . \tag{5.6.30''}$$

Energiayhtälön erityismuotoja. Tavanomainen nestemekaniikassa esiintyvä energiayhtälö saadaan otaksumalla konstitutiivisiksi yhteyksiksi sisäenergian differentiaalin lauseke (5.2.35):

$$De = (p-TK_T\gamma_p)\frac{1}{\rho^2}\,D\rho + c_V DT\ , \tag{5.6.31}$$

Fourierin isotrooppinen lämmönjohtumislaki (5.2.40):

$$\vec{q}^{\,c} = -k\vec{\nabla}T\ , \tag{5.6.32}$$

sekä Newtonin nesteelle saatu yhteys (5.6.15):

$$\{\sigma\}^T\{d\} = -pd_V + \Phi = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \Phi\ . \tag{5.6.33}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (5.6.30) saadaan ensiksi

$$\rho\left(\frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} - \frac{TK_T\gamma_p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + c_V\frac{DT}{Dt}\right) = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \rho r - p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \Phi\ . \tag{5.6.34}$$

Kaava (5.6.31) on kirjoitettu alkuperäisestä muodostaan (5.2.35) poiketen ($d \to D$) korostamaan tässä sitä, että ko. differentiaalit koskevat luonnollisestikin aina tiettyä ainealkiota, jolloin vastaavat aineelliset aikaderivaatat saadaan muodollisesti jakamalla yhtälö (5.6.31) puolittain ajan differentiaalilla Dt. Yhtälön (5.6.34) kaksi paineeseen liittyvää termiä kumoavat toisensa yhteyksien $d_V = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = -1/\rho\cdot D\rho/Dt$ perusteella (ks. kaavat (5.3.8) ja (5.3.9)). Näin on saatu energiayhtälö

$$\boxed{\rho c_V\frac{DT}{Dt} + TK_T\gamma_p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \rho r + \Phi\ .} \tag{5.6.35}$$

eli

$$\rho c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) + TK_T\gamma_p\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(k\,\frac{\partial T}{\partial z}) + \rho r + \Phi \qquad (5.6.35')$$

eli

$$\rho c_V(\frac{\partial T}{\partial t} + \{v\}^T\{\nabla\}T) + TK_T\gamma_p\{\nabla\}^T\{v\} =$$

$$\{\nabla\}^T(k\{\nabla\}T) + \rho r + ([{}_d\partial_v]\{v\})^T[D^*][{}_d\partial_v]\{v\}\ . \qquad (5.6.35'')$$

Tämäkin yhtälö esiintyy nestemekaniikassa, eri merkinnöistä ja mahdollisista yksinkertaistuksista johtuen, lähes lukemattomissa eri muodoissa; vrt. kohta 6.9.3. Todetaan joitakin erikoistapauksia:

(1) Mekaanisesti kokoonpuristumattomalla nesteellä voidaan soveltaa lausekkeen (5.6.31) sijasta lauseketta (5.2.37): $De = c_pDT - p\gamma_p/\rho\cdot DT = c_pDT + p/\rho^2\cdot D\rho$, jossa on käytetty hyväksi kaavaa (5.2.9). Suorittamalla sijoitukset havaitaan lopputuloksen olevan

$$\rho c_p\,\frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \rho r + \Phi\ . \qquad (5.6.36)$$

Tätä yhtälöä voidaan käyttää myös isobaarisisten prosessien yhteydessä.

(2) Ihannekaasulla sovelletaan taas lausekkeen (5.6.31) sijasta lauseketta (5.2.36): $De = c_VDT$. Saadaan yhtälö

$$\rho c_V\,\frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \rho r - p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \Phi\ . \qquad (5.6.37)$$

(3) Virtauksen hävitessä $v_x = v_y = v_z = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, $\Phi = 0$ ja yhtälö (5.6.35) tulee muotoon

$$\rho c_V\,\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \rho r\ . \qquad (5.6.38)$$

Tämä muistuttaa läheisesti kiinteän aineen mekaniikasta tuttua tavanomaista lämmönjohtumisyhtälöä (4.6.26). Jos k on paikan suhteen vakio, yhtälöiden oikeille puolille ilmestyy Laplacen operaattori.

Huomautus 2. Usein dissipaatiofunktio Φ voidaan todeta suuruusluokkatarkastelun avulla muiden energiayhtälön termien rinnalla pieneksi ja jättää pois kaavoista. Päinvastaisiakin tapauksia on. Esimerkiksi pitkän, kylmässä ympäristössä sijaitsevan öljyputken toiminnan kannalta on oleellista, että dissipaatio muuttaa pumppujen antamaa mekaanista energiaa sisäenergiaksi pitäen täten öljyn lämpötilaa riittävän korkealla ja siten myös viskositeettia riittävän alhaisena, jotta öljy yleensä virtaisi.

— — —

Huomautus 3. Esimerkiksi energiayhtälössä (5.6.35) esiintyvä, tyyppiä $\rho c DT/Dt$ oleva termi voidaan muuntaa jatkuvuusyhtälön muodon (5.3.3) ja osittaisderivoinnin avulla seuraavasti

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{v} c T) - \rho T \frac{Dc}{Dt} \tag{5.6.39}$$

eli

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x c T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y c T) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z c T) - \rho T \frac{Dc}{Dt} . \tag{5.6.39'}$$

Tämän tarkoituksena on saattaa vallitseva yhtälö muistuttamaan mahdollisimman paljon nestemekaniikassa usein käytettyä standardiesitystä, ns. yleistä konvektio-diffuusioyhtälöä (ks. kohta 6.8).

— — —

Lämpövirran tiheys - lämpövuoyhteys. Kirjataan vielä näkyviin uudestaan kohdassa 3.4.5 selostettu lämpövirran tiheyden q_n ja lämpövuovektorin $\vec{q}$ välinen riippuvuus, josta tullaan käyttämään otsikon mukaista nimitystä. Siis kaava (3.4.34):

$$\boxed{q_n = \vec{n}\cdot\vec{q}} \tag{5.6.40}$$

eli

$$q_n = n_x q_x + n_y q_y + n_z q_z \tag{5.6.40'}$$

eli vielä

$$q_n = \{n\}^T\{q\} \ , \tag{5.6.40"}$$

jossa siis

$$\left.\begin{aligned} \{q\} &= [q_x \ q_y \ q_z]^T \ , \\ \{n\} &= [n_x \ n_y \ n_z]^T \ . \end{aligned}\right\} \tag{5.6.41}$$

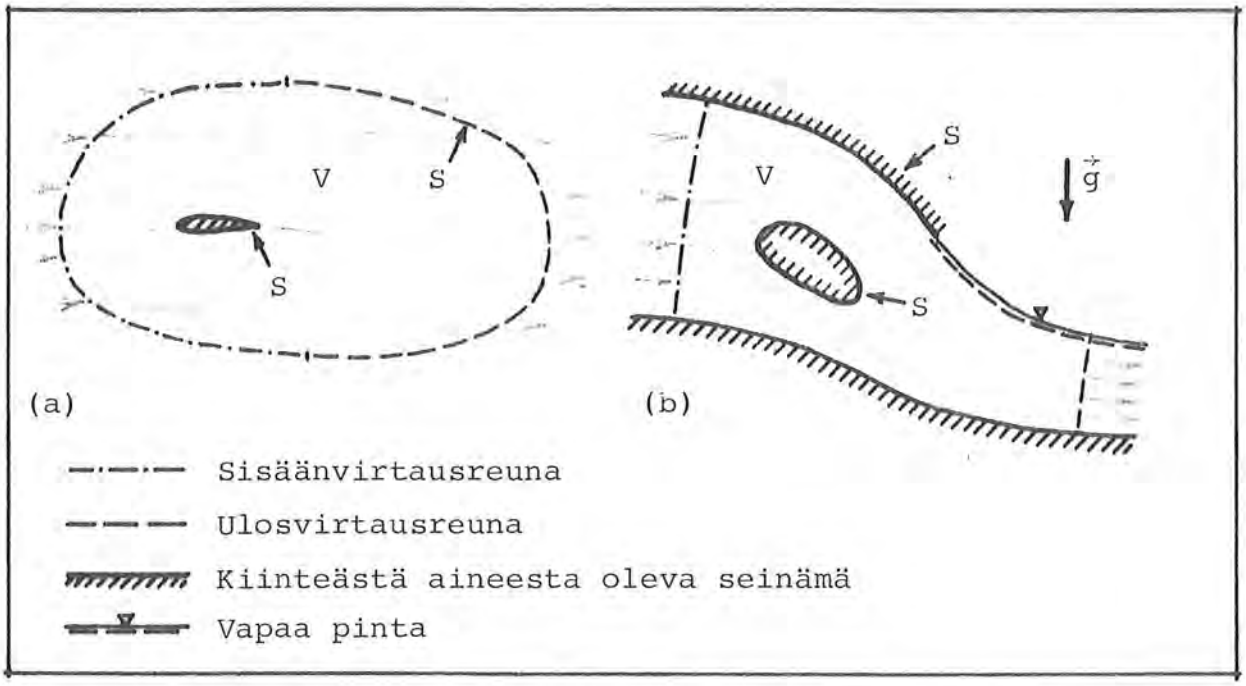
5.7 Reuna-, alku- ja jatkuvuusehdot

5.7.1 Yleistä

Hyvin monet kiinteän aineen mekaniikkaan liittyvät, kohdassa 4.7 esitetyt seikat siirtyvät analogisina nestemekaniikkaan ja tämän johdosta selittelevää tekstiä on supistettu. Koska nyt vain käsitellään Eulerin esitystavan mukaan tiettyä kontrollialuetta, reunaehtoja ei enää esitetä (yleensä) tietyn kappaleen pinnalla vaan sen sijaan kontrollialueen reunalla.

Sopivan systeemin valintaan liittyvät ongelmat esiintyvät nestemekaniikassa usein vielä vaikeampina kuin kiinteän aineen mekaniikassa. Esimerkiksi jos pyritään tutkimaan veden virtausjakautumaa tietyssä merenlahdessa, miten saadaan reunaehdot lahden ja avomeren välisellä rajapinnalla? Viisastelemalla voitaisiin sanoa, että tutkittavaksi systeemiksi tulisi ottaa kaikki maapallon merialueet.

Kuva 5.7.1 esittää paria tyypillistä asetelmaa. Ulkoisessa



Kuva 5.7.1 (a) Ulkoinen virtaus. (b) Sisäinen virtaus.

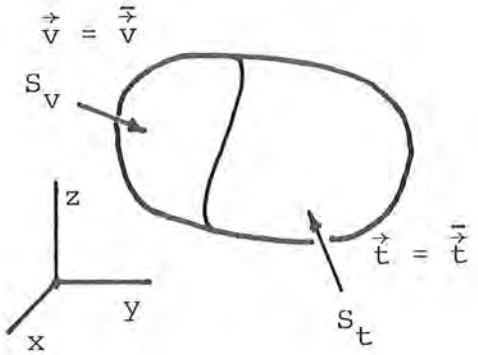
virtauksessa (kuva (a)) ajatellaan esimerkiksi usein, että kyseessä on alunperin äärettömässä alueessa oleva tasainen yhden-

suuntaisvirtaus ja olemme kiinnostuneita alueeseen asetetun tietyn kiinteätä ainetta olevan kappaleen ympäristöön syntyvästä virtauskentästä. (Tällainen asetelma on tietenkin fiktio, koska esimerkiksi ilmakehä ei ole ääretön alue, vaan se rajoittuu toisaalta maanpintaan ja toisaalta harvenevana ulkoavaruuteen.) Sisäisessä virtauksessa (kuva (b)) on taas usein kyse jonkin laitteen seinämien rajoittamassa tilassa tapahtuvasta virtauksesta.

Kiinteästä aineesta olevien reunojen ja vapaan pinnan reunojen yhteydessä asetettavat reunaehdot ovat periaatteessa melko selkeitä, vaikkakin ne voivat olla käytännössä laskennallisesti vaikeita toteuttaa. Sen sijaan ns. sisäänvirtaus- ja ulosvirtausreunat ovat vain nesteeseen vedettyjä enemmän tai vähemmän mielivaltaisia tutkittavan alueen välttämättömiä rajauksia, joilla ei ole mitään selvää fysikaalista perustelua. Asetettavat reunaehdot riippuvat siten oleellisesti tapauksesta. Ulkoisessa virtauksessa voidaan esimerkiksi otaksua, että jos reuna S on kaukana aiheutetusta häiriöstä, häiriön vaikutus on jo hävinnyt tai että voidaan soveltaa tiettyjä analyyttisesti johdettuja asymptoottisia ehtoja. Sisäisessä virtauksessa voidaan tehdä seinämien perusteella mahdollisesti arvioita virtauksen suunnasta (ks. esimerkki 6.3.2) tai käyttää ehkä sopivasti apuna putkivirtausten ratkaisuista saatuja tuloksia. Sisäänvirtaus- ja ulosvirtausreunoja niihin liittyvine ehtoineen käsitellään lisää kohdassa 6.8.

5.7.2 Mekaaniset reunaehdot

Perustapaus. Jaetaan tutkittavan alueen V reuna mekaanisessa mielessä tässä ensin ei päällekkäisiin osiin S_v ja S_t, jotka yhdessä muodostavat koko reunan S (kuva 5.7.2).



Kuva 5.7.2 Mekaaniset reunaehdot.

Reunalla S_v on nopeus annettu:

$$\boxed{\vec{v} = \bar{\vec{v}}} \qquad (5.7.1)$$

eli

$$\boxed{\{v\} = \{\bar{v}\}} \qquad (5.7.1')$$

eli

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x\,, \\ v_y &= \bar{v}_y\,, \\ v_z &= \bar{v}_z\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.1'')$$

S_v:llä

Reunalla S_t on traktio annettu:

$$\boxed{\vec{t} = \bar{\vec{t}}} \qquad (5.7.2)$$

eli

$$\boxed{\{t\} = \{\bar{t}\}} \qquad (5.7.2')$$

eli

$$\left.\begin{aligned} t_x &= \bar{t}_x\,, \\ t_y &= \bar{t}_y\,, \\ t_z &= \bar{t}_z\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.2'')$$

S_t:llä

Esimerkkinä voisi olla vaikka kahden vesisäiliön välillä tapahtuva virtaus. Veden säiliössä omaavat vapaat pinnat ovat reunoja S_t, joilla traktio $\vec{t} = -p_a\vec{n}$, jossa p_a on tunnettu pintaan vaikuttava ilmanpaine. Säiliöiden ja ko. yhdistävän putkiston seinämät ovat taas reunoja S_v, joilla $\vec{v} = \vec{0}$.

On syytä korostaa, että samassa reunan pisteessä ei voida antaa yleensä samanaikaisesti sekä nopeutta että traktiota. Pysyvän vapaan pinnan käsittely — kuten jatkossa on esitetty — muodostaa kuitenkin poikkeuksen tästä säännöstä.

Huomautus 1. Massan säilymisen periaate (5.3.1) saadaan Reynoldsin lauseen (3.3.88) avulla muotoon

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_S v_n \rho dS = 0 \,. \tag{5.7.3}$$

Tästä tulee pysyvässä virtauksessa ($\partial\rho/\partial t = 0$) ehto

$$\int_S v_n \rho dS = 0 \tag{5.7.4}$$

ja vakiotiheysnesteen yleisessä virtauksessa (ρ on sekä paikan että ajan suhteen vakio, joten $\partial\rho/\partial t = 0$ ja ρ voidaan ottaa integraalin ulkopuolelle) ehto

$$\int_S v_n dS = 0 \,. \tag{5.7.5}$$

Jos alueen reuna on kokonaan tyyppiä S_v eli jos nopeus on annettu kaikkialla reunalla, suuretta $\vec{v}$ ei voida siis antaa täysin mielivaltaisesti, vaan sen normaalikomponentin $\bar{v}_n$ tulee toteuttaa esimerkiksi globaali ehto (5.7.5), mikäli kyseessä on vakiotiheysnesteen virtaus.

Tässä yhteydessä voidaan myös todeta, että kokoonpuristumattoman aineen mallia käytettäessä yhtälön (5.7.5) vastineeksi tulee Lagrangen esitystä käytettäessä pienten siirtymien tapauksessa ehto

$$\int_{S^o} u_n dS^o = 0 \,, \tag{5.7.6}$$

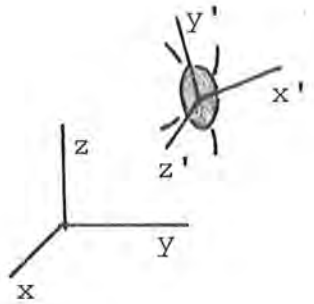
jossa u_n on siirtymän $\vec{u}$ normaalikomponentti. Ehto (5.7.6) on helppo todeta oikeaksi piirtämällä kappale alkutilaan ja deformoituneeseen tilaan (ks. kuva 4.4.1) ja ottamalla huomioon, että kappaleen kokonaistilavuus ei ole muuttunut. Jos koko reuna on tyyppiä S_u, ehto (5.7.6) asettaa siis rajoituksen annetulle siirtymälle $\bar{\vec{u}}$.

Ensimmäinen yleistys. Tämä yleistys on aivan vastaava kuin kohdassa 4.7.

Reunaehdot ovat yleisemmin

$$\boxed{\begin{aligned} v_{x'} &= \bar{v}_{x'} \quad \text{tai} \quad t_{x'} = \bar{t}_{x'} \,, \\ v_{y'} &= \bar{v}_{y'} \quad \text{tai} \quad t_{y'} = \bar{t}_{y'} \,, \\ v_{z'} &= \bar{v}_{z'} \quad \text{tai} \quad t_{z'} = \bar{t}_{z'} \,. \end{aligned}} \tag{5.7.7}$$

Kultakin riviltä tulee valita aina jompikumpi ehto mutta ei molempia. Tässä kuhunkin reunan pisteeseen asetetaan paikallinen suorakulmainen karteesinen koordinaatisto x'y'z' siten, että yhden koordinaattiakselin (kuvassa 5.7.3 x'-akselin) suunta yhtyy tavallisesti reunapinnan ulkoisen normaalin suuntaan. Pilkuilla varustetut suureet tarkoittavat vektoreiden $\vec{v}$ ja $\vec{t}$ komponentteja paikallisen koordinaatiston kannassa. Eri kannoissa esitetyille komponenteille saadaan haluttaessa yhteydet



Kuva 5.7.3 Kierretty paikallinen koordinaatisto.

$$\left.\begin{aligned} \{v'\} &= [L]\{v\} \,, \\ \{v\} &= [L]^T\{t'\} \,, \end{aligned}\right\} \tag{5.7.8}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} \{t'\} &= [L]\{t\} \,, \\ \{t\} &= [L]^T\{t'\} \,, \end{aligned}\right\} \tag{5.7.9}$$

jossa muunnosmatriisi

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \\ l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} \\ l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} \end{bmatrix} \tag{5.7.10}$$

on ortogonaalinen:

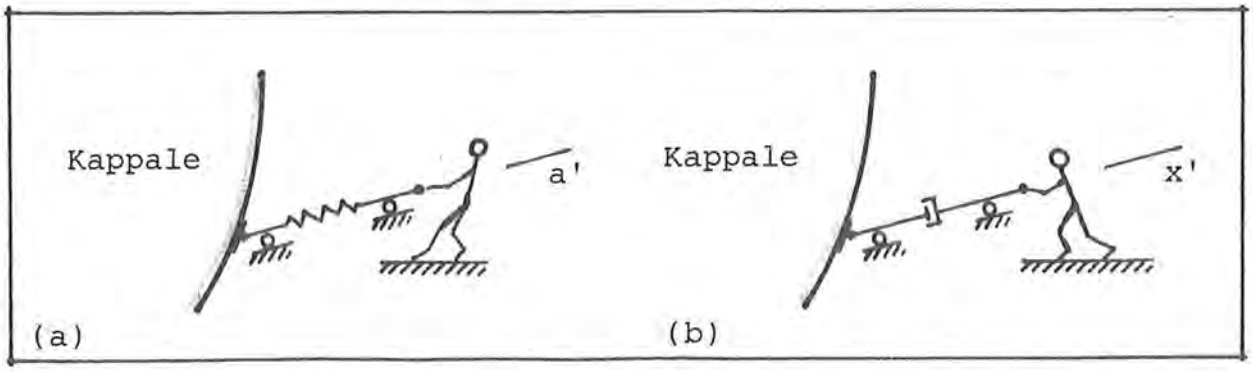
$$[L]^T[L] = [L][L]^T = [I] \ . \tag{5.7.11}$$

Alkiot l ovat koordinaattiakselien välisten kulmien kosineja; esimerkiksi $l_{x'y} = l_{yx'} = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i}'$.

Jos ehtoihin (5.7.7) liittyviä alueita merkitään vastaavasti tunnuksilla ${}^1S_v$ ja ${}^1S_t$, ${}^2S_v$ ja ${}^2S_t$ sekä ${}^3S_v$ ja ${}^3S_t$, näille pätee siis ${}^1S_v \cap {}^1S_t = \phi$, ${}^1S_v \cup {}^1S_t = S$ jne.

Huomautus 2. Miksi esityksessä (5.7.7) saadaan valita kultakin riviltä vain toinen ehto mutta ei molempia? Sama kysymys herää tietenkin myös esityksen (4.7.4) suhteen.

Asetelmaa voidaan yrittää selvittää seuraavalla ajatuskokeella.



Kuva 5.7.4 Mekaaninen reunaehtomies. (a) Lagrangen esitys. (b) Eulerin esitys.

Kuvittelemme, että meillä on käytettävissämme reunaehtojen toteuttamiseksi valtaisa määrä pieniä tottelevaisia miehiä/naisia, jotka ovat asettautuneet kappaleen reunalle sovittuihin paikkoihin. Kullakin miehellä on hallussaan Lagrangen esityksessä jousi (ks. kuva 2.3.4) ja Eulerin esityksessä vaimennin (ks. kuva 2.3.11), joilla he voivat olla vuorovaikutuksessa kappaleen kans-

sa (kuva 5.7.4). Kuvaan on piirretty selvyyden säilyttämiseksi näkyviin tietyssä pisteessä esimerkkinä vain yhden paikallisen koordinaattiakselin suunnassa toimiva "reunaehtomies".

Tarkastellaan aluksi kuvan (a) tapausta. Annetaan miehelle ensin ohje: Kappaleen siirtymän arvon tulee olla $\bar{u}_{a'}$. Mies voi toteuttaa ohjeita vain siirtelemällä jousen päätä a'-akselin suunnassa. Tässä tapauksessa hän tarkkailee samalla jousen kappaletta koskettavan toisen pään siirtymää ja on tyytyväinen, kun saa sen asettumaan arvoon $\bar{u}_{a'}$. Mutta selvästikään hän ei pysty samanaikaisesti antamaan jousen venymälle ja siis jousivoimalle mitään mielivaltaista etukäteen annettua arvoa vaan nämä ovat seurauksia ratkaisusta. Annetaan sitten toinen ohje: Kappaleeseen vaikuttavan "voiman" arvon tulee olla $\bar{t}_{a'}$. Nyt mies tarkkailee siirrellessään jousen päätä jousessa olevaa venymämittaria — joka antaa sopivasti kalibroituna myös jousivoiman arvon — ja on tyytyväinen, kun se asettuu vastaamaan annettua lukemaa $\bar{t}_{a'}$. Mutta selvästikään hän ei pysty samanaikaisesti kontrolloimaan jousen toisen pään siirtymää, vaan sen saama arvo seuraa systeemin ratkaisusta.

Kuvan (b) esittämässä tapauksessa äskeinen tarkastelu voidaan ilmeisestikin toistaa lähes sellaisenaan suorittamalla vain muutokset: jousi → vaimennin, venymä → venymänopeus. Jousen ja vaimentimen ei tarvitse olla lineaarisia. Ajatuskoe onnistuu, kunhan niitä pidetään mittalaitteina, jotka ilmaisevat yksikäsitteisesti kutakin venymää (venymänopeutta) vastaavan voiman.

Jos Eulerin esityksessä on kysymys reunaehdosta kiinteän kontrollialueen reunalla, reunaehtomies on ajateltava lisäksi teräsmieheksi, joka toteuttaa ohjeensa äärettömän nopeasti ja siirtää mittalaitteensa toista päätä jatkuvasti takaisin kontrollialueen reunalle kiinnittäen sen samalla siinä kulloinkin olevaan materiaan.

Esitetty ajatuskoe ei ole loppujen lopuksi niinkään kaukaa haettu. Reunaehtotehtävää nimitetään nimittäin alan kirjallisuudessa joskus valamiehistöprobleemaksi (engl. jury problem) [4.2, s. 351], jossa siis tiettyjen henkilöiden muodostama joukko valvoo oikean ratkaisun toteutumista.

Todettakoon vielä, että monet kohdassa 4.7.2 jousimallin avul-

lin avulla esitetyt selittelyt voidaan toistaa tässä korvaamalla siirtymä nopeudella. Esimerkiksi kaavan (4.7.12) vastineeksi saataisiin kaava $\{t\} = -[c](\{v\}-\{\bar{v}\})$. Tämä on konstitutiivinen yhteys. Ehto $\{v\} = \{\bar{v}\}$ voidaan jälleen hoitaa sakkomenettelyllä antamalla [c]:n kasvaa rajatta, jolloin traktiosta {t} tulee rajoitevoima.

— — —

Esimerkkejä ja lisäyleistyksiä. Kuten on jo korostettu, nestemekaniikan kirjallisuudessa ei anneta kovin yleispäteviä ohjeita oikeellisten reunaehtojen asettamiseksi. Siten tässäkin selostetaan vain joidenkin esimerkkitapausten pohjalta syntyviä asetelmia. Näistä kaikki eivät mahdu aivan edellä esitettyjen ehtojen (5.7.1) ja (5.7.2) tai (5.7.7) sisälle.

Kiinteästä aineesta oleva seinämä (engl. solid wall) on luonnollisesti kaikkein tavallisin nesteen virtausta rajoittava este. Jos seinämä otaksutaan jäykäksi ja jos se on lisäksi tarkastelussa käytetyn koordinaatiston suhteen paikoillaan, nimitämme sitä kiinteäksi seinämäksi (engl. fixed wall). Kuten jo kohdassa 5.1 on selostettu, seinämien pinnoilla todellisilla nesteillä pätee (yleensä) ns. takertumisehto tai tarttumisehto (engl. adherence condition)

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w}} \tag{5.7.12}$$

eli nesteen ja seinämän toisiaan koskettavilla partikkeleilla on sama nopeus. Tavallisin tapaus on kiinteä seinämä, jolloin seinämän nopeus $\vec{w}$ (wall) on nolla ja takertumisehto saa muodon

$$\vec{v} = \vec{0} \ . \tag{5.7.12'}$$

Kaavat (5.7.12) sisältyvät siis tapaukseen (5.7.1); $\bar{\vec{v}} = \vec{w}$.

Takertumisehtoa täytyy modifioida tietyissä tapauksissa. Kirjoitetaan tämä ehto jatkoa varten erikseen ns. läpitunkemattomuusehtona (engl. no-penetration condition, no-gap condition)

$$\boxed{v_n = w_n} \tag{5.7.13}$$

ja ns. liukumattomuusehtona (engl. no-slip condition)

$$\boxed{\vec{v}_t = \vec{w}_t \ .} \tag{5.7.14}$$

On otettu esitys

$$\vec{v} = v_n\vec{n} + \vec{v}_t \tag{5.7.15}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= v_n\vec{n} + v_{y'}\vec{j}' + v_{z'}\vec{k} \ , \\ &= v_{x'}\vec{i}' + v_{y'}\vec{j}' + v_{z'}\vec{k} \end{aligned}\right\} \tag{5.7.15'}$$

ja vastaavasti seinämän nopeudelle $\vec{w}$. Indeksit n ja t viittaavat normaali- ja tangenttikomponentteihin ja koska tarkastellaan nimenomaan nestettä, positiivinen normaalivektorin $\vec{n}$ suunta on tässä nesteestä ulospäin. Kaavojen (5.7.15') merkinnät viittaavat kuvan 5.7.3 esittämään tapaukseen, jossa vielä $\vec{i}' = \vec{n}$. Liukumattomuusehto (5.7.14) vastaa siis kolmessa (kahdessa) dimensiossa kahta (yhtä) skalaariehtoa. (Huomautettakoon, että termillä "no-slip condition" tarkoitetaan kirjallisuudessa usein kylläkin jo pelkästään takertumisehtoa.)

Kirjataan vielä näkyviin nesteen pintaan vaikuttavaa traktiota $\vec{t}$ koskevat kaavojen (5.7.15) vastineet:

$$\left.\begin{aligned} \vec{t} &= t_n\vec{n} + \vec{t}_t \ , \\ &= \vec{\sigma} + \vec{\tau} \end{aligned}\right\} \tag{5.7.16}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} \vec{t} &= t_n\vec{n} + t_{y'}\vec{j}' + t_{z'}\vec{k}' \ , \\ &= t_{x'}\vec{i}' + t_{y'}\vec{j}' + t_{z'}\vec{k}' \ , \end{aligned}\right\} \tag{5.7.16'}$$

$$= \sigma_{x'}\vec{i}' + \tau_{x'y'}\vec{j}' + \tau_{x'z'}\vec{k}' \ . \Big|$$

Näiden viimeisimmät muodot liittyvät kaavojen (3.4.9) ja (3.4.10) mukaisiin merkintöihin. Tilanteesta riippuen käytetään sopivimman tuntuisia muotoja.

Ideaalinesteen malli ei tunne kitkaa ($\vec{t}_t \equiv \vec{\tau} = \vec{0}$) ja täten ideaalinesteen ajatellaan liukuvan (engl. slip) täysin vapaasti seinämän pintaa pitkin. Liukumattomuusehtoa (5.7.14) ei siis voida enää käyttää ja jäljelle jää pelkästään läpitunkemattomuusehto eli vapaan liukumisen ehto (engl. free-slip condition)

$$\boxed{v_n = w_n \ ,} \tag{5.7.17}$$

joka siis yksinkertaistuu kiinteän seinämän tapauksessa vielä muotoon

$$v_n = 0 \ . \tag{5.7.17'}$$

Siirtyminen takertumisreunaehdosta pelkästään läpitunkemattomuusehtoon vähentää reunaehtojen lukumäärää kolmessa (kahdessa) dimensiossa siis kahdella (yhdellä). (Yhtälö (5.7.17) voitaisiin tietenkin täydentää ehdoilla $t_{y'} \equiv \tau_{x'y'} = 0$, $t_{z'} \equiv \tau_{x'z'} = 0$. Nämä kaksi yhtälöä eivät kuitenkaan sano mitään uutta ideaalinesteen mallin yhteydessä.)

Jos kyseessä on huokoinen seinämä, jonka läpi voi tapahtua nesteen virtausta (engl. seepage, transpiration), tavallinen otaksuma on, että liukumattomuusehto pätee makroskooppisena edelleen (vaikkei tämä voi olla tarkalleen oikein) ja että läpitunkemattomuusehto korvautuu ehdolla (ks. kohta 6.7)

$$\boxed{v_n = w_n - q^s \ ,} \tag{5.7.18}$$

jossa q^s on pintaan saapuvan tilavuusvirran tiheys (laskettuna positiivisena, kun suotovirtaus lähestyy pintaa itse nesteen kannalta ulkoisen normaalin positiivisesta suunnasta).

Ns. harvassa kaasussa (engl. rarified gas) kontinuumi-

teoria ei päde reunaehtojen käsittelyssä. Harvalla kaasulla tarkoitetaan tapausta, jossa molekyylien keskimääräinen vapaa matka (engl. mean free path) ei ole enää pieni tehtävän tyypilliseen pituusmittaan verrattuna. On huomattava, että keskimääräinen vapaa matka ei ole sama asia kuin molekyylien keskimääräinen etäisyys ja vielä hyvinkin voimakkaasti harvassa kaasussa pienessä tilavuusalkiossa on niin paljon molekyylejä, että voidaan operoida kontinuumiteorian käsitteillä kuten tiheys, nopeus ja lämpötila [4.8, s. 281]. Harvassa kaasussa nesteen ajatellaan liukuvan pitkin seinämää ja liukumattomuusehto korvataankin ns. kitkalailla (engl. friction law)

$$\boxed{\vec{t}_t = -c(\vec{v}_t - \vec{w}_t)} \tag{5.7.19}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} t_{y'} &\equiv \tau_{x'y'} = -c(v_{y'} - w_{y'}) \ , \\ t_{z'} &\equiv \tau_{x'z'} = -c(v_{z'} - w_{z'}) \ . \end{aligned}\right\} \tag{5.7.19'}$$

Kaavassa (5.7.19) otaksutaan siis, että traktiovektorin tangenttikomponentti $\vec{t}_t$ on verrannollinen nesteen ja seinämän tangentiaaliseen nopeuseroon ja on sille vastakkaissuuntainen. Suure c on verrannollisuuskerroin, jonka arvoja harvan kaasun tapauksessa on esitetty alan kirjallisuudessa. Läpitunkemattomuusehto säilyy entisellään.

Huomautus 3. Kaava (5.7.19) voitaisiin kirjoittaa yleisemmin muotoon

$$\boxed{\vec{t}_t = \overleftrightarrow{\alpha}_t \cdot \vec{v}_t + \vec{\beta}_t} \tag{5.7.20}$$

eli

$$\begin{Bmatrix} t_{y'} \\ t_{z'} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{y'y'} & \alpha_{y'z'} \\ \alpha_{z'y'} & \alpha_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_{y'} \\ \beta_{z'} \end{Bmatrix} . \tag{5.7.20'}$$

Tapaus (5.7.19) sisältyy tähän ($\alpha_{y'y'} = \alpha_{z'z'} = -c$, $\alpha_{y'z'} = 0$, $\alpha_{z'y'} = 0$, $\beta_{y'} = cw_{y'}$, $\beta_{z'} = cw_{z'}$). Esitys (5.7.20) muistuttaa selvästi kohdan 4.7 esitystä (4.7.10).

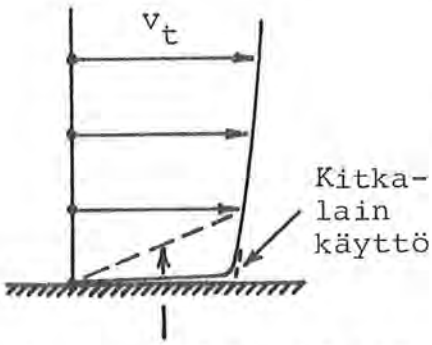
Kaava (5.7.20) ei välttämättä kuvaa suoranaisesti mitään fysikaalista ilmiötä, mutta päivittämällä suureiden α ja β arvoja iteratiivisesti (vrt. kohta 4.7.3), voidaan tiettyjä ilmiöitä mallittaa. Seuraavassa esitetään joitakin esimerkkejä.

Matalan veden virtauksessa (engl. shallow water flow) ja avouomavirtauksessa (engl. open channel flow) on esimerkiksi usein tapana kirjoittaa seinämien (mm. pohjan) kohdalla näennäisesti ehdot (5.7.19), joissa kerroin

$$c = \frac{\rho g v_t}{C^2} \quad . \tag{5.7.21}$$

Tässä ρ on tiheys, g putoamiskiihtyvyyden arvo, v_t tangentiaalinen virtausvauhti (seinämän suhteen) ja C ns. Chezy-kerroin, jonka arvo riippuu paljon olosuhteista. Leikkausjännitysten nähdään siis riippuvan itse asiassa neliöllisesti nopeudesta ja syntyvää yhteyttä nimitetäänkin usein kvadrattiseksi kitkalaiksi.

Suureet $v_{y'}$, $v_{z'}$ ja $v_t = (v_{y'}^2 + v_{z'}^2)^{1/2}$ olisivat periaatteessa seinämän kohdalla siis nollia, jos seinämä on kuten tavallista kiinteä. Turbulenttisessa virtauksessa lähelle seinämää muodostuu kuitenkin yleensä hyvin ohut rajakerros (eri mielessä kuin kohdassa 5.1 mainittu rajakerros), jossa keskiarvonopeus vasta putoaa voimakkaasti nollaan. Kuva 5.7.5 osoittaa kaaviollisesti, mitä tapahtuu, jos takertumisehtoa sovelletaan sellaisenaan jonkin diskreetin menetelmän yhteydessä. Käytännössä ei ole yleensä mielekästä pyrkiä niin tiheään verkkoon, että nopeuden ym. suureiden kulkua voitaisiin seurata rajakerroksen osalta realistisesti. Tällöin on parempi soveltaa jotain kitkalakia, kuten kuva 5.7.5 antaa ymmärtää. Kitkalaissa esiintyvät nopeudet



Kuva 5.7.5 Reunaehdon mallittaminen.

voivat liittyä esimerkiksi seinämää lähinnä olevaan laskentapisteeseen. Yksityiskohtainen, rajakerrokseen kehittyvä nopeusjakautuma hoidetaan erillisellä "lääkityksellä" kuten ns. seinämäfunktioiden (engl. wall function) käytöllä. Avouomavirtauksessa kitkalaissa käytetyt nopeudet voivat taas olla esimerkiksi joitain uoman poikkileikkauksen suhteen määriteltyjä keskinopeuksia.

Coulombin kitkalaki ei liity varsinaisesti nestemekaniikkaan. Esimerkiksi metallien muokkauksen analysoinnissa käytetään kuitenkin usein Eulerin esitystapaa ja on syytä tarkastella kaavaa (5.7.20) hieman tältä kannalta. Suure $\vec{v}$ on nyt muokattavan materiaalin nopeus ja $\vec{w}$ materiaalin liikettä ohjaavan seinämän nopeus (ajatellaan tunnetuksi). Tavanomaista Coulombin kitkalakia soveltaen saadaan ($t_n^- < 0$) läpitunkemattomuusehto

$$v_n = w_n \tag{5.7.22}$$

sekä joko liukumattomuusehto

$$\vec{v}_t = \vec{w}_t \ , \tag{5.7.23}$$

jolloin ehdon $|\vec{t}_t^-| \leq \mu(-t_n^-)$ tulee olla lisäksi voimassa tai sitten pätee kitkalaki

$$\vec{t}_t = -\mu(-t_n^-)\frac{\vec{v}_t-\vec{w}_t}{|\vec{v}_t-\vec{w}_t|} \ , \tag{5.7.24}$$

jos $\vec{v}_t \neq \vec{w}_t$ eli jos tapahtuu liukumista. Tässä μ on Coulombin kitkalain mukainen kitkakerroin. Huomataan, että yhtälö (5.7.23) on aikaisemmin esittämämme terminologian mukaan rajoite ja yhtälö (5.7.24) taas esittää konstitutiivista yhteyttä. Kummatkin ehdot sisältyvät muodollisesti tapaukseen (5.7.19), kun asetetaan vastaavasti

$$c \to \infty \tag{5.7.25}$$

tai

$$c = \frac{\mu(-t_n^-)}{|\vec{v}_t-\vec{w}_t|} \ . \tag{5.7.26}$$

Äskeisissä kaavoissa esiintyvä miinusmerkki-indeksi liittyy kohdassa 5.7.5 esitettyihin merkintöihin. Tässä merkintä tarkoittaa, että kyseessä olevan suureen arvo on laskettava kappaleen sisältä käsin reunalla. Esimerkiksi ehtoon (5.7.23) liittyvä traktio $\vec{t}_t \equiv \vec{t}_t^+$ kun on ulkopuolisen tarkkailijan kannalta aluksi tuntematon rajoitevoima. Jos puristusta vaativa ehto ($t_n^- < 0$) ei ole voimassa, kappale voi irrota seinämästä ($t_n = 0$) ja siis ehto (5.7.22) ei myöskään enää päde.

Edellä esitetty on tavallaan Coulombin lain isotrooppinen muoto, kun esimerkiksi kaavassa (5.7.24) on otaksuttu vektorit $\vec{t}_t$ ja $\vec{v}_t - \vec{w}_t$ yhdensuuntaisiksi. Jos koskettavissa pinnoissa on jonkinlaista suuntautuneisuutta, sitä voitaneen mallittaa yleisellä esityksellä (5.7.20) valitsemalla kertoimet α sopivasti.

Kappaleiden väliset kitkalait ovat todellisuudessa hyvin mutkikkaita ja Coulombin kitkalaki toimi tässä vain eräänä esimerkkitapauksena.

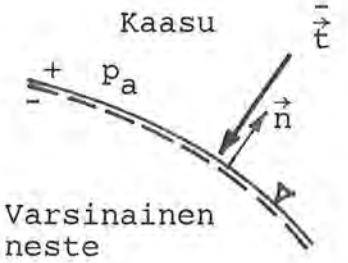
— — —

Vapaa pinta (engl. free surface) tarkoittaa yleensä varsinaisen nesteen ja kaasun tai myös kahden sekoittumattoman varsinaisen nesteen välistä rajapintaa. Tällaisesta pinnasta on ollut jo puhetta kohdassa 5.2 pintajännityksen yhteydessä. Käytännössä tavallisin tapaus on veden ja ilman välinen rajapinta. Vapaan pinnan asema on tehtävissä yleensä etukäteen tuntematon ja se tulee määrittää osana ratkaisua.

Varsinaisen nesteen ja kaasun välistä vapaata pintaa tarkasteltaessa otaksutaan yleensä - jollei mitään tarkempaa mainita -, että kaasussa vallitsee tunnettu isotrooppinen jännitystila. Täten tutkittavan varsinaisen nesteen vapaalla pinnalla traktiolla on arvo

$$\vec{t} = -p_a \vec{n} \,, \qquad (5.7.27)$$

jossa paine p_a on annettu (kuva 5.7.6). Tavallisesti p_a otaksutaan paikan suhteen vakioksi. Esimerkiksi laajojen vesimassojen liikkeitä tarkasteltaessa paikallisen ilmanpaineen käyttö on sen sijaan ymmärrettävästi oleellista.



Kuva 5.7.6 Vapaa pinta.

Jos pintajännityksen vaikutus otetaan huomioon, saadaan yhteydet (ks. kaava (5.2.45))

$$t_n^- = \bar{t}_n^+ + C(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \equiv -p_a + C(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \qquad (5.7.28)$$

ja

$$\vec{t}_t = \bar{\vec{t}}_t \equiv \vec{0} \ . \qquad (5.7.29)$$

Tässä on varauduttu merkinnöissä (ks. kohta 5.7.5) siihen, että alueen reuna voi olla (jos pintajännitys otetaan huomioon) traktion normaalikomponentin eli normaalijännityksen suhteen epäjatkuvuuspinta. Asettamalla kaavassa (5.7.28) C = 0 saadaan tavanomaisin esitys.

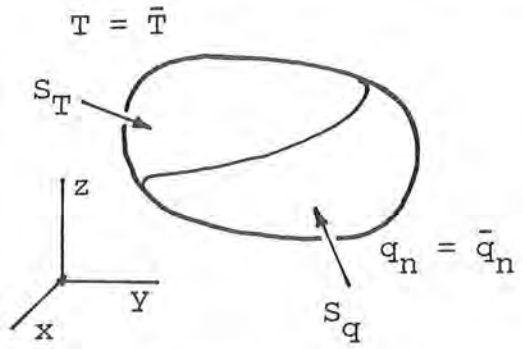
Esimerkiksi järvivirtauksissa tuulella on tärkeä merkitys. Tuulen aiheuttama kitka esitetään tavallisesti korvaamalla kaava (5.7.29) kaavalla (5.7.19), jossa asetetaan yleensä nesteen nopeus $\vec{v} \approx \vec{0}$ ja suure $\vec{w}$ tarkoittaa nyt tuulen nopeutta heti rajakerroksen ulkopuolella. (Tarkasti ottaen nopeuskenttä on jatkuva: $\vec{v}^+ = \vec{v}^-$ pinnalla.) Kerroin c esitetään kaavan (5.7.21) tapaisella lausekkeella nyt kuitenkin ohitse virtaavan kaasun tilaan liittyen.

Epästationaarisessa vapaan pinnan probleemassa pinnan asemaa päivitetään tavallisesti pienin aika-askelin. Jos nopeuskenttä tunnetaan hetkellä t, pinnalla olevien partikkelien siirtymät $\Delta\vec{u} \approx \vec{v}\Delta t$ ja pinnan uusi asema hetkellä $t+\Delta t$ voidaan määrittää. Stationaarisessa eli pysyvässä vapaan pinnan probleemassa nesteen nopeuskomponentti pinnan normaalin suunnassa häviää eli traktioehdon (5.7.28) lisäksi saadaan samassa suunnassa voimassa oleva kinemaattinen ehto (5.7.17'). Tämä esityksen (5.7.7) kanssa ristiriidassa oleva tulos selittyy sillä, että vapaan pinnan asema on tavanomaiseen tapaukseen verrattuna lisätuntematon, joka vaatii lisäehdon.

Vapaan pinnan probleeman kinematiikkaa on käsitelty lisäksi esimerkissä 6.7.1.

5.7.3 Termiset reunaehdot

Perustapaus. Käsittely on tässä miltei identtisesti kohdan 4.7.3 toistoa. Jaetaan tutkittavan alueen reuna termisessä mielessä ei päällekkäisiin osiin S_T ja S_q, jotka yhdessä muodostavat koko reunan S (kuva 5.7.7).



Kuva 5.7.7 Termiset reunaehdot.

Reunalla S_T on lämpötila annettu:

$$\boxed{T = \bar{T}} \quad S_T\text{:llä} . \qquad (5.7.30)$$

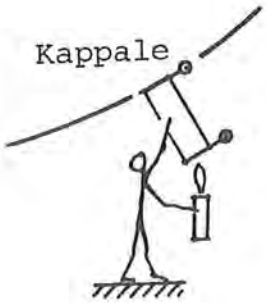
Reunalla S_q on lämpövirran tiheys annettu:

$$\boxed{q_n = \bar{q}_n} \quad S_q\text{:lla} . \qquad (5.7.31)$$

On syytä korostaa, että samassa reunan pisteessä ei voida antaa samanaikaisesti sekä lämpötilaa että lämpövirran tiheyttä vaan vain jompikumpi.

Huomautus 1. Miksi alueen reunalla voidaan antaa kussakin pisteessä esityksen (5.7.30) ja (5.7.31) mukaisesti vain toinen suureista T ja q_n mutta ei molempia? Sama kysymys koskee tietenkin myös kohdan 4.7.3 esityksiä (4.7.14) ja (4.7.15).

Kehitellään vastaavanlainen ajatuskoe kuin kohdan 5.7.2 huomautuksessa 2. Kuvan 5.7.8 esittämä reunaehtomies on vuorovaikutuksessa tarkasteltavan kappaleen kanssa mittalaitteen — jota tulemme nimittämään tässä lämmönjohtimeksi — välityksellä. Lämmönjohtimen kummankin pään lämpötila voidaan lukea ja laite on kalibroitu siten, että kutakin lämpötilaeroa ΔT vastaava laitteen läpi kulkeva "lämpövirta" q_n tiedetään. (Vrt. jousen päiden siirtymäero = venymä => jousivoima.) Lämmönjohtimen toinen pää koskettaa kappaletta ja tällä



Kuva 5.7.8 Terminen reunaehtomies.

päällä on siis sama lämpötila kuin kappaleella. Mies voi vaikuttaa lämmönjohtimeen lämmittämällä tai kylmentämällä toista päätä esimerkiksi puhalluslampulla tai hiilihappojäällä.

Annetaan miehelle ensin ohje: Kappaleen lämpötilan arvon tulee olla $\bar{T}$. Mies lämmittää tai kylmentää lämmönjohtimen toista päätä ja tarkkailee kappaletta koskettavan pään lämpötilaa, kunnes saa sen asettumaan arvoon $\bar{T}$. Kappaleesta kulkee tällöin laitteen kautta tietty lämpövirta q_n, jonka arvo seuraa ratkaisusta ja jota ei voida samanaikaisesti asettaa mielivaltaiseen arvoon. Annetaan sitten toinen ohje: Lämpövirran arvon tulee olla $\bar{q}_n$. Mies lämmittää tai kylmentää lämmönjohtimen toista päätä ja tarkkailee samalla lämpötilaeroa ΔT — joka antaa sopivasti kalibroituna myös lämpövirran arvon — ja on tyytyväinen kun se asettuu vastaamaan annettua lukemaa. Mutta selvästikään hän ei pysty samanaikaisesti kontrolloimaan kappaletta koskettavan pään lämpötilaa T, vaan sen saama arvo seuraa systeemin ratkaisusta.

— — —

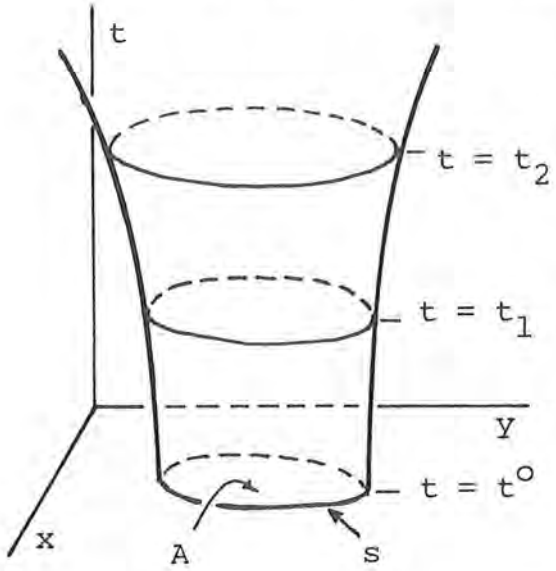
<u>Yleistys</u>. Reunalla S_q vallitsevan ehdon (5.7.31) sijasta voidaan kirjoittaa yleisemmin

$$\boxed{q_n = \alpha T + \beta \ ,} \tag{5.7.32}$$

jossa α ja β ovat annettuja vakioita. Tämän kaavan käytön suhteen viitataan kohtaan 4.7.3. Eräs sovellutus on konvektiivinen lämmönsiirto vapaalta pinnalta.

5.7.4 Alkuehdot

Kohdassa 4.7.4 käsitellyt seikat pätevät tässä analogisina. Nyt tehtävän määrittelyalue on kuitenkin paikan suhteen Eulerin esitystavan mukaisesti kontrollialue V, joka voi muuttua ajan mukana. Kuvan 4.7.10 vastineeksi voitaisiin saadan kuvan 5.7.9 esittämä asetelma. Kyseessä saattaisi olla vaikka järvivirtaus, jossa kaksidimensioisena käsitellyn altaan koko riippuu altaan reunojen kaltevuuden johdosta vapaan pinnan korkeusasemasta ja siis myös ajasta. Tavallisin tilanne on kuitenkin se, jossa kontrollialue on paikan suhteen vakio, jolloin kuvan 5.7.9 alueen vaipasta tulee sylinteripinta kuten kuvassa 4.7.10.



Kuva 5.7.9 xyt-avaruus.

Koska Eulerin esityksen lähtökohtana on normaalisti nopeuskenttä {v}, vallitsevat liikeyhtälöt ovat ajan suhteen ensimmäistä kertalukua. (Vertaa vastakohtana Lagrangen esityksen siirtymäkenttää koskevat liikeyhtälöt, jotka ovat ajan suhteen toista kertalukua.) Täten alkuehtona ei esiinny enää suureen $\partial\{v\}/\partial t$ jakautumaa.

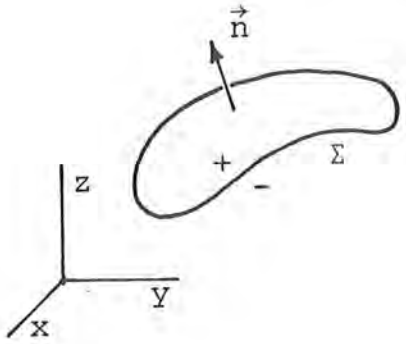
5.7.5 Jatkuvuusehdot

Etenkin elementtimenetelmän paloittaisen approksimaatiotavan muistaen on tärkeää tietää jotain kontinuumin eri suureiden paikan suhteen mitattujen jatkuvuuksien — tai epäjatkuvuuksien — luonteesta. Elementtimenetelmä synnyttää elementtien rajapinnoille tiettyjen suureiden arvoihin todellisuudesta poikkeavia hyppäyksiä. Nämä epäjatkuvuudet antavat itse asiassa eräänlaista tietoa ratkaisuun sisältyvän virheen suuruudesta.

Tässä tullaan tarkastelemaan ensin ns. epäjatkuvuus- eli hyppyehtoja. Niitä sovelletaan sitten jatkossa kuitenkin lähinnä tapauksissa, joissa ko. ehtoja voidaan ehkä paremminkin luonnehtia otsikon mukaisesti jatkuvuusehdoiksi. (Huomautettakoon, että termillä jatkuvuusehto tarkoitetaan tässä aivan eri asiaa kuin massan säilymisen periaatteesta johtuvaa jatkuvuusyhtälöä.)

Vallitsevia yhtälöitä johdettaessa on edellä yleensä otaksuttu esiintyviltä suureilta sellaista jatkuvuutta, että tarvittavat matemaattiset manipulaatiot — kuten Gaussin lauseen soveltaminen — ovat olleet tavanomaisissa muodoissaan käytettävissä. Esimerkiksi kaasumekaniikan shokkien käsittelyssä näin ei kuitenkaan enää ole asian laita ja me tarvitsemme tässä suhteessa täsmennettyjä kaavoja.

Tarkastellaan kuvan 5.7.10 esittämiä merkintöjä. Pinta $\Sigma(t)$ on ns. epäjatkuvuuspinta (engl. discontinuity surface), jonka läpi siirryttäessä ainakin jotkin vallitsevien suureiden tai niiden derivaattojen arvot voivat saada hyppäyksiä. Valitaan pinnan toinen puoli positiiviseksi (ja suunnataan yksikkönormaalivektori $\vec{n}$ pinnan tälle puolelle) ja toinen negatiiviseksi. Merkitään ko. suureiden raja-arvoja pintaa eri puolilta lähestyttäessä vastaavasti viitteillä + ja -. Kirjallisuudessa on usein tapana esittää tietyn suureen f saama arvon muutos eli hyppy tai hyppäys (engl. jump) pinnan läpi



Kuva 5.7.10 Epäjatkuvuuspinta Σ.

siirryttäessä lyhennysmerkinnällä

$$[\![f]\!] \equiv f^+ - f^- \,. \tag{5.7.33}$$

Lihavaa hakasulkumerkkiä käytetään erottamaan tapaus matriisista tai tavallisesta sulkumerkistä. Korostettakoon, että tässä vaiheessa $\Sigma(t)$ on yleinen avaruudessa liikkuva tai paikoillaan oleva matemaattinen pinta (vrt. kohta 6.7), joka voi olla tietyissä sovellutuksissa tarvittaessa esimerkiksi ainepinta.

Esimerkiksi lähteessä [5.4] johdetaan mm. seuraavat pinnalla Σ vallitsevat epäjatkuvuus- eli <u>hyppyehdot</u> (engl. jump condition):

$$[\![\rho U]\!] = 0 \,, \tag{5.7.34}$$

$$[\![\vec{t}]\!] - [\![\rho U \vec{v}]\!] = \vec{0} \,, \tag{5.7.35}$$

$$[\![\rho U(e + \tfrac{1}{2} v^2)]\!] - [\![\vec{t}\cdot\vec{v} - q_n]\!] = 0 \,. \tag{5.7.36}$$

Ne saadaan vastaavasti massan säilymisen, liikemäärän taseen ja energian taseen periaatteista. Lyhennysmerkintä

$$U = v_n - w_n \tag{5.7.37}$$

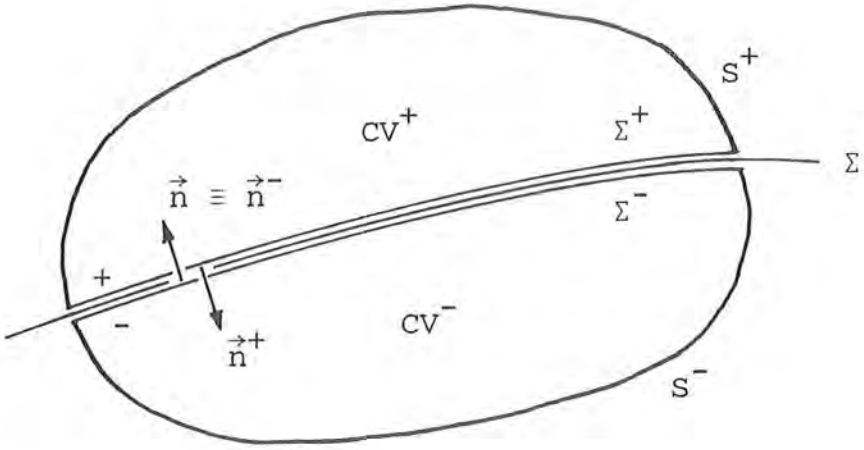
tarkoittaa virtauksen suhteellista normaalinopeutta (merkintä (e), esimerkki 3.3.4) tässä epäjatkuvuuspinnan Σ suhteen. Esimerkissä 5.7.1 selostetaan hyppyehtojen johtamistapaa.

<u>Esimerkki 5.7.1</u> Epäjatkuvuuspinta ja Reynoldsin lause.

Kuva (a) esittää tietyllä hetkellä umpinaisen ainepinnan $S = S^+ \cup S^-$ rajaamaa kontinuumikappaletta, jonka läpi kulkee epäjatkuvuuspinta Σ (vrt. kuva 5.7.10). Tarkastellaan tämän ainetilavuudesta V erottamia osia CV^+ ja CV^-, joiden reunat muodostuvat vastaavasti ainepinnoista S^+ ja S^- sekä pinnoista Σ^+ ja Σ^-. Kuvan esittämä jaottelu on tehty otaksuen, että kyseeseen tulevat suureet ovat riittävän sileitä osissa CV^+ ja CV^- niin, että esimerkiksi Gaussin lausetta voidaan soveltaa erikseen niissä.

Korostettakoon, että alueet $CV^+(t)$ ja $CV^-(t)$ eivät ole yleensä ainetilavuuksia, koska pinta $\Sigma(t)$ ei ole välttämättä ainepinta. Yhdessä ne kuitenkin muodostavat ainetilavuuden $V(t)$. Täten siis

$$\int_{V(t)} (\ )dV = \int_{CV^+(t)} (\ )dV + \int_{CV^-(t)} (\ )dV \,. \tag{a}$$



(a)

Esimerkissä 3.3.4 johdettiin yhtälö (yhtälö (g))

$$\frac{d}{dt}\int_{CV(t)} f dV = \int_{CV} [\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}f)]dV - \int_{CS} (v_n - w_n) f dS \ . \qquad \text{(b)}$$

Sovelletaan tätä erikseen alueille $CV^+(t)$ ja $CV^-(t)$:

$$\frac{d}{dt}\int_{CV^+(t)} f dV = \int_{CV^+} [\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}f)]dV + $$

$$- \int_{S^+} 0\cdot f dS + \int_{\Sigma^+} (v_n^+ - w_n) f^+ dS \ , \qquad \text{(c)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{CV^-(t)} f dV = \int_{CV^-} [\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}f)]dV + $$

$$- \int_{S^-} 0\cdot f dS - \int_{\Sigma^-} (v_n^- - w_n) f^- dS \ . \qquad \text{(d)}$$

Ensinnäkin on huomattava, alueiden CV^+ ja CV^- reunaosat S^+ ja S^- ovat ainepintoja, joten suhteellinen normaalinopeus $v_n - w_n$ häviää niillä. Toiseksi yhtälön (c) viimeisen integraalin edessä oleva plusmerkki johtuu siitä, että kaavassa (b) tunnus n viittaa ulkoiseen normaaliin ja tässä taas ulkoisen normaalin suunta osalla Σ on määritelty kuvan (a) mukaisesti eli osan CV^+ kannalta vastakkaiseen suuntaan.

Lasketaan yhtälöt (c) ja (d) puolittain yhteen, jolloin saadaan tulos

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} f dV = \int_{V} [\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}f)]dV + $$

$$+ \int_{\Sigma} [(v_n^+ - w_n) f^+ - (v_n^- - w_n) f^-] dS \ . \qquad \text{(e)}$$

Tässä on käytetty hyväksi kaavaa (a) sekä siitä puolittain derivoimalla syntyvää yhteyttä

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} (\ )dV = \frac{d}{dt}\int_{CV^+(t)} (\ )dV + \frac{d}{dt}\int_{CV^-(t)} (\ )dV \tag{f}$$

joka voidaan kirjoittaa siis myös muotoon

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} (\ )dV = \frac{d}{dt}\int_{CV^+(t)} (\ )dV + \frac{d}{dt}\int_{CV^-(t)} (\ )dV \ . \tag{g}$$

Ottamalla käyttöön lyhennysmerkinnät (5.7.33) ja (5.7.37) saadaan Reynoldsin kuljetuslause (muoto 5)

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} f dV = \int_V [\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}f)]dV + \int_\Sigma [\![Uf]\!]\, dS \ . \tag{h}$$

Tämä on muodon (3.3.88') yleistys tapaukseen, jossa tutkittavassa alueessa on epäjatkuvuuspinta.

Käsitellään mallitapauksena hyppyehdon (5.7.34):

$$[\![\rho U]\!] = 0 \tag{i}$$

johtamista. Massan säilymisen periaate (3.4.3) on

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho dV = 0 \ . \tag{j}$$

Sovelletaan tämän vasempaan puoleen Reynoldsin lausetta (h) ($f \triangleq \rho$), jolloin saadaan yhtälö

$$\int_V [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho)]dV + \int_\Sigma [\![\rho U]\!]\, dS = 0 \ . \tag{k}$$

Tämän jälkeen jatketaan samaan henkeen kuin on selostettu kohdassa 5.3 tai vielä tarkemmin kohdassa 4.3. Otetaan ensin alueen V pieniä osa-alueita ΔV siten, että pinta Σ ei leikkaa niitä. Saadaan yhtälöitä

$$\int_{\Delta V} [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho)]dV = 0 \ , \tag{l}$$

joista siis seuraa tuttu paikallinen jatkuvuusyhtälö (5.3.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{m}$$

alueessa $V-\Sigma$. Tällä merkinnällä viitataan siihen, että tarkasti ottaen itse epäjatkuvuuspinnalla ko. differentiaaliyhtälöä ei voida kirjoittaa. Tuloksen (m) huomioonottamisen jälkeen yhtälö (k) jää muotoon

$$\int_{\Sigma} [\![\rho U]\!] \, dS = 0 \, . \tag{n}$$

Nyt ajattelemme, että otammekin alueen V pieniä osa-alueita ΔV siten, että alueesta Σ leikkaantuu pieniä osa-alueita $\Delta\Sigma$. Saamme yhtälöitä

$$\int_{\Delta\Sigma} [\![\rho U]\!] \, dS = 0 \, , \tag{o}$$

joista voidaan päätellä paikallinen ehto

$$[\![\rho U]\!] = 0 \tag{p}$$

koko pinnalla Σ, koska alueet $\Delta\Sigma$ voidaan valita mielivaltaisesti.

Muut ehdot (5.7.35)...(5.7.37) voidaan päätellä vastaavaan tapaan. On mielenkiintoista, että Reynoldsin lauseen muodon (h) avulla yleisistä periaatteista saadaan siis johdettua yhdellä kertaa sekä paikalliset kenttäyhtälöt että mahdolliset hyppyehdot.

Ennen ehtojen (5.7.34)...(5.7.36) lähempää tarkastelua on syytä todeta, että ne seuraavat pelkästään aksioomista eivätkä voi siten ilmaista itse ko. materiaalin konstitutiivisista ominaisuuksista johtuvia tuloksia. Olipa Σ mikä hyvänsä kappaleessa esiintyvä pinta niin tavanomaiset otaksumat ovat nopeuden jatkuvuusehto

$$\boxed{\vec{v}^{+} = \vec{v}^{-}} \tag{5.7.38}$$

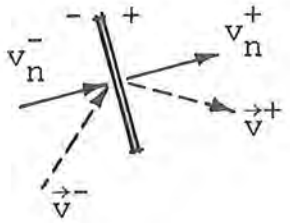
ja lämpötilan jatkuvuusehto

$$\boxed{T^{+} = T^{-} \, .} \tag{5.7.39}$$

Nämä ovat intuitiivisesti melko uskottavia. Jos toisiaan koskevilla partikkeleilla olisi eri nopeuden arvot, kontinuumiin tulisi rakoja ja äkillisiä liukumia. Jos toisiaan koskevilla partikkeleilla olisi eri lämpötilat, lämpötilan gradientti tulisi äärettömän suureksi; samoin siis lämpövirran tiheys ja ero tasottuisi heti pois. (Nämä selittelyt eivät kuitenkaan ole täysin vedenpitäviä; ks. huomautus 2.) Ehto (5.7.38) ei tietenkään päde, jos kontinuumiin nimenomaan syntyy "repeämiä" kuten esi-

merkiksi tapahtuu kavitaatiossa. Kontinuumiteoriaa voidaan käyttää edelleen, mutta syntyvät kappaleen uudet rajapinnat tulee ottaa huomioon.

Ideaalinesteen mallissa ei ole kitkaa ja neste voi liukua vapaasti seinämiä pitkin. Sama voi periaatteessa tapahtua myös nestekerrosten välillä. Täten ideaalinesteen mallin yhteydessä on varauduttava joskus ratkaisuihin, joissa tietyillä epäjatkuvuuspinnoilla läpitunkemattomuusehto



$$\boxed{v_n^+ = v_n^-} \qquad (5.7.40)$$

Kuva 5.7.11 Läpitunkemattomuusehto.

on voimassa, mutta liukumattomuusehto

$$\boxed{\vec{v}_t^+ = \vec{v}_t^-} \qquad (5.7.41)$$

ei enää päde. Tässä on siis lainattu merkintöjä ja terminologiaa kohdasta 5.7.2. Kappaleen ympäristöhän voidaan niin halutessa tulkita kappaleen jatkeeksi ja reunaehdot alkuperäisen kappaleen reunalle asetetulla pinnalla Σ vallitseviksi jatkuvuus- tai hyppyehdoiksi. Läpitunkemattomuusehto on varustettu erityisellä havainnollistavalla kuvalla (kuva 5.7.11), josta ehdon geometrinen merkitys $\vec{n}\cdot\vec{v}^+ = \vec{n}\cdot\vec{v}^-$ näkyy selvästi. Ehdot (5.7.40) ja (5.7.41) yhdessä vastaavat tietenkin ehtoa (5.7.38).

Rajoitumme jatkossa tarkastelemaan hyppyehtojen (5.7.34)... (5.7.36) saamia muotoja lähinnä tapauksissa, joissa mahdollinen epäjatkuvuuspinta yhtyy jatkuvasti ainepintaan. Tämä merkitsee, että jätämme varsinaisten shokkien käsittelyn tässä pois. Tarkastelemme siis mahdollisten aineominaisuuksien hyppäysten vaikutusta. Kahta eri viskositeetin, kimmokertoimen yms. omaavaa

aluettahan rajoittaa jatkuvasti ainepinta.

Jos mahdollinen epäjatkuvuuspinta Σ yhtyy jatkuvasti ainepintaan, merkitsee tämä toisin sanoen, että epäjatkuvuuspinnan läpi ei virtaa ainetta. Täten

$$U^+ = 0 \ , \quad U^- = 0 \tag{5.7.42}$$

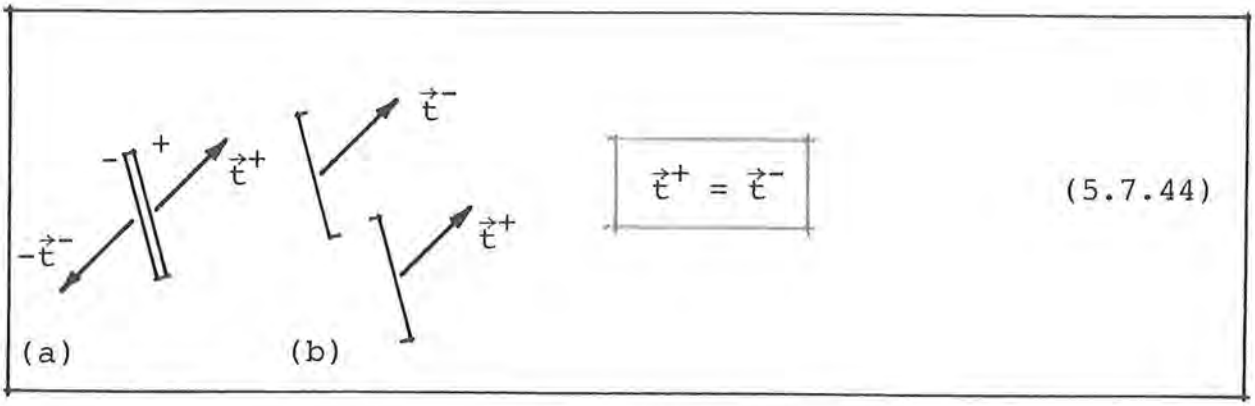
eli

$$v_n^+ - w_n = 0 \ , \quad v_n^- - w_n = 0 \ . \tag{5.7.43}$$

(Termiä w_n ei tarvitse tietenkään varustaa viitteillä + tai -, koska kyseessä on yksi ja sama arvo.) Vielä siis $v_n^+ = v_n^-$ ja läpitunkemattomuusehto on käytettävissä.

Massan säilymisen periaatteesta syntyvän hyppyehdon (5.7.34): $\rho^+U^+ - \rho^-U^- = 0$ nähdään toteutuvan tässä kaavojen (5.7.42) perusteella automaattisesti.

Liikemäärän taseen periaatteesta seuraava hyppyehto (5.7.35): $\vec{t}^+ - \vec{t}^- - (\rho^+U^+\vec{v}^+ - \rho^-U^-\vec{v}^-) = \vec{0}$ saa siis tässä muodon



$$\boxed{\vec{t}^+ = \vec{t}^-} \tag{5.7.44}$$

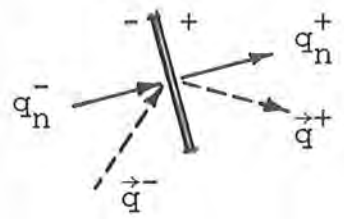
Kuva 5.7.12 Traktion jatkuvuusehto.

Tämä tulos on ollut jo esillä hieman eri merkinnöin kaavana (3.4.11). Kaavassa (5.7.44) tarkastellaan traktiota siis kahdessa periaatteessa äärettömän läheisissä pinta-alkioissa, joilla on <u>sama</u> ulkoisen normaalin suunta. Kuva 5.7.12 (b) pyrkii havainnollistamaan tätä. Kuva (a) esittää taas lähinnä äärettömän ohuen aineliuskan vakaakappalekuviota, jossa kuvaan 3.4.12 verrattuna $\vec{t}^+ \triangleq \vec{t}^{(n)}$, $-\vec{t}^- \triangleq \vec{t}^{(-n)}$.

Energian taseen periaatteesta seuraava hyppyehto (5.7.36) saa tässä ($U^+ = 0$, $U^- = 0$) ensiksi muodon

$$\vec{t}^+ \cdot \vec{v}^+ - q_n^+ - \vec{t}^- \cdot \vec{v}^- + q_n^- = 0 \ . \qquad (5.7.45)$$

Jos lisäksi otaksutaan, että nopeusvektori on jatkuva (kaava (5.7.35)) ja otetaan huomioon traktion jatkuvuusehto (5.7.44), saadaan tavanomainen muoto



$$\boxed{q_n^+ = q_n^-} \qquad (5.7.46)$$

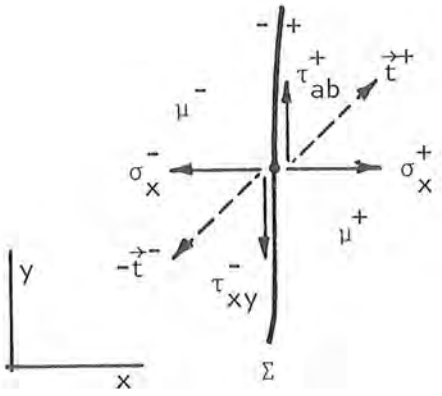
Kuva 5.7.13 Lämpövirran tiheyden jatkuvuusehto.

Traktiota koskeva tulos (5.7.44): $\vec{t}^+ = \vec{t}^-$ eli $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}^+ = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}^-$ on epätieteellisesti sanottuna seuraava: äärettömän vähän massaa omaavaan systeemiin vaikuttavien voimien resultantin tulee hävitä, koska muuten systeemi saisi äärettömän kiihtyvyyden. (Katso kuitenkin huomautus 2.) Lämpövirran tiheyttä koskevan tuloksen (5.7.45): $q_n^+ = q_n^-$ eli $\vec{n} \cdot \vec{q}^+ = \vec{n} \cdot \vec{q}^-$ vastaavanlainen tulkinta on seuraava: äärettömän vähän massaa omaavaan systeemiin ei voi varastoitua energiaa eli systeemin saaman nettolämpötehon tulee hävitä. Huomautettakoon, että aksioomista ei seuraa mitään vaatimusta lämpövuovektorin tangenttikomponentin $\vec{q}_t$ jatkuvuudesta.

Esimerkki 5.7.2 Paineen epäjatkuvuus. Tarkastellaan kokoonpuristumatonta tasovirtausta (ks. kohta 6.2.2) xy-tasossa (kuva (a)).

Olkoon mahdollinen epäjatkuvuuspinta Σ merkintöjen yksinkertaistamiseksi tarkasteltavassa pisteessä y-akselin suuntainen. Otaksutaan Stokesin kitkalain pitävän paikkansa ja että epäjatkuvuudet johtuvat siitä, että viskositeetilla on eri arvot (μ^+ ja μ^-) pinnan Σ eri puolilla.

Otaksutaan nopeus tavanomaiseen tapaan kaavan (5.7.38) mukaisesti jatkuvaksi. Tällöin



(a)

$$v_x^+ = v_x^- , \quad v_y^+ = v_y^- \tag{a}$$

ja siis derivoimalla y:n suhteen (ollaan edelleen pinnalla Σ)

$$\frac{\partial v_x^+}{\partial y} = \frac{\partial v_x^-}{\partial y} , \tag{b}$$

$$\frac{\partial v_y^+}{\partial y} = \frac{\partial v_y^-}{\partial y} . \tag{c}$$

Kaava (c) on toisin kirjoitettuna (ks. merkinnät (3.3.69))

$$d_y^+ = d_y^- \equiv (d_y)_\Sigma \tag{c'}$$

Tällä on helposti ymmärrettävä merkitys: toisiaan koskettavilla y-akselien suuntaisilla viiva-alkioilla on sama venymänopeus.

Jatkuvuusyhtälö (5.3.7) antaa kokoonpuristumattomalla nesteellä

$$d_V \equiv d_x + d_y \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{d}$$

ja siis pinnan Σ eri puolilla

$$\frac{\partial v_x^+}{\partial x} + \frac{\partial v_y^+}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial v_x^-}{\partial x} + \frac{\partial v_y^-}{\partial y} = 0 . \tag{e}$$

Näistä saadaan yhtälön (c) perusteella vielä

$$\frac{\partial v_x^+}{\partial x} = \frac{\partial v_x^-}{\partial x} \tag{f}$$

eli

$$d_x^+ = d_x^- \equiv (d_x)_\Sigma . \tag{f'}$$

x-akselia vastaan kohtisuorassa olevaan pinta-alkioon vaikuttavan traktion esitys (3.4.10) on tässä

$$\vec{t} = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} . \tag{g}$$

Ehto (5.7.44) on siis

$$\sigma_x^+ \vec{i} + \tau_{xy}^+ \vec{j} = \sigma_x^- \vec{i} + \tau_{xy}^- \vec{j} \tag{h}$$

eli

$$\sigma_x^+ = \sigma_x^- , \tag{i}$$

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- . \tag{j}$$

Konstitutiiviset yhteydet ovat (ks. kaavat (5.2.23'))

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^* &= 2\mu d_x \,, \\ \sigma_y^* &= 2\mu d_y \,, \\ \tau_{xy} &= \mu g_{xy} \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(k)}$$

Saadaan (ks. kaava (f'))

$$(\sigma_x^*)^+ = 2\mu^+(d_x)_\Sigma \,, \qquad (\sigma_x^*)^- = 2\mu^-(d_x)_\Sigma \,, \qquad \text{(l)}$$

joten yleensä

$$(\sigma_x^*)^+ \neq (\sigma_x^*)^- \,. \qquad \text{(m)}$$

Vastaavasti (ks. kaava (c'))

$$(\sigma_y^*)^+ = 2\mu^+(d_y)_\Sigma \,, \qquad (\sigma_y^*)^+ = 2\mu^-(d_y)_\Sigma \,, \qquad \text{(n)}$$

joten samoin yleensä

$$(\sigma_y^*)^+ \neq (\sigma_y^*)^- \,. \qquad \text{(o)}$$

Koska $\sigma_x = -p + \sigma_x^*$, kaava (i) antaa

$$-p^+ + (\sigma_x^*)^+ = -p^- + (\sigma_x^*)^- \,. \qquad \text{(p)}$$

Kaavan (m) johdosta siis

$$p^+ \neq p^- \,. \qquad \text{(q)}$$

Tämä tulos tavallaan tukee sitä elementtimenetelmän yhteydessä tavanomaisinta käytäntöä, että paineen approksimaatio valitaan kokoonpuristumattomassa virtauksessa yleensäkin elementtien välillä epäjatkuvaksi.

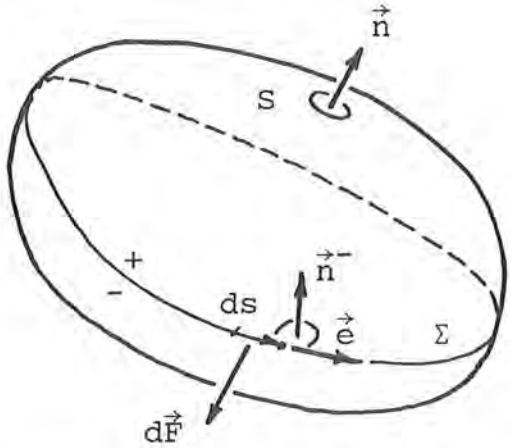
Huomautus 1. Kahden erilajisen nesteen välinen rajapinta on myös ainepinta. Mutta tulos (5.7.44) ei pidä sisällään kohdassa 5.2 käsiteltyä pintajännityksestä johtuvaa normaalijännityksen arvon hyppyä. Miten tämä on selitettävissä?

Yleisiä aksioomia käsitellessämme emme ole ottaneet lainkaan huomioon ns. pintailmiöitä. Voidaan otaksua, että kontinuumissa on ainepintoja, joilla on tietty jakautunut sisäenergian pinta-

tiheys, entropian pintatiheys jne. Aksioomia sovellettaessa näiden osuudet on tällöin otettava myös huomioon. Todellisuudessa tällaisilla pinnoilla täytyy tietenkin olla jokin äärellinen paksuus, koska esimerkiksi energian esiintyminen vaatii myös materian esiintymistä. Karkeana esimerkkinä voitaisiin ajatella massiivista betonista painesäiliötä, joka on vahvistettu ohuella teräskuorella. Ensimmäisenä approksimaationa tämä kuori voitaisiin mallittaa äärettömän ohuena pintana, jossa kuitenkin vaikuttaa pinnan suuntaisia äärellisiä voimia ja jolla on äärellinen määrä sisäenergiaa.

Tavallisin esimerkki pintailmiöstä on pintajännitys. Sen syntymisestä vastaavan kerroksen paksuus on kirjallisuuden mukaan tyypillisesti luokkaa 10^{-6} cm. Täten käsittely äärettömän ohuena kerroksena on tavanomaisten probleemien yhteydessä erinomaisen oikeutettua.

Tarkastellaan nyt esimerkkinä juuri pintajännityksen käsittelyä liikemäärän taseen periaatteen yhteydessä. Epäjatkuvuuspinta Σ leikkaa tarkasteltavan kappaleen pinnan S pitkin umpinaista käyrää s (kuva 5.7.14). Kappaleeseen vaikuttaa viiva-alkion ds osuudella pintajännityksestä syntyvä differentiaalinen voima



Kuva 5.7.14 Pintajännityksen vaikutus.

$$d\vec{F} = C\vec{e}\times\vec{n}^- ds = ds\vec{e}\times C\vec{n}^-$$

$$= d\vec{s}\times C\vec{n} \ . \qquad (5.7.47)$$

C on pintajännityksen arvo ja voiman dF otaksutaan vaikuttavan kohdassa 5.2 selostetulla tavalla ko. pisteessä pinnan Σ tangenttitasossa ja kohtisuoraan viiva-alkiota ds vastaan. Epäjatkuvuuspinnan yksikkönormaalia on merkitty tässä tunnuksella $\vec{n}^-$, jottei se sekaantuisi kappaleen pinnan S yksikkönormaaliin $\vec{n}$. Vektori $\vec{e}$ on käyrän s positiiviseen suuntaan osoittava yksikkötangenttivektori.

Liikemäärän taseen periaatetta sovellettaessa kappaleeseen

vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti (3.4.21) tulee siis täydentää pintajännityksistä kertyvällä osuudella

$$\vec{F}_s = \int_s C\vec{e}\times\vec{n}^- ds = \int_s d\vec{s}\times C\vec{n}^- \ . \qquad (5.7.48)$$

Jälkimmäinen integraali on kirjoitettu valmiiksi siten, että siihen voidaan soveltaa helposti yleistettyä Stokesin lausetta (L.2.12) ($f \mathrel{\hat{=}} C\vec{n}^-$, $* \mathrel{\hat{=}} \times$). Saadaan

$$\vec{F}_s = \int_\Sigma (d\vec{S}\times\vec{\nabla})\times C\vec{n} = \int_\Sigma (\vec{n}\times\vec{\nabla})\times C\vec{n}dS \ , \qquad (5.7.49)$$

jossa on jo luovuttu viitteen - käytöstä. Muodon (5.7.49) huolellinen kehittely johtaa lopuksi tulokseen

$$\vec{F}_s = \int_\Sigma C(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})\vec{n}dS \ , \qquad (5.7.50)$$

jos C otaksutaan paikan suhteen vakioksi. Lauseke (5.7.49) tai (5.7.50) merkitsee, että esimerkissä 5.7.1 esitetyn tyyppisessä johdossa saadaan epäjatkuvuuspinnan yli otettu lisäintegraali, josta syntyy muutoksia tavanomaiseen hyppyehtoon (5.7.35).

Huomautettakoon vielä, että kohdassa 5.2 ja tässäkin ainoana pintailmiöesimerkkinä olevaa pintajännityksen käsittelyä voidaan pitää vain ensimmäisenä approksimaationa. Esimerkiksi pinnan liikkuessa ei ole mitenkään välttämätöntä, että pintajännitystraktio on kohtisuorassa ko. viiva-alkiota vastaan; pikemminkin kyseessä voisi olla kalvojännitystilassa olevan kuoren jännitysjakautuman tapainen asetelma.

— — —

Huomautus 2. Tarkastellaan hieman myös tapausta, jossa mahdollinen epäjatkuvuuspinta Σ ei ole ainepinta kuten edellä on otaksuttu, vaan paikoillaan avaruudessa oleva pinta. Tämä tapaus koskee siis stationaarista virtausta. Tällöin epäjatkuvuuspinnan siirtymänopeus normaalin suunnassa $w_n = 0$, jolloin kaavan (5.7.37) mukaan $U = v_n$. Esimerkiksi kaavat (5.7.34) ja (5.7.35) antavat vastaavasti tulokset

$$\rho^+ v_n^+ = \rho^- v_n^- \qquad (5.7.51)$$

ja

$$\vec{t}^{+} = \vec{t}^{-} + \rho v_n(\vec{v}^{+}-\vec{v}^{-}) \ . \qquad (5.7.52)$$

Jälkimmäisessä kaavassa $\rho v_n \equiv \rho^{+} v_n^{+} = \rho^{-} v_n^{-}$.

Jos tiheys ρ saa hyppäyksen, nopeuden normaalikomponentti v_n ei siis ole kaavan (5.7.51) mukaan enää jatkuva eli $v_n^{+} \neq v_n^{-}$. Tämä tulos näyttäisi aluksi olevan ristiriidassa kaavan (5.7.38) yhteydessä esitetyn rakojen syntymis -selittelyn kanssa, jota voidaan soveltaa yhtä hyvin myös kaavaan (5.7.40). Nyt kuitenkin käsittelemme tapausta, jossa aine virtaa jatkuvasti epäjatkuvuuspinnan läpi. Tietyllä hetkellä + ja - puolella olevilla toisiaan koskettavilla partikkeleilla on kyllä eri nopeudet, mutta koska partikkelit viipyvät tässä asemassa äärettömän lyhyen ajan, ne eivät ehdi liikkua niin, että niiden välille syntyisi rako. Rako syntyisi vain, jos samoilla partikkeleilla olisi nopeusero äärellisen ajan verran.

Kaavat (5.7.44) ja (5.7.52) poikkeavat samoin toisistaan. Täten edellisen yhteydessä esitetty selittely ei ole aina oikeellinen. Jos nimittäin nopeusvektorilla on stationaarisessa tapauksessa epäjatkuvuuspinnan eri puolilla eri arvot $\vec{v}^{+}$ ja $\vec{v}^{-}$, pinnan läpi kulkeva partikkeli saa äärettömän lyhyessä ajassa nopeuden arvon äärellisen muutoksen $\vec{v}^{+} - \vec{v}^{-}$, joten partikkelin kiihtyvyys onkin periaatteessa ääretön. (Käytännössä näin ei tietenkään tapahdu, vaan epäjatkuvuuspinta on todellisuudessa tietyn paksuuden omaava kerros, joka on kuitenkin syytä mallittaa käsittelyn yksinkertaistamiseksi äärettömän ohueksi.)

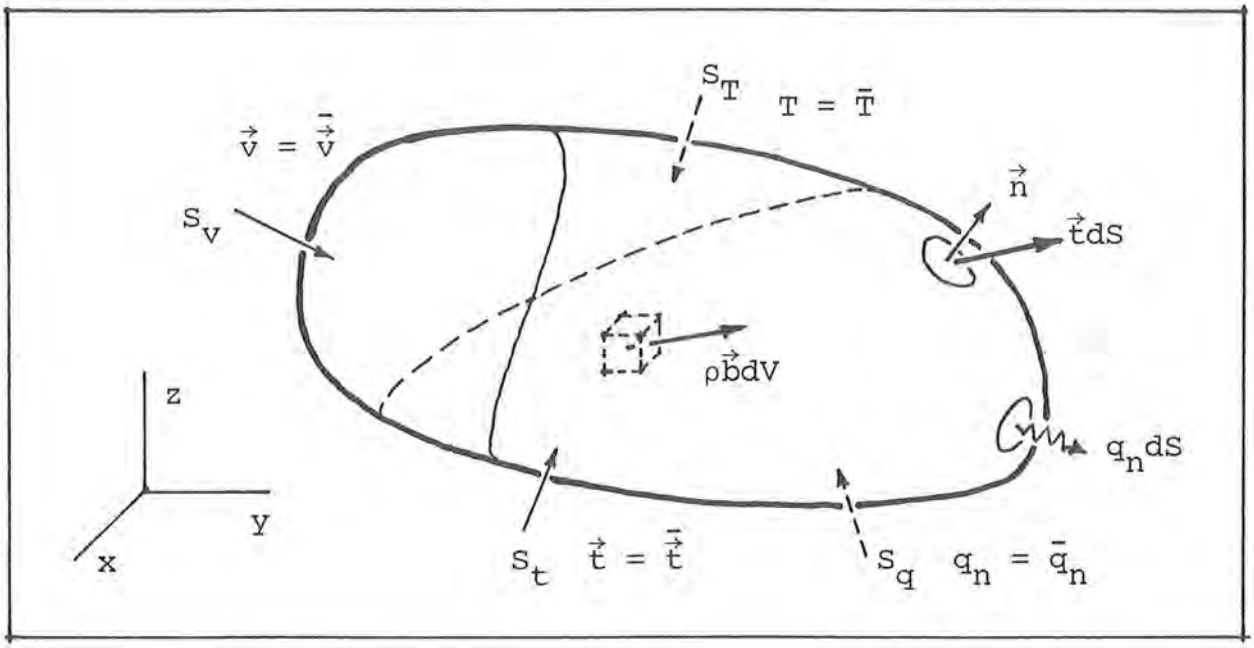
Huomautettakoon vielä, että jos yhtälön (5.7.52) johdossa otaksuttu stationaarinen pinta Σ on samalla ainepinta, nopeusvektoreiden $\vec{v}^{+}$ ja $\vec{v}^{-}$ tulee olla pinnan suuntaisia eli $v_n^{+} = 0$, $v_n^{-} = 0$ ja yhtälön (5.7.52) viimeinen termi häviää. Täten joudutaan takaisin ainepinnalle johdettuun yhtälöön (5.7.44) kuten pitääkin.

— — —

5.8 Yhteenveto

Yleistä. Tässä kohdassa kootaan edellä käsitellyt nestemekaniikan tyypilliset riippuvuudet matemaattiselta kannalta tarkasteltavaksi yhtenäiseksi yhtälösysteemiksi.

Kuvassa 5.8.1 palautetaan vielä mieleen eräitä käytettyjä merkintöjä. Kyseessä on siis Eulerin esitystapa. Käsittely on



Kuva 5.8.1 Eräitä merkintöjä.

täysin samanhenkinen kuin kiinteää ainetta koskevassa vastaavassa kohdassa 4.8, joten osa kommenteista jätetään liiallisen toiston välttämiseksi pois.

Kenttäyhtälöt. Cauchyn I liikelain mukaiset liikeyhtälöt ovat

$$\rho\{b\} - \{\nabla\}p + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma^*\} = \rho\{a\} \ , \quad (3 \text{ kpl}) \qquad (5.8.1)$$

joissa jännitys on jo jaettu paineosaan ja deviaatio-osaan.

Cauchyn II liikelain mukaiset yhtälöt ilmaisevat parittaisten leikkausjännitysten yhtäsuuruuden. Tämä seikka on otettu jo huomioon määrittelemällä pystyvektorit $\{\sigma\}$ ja $\{\sigma^*\}$ vain kuusi alkiota sisältäviksi, joten nämä yhtälöt on syytä jättää tässä yhtey-

dessä kirjaamatta.

Jatkuvuusyhtälö on

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \{v\}^T\{\nabla\}\rho + \rho\{\nabla\}^T\{v\} = 0 \ . \quad (1\ \text{kpl}) \tag{5.8.2}$$

Energiayhtälö on

$$\rho(\frac{\partial e}{\partial t} + \{v\}^T\{\nabla\}e) = -\{\nabla\}^T\{q\} - pd_V + \{\sigma^*\}^T\{d\} \ . \quad (1\ \text{kpl}) \tag{5.8.3}$$

Kinematiikka antaa lisäksi kiihtyvyys-nopeusyhteyden

$$\{a\} = \frac{\partial}{\partial t}\{v\} + [\frac{\partial v}{\partial r}]\{v\} \ , \quad (3\ \text{kpl}) \tag{5.8.4}$$

deformaationopeus-nopeusyhteyden

$$\{d\} = [{}_d\partial_v]\{v\} \quad (6\ \text{kpl}) \tag{5.8.5}$$

sekä dilataationopeus-nopeusyhteyden

$$d_V = \{\nabla\}^T\{v\} \ . \quad (1\ \text{kpl}) \tag{5.8.6}$$

Yhtälöt (5.8.1)...(5.8.6) perustuvat aksioomiin ja kinematiikkaan ja ovat siten täysin yleispäteviä. Ne eivät kuitenkaan riitä, vaan systeemi on täydennettävä konstitutiivisilla yhteyksillä. Käsittelemme tässä joitakin esimerkkejä.

Jännityksen riippuvuus voi olla mm. muotoa: kineettinen tilanyhtälö

$$p = p(\rho,T) \quad (1\ \text{kpl}) \tag{5.8.7}$$

ja

$$\{\sigma^*\} = \{\sigma^*(\{d\},\rho,T)\} \ , \quad (6\ \text{kpl}) \tag{5.8.8}$$

joista esimerkkeinä ihannekaasun tilanyhtälö

$$p = R\rho T \tag{5.8.7'}$$

ja Stokesin kitkalaki

$$\{\sigma^*\} = [D^*]\{d\}.$$

Tässä riippuvuus tiheydestä ja lämpötilasta voi tulla mukaan viskositeetin $\mu = \mu(\rho,T)$ kautta.

Sisäenergian riippuvuus voi olla mm. muotoa: kalorinen tilanyhtälö

$$e = e(\rho,T) \ , \quad (1 \text{ kpl}) \tag{5.8.9}$$

josta esimerkkinä differentiaalinen muoto

$$de = (p-TK_T\gamma_p)\frac{1}{\rho^2}\, d\rho + c_V dT \ . \tag{5.8.9'}$$

Lämpövuon riippuvuus voi olla lämmönjohtumisen suhteen mm. muotoa

$$\{q^c\} = \{q^c(\{\nabla\}T)\} \ , \quad (3 \text{ kpl}) \tag{5.8.10}$$

josta esimerkkinä Fourierin lämmönjohtumislaki

$$\{q^c\} = -[k]\{\nabla\}T \ . \tag{5.8.10'}$$

On syytä korostaa seuraavaa asetelmaa. Eulerin esityksessä varsinaisia riippumattomia muuttujia ovat spatiaaliset paikkakoordinaatit x, y, z ja aika t. Tehtävän annettuja (kenttä-) suureita ovat tässä mm. massavoiman intensiteetti {b} sekä tietenkin konstitutiivisissa yhteyksissä esiintyvät aineparametrit tai funktiomuodot. Kaikki muut suureet kuten p (1 kpl), $\{\sigma^*\}$, (6 kpl), {a} (3 kpl), ρ (1 kpl), {v} (3 kpl), e (1 kpl), {q} (3 kpl), d_V (1 kpl), {d} (6 kpl), T (1 kpl) ovat tuntemattomia, jotka tulee määrittää riippumattomien muuttujien x, y, z ja t funktioina. Tuntemattomien lukumäärä on valinnassamme 26 ja kenttäyhtälöitä (5.8.1)...(5.8.10) on yhteensä samoin 26, joten ainakin tässä suhteessa asetelma on oikeellinen.

Kohdan 4.8 perustuntemattomia koskeva teksti pätee vastaavana nytkin. Nestemekaniikassa käytettyjen formulaatioiden muodot vaihtelevat paljon tapauksesta riippuen. Kirjataan tähän vain malliksi tapaus, jossa perustuntemattomina esiintyvä tiheys ρ, nopeus {v}, paine p, lämpötila T ja ominaissisäenergia e; yhteensä siis 7 kpl. Suorittamalla tarvittavat eliminoinnit soveltaen

konstitutiivista yhteyttä (5.8.10') saadaan taulukossa 5.8.1 esitetyt yhtälöt.

Taulukko 5.8.1 Kenttäyhtälöitä

Liikeyhtälöt

$$\rho\{b\} - \{\nabla\}p + [{}_f\partial_\sigma]([D^*][{}_d\partial_v]\{v\}) = \rho(\frac{\partial}{\partial t}\{v\} + [\frac{\partial v}{\partial r}]\{v\})$$

Jatkuvuusyhtälö

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \{v\}^T\{\nabla\}\rho + \rho\{\nabla\}^T\{v\} = 0$$

Energiayhtälö

$$\rho(\frac{\partial e}{\partial t} + \{v\}^T\{\nabla\}e) = \{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}T) + \rho r +$$

$$- p\{\nabla\}^T\{v\} + ([D^*][{}_d\partial_v]\{v\})^T[{}_d\partial_v]\{v\}$$

Kineettinen tilanyhtälö

$$p = p(\rho,T)$$

Kalorinen tilanyhtälö

$$e = e(\rho,T)$$

Yleisiä yhtälöitä pyritään tietenkin yksinkertaistamaan mahdollisuuksien mukaan kussakin erikoistapauksessa. Jos prosessi voidaan otaksua barotrooppiseksi, paineen lausekkeessa ei ole enää mukana riippuvuutta lämpötilasta T: $p = p(\rho)$ tai $\rho = \rho(p)$. Tällöin voidaan puhtaasti mekaaninen probleema tuntemattomineen ρ, $\{v\}$, p ratkaista (mikäli riippuvuus $\mu = \mu(\rho,T)$ ei ole oleellinen) liikeyhtälöiden, jatkuvuusyhtälön ja paineen tilanyhtälön avulla erillisenä termisestä probleemasta, joka käsitellään sitten energiayhtälön ja kalorisen tilanyhtälön avulla. Homogeenisen kokoonpuristumattoman nesteen eli vakiotiheysnesteen tapauksessa tiheys ρ on tunnettu vakio koko alueessa. Paine on tällöin rajoitevoima, jonka arvoa ei saada enää tilanyhtälön avulla.

Reuna- ja alkuehdot. Kuvassa 5.8.1 esiintyvät reunaehdot muodostuvat matriisimerkinnöin mekaanisista reunaehdoista

$$\{v\} = \{\bar{v}\} \qquad S_v \tag{5.8.11}$$

$$\{t\} = \{\bar{t}\} \qquad S_t \tag{5.8.12}$$

ja termisistä reunaehdoista

$$T = \bar{T}\ , \qquad S_T \tag{5.8.13}$$

$$q_n = \bar{q}_n\ . \qquad S_q \tag{5.8.14}$$

Aksioomien seurauksina saadaan lisäksi reunaehdoissa tarvittavat traktio-jännitysyhteys

$$\{t\} = -\{n\}p + [n]\{\sigma^*\} \tag{5.8.15}$$

ja lämpövirran tiheys - lämpövuoyhteys

$$q_n = \{n\}^T\{q\}\ . \tag{5.8.16}$$

Soveltamalla näitä ja aikaisempia kenttäyhtälöitä sopivasti saadaan erilaisia muotoja. Taulukossa 5.8.1 käytettyjä perustuntemattomien valintojen vastaavat reunaehdot on esitetty taulukossa 5.8.2.

Taulukko 5.8.2 Reunaehtoja

Mekaaniset ehdot	
$\{v\} = \{\bar{v}\}$	S_v
$-\{n\}p + [n][D^*][_d\partial_v]\{v\} = \{\bar{t}\}$	S_t
Termiset ehdot	
$T = \bar{T}$	S_T
$-\{n\}^T[k]\{\nabla\}T + (\{n\}^T\{q^r\}) = \bar{q}_n$	S_q

Ajasta riippuvissa probleemoissa on lisäksi esitettävä kohdassa 5.7.4 selostettuun tapaan alkuehdot eli mm. tiedot nopeudesta {v}, lämpötilasta T jne. alkuhetkellä alueessa ja sen reunalla.

Yleistyksiä. Edellä on kuvattu ns. yksifaasinesteen yhtälöitä. Nesteseoksen virtauksessa yhtälöitä on laajennettava mm. siten, että kullekin seoskomponentille tulee oma jatkuvuusyhtälönsä, jossa diffuusion osuus esitetään tavallisesti erään konstitutiivisen yhteyden, ns. Fickin diffuusiolain avulla. Turbulenttisen virtauksen käsittely vaatii esimerkiksi k,ε-mallia (ks. kohta 6.6) sovellettaessa vielä omat näitä suureita koskevat yhtälönsä jne.

Reunaehtojen täydennyksiä voidaan kehitellä sijoitusmerkin avulla samaan tapaan kuin on selostettu kohdassa 4.8.

5.9 Virtuaalinen teho

Yleistä. Ns. Virtuaalisen tehon periaate (engl. principle of virtual power) on virtuaalisen työn periaatteen täsmällisen analoginen vastine Eulerin esitystä koskevana. Kun virtuaalisen työn periaatetta nimitetään usein myös virtuaalisten siirtymien periaatteeksi, virtuaalisen tehon periaate voisi siis olla nimeltään myös vaikka virtuaalisten nopeuksien periaate. Melkein jokainen rakenteiden mekaniikan oppikirja käsittelee tavalla tai toisella virtuaalisen työn periaatetta. Sen sijaan nestemekaniikan klassillisessa kirjallisuudessa termiä virtuaalisen tehon periaate ei yleensä esiinny. Huomautettakoon vielä, että myös elementtimenetelmän kirjallisuudessa näkee aika harvoin tätä nimitystä. Tavallisimmin puhutaan vain suoraan heikosta muodosta.

Nestemekaniikassa käytettyjen, elementtimenetelmän lähtökohdiksi sopivien heikkojen muotojen kehittely ei ole ilmeisestikään vielä täysin kiteytynyt. Eulerin esitykseen liittyvien konvektiivisten termien käsittely on tuottanut tiettyjä ongelmia. Näistä asioista puhutaan yleisemmin kohdassa 6.8 ja lukijan olisikin syytä tutustua ko. monisteen osaan jo tässä vaiheessa.

Virtuaalisen tehon periaate. Johto on aivan samanlainen kuin kohdassa 4.9.1, joten osa analogisista kommenteista jätetään liiallisen toiston välttämiseksi pois. Kirjoitetaan liikeyhtälöiden (5.4.4) tasapainoversiot ja traktio-jännitysyhteydet (5.4.24) muotoihin

$$\rho\vec{b} + \vec{f}^{\sigma} = \vec{0} \qquad \text{V:ssä} \tag{5.9.1}$$

ja

$$\vec{t} - \vec{t}^{\sigma} = \vec{0} \qquad \text{S:llä .} \tag{5.9.2}$$

On siis käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\vec{f}^{\sigma} \equiv \frac{\partial\vec{t}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{t}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{t}^{(z)}}{\partial z} \tag{5.9.3}$$

ja

$$\vec{t}^{\sigma} \equiv n_x\vec{t}^{(x)} + n_y\vec{t}^{(y)} + n_z\vec{t}^{(z)} \ . \tag{5.9.4}$$

Kerrotaan yhtälöt (5.9.1) ja (5.9.2) skalaarisesti mielivaltaisella vektorilla $\vec{w}(x,y,z) = w_x(x,y,z)\vec{i} + w_y(x,y,z)\vec{j} + w_z(x,y,z)\vec{k}$ ja integroidaan syntyvät yhtälöt vastaavasti määrittelyalueittensa V ja S ylitse ja lasketaan näin saadut yhtälöt vielä yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_V (\rho\vec{b}+\vec{f}^{\sigma})\cdot\vec{w}dV + \int_S (\vec{t}-\vec{t}^{\sigma})\cdot\vec{w}dS = 0 \ . \tag{5.9.5}$$

Koska vektori $\vec{w}$ eli sen komponentit w_x, w_y ja w_z ovat täysin mielivaltaisia, yhtälö (5.9.5) on täysin samanarvoinen yhtälöiden (5.9.1) ja (5.9.2) kanssa.

Yhtälön (5.9.5) voidaan ajatella esittävän tietynlaista painotettua tasapainoyhtälöä koko systeemille funktion $\vec{w}$ toimiessa painona.

Yhtälön (5.9.5) muotoa muutetaan osittaisintegroimalla siten, että jännityksiin kohdistuvat osittaisderivaatat häviävät. Toisin sanoen muunnetaan termi $\int \vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{w}dV$. Käsittely on täsmälleen vastaava kuin kohdassa 5.6.1 termiin $\int \vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{v}dV$ kohdistettu manipulaatio, joten sen askeleen 5 perusteella voidaan kirjoittaa heti

$$\int_V \vec{f}^{\sigma}\cdot\vec{w}dV = \int_S \vec{t}^{\sigma}\cdot\vec{w}dS - \int_V [\sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w_z}{\partial z} +$$

$$+ \tau_{yz}(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}) + \tau_{zx}(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}) + \tau_{xy}(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x})]dV. \tag{5.9.6}$$

Tämän lausekkeen sijoitus yhtälöön (5.9.5) poistaa termin $\vec{t}^{\sigma}$ ja saadaan yhtälö

$$\int_V \rho\vec{b}\cdot\vec{w}dV + \int_S \vec{t}\cdot\vec{w}dS - \int_V [\sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial w_z}{\partial z} +$$

$$+ \tau_{yz}(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}) + \tau_{zx}(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}) +$$

$$+ \tau_{xy}(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x})]dV = 0 \ . \tag{5.9.7}$$

Yhtälö (5.9.7) voi saada lisää havainnollisuutta, jos vektori $\vec{w}$ tulkitaan nopeusvektorin $\vec{v}$ variaatioksi $\delta\vec{v}$:

$$\vec{w} = \delta\vec{v} = \delta v_x\vec{i} + \delta v_y\vec{j} + \delta v_z\vec{k} \tag{5.9.8}$$

eli $w_x = \delta v_x$, $w_y = \delta v_y$, $w_z = \delta v_z$. Nopeusvektorin variaation komponentteja nimitetään joskus virtuaalisiksi nopeuksiksi (ks. huomautus 1).

Havaitaan, että

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial(\delta v_x)}{\partial x} = \delta\frac{\partial v_x}{\partial x} = \delta d_x\ ,\\
&\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta v_z)}{\partial y} = \delta\frac{\partial v_y}{\partial z} + \delta\frac{\partial v_z}{\partial y}\\
&\qquad = \delta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = \delta g_{yz}\ ,\\
&\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{5.9.9}$$

Suureet δd_x, δg_{yz} ovat deformaationopeuskomponenttien (3.3.69) variaatioita eli ns. virtuaalisia deformaationopeuksia. Yhteyden $\{d\} = [{}_d\partial_v]\{v\}$ perusteella

$$\delta\{d\} = [{}_d\partial_v]\delta\{v\}\ . \tag{5.9.10}$$

Ottaen huomioon merkinnät (5.9.8) ja (5.9.9) yhtälö (5.9.7) saadaan siis muotoon

$$\int_V \vec{\rho b}\cdot\delta\vec{v}dV + \int_S \vec{t}\cdot\delta\vec{v}dV + \int_V (\sigma_x\delta d_x+\sigma_y\delta d_y+\sigma_z\delta d_z+$$

$$+\tau_{yz}\delta g_{yz}+\tau_{zx}\delta g_{zx}+\tau_{xy}\delta g_{xy})dV = 0 \tag{5.9.11}$$

eli

$$\delta P_{ext} + \delta P_{int} = 0 \tag{5.9.12}$$

eli

$$\boxed{\delta P = 0\ .} \tag{5.9.13}$$

Tämä on virtuaalisen tehon periaate eli kontrollialueessa tietyllä hetkellä olevaan kappaleeseen vaikuttavien voimien yhteinen virtuaalinen teho on nolla jokaisen virtuaalisen nopeuskentän suhteen.

Edellä

$$\left.\begin{aligned} \delta P_{ext} &= \int_V \rho\vec{b}\cdot\delta\vec{v}dV + \int_S \vec{t}\cdot\delta\vec{v}dS \ , \\ &= \int_V \rho\{b\}^T\delta\{v\}dV + \int_S \{t\}^T\delta\{v\}dS \end{aligned}\right\} \qquad (5.9.14)$$

on ko. hetkellä kontrollialueessa olevaan kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien virtuaalinen teho ja

$$\left.\begin{aligned} \delta P_{int} &= -\int_V \overleftrightarrow{\sigma}:\delta\overleftrightarrow{d}dV = -\int_V (\sigma_{xx}\delta d_{xx}+\sigma_{xy}\delta d_{xy}+\ldots)dV \ , \\ &= -\int_V (\sigma_x\delta d_x+\sigma_y\delta d_y+\sigma_z\delta d_z+ \\ &\qquad +\tau_{yz}\delta g_{yz}+\tau_{zx}\delta g_{zx}+\tau_{xy}\delta g_{xy})dV \ , \\ &= -\int_V \{\sigma\}^T\delta\{d\}dV \end{aligned}\right\} \qquad (5.9.15)$$

on vastaava sisäisten voimien virtuaalinen teho. Termi $\{\sigma\}^T\delta\{d\}$ on sisäisten voimien miinusmerkkinen virtuaalinen teho tilavuutta kohti. Sille voidaan johtaa kaavan (5.6.12") tapaan myös esimerkiksi esitys

$$\{\sigma\}^T\delta\{d\} = -p\delta d_V + \{\sigma^*\}^T\delta\{d\} \ . \qquad (6.9.16)$$

Otamme nyt huomioon täydellisessä liikeyhtälössä (5.4.4) esiintyvän hitausvoimatermin sijoituksella

$$\left.\begin{aligned} \rho\vec{b} &:= \rho\vec{b} - \rho\vec{a} \ , \\ &= \rho\vec{b} - \rho(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.9.17)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} \rho\{b\} &:= \rho\{b\} - \rho\{a\} \ , \\ &= \rho\{b\} - \rho(\tfrac{\partial}{\partial t}\{v\}+[\tfrac{\partial v}{\partial r}]\{v\}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.9.17')$$

tai

$$\{f\} := \{f\} + \{f^I\} \ . \qquad (5.9.17'')$$

Täten

$$\delta P_{ext} := \delta P_{ext} + \delta P^I \ , \qquad (5.9.18)$$

jossa siis hitausvoimien virtuaalinen teho

$$\left.\begin{aligned} \delta P^I &= -\int_V \rho\vec{a}\cdot\delta\vec{v}dV \ , \\ &= -\int_V \rho\{a\}^T\delta\{v\}dV \ , \\ &= \int_V \{f^I\}^T\delta\{v\}dV \ . \end{aligned}\right\} \qquad (5.9.19)$$

Huomautus 1. Olemme käyttäneet merkintää δP ja puhuneet virtuaalisesta tehosta. Suureella δP on todellakin tehon dimensio ja jos virtuaaliset nopeudet ajatellaan äärettömän pieniksi, merkintä δP on tietyssä mielessä looginen; tällaista merkintää ei kylläkään yleensä käytetä alan kirjallisuudessa. Virtuaalisia nopeuksia ei tarvitse kuitenkaan ajatella välttämättä nopeuden variaatioiksi (vrt. kohdan 4.9.1 huomautuksessa 2 esitettyihin kommentteihin). Ko. tulkinnalla on kuitenkin mm. se etu, että tämän kohdan lopussa esitetty variaatioperiaate saadaan virtuaalisen tehon periaatteen erikoistapauksena.

— — —

Rajoitteet ja virtuaalinen nopeus. Virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä puhuttiin kinemaattisesti luvallisista ja luvattomista virtuaalisista siirtymistä. Tässä voinemme puhua vastaavasti kinemaattisesti luvallisista ja luvattomista virtuaali-

sista nopeuksista ilmeisine sisältöineen.

Reunaehdot $\vec{v} = \bar{\vec{v}}$ reunalla S_v merkitsevät, että vastaavat traktiot ovat rajoitevoimia. Niiden mukaantulo yhtälöihin vältetään valitsemalla virtuaaliset nopeudet reunaehtojen suhteen kinemaattisesti luvallisiksi eli ottamalla

$$\delta\vec{v} = \vec{0} \quad S_v\text{:llä} . \tag{5.9.20}$$

Virtuaalinen tehoyhtälö (5.9.13) saadaan tällöin mm. muotoon

$$\boxed{\begin{aligned} -\delta P \equiv & \int_V \{\sigma\}^T \delta\{d\} dV - \int_V \rho\{b\}^T \delta\{v\} dV + \\ & - \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T \delta\{v\} dS = 0 , \quad \delta\{v\} = \{0\} \quad S_v\text{:llä} . \end{aligned}} \tag{5.9.21}$$

Lisäksi kaavoihin (4.9.25)...(4.9.28) liittyvät laajennukset pätevät analogisina tässäkin.

Kokoonpuristumattomuus on varsinaisten nesteiden yhteydessä tavanomainen perusotaksuma eikä niinkään poikkeus, kuten on asian laita kiinteän aineen mekaniikassa. Kokoonpuristumattomuusehto on

$$d_V = d_x + d_y + d_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{5.9.22}$$

ja paine esiintyy vastaavasti rajoitevoimana. Täten kokoonpuristumattomalla nesteellä kinemaattisesti luvallisiin virtuaalisiin nopeuksiin liittyy vaatimus

$$\begin{aligned} \delta d_V &= \delta d_x + \delta d_y + \delta d_z = \delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \\ &= \vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{v}) = \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0 . \end{aligned} \tag{5.9.23}$$

Jos virtuaaliset nopeudet toteuttavat tämän ehdon, paine häviää formulaatiosta. Tämä nähdään lausekkeesta (5.9.16).

Eräs variaatioperiaate. Tarkastellaan Stokesin kitkalakia noudattavan nesteen hidasta, kokoonpuristumatonta virtausta. Tällaisessa tapauksessa virtuaalisen tehon periaatteesta voidaan synnyttää tietty variaatioperiaate. Askeleet ovat miltei samat kuin kohdassa 4.11, kun virtuaalisen työn periaatteesta johdettiin kimmoisen aineen yhteydessä potentiaalienergian stationaarisuuden periaate.

Hitaalla eli ryömivällä virtauksella (engl. creeping flow) tarkoitetaan tapausta, jossa hitausvoimat voidaan jättää kitkavoimien rinnalla huomioon ottamatta (Re on pieni). Esimerkkinä tällaisista tapauksista voitaisiin mainita hitaat maankuoren liikkeet kuten Fennoskandian maannousu tai voitelunesteiden liike koneenosien välissä. Vaikka ilmiö olisi ajasta riippuva, se voidaan ratkaista kullakin hetkellä puhtaana reuna-arvotehtävänä, koska ajan suhteen otettuja derivaattoja ei esiinny formulaatiossa. Otaksumalla taas kokoonpuristumaton ja siis barotrooppinen tapaus päästään käsittelemään puhtaasti mekaanista probleemaa.

Ensinnäkin kaavan (4.10.1) vastineena on tässä yhteys (5.2.30) eli

$$\boxed{\{\sigma^*\} = \frac{\partial U^{\sigma^*}}{\partial\{d\}}\,,} \tag{5.9.24}$$

jossa dissipaatiofunktion Φ puolikas (vrt. kaava (4.10.8))

$$U^{\sigma^*} = \frac{1}{2}\{d\}^T[D^*]\{d\} \tag{5.9.25}$$

Stokesin kitkalain vallitessa. Täten variaatio (vrt. kaava (4.10.2))

$$\delta U^{\sigma^*} = \left(\frac{\partial U^{\sigma^*}}{\partial\{d\}}\right)^T \delta\{d\} = \{\sigma^*\}^T\delta\{d\}\ . \tag{5.9.26}$$

Virtuaalisen tehon periaate (5.9.21) voidaan kirjoittaa hitaan kokoonpuristumattoman virtauksen tapauksessa seuraavasti

$$-\delta P \equiv \int_V \{\sigma^*\}^T \delta\{d\} dV - \int_V \rho\{b\}^T\{v\} dV - \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T \delta\{v\} dS = 0 \,, \quad (5.9.27)$$

kun rajoitutaan sekä alueen sisällä että sen reunalla kinemaattisesti luvallisiin virtuaalisiin nopeuksiin: $\delta d_V = 0$ V:ssä, $\delta\{v\} = \{0\}$ S_v:llä. Kaavojen (5.9.25) ja (5.9.26) perusteella funktionaalin

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{d\}^T [D^*] \{d\} dV - \int_V \rho\{b\}^T\{v\} dV - \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T \{v\} dS \quad (5.9.28)$$

variaatio $\delta\Pi = -\delta P$. (On otaksuttu, että $\{b\}$ ja $\{\bar{t}\}$ ovat tässä $\{v\}$:n suhteen vakioita. Tiheys ρ on kokoonpuristumattomuuden takia vakio.) Koska funktionaali on ajateltava nopeuden funktioksi, on vielä korrektimpaa kirjoittaa muoto

$$\Pi(\{v\}) = \frac{1}{2} \int_V ([{}_d\partial_v]\{v\})^T [D^*] [{}_d\partial_v]\{v\} dV +$$

$$- \int_V \rho\{b\}^T\{v\} dV - \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T \{v\} dS \,. \quad (5.9.29)$$

Täten formulaation lähtökohtana voidaan pitää periaatteessa variaatioperiaatetta $\delta\Pi = 0$, jossa Π on lausekkeen (5.9.29) mukainen. Kuitenkin luvallisten funktioiden $\{v\}$ tulee toteuttaa siinä paitsi ehto $\{v\} = \{\bar{v}\}$ S_v:llä myös ehto $d_V = 0$ V:ssä. Jälkimmäisen ehdon etukäteen toteuttavia luvallisia funktioita on vaikea konstruoida käytännössä. (Tasotapauksessa, jos otetaan virtafunktio (ks. kohta 6.3) käyttöön, jolloin ehto $d_V = 0$ toteutuu identtisesti, funktionaali (5.9.29) on käyttökelpoinen.)

Luvallisten funktioiden muodostamista hankaloittava kokoonpuristumattomuusehto voidaan kiertää Lagrangen kertojamenettelyn avulla. Koska emme käsittele kertojamenettelyä tässä yhteydessä, annamme vain lopputuloksen. Syntyy variaatioperiaate

$$\boxed{\delta\Pi = 0 \,,} \quad (5.9.30)$$

jossa funktionaali

$$\Pi(\{v\},p) = \frac{1}{2}\int_V ([{}_d\partial_v]\{v\})^T[D^*][{}_d\partial_v]\{v\}dV +$$

$$- \int_V p\{\nabla\}^T\{v\}dV - \int_V \rho\{b\}^T\{v\} - \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T\{v\}dS \ . \qquad (5.9.31)$$

Luvallisten funktioiden $\{v\}$ ei tarvitse enää toteuttaa etukäteen ehtoa $d_V \equiv \{\nabla\}^T\{v\} = 0$, mutta lisäargumenttifunktiona esiintyy nyt paine p.

Huomautus 2. Voitaisiin ajatella, että variaatioperiaatteen (5.9.30) avulla saataisiin systemaattinen lähtökohta synnyttää diskreetit yhtälöt myös ei-hitaan kokoonpuristumattoman virtauksen käsittelyyn. Pidettäisiin lauseketta (5.9.31) ensin kohdan 4.10 huomautuksen 2 henkeen kvasifunktionaalina ja suoritettaisiin lopuksi vain sijoitus (5.9.17'): $\rho\{b\} := \rho\{b\} - \rho\{a\}$. On osoittautunut, että näin ei kuitenkaan synny hyvää formulaatiota, kun konvektion osuus tulee oleelliseksi. Variaatioperiaate voi kuitenkin ohjata meitä jonkin verran sopivien jäännösmenetelmien kehittelyissä. Jos klassillinen variaatioperiaate on olemassa, se on yleensä hyvä ja luotettava perusta diskreettien yhtälöiden synnyttämiselle. Lisäksi ns. kvadraattisten funktionaalien yhteydessä saadun yhtälöryhmän kerroinmatriisi on symmetrinen. Täten jäännösmenetelmät on syytä pyrkiä konstruoimaan siten, että ne palautuvat sisällöltään samanarvoisiksi variaatioperiaatteiden kanssa niissä erikoistapauksissa, joissa jälkimmäisiä on olemassa.

Todettakoon esimerkkinä, että erityisesti valinta $\delta\{v\} = \{0\}$, $\delta p \neq 0$ tuottaa periaatteesta (5.9.30) yhtälön

$$\int_V \delta p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dV = 0 \ , \qquad (5.9.32)$$

johon palataan vielä kohdassa 5.10.

Huomautus 3. Jos potentiaalienergian stationaarisuuden periaatteen (4.10.24) yhteydessä sovelletaan kokoonpuristumattoman aineen mallia, luvallisten siirtymien tulee toteuttaa kokoonpuristumattomuusehto. Tämän käytännössä hankalan asetelman välttämi-

seksi voidaan johtaa Lagrangen kertojamenettelyn avulla aivan lausekkeen (5.9.31) tyyppinen modifioitu funktionaali, jossa paine esiintyy lisäargumenttifunktiona.

— — —

5.10 Jatkuvuusyhtälön heikko muoto

Lagrangen ja Eulerin esitystapojen erilaisuuksien seuraukset näkyvät erityisen selvinä jatkuvuusyhtälön yhteydessä. Lagrangen esityksessä esimerkiksi jatkuvuusyhtälö (4.3.6) on muotoa $\rho^o = \rho J$. Jos siirtymäkenttä ajatellaan annetuksi, J:n arvo tunnetaan ja kyseessä on yksinkertainen algebrallinen yhtälö tuntemattoman tiheyden määrittämiseksi: $\rho = \rho^o/J$. Täten kiinteän aineen mekaniikassa kiinnitetäänkin ymmärrettävästi harvoin huomiota jatkuvuusyhtälöön etenkin, kun pienten siirtymien yhteydessä liikeyhtälöissä tehdään approksimaatio $\rho \approx \rho^o$. Samoin emme ole siis tarvinneet luvussa 4 jatkuvuusyhtälön heikon muodon tarkastelua.

Eulerin esityksessä esimerkiksi jatkuvuusyhtälö (5.3.3) on muotoa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \ . \qquad (5.10.1)$$

Kun nopeuskenttä ajatellaan annetuksi, kyseessä on nyt kuitenkin tiheyden jakautumaa koskeva differentiaaliyhtälö, joka on luonnollisesti hankalampi asia kuin äskeinen algebrallinen yhtälö. Kokoonpuristumattoman nesteen mallia käytettäessä jatkuvuusyhtälö muuntuu kokoonpuristumattomuusehdoksi

$$d_V = d_x + d_y + d_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \ . \qquad (5.10.2)$$

Tällöin (homogeenisen nesteen tapauksessa) ρ on yksi ja ainoa annettu vakio ja differentiaaliyhtälöä (5.10.2) voidaan pitää nopeuskenttää koskevana kinemaattisena rajoitteena. Voidaan todeta, että nestemekaniikan yhtälöiden formuloinneissa jatkuvuusyhtälö (ja sen erikoistapauksena kokoonpuristumattomuusehto) on yleensä aina mukana tärkeässä asemassa.

Käsittelemme tässä ainoastaan kokoonpuristumattomuusehdon (5.10.2) heikkoa muotoa. Se on yksinkertaisesti

$$\boxed{\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})w dV = 0 \ ,} \qquad (5.10.3)$$

jossa w on sopivan jatkuvuuden omaava testifunktio. Tähän heikkoon muotoon ei myöskään liity mitään vakiintunutta erityisterminologiaa. Osittaisintegrointi antaa yhtälön

$$\int_S v_n w dS - \int_V \vec{v}\cdot\vec{\nabla} w dV = 0 \ . \tag{5.10.4}$$

Jälkimmäisellä versiolla ei kuitenkaan ole yleensä etuja edelliseen muotoon verrattuna. Todettakoon vain, että erityinen valinta $w \equiv 1$ tuottaa fysikaaliselta merkitykseltään ilmeisen yhteyden $\int v_n dS = 0$.

Yhtälö (5.9.32) antaa aiheen tulkita jatkuvuusyhtälön testifunktio sovellutuksissa paineen variaatioksi: $w = \delta p$. Tulkinta helpottaa järkevän diskretoimistavan valintaa. Heikko muoto (5.10.3) voidaan kirjoittaa tällöin vaikka seuraavasti:

$$\boxed{\int_V d_V \delta p dV = 0 \ .} \tag{5.10.5}$$

5.11 Energiayhtälön heikko muoto

Energiayhtälö on rakenteeltaan tyypillinen ns. konvektio-diffuusioyhtälö. Näiden heikkoja muotoja käsitellään kohdassa 6.8.3.

6 SEKALAISTA

Tähän lukuun on kerätty tiettyjä sekalaisia aiheita, jotka täydentävät aikaisempaa esitystä. Pääpaino on nestemekaniikan puolella.

6.1 Kiinteän aineen mekaniikan erikoistapauksia

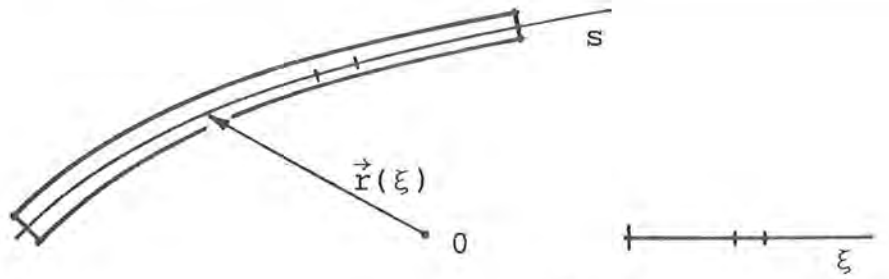
6.1.1 Yleistä

Kiinteän aineen mekaniikkaa on käsitelty luvuissa 3 ja 4 lähinnä yleisessä kolmidimensioisessa tapauksessa. Käytännössä tehdään usein sopivia yksinkertaistavia otaksumia, jonka jälkeen saadaan mm. kuvassa 4.1.1 esitettyjä rakennetyyppejä koskevia yleisten yhtälöiden erityismuotoja. Tässä ei pyritä perusteelliseen käsittelyyn; tarkoituksena on vain antaa kohtuullinen kuva yhtälöiden syntymistavasta. Esimerkiksi lähteissä [4.4], [4.6], [6.1], [6.2] ja [6.3] on tähän aihepiiriin liittyviä esityksiä.

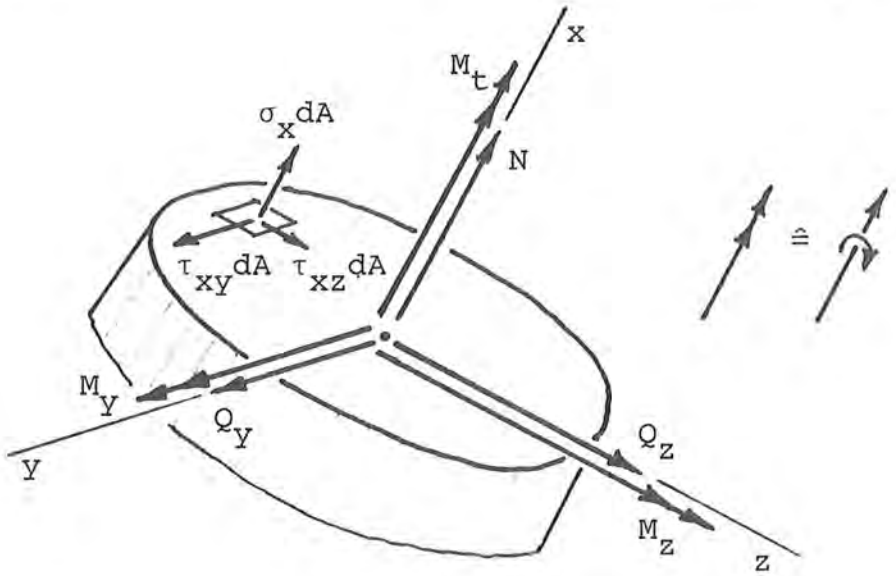
Rajoitutaan pienten siirtymien teoriaan. Sovelletaan luonnollisesti edelleen Lagrangen esitystapaa, mutta suoritetaan nyt tunnusten suhteen mm. muutokset $a \to x$, $b \to y$, $c \to z$, $u_a \to u$, $u_b \to v$, $u_c \to w$, $dV^o \to dV$, $dS^o \to dS$, jotta päästäisiin vähitellen lähelle rakenteiden mekaniikan tavanomaista merkintäkäytäntöä. Jos lukija on selvittänyt itselleen Lagrangen ja Eulerin esitystapojen sisällön, ko. merkinnällisen askeleen suorittamisen ei pitäisi aiheuttaa tässä vaiheessa enää ongelmia.

Sauva- ja pintarakenteiden yhteydessä käsitellään jännitysten sijasta usein ns. jännitysresultantteja (engl. stress resultant). Ne ovat tiettyjä jännityskomponenteista kertyviä — sauvalla sen poikkileikkauspinnan yli otettuja ja pintarakenteella sen paksuuden yli otettuja — integraaleja. Jännitysresultantteja nimitetään joskus myös yleistetyiksi jännityksiksi (engl. generalized stress).

Kuva 6.1.1 esittää sauvarakenteisiin liittyivä käsitteitä. Sauva (engl. bar) on tässä yleisnimi rakenteellisesti toimivalle hoikalle (engl. slender) kappaleelle. Tyypillisesti kunkin sauvan pisteen kautta voidaan asettaa aina ainakin yksi taso, jonka



(a)



(b)

$$N = \int \sigma_x dA \ , \quad Q_y = \int \tau_{xy} dA \ , \quad Q_z = \int \tau_{xz} dA$$

$$M_t = \int (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \ , \quad M_y = \int \sigma_x z dA \ , \quad M_z = -\int \sigma_x y dA$$

(c)

N on normaalivoima (engl. normal force, axial force)
Q_y ja Q_z ovat leikkausvoimia (engl. shearing force)
M_t on vääntömomentti (engl. twisting moment, torque)
M_y ja M_z ovat taivutusmomentteja (engl. bending moment)

(d)

Kuva 6.1.1 (a) Sauva. (b) Paikallinen karteesinen suorakulmainen koordinaatisto ja vastaavat jännitysresultantit. (c) Jännitysresultanttien lausekkeet. (d) Nimityksiä.

sauvasta leikkaama alue on sauvan kokonaismittoihin verrattuna pieni. Luonnossa esiintyviä esimerkkejä ovat puiden rungot ja oksat, jänteet, hämähäkin seitit jne. Sauvan pituussuuntaa seuraavaa referenssiviivaa nimitetään sauvan akseliksi (engl. axis). Sauvateorian otaksumien jälkeen todellisuudessa kolmidimensioisen rakenteen matemaattiseksi malliksi tulee itse asiassa tietyin ominaisuuksin varustettu referenssiviiva eli akseli. Sen asema voidaan ilmaista kuvan (a) esittämään tapaan yhden riippumattoman muuttujan eli ns. käyräparametrin ξ avulla. Käytännössä akselia pitkin mitattu kaarenpituus s on fysikaalisesti havainnollisin parametri.

Kussakin akselin pisteessä akselia vastaan kohtisuoraan asetettu taso leikkaa sauvasta tasoalueen, jota nimitetään sauvan poikkileikkauspinnaksi (engl. cross-section). Tavallisesti pyritään siihen, että sauvan akseli kulkee poikkileikkausten pintakeskiöiden kautta. Ajatellaan sauva leikatuksi tietyn poikkileikkauksen kohdalta kahteen osaan ja tarkastellaan niistä toista. Kuvassa (b) on esitetty sen osan poikkileikkauspinta, jonka ulkoisen normaalin suunta (x-akselin suunta) yhtyy valitun kaarenpituuden s positiiviseen kasvusuuntaan. Poikkileikkauspintaan asetetaan kuvan esittämällä tavalla paikallinen karteesinen suorakulmainen koordinaatisto xyz. Sauvan toinen osa vaikuttaa poikkileikkauspintaan voimasysteemillä, joka ajatellaan redusoiduksi valitun koordinaatiston origon suhteen. Saadaan redusoimistulos

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= N\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k} \,, \\ \vec{M} &= M_t\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.1)$$

Resultoivan voiman ja momentin komponentit ovat sauvateoriassa käytettyjä jännitysresultantteja. (Joskus puhutaan myös leikkaussuureista tai rasituksista.) Ne kertyvät poikkileikkauspinnassa vaikuttavista — etukäteen vielä tuntemattomista — jännityskomponenteista σ_x, τ_{xy} ja τ_{xz} kuvan (c) esittämien ilmeisten kaavojen mukaisesti. Integroinnit suoritetaan poikkileikkauspinnan yli. Kuvassa (d) on esitetty tavanomaisia käytettyjä

nimityksiä. Jännitysresultantit on piirretty kuvaan (b) samoin tavanomaisten positiivisten merkkisopimusten mukaisesti. Jos poikkileikkauksen ulkoisen normaalin suunta yhtyy s:n negatiiviseen suuntaan, jännitysresultanttien positiiviset suunnat vaihtuvat samoin.

Sen mukaan miten sauva on pääasiassa kuormitettu, minkä muotoinen se on ja mikä on sen rakenne, siitä käytetään mm. seuraavia erityisnimityksiä:

Nivelsauva (engl. pin-jointed bar) eli veto- tai puristussauva tai vain lyhyesti sauva on suora, pääasiassa akselinsa suunnassa kuormitettu, tavallisimmin ristikoissa käytetty rakenneosa. Oleellinen jännitysresultantti on normaalivoima N eli sauvavoima S.

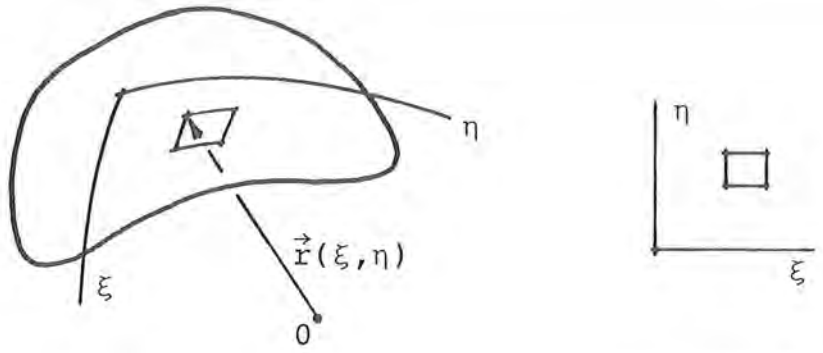
Palkki (engl. beam) on suorahko sauva, joka on kuormitettu pääasiassa akseliaan vastaan kohtisuorassa suunnassa. Lisäksi palkki esiintyy rakenteissa yleensä vaakasuorassa asennossa. Palkin oleelliset jännitysresultantit ovat M_y, M_z, Q_y ja Q_z.

Kaari (engl. arch) on täysin yleistä tyyppiä oleva sauva, jonka akseli on käyrä ja jonka erikoistapauksina saadaan mm. nivelsauva ja palkki. Kaikki kuvassa 6.1.1 (b) esitetyt jännitysresultantit ovat yleensä oleellisia suureita. Kaaren suunnittelussa pyritään kuitenkin normaalisti lähelle tilannetta, jossa kaari ottaisi kuormituksen vastaan pelkästään jännitysresultantin N avulla.

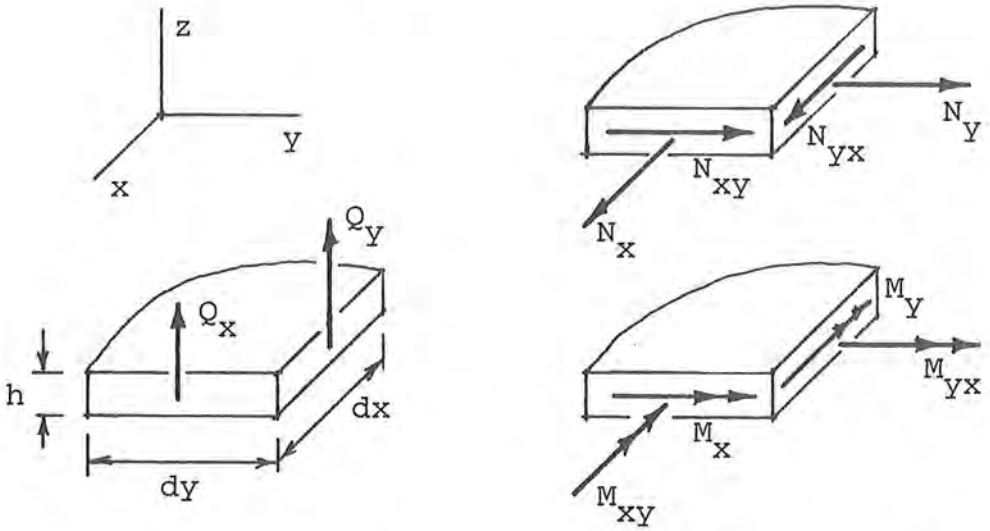
Köysi (engl. rope, cable) eli lanka (engl. string). Taipuisan rakenteensa johdosta köysi pystyy vastaanottamaan vain normaalivoiman N eli köysivoiman S ja senkin vain vetävänä. Köyden ottama muoto riippuu voimakkaasti ulkoisesta kuormituksesta paitsi jos köydessä on huomattava esikiristys.

Muita vastaavia nimityksiä ovat mm. pilari (engl. column), kehäsauva (engl. beam-column), akseli (engl. shaft) jne.

Kuva 6.1.2 on kuvan 6.1.1 vastine pintarakenteita koskevana. Pintarakenne (saks. Flächentragwerk, n.) on tässä yleisnimi rakenteellisesti toimivalle kappaleelle, jossa tyypillisesti kunkin pisteen kautta voidaan asettaa aina ainakin yksi suora (vastaava suunta on rakenteen paksuussuunta), jonka kappaleesta leikkaama osuus (= kuoren paksuus h) on kappaleen kokonaismit-



(a)



(b)

$$N_x = \int \sigma_x dz \ , \quad N_y = \int \sigma_y dz \ , \quad N_{xy} = \int \tau_{xy} dz \ , \quad N_{yx} = \int \tau_{yx} dz$$

$$Q_x = \int \tau_{xz} dz \ , \quad Q_y = \int \tau_{yz} dz$$

$$M_x = \int \sigma_x z dz \ , \quad M_y = \int \sigma_y z dz \ , \quad M_{xy} = \int \tau_{xy} z dz \ , \quad M_{yx} = \int \tau_{yx} z dz$$

(c)

N_x ja N_y ovat normaalivoimia
N_{xy} ja N_{yx} ovat leikkausvoimia
Q_x ja Q_y ovat leikkausvoimia
M_x ja M_y ovat taivutusmomentteja
M_{xy} ja M_{yx} ovat vääntömomentteja

(d)

Kuva 6.1.2 (a) Pintarakenne. (b) Paikallinen karteesinen suorakulmainen koordinaatisto ja vastaavat jännitysresultantit. (c) Jännitysresultanttien lausekkeet. (d) Nimityksiä.

toihin verrattuna pieni. Luonnossa esiintyviä esimerkkejä ovat munankuoret, kasvien lehdet, kudoskalvot jne. Pintarakennetta seuraileva referenssipinta valitaan tavallisesti rakenteen keskipinnaksi (engl. middle surface). Sen asema määräytyy periaatteessa seuraavasti. Rakenteen sisälle ajatellaan konstruoiduksi suuri joukko pallopintoja siten, että kukin pallo sivuaa rakenteen vastakkaisia ulkopintoja. Keskipinta kulkee näiden pallojen keskipisteiden kautta. Kuoren paksuus h tietyssä keskipinnan pisteessä on ko. pallon halkaisija. Pintarakenteille käytettyjen otaksumien jälkeen todellisuudessa kolmidimensioisen rakenteen matemaattiseksi malliksi tulee itse asiassa tietyin ominaisuuksin varustettu referenssipinta eli tavallisimmin juuri keskipinta. Sen asema voidaan ilmaista kuvan (a) esittämään tapaan kahden riippumattoman muuttujan eli ns. pintaparametrien ξ ja η avulla.

Ajatellaan kuhunkin keskipinnan pisteeseen asetetuksi paikallinen karteesinen suorakulmainen koordinaatisto xyz, jonka z-akselin suunta yhtyy valittuun pinnan positiivisen puolen määrittämään ulkoisen normaalin suuntaan. x- ja y-akselit ovat siis pinnan tangenttitasossa.

Ajatellaan pintarakenne leikatuksi tasoilla x = 0 ja y = 0 kahteen osaan ja tarkastellaan niihin rakenteen poikkileikkauspintoihin vaikuttavia voimasysteemeitä, joiden ulkoiset normaalit yhtyvät positiivisten x- ja y-akselien suuntiin (kuva (b)). Tarkastellaan suorakulmaisia, kokoja h×dy ja h×dx olevia poikkileikkauspintoja ja ajatellaan vastaavat voimasysteemit redusoiduiksi näiden pintakeskiöihin. Saadaan vastaavasti redusoimistulokset

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= (N_x\vec{i}+N_{xy}\vec{j}+Q_x\vec{k})dy\ , \\ \vec{M} &= (-M_{xy}\vec{i}+M_x\vec{j})dy \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.2)$$

sekä

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= (N_{yx}\vec{i}+N_y\vec{j}+Q_y\vec{k})dx\ , \\ \vec{M} &= (-M_y\vec{i}+M_{yx}\vec{j})dx\ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.3)$$

Resultoivan voiman ja momentin komponentit jaettuina vielä vastaavilla pituuksilla dy ja dx eli siis suureet N_x, N_{xy} jne. ovat pintarakenteiden yhteydessä tavallisimmin käytettyjä jännitysresultantteja. Ne kertyvät poikkileikkauspinnoissa x = 0 ja y = 0 vaikuttavista — etukäteen vielä tuntemattomista — jännityskomponenteista σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} ja σ_y, τ_{yx}, τ_{yz} kuvan (c) esittämien ilmeisten kaavojen mukaisesti. Kuvassa (d) on esitetty tavanomaisia käytettyjä nimityksiä. Jännitysresultantit on piirretty kuvaan (b) samoin tavanomaisten positiivisten merkkisopimusten ulkoisten normaalien suunnat yhtyvät x:n tai y:n negatiivisiin suuntiin, jännitysresultanttien positiiviset suunnat muuttuvat vastakkaisiksi.

Huomautus 1. Kuvaan 6.1.2 liittyvät kaavat ja merkinnät vaativat tiettyjä lisäkommentteja. Koska kuoren paksuus h on äärellinen suure ja viiva-alkiot dx ja dy on ajateltava differentiaalisiksi, kuvan (b) piirrokset ovat tietenkin mittasuhteiltaan täysin vääristyneitä. Tähän liittyen myös kuvan (c) kaavat ovat vain tiettyjä approksimaatioita (toisin aika yleisesti käytettyjä), kun pintarakenteen keskipinnalla on kaarevuutta. Kuvassa (b) esitetyt suorakulmaiset pinta-alkiot ovatkin tällöin tarkemmin ottaen muodoltaan kiilamaisia. Esimerkiksi normaalivoiman N_x täsmällinen lauseke tulee olemaan

$$N_x = \int \sigma_x \frac{R+z}{R}\, dz = \int \sigma_x (1+ \frac{z}{R}) dz \ , \qquad (6.1.4)$$

jossa R on pinnan kaarevuussäde y-suunnassa. Jos $z \ll R$, $1 + z/R \approx 1$ ja kuvan (c) esittämä kaava on hyvä approksimaatio. Samoin kuvan (c) kaavoista seuraisivat yhtälöt $N_{yx} = N_{xy}$ ja $M_{yx} = M_{xy}$, koska kontinuumilla pätee aina yhteys $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. Tarkennettujen kaavojen alaisina nämä kaksi yhtälöä eivät toteudu täsmällisesti paitsi tasopinnan yhteydessä tai kun kaarevuussäteet x- ja y-suunnissa sattuvat olemaan yhtä suuria.

Miksi kuvan (b) esittämissä jännitysresultanteissa ei esiinny pinnan normaalin suuntaisia momenttikomponentteja? Ne syntyisivät reunalla x = 0 (y = 0) jännityskomponentin σ_x (σ_y) y-suuntaisen (x-suuntaisen) muutoksen johdosta. Mutta koska kyseessä

ovat äärettömän lyhyet etäisyydet, ko. momentit katoavat.

Huomattakoon, että kuvan (d) mukaiset, pintarakenteiden yhteydessä tavanomaiset merkinnät ja nimitykset ovat selvässä ristiriidassa kuvan 6.1.1 (d) vastaavien merkintöjen ja nimitysten kanssa. Esimerkiksi pintarakenteen taivutusmomentti M_y ei ole y-akselin suuntainen eikä leikkausvoima Q_y y-akselin suuntainen. Lisäksi niillä on eri dimensiot kuin sauvarakenteiden vastaavannimisillä suureilla. Oikeastaan pintarakenteilla pitäisi puhua normaalivoimasta pituutta kohti jne.

— — —

Sen mukaan miten pintarakenne on pääasiassa kuormitettu, minkä muotoinen se on ja mikä on sen rakenne, siitä käytetään mm. seuraavia erityisnimityksiä:

Levy (engl. plate, stretched plate, disk) on pintarakenne, jonka keskipinta on taso ja joka on kuormitettu pääasiassa keskitasonsa suuntaisesti. Oleelliset jännitysresultantit ovat N_x, N_y ja $N_{xy} = N_{yx}$. Levy on lähinnä nivelsauvan kaksidimensioinen laajennus.

Laatta (engl. plate, plate in bending) on pintarakenne, jonka keskipinta on taso ja joka on kuormitettu pääasiassa keskitasoaan vastaan kohtisuorassa suunnassa. Oleelliset jännitysresultantit ovat M_x, M_y, $M_{xy} = M_{yx}$, Q_x ja Q_y. Laatta on palkin kaksidimensioinen laajennus.

Kuori (engl. shell) on täysin yleistä tyyppiä oleva pintarakenne, jonka keskipinta on kaareva ja jonka erikoistapauksina saadaan mm. levy ja laatta. Kaikki kuvassa 6.1.2 (b) esitetyt jännitysresultantit ovat yleensä oleellisia suureita. Kuoren suunnittelussa pyritään kuitenkin normaalisti lähelle tilannetta, jossa kuori ottaisi kuormituksen vastaan pelkästään jännitysresultanttiensa N_x, N_y, N_{xy} ja N_{yx} avulla. Jos tämä asetelma on voimassa, kuoren sanotaan olevan kalvotilassa. Kuori on kaaren kaksidimensioinen laajennus.

Kalvo (engl. membrane). Taipuisan rakenteensa johdosta kalvo pystyy vastaanottamaan vain jännitysresultantit N_x, N_y ja $N_{xy} = N_{yx}$. Lisäksi normaalikomponenttien N_x ja N_y tulee olla vetäviä olivatpa suunnat x ja y valitut miten hyvänsä. Kalvon ottama muoto riippuu voimakkaasti ulkoisesta kuormituksesta paitsi, jos kalvossa on huomattava esikiristys. Kalvo on köyden kaksidimen-

sioinen laajennus.

Edellä on selostettu eri rakenteiden yhteydessä käytössä olevia jännitysresultantteja eli yleistettyjä jännityksiä. Mitkä ovat sitten vastaavat muodonmuutos- tai venymäsuureet eli konjugaattiset (ks. kohta 4.6.2) yleistetyt venymät (engl. generalized strain)? Tähän kysymykseen saadaan vastaus lähtemällä liikkeelle kolmidimensioista kontinuumia koskevasta virtuaalisesta työyhtälöstä $-\delta W = 0$ (ks. kaava (4.9.24)) eli tässä

$$\int_V \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV - \int_V \{f\}^T \delta\{u\} dV - \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T \delta\{u\} dS = 0 \ . \qquad (6.1.5)$$

Kun siinä otetaan huomioon aina eri tapauksissa käytetyt otaksumat yms., päädytään esimerkiksi tasopintarakenteilla vastaavasti yhteyksiin

$$\left.\begin{aligned} \int_V \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV &\mathrel{\hat{=}} \int_A \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dA \ , \\ \int_V \{f\}^T \delta\{u\} dV &\mathrel{\hat{=}} \int_A \{f\}^T \delta\{u\} dA \ , \\ \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T \delta\{u\} dS &\mathrel{\hat{=}} \int_{s_t} \{\bar{t}\}^T \delta\{u\} ds \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.6)$$

Näissä esiintyy yhtäsuuruusmerkin sijasta vastaavuusmerkki $\hat{=}$, koska käytetyillä tunnuksilla täytyy olla eri merkitykset yhtälöiden eri puolilla; toisin sanoen ei haluta ottaa enää käyttöön uusia matriisitunnuksia. Vasemmilla puolilla $\{\sigma\}$ ja $\{\varepsilon\}$ liittyvät varsinaisiin jännityksiin ja venymiin ja oikeilla puolilla taas yleistettyihin jännityksiin ja venymiin. Merkinnät dA ja ds viittaavat taso- ja viiva-alkioihin. Itse asiassa käy niin, että yleistetyt venymät valitaankin ensin ja konjugaattiset yleistetyt jännitykset syntyvät seurauksina. Tämä tulee käymään esille mm. kohdissa 6.1.5...6.1.10 esitetyistä tarkasteluista. Vastaavasti selviävät myös konjugaattisten suureiden $\{u\}$, $\{f\}$ ja $\{u\}$, $\{t\}$ uudet merkitykset.

Potentiaalienergian lausekkeet saadaan kimmoiselle rakenteelle niin tarvittaessa samoin suoraan kohdan 4.10 yleisistä kaavoista tulkitsemalla vain merkinnät $\{u\}$, $\{\varepsilon\}$ jne. rakennetyypille virtuaalisen työyhtälön ilmaisemalla tavalla; ks. esimerkki 6.1.1.

Kuten edellä on useasti korostettu, tasapainoyhtälöitä sekä traktio-jännitysyhteyksiä ei enää tarvita virtuaalista työyhtälöä sovellettaessa. Näillä yhtälöillä on kuitenkin eri rakennetyyppien yhteydessä oma mielenkiintonsa, joten nekin tullaan usein esittämään jatkossa lyhyesti kuitenkin yleensä ilman johtoja.

Tarkastellaan tähän liittyen vielä taulukkoa 6.1.1. Se selostaa yhteenvedonomaisesti virtuaalisen työn periaatteen soveltamiseen liittyviä piirteitä. Kirjallisuudessa ehkä tavallisimmin esiintyvä tasapainoyhtälöiden ja traktio-jännitysyhteyksien johtamistapa on differentiaaligeometrinen: muodostetaan sopivien differentiaalisten rakennealkioiden vapaakappalekuvioiden avulla tarvittavat yhtälöt. Käsittely on aivan vastaava kuin kolmidimensioisessa tapauksessa (ks. esimerkiksi kuvaan 4.4.2 liittyvä johto); nyt vain alkion kaikki mitat eivät ole differentiaalisia. Esimerkissä 6.1.1 annetaan yksinkertainen näyte tästä käsittelytavasta. Näin saadaan siis taulukon 6.1.1 alimmassa rivissä esitetty asetelma (V'-muoto). Mutta on olemassa myös toinen johtomahdollisuus, joka on automaattinen seuraus yleisestä virtuaalisesta työyhtälöstä. Tällöin taulukon alimpaan riviin päädytään kulkemalla taulukon esittämät askeleet ylhäältä alaspäin vielä kohdan "H'-muoto" alapuolelle. Tästä versiosta annetaan samoin näyte esimerkin 6.1.1 yhteydessä. (Itse asiassa tämä jälkimmäinen tapa on differentiaaligeometrista tapaa huomattavasti systemaattisempi ja turvallisempi kun kyseessä ovat mutkikkaat rakennetyypit.) Todettakoon vielä, että tiettyä rakennetyyppiä koskeva virtuaalinen työyhtälö voidaan ymmärrettävästi johtaa myös kulkemalla taulukkoa alhaalta ylöspäin; "V'H'-askel". Tästä oli sovellutus jo esimerkissä 4.9.1. Käytetyt merkinnät viittaavat seuraavaan: V ≙ <u>v</u>ahva, H ≙ <u>h</u>eikko, ( )' ≙ rakenne kolmidimensioisen kontinuumin vastakohtana.

Käsittelyt suoritetaan lähinnä staattisessa tapauksessa.

Taulukko 6.1.1 Virtuaalisen työn periaate ja rakenteet.

V-muoto	Kolmidimensioisen kontinuumin tasapainoyhtälöt ja traktio-jännitysyhteydet		Näitä yhtälöitä on selostettu kohdassa 4.4
↓ VH-askel	Painofunktioilla manipulointi ja osittaisintegrointi		Tätä vaihetta on selostettu kohdassa 4.9.1
H-muoto	Kolmidimensioisen kontinuumin virtuaalinen työyhtälö		Tämä muoto sopii kolmidimensioisen kontinuumin analysoimiseksi elementtimenetelmän avulla
↓ HH'-askel	Tiettyyn rakennetyyppiin liittyvät kinemaattiset ja dynaamiset otaksumat		Tätä vaihetta on selostettu mm. kohdissa 6.1.2...6.1.10
H'-muoto	Rakennetyypin virtuaalinen työyhtälö	H'-muoto	Tämä muoto sopii rakennetyypin analysoimiseksi elementtimenetelmän avulla
↓ H'V'-askel	Osittaisintegrointi	↑ V'H'-askel	H'V'-askelta on selostettu esimerkissä 6.1.1 ja V'H'-askelta esimerkissä 4.9.1
V'-muoto	Rakennetyypin tasapainoyhtälöt ja traktio-jännitysyhteydet	V'-muoto	Näitä yhtälöitä on selostettu mm. esimerkissä 6.1.1

Laajennus dynamiikkaan tapahtuu tarvittaessa mm. sijoitusta

$$\{f\} := \{f\} + \{f^I\} + \{f^d\} \tag{6.1.7}$$

soveltamalla.

6.1.2 Tasojännitystila

Kappaleen sanotaan olevan tasojännitystilassa (engl. plane stress state), jos mihin hyvänsä kappaleeseen asetettuun pinta-alkioon liittyvä jännitysvektori $\vec{t}$ on aina tietyn tason — jatkossa xy-tason — suuntainen. Viimeisen kaavan (3.4.13) avulla voidaan helposti osoittaa (vaihdellaan pinta-alkion suuntaa eli vektorin $\vec{n}$ komponenttien arvoja mielivaltaisesti), että

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \tag{6.1.8}$$

ja siis vain jännityskomponentit σ_x, σ_y ja $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ voivat olla nollasta eroavia (ks. kuva 6.1.3).

Esimerkiksi kun ohutta levyä kuormitetaan tasonsa suuntaisesti, levyyn syntyy likimain tasojännitystila. Jos nimittäin levyn pinnat z = vakio ovat kuten tavallista kuormittamattomat, traktio $\vec{t}^{(z)}$ häviää näillä pinnoilla eli viimeisen kaavan (3.4.10) perusteella juuri komponentit σ_z, τ_{yz} ja τ_{zx} ovat niillä nollia. Levyn ollessa ohut nämä suureet eivät ehdi saada suuria arvoja levyn sisälläkään [6.1, s. 2].

Tasojännitystilan tarkastelu voidaan rajoittaa matemaattisessa mielessä paikan suhteen tyypillisen poikkileikkauksen z = vakio käsittelyyn (kuva 6.1.3). Suureiden mahdollinen riippuvuus koordinaatista z tulee esille myöhemmin varsinaisen levyn yhteydessä kohdassa 6.1.8.

Koska kuormitus on ko. tason suuntainen, tilavuusvoiman intensiteetille $\vec{f}$ ja traktiolle $\vec{t}$ pätee

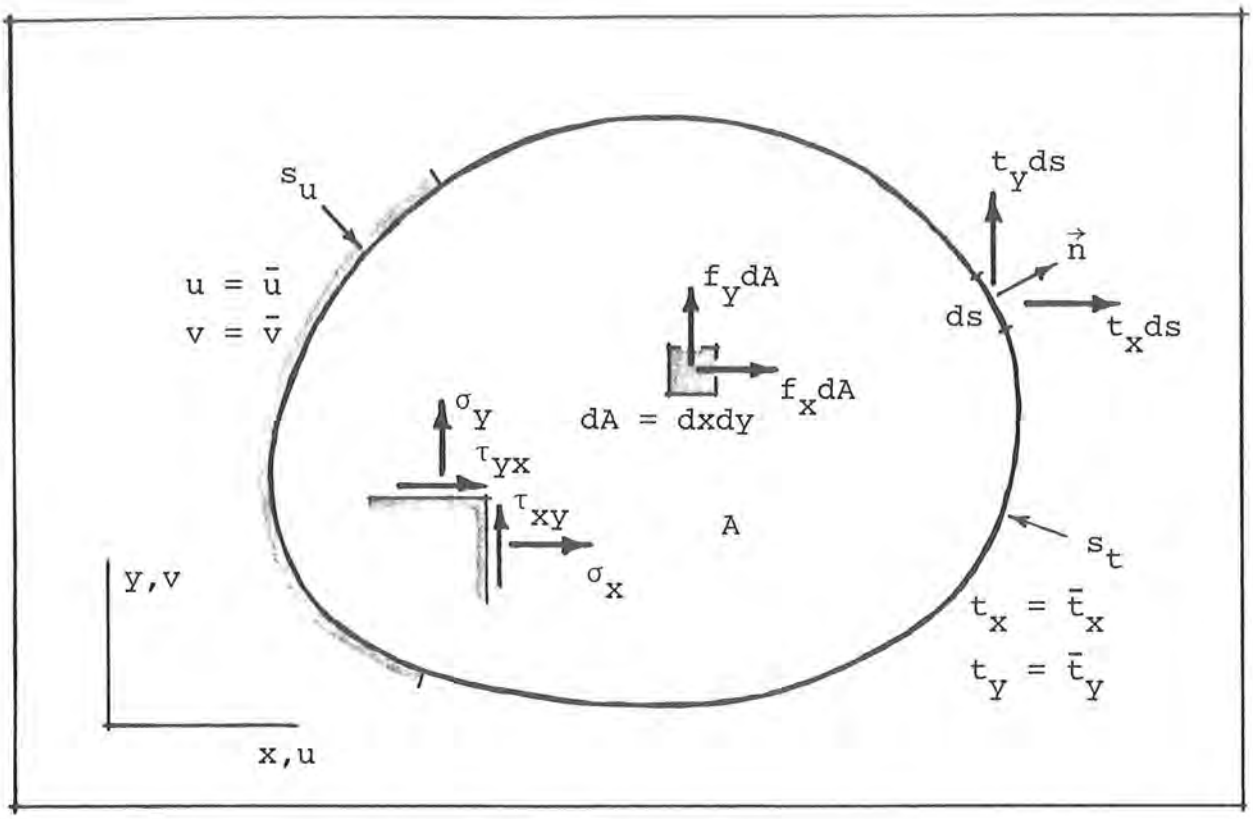
$$f_x = f_x(x,y) \ , \quad f_y = f_y(x,y) \ , \quad f_z = 0 \tag{6.1.9}$$

ja

$$t_x = t_x(s) \ , \quad t_y = t_y(s) \ , \quad t_z = 0 \ . \tag{6.1.10}$$

Edellisten esitysten perusteella virtuaalisen työyhtälön kannalta riittää vain siirtymäkomponenttien

$$u = u(x,y) \ , \quad v = v(x,y) \tag{6.1.11}$$



Kuva 6.1.3 Kappaleen poikkileikkaus.

mukaanotto. Samoin nollasta eroavia jännityskomponentteja vastaavien venymäkomponenttien lausekkeet ovat (ks. kaavat (3.3.36))

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{6.1.12}$$

Hooken laista (4.2.14) seuraa otaksuminen (6.1.8) perusteella ensin yhtälöt

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\,, \\ 0 &= G\gamma_{yz}\,, \\ 0 &= G\gamma_{zx}\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.1.13}$$

joista saadaan

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= -\frac{\lambda}{2G+\lambda}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\,, \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zx} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.1.14}$$

Vielä lisäksi

$$\varepsilon_V \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) \tag{6.1.15}$$

ja Hooken laki antaa lopuksi yhteydet

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y) \ , \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x) \ , \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.16}$$

Tilavuusalkio dV = dzdA = dzdxdy ja pinta-alkio dS = dzds (kuva 6.1.3). Tarkastellaan kuitenkin z-suunnassa dz-paksuista kappaletta ja jaetaan virtuaalinen työyhtälö vielä dz:lla; toisin sanoen kirjoitetaan virtuaalinen työyhtälö z-akselin suuntaista pituutta kohti. (Näin on tehty myös kuvassa 6.1.3 esitettyjen tilavuus- ja pinta-alkioon vaikuttavien voimien suhteen.) Sopivat matriisimerkinnät tulevat olemaan edellisen perusteella seuraavat:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{2\times1}{\{u\}} = [u\ v]^T \ , \quad \underset{3\times1}{\{\varepsilon\}} = [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}]^T \ , \\ &\underset{2\times1}{\{f\}} = [f_x\ f_y]^T \ , \quad \underset{3\times1}{\{\sigma\}} = [\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]^T \ , \\ &\underset{2\times1}{\{t\}} = [t_x\ t_y]^T \ , \quad V \mathrel{\hat{=}} A \ , \quad S \mathrel{\hat{=}} s \ , \\ &\underset{3\times2}{[{}_\varepsilon\partial_u]} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \ , \quad dV \mathrel{\hat{=}} dA \ , \quad dS \mathrel{\hat{=}} ds \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.17}$$

Lisäksi on helppo osoittaa, että

$$\underset{2\times3}{[{}_f\partial_\sigma]} = [{}_\varepsilon\partial_u]^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \ ,$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{2\times 3}{[n]} &= \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}, \\ \{f^I\} &= -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\} . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.18}$$

Kimmoisella isotrooppisella aineella

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{6.1.19}$$

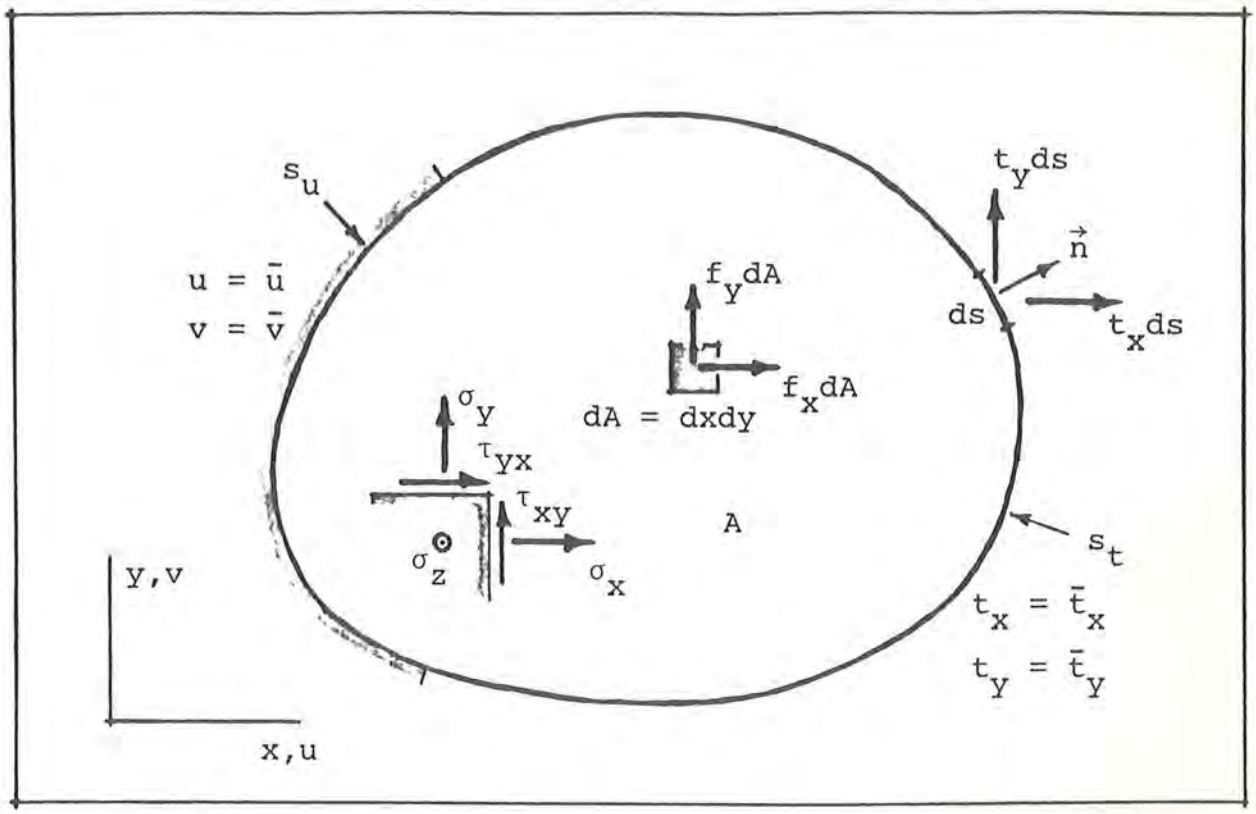
6.1.3 Tasomuodonmuutostila

Kappaleen sanotaan olevan tasomuodonmuutostilassa (engl. plane strain state), jos siirtymät ovat tietyn tason (esimerkiksi xy-tason) suuntaisia ja eivät riipu tasoa vastaan kohtisuoran koordinaatin (siis z:n arvosta). Toisin sanoen kyseessä on tasoliike; ks. esimerkki 3.3.1. Tällöin

$$u = u(x,y) \ , \quad v = v(x,y), \quad w = 0 \ . \tag{6.1.20}$$

Tämänlainen siirtymätila syntyy z-akselin suuntaisessa sylinterin muotoisessa kappaleessa, jonka ominaisuudet, kuormitukset ja reunaehdot eivät muutu z-akselin suunnassa. Kappale on ajateltava tuetuksi päistään kitkattomilla jäykillä levyillä. Tasomuodonmuutos kehittyy likimain käytännössä pitkänomaisiin rakenteisiin kuten tukimuureihin, tunneleihin jne.

Matemaattisessa mielessä tarkastelu voidaan siis jälleen rajoittaa paikan suhteen kappaleen tyypilliseen poikkileikauksen z = vakio käsittelyyn. Täten kuva 6.1.3 voidaan toistaa tässä miltei sellaisenaan (kuva 6.1.4).



Kuva 6.1.4 Kappaleen poikkileikkaus.

Lausekkeiden (6.1.20) perusteella nollasta eroaviksi venymäkomponenteiksi saadaan

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.1.21}$$

ja

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\ . \tag{6.1.22}$$

Lisäksi symmetriasyistä

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \tag{6.1.23}$$

ja nollasta eroaviksi jännityskomponenteiksi jäävät σ_x, σ_y, σ_z ja $\tau_{xy} = \tau_{xy}$ (ks. kuva 6.1.4).

Tilavuusvoiman intensiteetille ja traktiolle pätee jälleen

$$f_x = f_x(x,y)\ , \quad f_y = f_y(x,y)\ , \quad f_z = 0 \tag{6.1.24}$$

ja

$$t_x = t_x(s)\ , \quad t_y = t_y(s)\ , \quad t_z = 0\ . \tag{6.1.25}$$

Hooken laista (4.2.14) seuraa kaavojen (6.1.22) ja (6.1.23) perusteella yhteydet

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\ , \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\ , \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{6.1.26}$$

ja lisäksi

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \nu(\sigma_x+\sigma_y)\ . \tag{6.1.27}$$

Jos Poissonin vakio ν on nolla, saadaan siis samalla tasojännitystila.

Virtuaalisen työyhtälön kannalta voidaan vektorit $\{\sigma\}$ ja $\{\varepsilon\}$ valita edelleen kuten tasojännitystapauksessa. Vaikka σ_z ei olekaan nimittäin yleensä nolla, sen tekemä virtuaalinen työ

häviää, koska $\varepsilon_z = 0$ ja siis myös $\delta\varepsilon_z = 0$. Täten kaikki kaavojen (6.1.17) ja (6.1.18) esittämät matriisimerkinnät ovat edelleen voimassa. Ainoastaan [D]-matriisi muuttuu. Sen esityksesi tulee kaavojen (6.1.26) perusteella

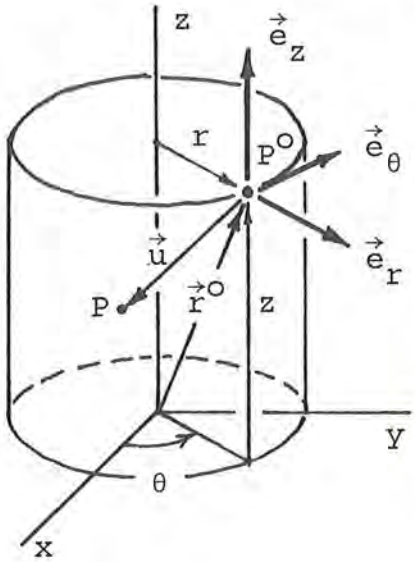
$$[D] = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} . \qquad (6.1.28)$$

Poissonin suhteen ν saadessa arvon 1/2 (kokoonpuristumaton tapaus), $\lambda \to \infty$ ja on siirryttävä kaavojen (4.2.23) tyyppiseen esitykseen. Huomattakoon, että tasojännitystapauksessa arvo $\nu = 1/2$ ei aiheuta vastaavaa ongelmaa; vrt. kaava (6.1.19).

6.1.4 Pyörähdyssymmetrinen tapaus

Sylinterikoordinaatisto. Mm. pyörähdyssymmetrisissä tapauksissa on edullista käyttää karteesisen koordinaatiston sijasta sylinterikoordinaatistoa valiten sen z-akseli yhtymään tehtävän symmetria-akseliin. Esitetään tämän vuoksi seuraavassa joitakin tärkeimpiä kaavoja ensin sylinterikoordinaatistossa yleensä ilman johtoa ja katsotaan lopuksi kaavojen pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa saamia muotoja.

Käytetään kuvan 6.1.5 merkintöjä. Lagrangen esitystavan mukaiset sylinterikoordinaatit olkoot r, θ ja z. Pisteeseen P^o koordinaattikäyrien tangenteiksi asetetut yksikkövektorit $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ ja $\vec{e}_z$ muodostavat tässä järjestyksessä oikeakätisen ortonormaalin kannan. Mielivaltaisen vektorin $\vec{f}(r,\theta,z,t)$ esitys tässä kannassa on



Kuva 6.1.5 Sylinterikoordinaatisto.

$$\vec{f} = f_r\vec{e}_r + f_\theta\vec{e}_\theta + f_z\vec{e}_z \ , \quad (6.1.29)$$

jossa komponentit f_r, f_θ ja f_z ovat yleisesti muuttujien r, θ, z ja t funktioita ja jossa lisäksi kantavektorit $\vec{e}_r$ ja $\vec{e}_\theta$ riippuvat muuttujan θ arvosta. Esimerkiksi siirtymän $\vec{u}$ lauseke on täten

$$\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta + u_z\vec{e}_z \ . \quad (6.1.30)$$

Olemme käsitelleet kinematiikkaa tähän asti vain karteesisia suorakulmaisia koordinaatteja soveltaen, jolloin kantavektoreiden suunnat ovat olleet vakioita. Nyt täytyy tehdä sopimus siitä, mihin avaruuden pisteeseen kantavektorit $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ on kulloinkin assosioitava. Lagrangen esitystavan hengessä liitämme ne — ks. kuva 3.3.1 — partikkelin alkuasemaan P^o. Täten ko. partikkelin liikkuessa kantavektorit pysyvät vakioina. Lagrangen esityksen korostamiseksi alkuaseman koordinaatit ja kantavektorit

voitaisiin varustaa vaikka tunnuksilla r^o, θ^o, z^o ja $\vec{e}_r^o$, $\vec{e}_\theta^o$, $\vec{e}_z^o$. Pitäydytään kuitenkin tavanomaisissa sylinterikoordinaatiston merkinnöissä.

Edellisen perusteella ymmärretään, että myös aineellista aikaderivaattaa $\vec{f}^{\bullet} \equiv D\vec{f}/Dt = \partial\vec{f}/\partial t$ laskettaessa kantavektorit pidetään vakioina. Nopeuden ja kiihtyvyyden lausekkeiksi saadaan siis

$$\vec{v} = \frac{\partial u_r}{\partial t}\vec{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial t}\vec{e}_z \ . \tag{6.1.31}$$

ja

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\vec{e}_r + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}\vec{e}_\theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}\vec{e}_z \ . \tag{6.1.32}$$

Infinitesimaalisten venymäkomponenttien lausekkeet tulevat olemaan [4.6, s. 64]

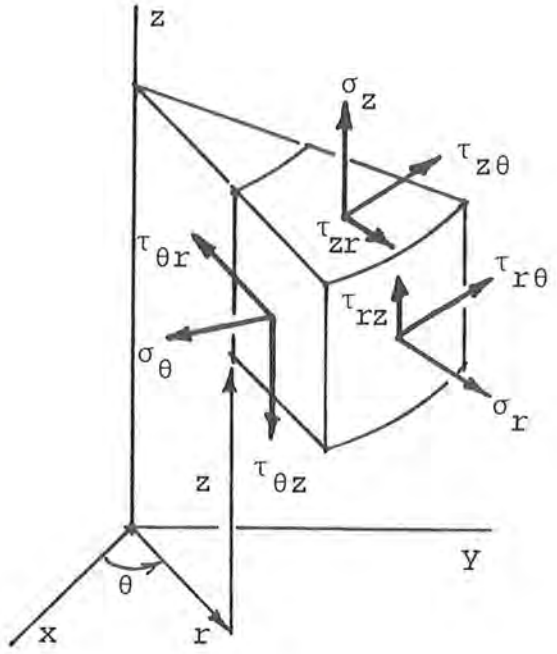
$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\ , & \gamma_{\theta z} &= \gamma_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\ ,\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\ , & \gamma_{zr} &= \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\ ,\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}\ , & \gamma_{r\theta} &= \gamma_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\ .
\end{aligned}\right\} \tag{6.1.33}$$

Niiden fysikaaliset tulkinnat ovt vastaavat kuin kaavojen (3.3.36) määrittelemillä suureilla. Koska ε_r, ε_θ ja ε_z esittävät suhteellisia venymiä kolmessa toisiaan vastaan kohtisuorassa suunnassa, dilataation lausekkeeksi saadaan kaavan (4.3.20) perusteella

$$\varepsilon_V \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\ . \tag{6.1.34}$$

Kuva 6.1.6 esittää sylinterikoordinaatiston jännityskomponenteille käytettyjä merkintöjä [4.6, s. 62].

Koska koordinaattiviivat leikkaavat toisensa kohtisuoraan, Hooken laki antaa kaavojen (4.2.14) vastineiksi suoraan yhteydet



Kuva 6.1.6 Jännityskomponentit

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2G\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)\ , & \tau_{\theta z} &= G\gamma_{\theta z}\ , \\ \sigma_\theta &= 2G\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)\ , & \tau_{zr} &= G\gamma_{zr}\ , \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)\ , & \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.35)$$

Cauchyn liikeyhtälöiden (4.4.5) komponenttimuodot ovat [4.6, s. 64].

$$\left.\begin{aligned} f_r + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} &= \rho a_r\ , \\ f_\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} + 2\,\frac{\tau_{r\theta}}{r} &= \rho a_\theta\ , \\ f_z + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho a_z\ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.36)$$

Kiihtyvyyskomponenttien lausekkeet saadaan kaavasta (6.1.32).

Traktio-jännitysyhteyden (4.4.21) komponenttimuodot ovat

$$t_r = n_r\sigma_r + n_\theta\tau_{\theta r} + n_z\tau_{zr}\ ,$$

$$\left.\begin{aligned} t_\theta &= n_r\tau_{r\theta} + n_\theta\sigma_\theta + n_z\tau_{z\theta} \,, \\ t_z &= n_r\tau_{rz} + n_\theta\tau_{\theta z} + n_z\sigma_z \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.37)$$

Huomautus 1. Kohdassa 3.3.2 on todettu, että Lagrangen esitys on tavallaan partikkelimekaniikasta tutun käsittelytavan vastine kontinuumimekaniikkaa koskevana. Kuitenkin on huomattava, että käyräviivaista koordinaatistoa käytettäessä on partikkelimekaniikassa tapana — ks. esimerkiksi [3.9, s. 43] — liittää kantavektorit aina partikkelin hetkelliseen asemaan päinvastoin kuin mitä on edellä esitetty.

Pyörähdyssymmetria. Kun muodoltaan ja ominaisuuksiltaan pyörähdyssymmetriseen kappaleeseen vaikuttaa lisäksi pyörähdyssymmetrinen kuormitus, syntyy pyörähdyssymmetrinen siirtymä-, muodonmuutos- ja jännitystila. Valitaan edellä esitetyissä sylinterikoordinaatiston kaavoissa z-akseli symmetria-akseliksi, jolloin kaikkien suureiden riippuvuus θ-koordinaatista häviää ja vain r ja z jäävät riippumattomiksi paikkakoordinaateiksi. Matemaattisessa mielessä pyörähdyssymmetristä tehtävää voidaan siten tarkastella puolitasossa θ = vakio, $r \geq 0$ eli siis kappaleen tyypillisessä z-akselin kautta kulkevassa poikkileikkauksessa (kuva 6.1.7).

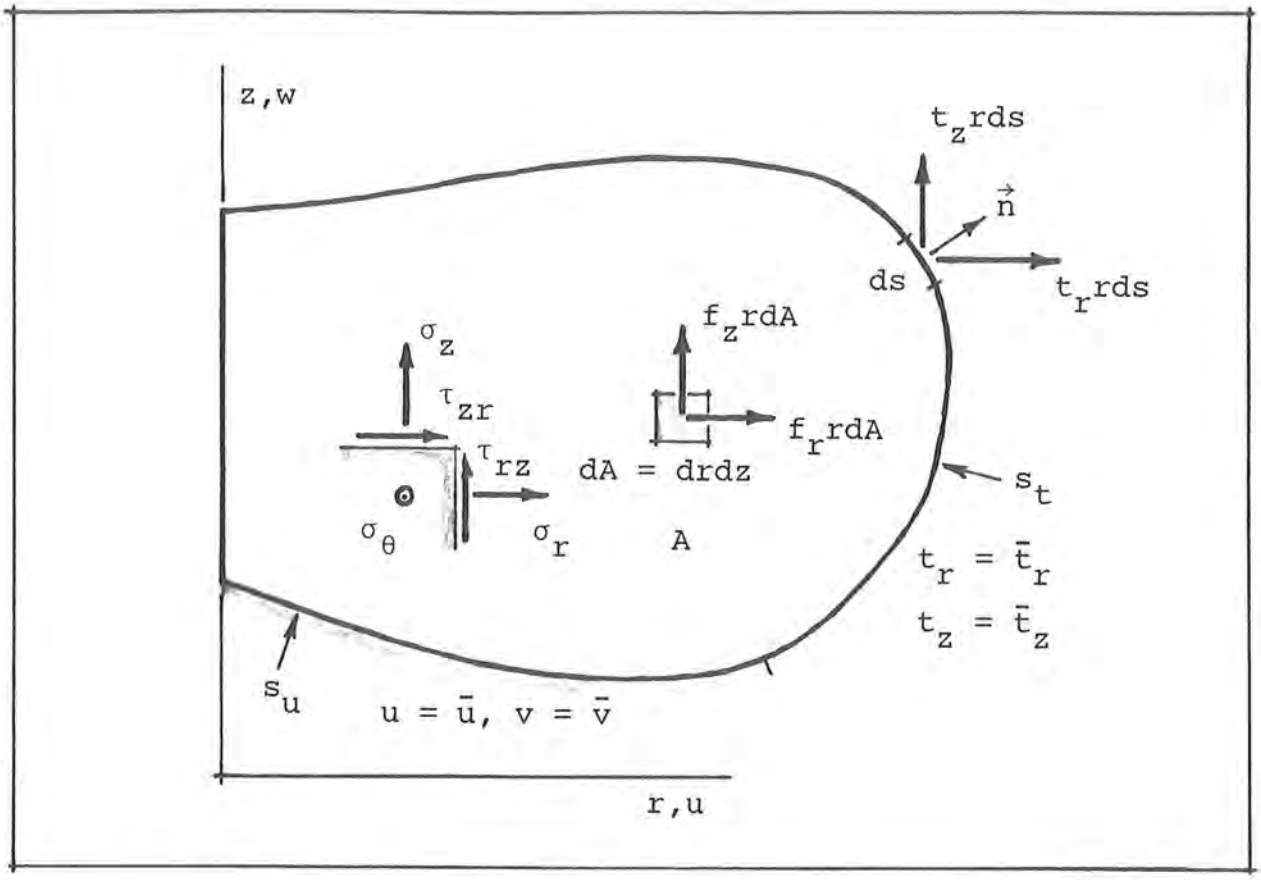
Asetelma on taas hyvin lähellä kohtien 6.1.2 ja 6.1.3 esitystä. Vain merkinnät ja vektorien $\{\sigma\}$ ja $\{\varepsilon\}$ koot muuttuvat.

Siirtymälle, tilavuusvoimien intensiteetille ja traktiolle pätee (staattinen tapaus)

$$\left.\begin{aligned} &u_r \equiv u = u(r,z) \,, \quad u_\theta = 0 \,, \quad u_z \equiv w = w(r,z) \,, \\ &f_r = f_r(r,z) \,, \quad f_\theta = 0 \,, \quad f_z = f_z(r,z) \,, \\ &t_r = t_r(s) \,, \quad t_\theta = 0 \,, \quad t_z = t_z(s) \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.38)$$

Nollasta eroavien venymäkomponenttien lausekkeet ovat (ks. kaavat (6.1.33))

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \,, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \,, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \,, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \,. \qquad (6.1.39)$$



Kuva 6.1.7 Kappaleen poikkileikkaus.

Jännityskomponentit $\tau_{\theta r}$ ja $\tau_{\theta z}$ häviävät symmetriasyistä ja nollasta eroaviksi jännityskomponenteiksi jäävät σ_r, σ_z, σ_θ ja $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ (ks. kuva 6.1.7).

Virtuaaliseen työyhtälöön liittyvät matriisit voidaan valita täten esimerkiksi seuraavasti:

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{2\times1}{\{u\}} = [u\ w]^T\ , \quad \underset{4\times1}{\{\varepsilon\}} = [\varepsilon_r\ \varepsilon_z\ \varepsilon_\theta\ \gamma_{rz}]^T\ , \\[2ex]
\underset{2\times1}{\{f\}} = [f_r\ f_z]^T\ , \quad \underset{4\times1}{\{\sigma\}} = [\sigma_r\ \sigma_z\ \sigma_\theta\ \tau_{rz}]^T\ , \\[2ex]
\underset{2\times1}{\{t\}} = [t_r\ t_z]^T\ , \quad V \mathrel{\hat{=}} A\ , \quad S \mathrel{\hat{=}} s\ , \\[2ex]
\underset{4\times2}{[{}_\varepsilon\partial_u]} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ 1/r & 0 \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix}\ , \quad dV \mathrel{\hat{=}} rdA\ , \quad dS \mathrel{\hat{=}} rds\ .
\end{array}\right\} \qquad (6.1.40)$$

Lisäksi

$$\left.\begin{aligned}
&[{}_f\partial_\sigma]_{2\times 4} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r+1/r\ , & 0 & -1/r & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & 0\ , & \partial/\partial r+1/r \end{bmatrix}, \\
&[n]_{2\times 4} = \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 & n_z \\ 0 & n_z & 0 & n_r \end{bmatrix}, \\
&\{f^I\} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1.41)$$

ja kimmoisella isotrooppisella aineella

$$[D]_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \qquad (6.1.42)$$

Sylinterikoordinaatistossahan tilavuusalkio $dV = rd\theta drdz = d\theta rdA$ ja pinta-alkio $dS = rd\theta ds = d\theta rds$ (ks. kuva 6.1.7). Pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa riippuvuus koordinaatista θ häviää ja

$$\left.\begin{aligned}
&\int_V (\quad) dV = \int_\theta d\theta \int_A (\quad) rdA = 2\pi \int_A (\quad) rdA\ , \\
&\int_S (\quad) dV = \int_\theta d\theta \int_s (\quad) rds = 2\pi \int_s (\quad) rds\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1.43)$$

Yleensä pyörähdyskappaletta koskeva virtuaalinen työyhtälö kirjoitetaan vielä jaettuna suureella 2π; toisin sanoen käsitelläänkin koko kappaleen sijasta yhden radiaanin levyistä sektoria. Esityksen (6.1.43) sijasta voidaan kirjoittaa tällöin

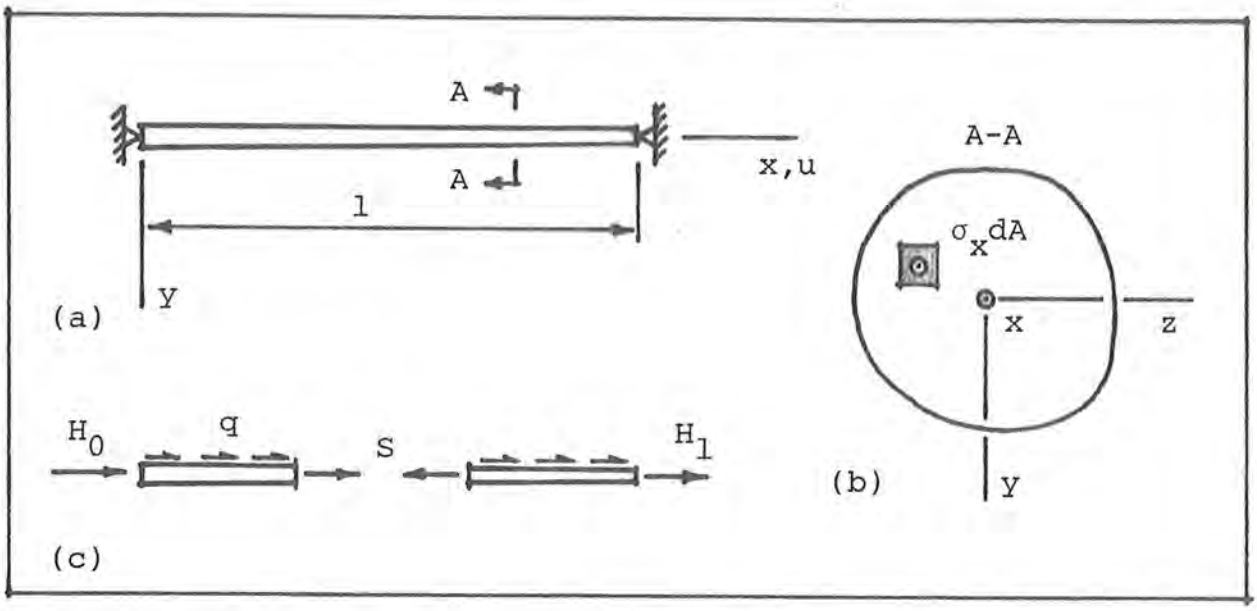
$$\left.\begin{aligned}
&\int_V (\quad) dV \mathrel{\hat{=}} \int_A (\quad) rdA\ , \\
&\int_S (\quad) dV \mathrel{\hat{=}} \int_s (\quad) rds\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1.44)$$

Kaavojen (6.1.40) alueita ja alkioita koskevat merkinnät on valittu kaavojen (6.1.44) antaman tulkinnan mukaisesti. Samoin kuvassa 6.1.7 esitettyjen tilavuus- ja pinta-alkioon vaikuttavien voimien yhteydessä on suoritettu luvulla 2π jako.

Jos alue A rajoittuu z-akseliin (kuten on laita kuvan 6.1.7 esittämässä tapauksessa), sillä esiintyy symmetriasyistä aina reunaehto $u = 0$. Samoin tällä osalla $\tau_{rz} = 0$ ja jos reunaehtoa $w = \bar{w}$ ei ole annettu, on käytettävä ehtoa $t_z = 0$.

6.1.5 Nivelsauva

Tarkastellaan kuvan 6.1.8 esittämää nivelsauvaa. Koska kyseessä on suora sauva, kuvan 6.1.1 (a) koordinaatti s voidaan



Kuva 6.1.8 (a) Nivelsauva. (b) Sauvan poikkileikkaus. (c) Sauvan voimasuureita.

korvata tässä vaikka x-koordinaattiakselilla. Rakenteiden mekaniikassa on usein tapana asettaa jokin koordinaattiakseli osoittamaan suoraan alaspäin ilmeisesti, koska vallitseva kuormituskin on tavallisesti — vaikkei nyt — samansuuntainen. Kuvassa (a) y-akseli osoittaa alaspäin ja z-akseli vaakasuoraan. Nivelsauvan oleellinen jännitysresultantti on normaalivoima eli sauvavoima (ks. kuva 6.1.1 (b) ja (c))

$$S = \int_A \sigma_x dA \ . \tag{6.1.45}$$

Eri rakennetyyppejä koskevat teoriat perustuvat yleensä aina tiettyihin kinemaattisiin (siirtymiä ja venymiä koskeviin) sekä dynaamisiin (jännityksiä koskeviin) otaksumiin, joiden mielekkyyteen ja oikeellisuuteen ei voida tässä yhteydessä kovin tarkasti puuttua.

Huomautus 1. Sanaa dynaaminen käytetään tässä merkityksessä "voimaperäinen, voima-". On huomattava, että eräiden lähteiden mukaan perustana oleva kreikankielinen sana dynamis = voima. Täten eräät teokset pitävätkin dynamiikka-termiä vääränä, jos sillä tarkoitetaan mekaniikan oppia kappaleiden liikkeestä. Oikeampi nimitys on kinetiikka (perustana oleva kreikankielinen sana kinein = liikuttaa).

— — —

Nivelsauvalle tehdään kinemaattinen otaksuma: Ennen muodonmuutosta sauvan poikkileikkaustasojen määrittämät ainepinnat ovat muodonmuutoksen jälkeenkin tasoja, jotka ovat kohtisuorassa sauvan suorana säilyvää akselia vastaan. Tämä merkitsee, että tietyn poikkileikkauksen kaikilla partikkeleilla on sama akselin suuntainen siirtymäkomponentti u eli u ei riipu y:stä eikä z:sta:

$$u = u(x) \ . \tag{6.1.46}$$

Ensimmäisen kaavan (3.3.36) perusteella venymäkomponentti

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{6.1.47}$$

ei siis myöskään riipu y:stä eikä z:sta.

Dynaaminen otaksuma: Sauvassa vallitsee ns. aksiaalinen jännitystila (engl. uniaxial stress state) eli valitussa koordinaatistossa ainoa nollasta mahdollisesti eroava jännityskomponentti on $\sigma \equiv \sigma_x(x,y,z)$ ja siis

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \ . \tag{6.1.48}$$

Koska tässä dV = dAdx, jossa dA on poikkileikkauspinnan pinta-alkio, saadaan (ks. virtuaalinen työyhtälö (6.1.5))

$$\int_V \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV = \int_V \sigma_x \delta\varepsilon_x dV = \int_0^l \int_A \sigma\delta\varepsilon dA dx$$

$$= \int_0^l \left(\int_A \sigma dA\right) \delta\varepsilon dx = \int_0^l S\delta\varepsilon dx \ . \tag{6.1.49}$$

Johdossa on käytetty hyväksi sitä, että ε ja siis $\delta\varepsilon$ ei riipu

y- ja z-koordinaateista ja on siis vakio poikkileikkauspinnan yli suoritetun integroinnin suhteen. Vertailu ensimmäisen kaavan (6.1.6) kanssa osoittaa, että käsittely tuotti automaattisesti venymäsuuretta ε vastaavaksi konjugaattiseksi yleistetyksi jännitykseksi sauvavoiman S.

Koostukoon ulkoinen kuormitus sauvan akselin suuntaisesta tilavuusvoiman intensiteetistä $f_x(x,y,z)$ ja sauvan päissä $x = 0$ ja $x = l$ vaikuttavista traktiokomponenteista $t_x(0,y,z) \equiv t_0$ ja $t_x(l,y,z) \equiv t_l$. Integrointi antaa

$$\int_V \{f\}^T \delta\{u\} dV = \int_V f_x \delta u dV = \int_0^l \int_A f_x \delta u dA dx$$

$$= \int_0^l (\int_A f_x dA) \delta u dx = \int_0^l q \delta u dx \qquad (6.1.50)$$

ja

$$\int_V \{t\}^T \delta\{u\} dS = \int_{A_0} t_0 \delta u(0) dA + \int_{A_l} t_l \delta u(l) dA$$

$$= (\int_{A_0} t_0 dA) \delta u(0) + (\int_{A_l} t_l dA) \delta u(l) = H_0 \delta u(0) + H_l \delta u(l) , \qquad (6.1.51)$$

joissa siis

$$q = \int_A f_x dA , \qquad (6.1.52)$$

ja

$$H_0 = \int_{A_0} t_0 dA , \quad H_l = \int_{A_l} t_l dA . \qquad (6.1.53)$$

Suure q on sauvan kuormitus pituutta kohti ($[q] = Nm^{-1}$) eli kuormituksen pituusintensiteetti ja traktiosuure H on itse asiassa yhtä kuin miinus- tai plusmerkkinen sauvavoima riippuen siitä, onko kyseessä sauvan alku- vai loppupää. Tässä siis $V \hat{=}$ x:n väli $0 < x < l$ ja $S \hat{=}$ pisteet $x = 0$ ja $x = l$. Jos sauvan vaipalla vaikuttaa lisäksi x-akselin suuntaisia traktiokomponentteja, ei ole vaikeaa johtaa niiden antamaa osuutta suu-

reeseen q.

Virtuaalinen työyhtälö (6.1.5) on muuntunut muotoon

$$\int_0^1 S\delta\varepsilon dx - \int_0^1 q\delta u dx - H_0\delta u(0) - H_1\delta u(1) = 0 \ . \qquad (6.1.54)$$

Yhtälö on kirjoitettu tässä tapauksessa, jossa kinemaattisia reunaehtoja ei ajatella esiintyvän ollenkaan. (Kohdan 4.7.2 huomautuksen 1 mukaisesti tasapainotila on tällöin mahdollinen vain mikäli yhtälö $\int q dx + H_0 + H_1 = 0$ toteutuu.) Jos otettaisiin esimerkkinä reunaehto

$$u(0) = \bar{u}_0 \ , \qquad (6.1.55)$$

H_0 tulisi rajoitevoimaksi, joka poistettaisiin formulaatiosta valinnalla $\delta u(0) = 0$. Piste $x = 0$ vastaisi tällöin yleisen tapauksen reunan osaa S_u.

Huomautus 2. Tehtyjen otaksumien jälkeen sauvan siirtymätilan määrittää kontinuumin kolmen kolmen muuttujan funktion $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ ja $w(x,y,z)$ sijasta yksi yhden muuttujan funktio $u(x)$. On siis saavutettu oleellisesti helpompi asetelma. Rakenteiden mekaniikassa suureen $u(x)$ tapaisia olioita nimitetään joskus yleistetyiksi siirtymiksi. Esimerkiksi kohdassa 6.1.9 korkean palkin tapauksessa yleistetyt siirtymät ovat $v(x)$ ja $\theta(x)$, jossa kiertymän θ dimensio ei ole enää sama kuin tavallisella siirtymällä. Tällöin attribuutti yleistetty on erityisen sopiva. Näin tulkitut yleistetyt siirtymät on siis käsitettävä eri mielessä kuin kohdassa 2.3.1 tarkastellut, äärellisen määrän vapausasteita omaaviin systeemeihin liittyvät yleistetyt koordinaatit, joita myös nimitetään usein yleistetyiksi siirtymiksi.

Yleistettyä siirtymää vastaava konjugaattinen voimasuure kulkee joskus samoin nimellä yleistetty voima — nyt taas eri mielessä kuin kohdassa 2.3.7. Nivelsauvalla saimme siis yleistettyä siirtymää u vastaavaksi yleistetyksi voimaksi kappaleen sisällä suureen q ja kappaleen reunalla suureen H.

— — —

Hooken laista (4.2.15) seuraa kaavojen (6.1.48) perusteella yksinkertainen yhteys

$$\sigma = E\varepsilon \ . \tag{6.1.56}$$

Kaava (6.1.45) antaa

$$S = \int_A E\varepsilon dA = (\int_A EdA)\varepsilon \ . \tag{6.1.57}$$

Tämä tulos esitetään tavallisesti muodossa

$$S = EA\varepsilon \ , \tag{6.1.58}$$

jossa

$$EA \equiv \int_A EdA \tag{6.1.59}$$

on sauvan ns. vetojäykkyys tai aksiaalinen jäykkyys (engl. axial stiffness) ([EA] = N). Merkintä EA(x) on käsitettävä yleisessä tapauksessa kahden kirjaimen muodostamiseksi tunnukseksi. Vain jos E on vakio poikkileikkauksen alueella, kyseessä on samalla kimmokertoimen E ja poikkileikkauspinta-alan A tulo.

Kun siirtymä u on selvillä, myös venymä ε tunnetaan ja jännitys σ voidaan laskea kimmoiselle aineelle kaavasta (6.1.56). Yhteyttä (6.1.58) käyttäen syntyy vaihtoehtoinen esitys

$$\sigma = E \frac{S}{(EA)} \ . \tag{6.1.60}$$

Jos E on vakio poikkileikkauspinnan alueella, jännityskin tulee vakioksi ja saadaan lujuusopin ehkä tunnetuin kaava

$$\sigma = \frac{S}{A} \ . \tag{6.1.61}$$

Tarkastellaan hieman dynaamista tapausta. Otaksutaan, että ainoa nollasta eroava kiihtyvyyskomponentti on

$$a_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ , \tag{6.1.62}$$

jossa nyt $u = u(x,t)$ ja $\partial^2 u/\partial t^2$ on siis riippumaton y:stä ja z:sta. (Todellisuudessa sauva saa myös pieniä siirtymiä v ja w

ja vastaavia kiihtyvyyksiä a_y ja a_z, mutta nämä jätetään tavallisesti huomiotta.) Tällöin

$$\int_V \{f^I\}^T \delta\{u\} dV = -\int_V \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dV = -\int_0^l \int_A \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dA dx$$

$$= -\int_0^l (\int_A \rho dA) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx = -\int_0^l \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx \ , \qquad (6.1.63)$$

jossa

$$\mu \equiv \int_A \rho dA \qquad (6.1.64)$$

on sauvan massa pituutta kohti eli sauvan massan viivatiheys ($[\mu] = kgm^{-1}$).

Sopivat matriisimerkinnät ovat

$$\left.\begin{array}{ll}
\underset{1\times 1}{\{u\}} = u \ , & \underset{1\times 1}{\{\varepsilon\}} = \varepsilon \\[2ex]
\underset{1\times 1}{\{f\}} = q \ , & \underset{1\times 1}{\{\sigma\}} = S \ , \\[2ex]
\underset{1\times 1}{\{t\}} = H \ , & V \mathrel{\hat{=}} 0 < x < l \ , \\[2ex]
 & S \mathrel{\hat{=}} x = 0 \ \text{ja} \ x = l \ , \\[2ex]
\underset{1\times 1}{[{}_\varepsilon\partial_u]} = \dfrac{\partial}{\partial x} \ , & dV \mathrel{\hat{=}} dx \ .
\end{array}\right\} \qquad (6.1.65)$$

Lisäksi

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{1\times 1}{[{}_f\partial_\sigma]} = [{}_\varepsilon\partial_u] = \dfrac{\partial}{\partial x} \ , \\[2ex]
\underset{1\times 1}{[n]} = n_x \quad \begin{array}{l} (n_x = -1 \ , \ \text{kun } x = 0) \\ (n_x = \ \ 1 \ , \ \text{kun } x = 1) \end{array} \\[2ex]
\underset{1\times 1}{\{f^I\}} = -\mu \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\}
\end{array}\right\} \qquad (6.1.66)$$

ja kimmoisella isotrooppisella aineella

$$\underset{1\times 1}{[D]} = EA \ .$$

Kaavoihin (6.1.66) liittyvät voimayhteydet johdetaan esimerkissä 6.1.1.

Esitetään vielä esimerkkinä kimmoisen sauvan potentiaalienergian lauseke otaksuen reunaehdon (6.1.55) olevan voimassa, kun alkuvenymiä ja -jännityksiä ei ole. Esimerkiksi lausekkeesta (4.10.25):

$$V(\{u\}) = \frac{1}{2}\int_V ([{}_\varepsilon\partial_u]\{u\})^T[D][{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}dV +$$

$$- \int_V \{f\}^T\{u\}dV - \int_{S_t} \{\bar{t}\}^T\{u\}dS \qquad (6.1.68)$$

tulee merkintöjen (6.1.63) perusteella lauseke ($\partial/\partial x \to d/dx$ staattisessa tapauksessa)

$$V(u) = \frac{1}{2}\int_0^l (\frac{du}{dx})^T EA\,\frac{du}{dx}\,dx - \int_0^l q^T u dx - H_l u(l)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EA(\frac{du}{dx})^2 dx - \int_0^l q u dx - H_l u(l) \ . \qquad (6.1.69)$$

Potentiaalienergian yksityiskohtainen lauseke on pääteltävä aina kussakin tapauksessa erikseen asetettujen traktioreunaehtojen perusteella. Esimerkiksi kuvan 6.1.8 (a) esittämässä tapauksessa reunaehdoista ei synny potentiaalienergiaosuuksia.

Esimerkki 6.1.1 Vetosauva. Liikeyhtälön (4.4.5''') tasapainoversio ja traktio-jännitysyhteys (4.4.21''') ovat tässä sovellettavia merkintöjä käyttäen kontinuumille

$$\{f\} + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma\} = \{0\} \qquad (a)$$

ja

$$\{t\} = [n]\{\sigma\} \ . \qquad (b)$$

Vetosauvalle esitettyjen merkintöjen (6.1.65) ja (6.1.66) perusteella saadaan vastineet

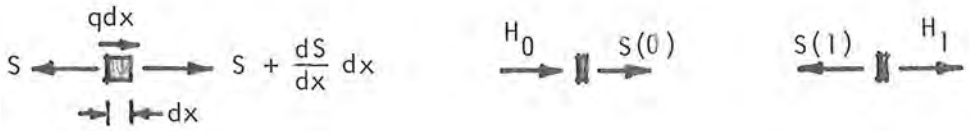
$$q + \frac{dS}{dx} = 0 \tag{c}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= -S(0) \ , \\ H_1 &= S(1) \ . \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

(Koska käsittelemme staattista tapausta, voimme asettaa $\partial/\partial x \to d/dx$.)
Johdamme nyt yhtälöt (c) ja (d) kahdella eri tavalla: differentiaaligeometrinen tapa ja virtuaalisen työn periaatteen soveltaminen.

Differentiaaligeometrinen tapa. Kuvassa (a) on esitetty kuvan 6.1.8 mer-



(a)

kintöjä soveltaen kolme vapaakappalekuviota. Ensimmäisessä tarkastellaan mielivaltaisesta kohdasta otettuun dx-pituiseen sauvan alkioon vaikuttavia voimia. Kaksi muuta esittävät sauvan päistä otettuihin äärettömän lyhyisiin ainekaistaleisiin vaikuttavia voimia. Saadaan välittömästi tasapainoyhtälöt

$$q + \frac{dS}{dx} = 0 \ , \quad 0 < x < l \tag{e}$$

$$\left.\begin{aligned} H_0 + S(0) &= 0 \ , \\ H_1 - S(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

eli yhtälöt (c) ja (d).

Virtuaalisen työn periaatteen soveltaminen. Lähdetään liikkeelle yhtälöstä (6.1.54):

$$\int_0^l S \frac{d(\delta u)}{dx} dx - \int_0^l q\delta u - H_0 \delta u(0) - H_1 \delta u(l) = 0 \ . \tag{g}$$

Virtuaalinen venymä on esitetty siirtymän avulla lausuttuna muodossa $\delta\varepsilon = \delta(du/dx) = d(\delta u)/dx$. Osittaisintegrointi antaa

$$\Big|_0^l S\delta u - \int_0^l \frac{dS}{dx} \delta u dx - \int_0^l q\delta u dx - H_0 \delta u(0) - H_1 \delta u(l) = 0 \ , \tag{h}$$

$$-\int_0^l [q + \frac{dS}{dx}]\delta u dx - [H_0 + S(0)]\delta u(0) - [H_l - S(l)]\delta u(l) = 0 \ . \qquad \text{(i)}$$

Koska tämän yhtälön täytyy olla voimassa mielivaltaisen virtuaalisen siirtymän δu suhteen, saadaan jälleen yhtälöt (c) ja (d).

Kirjataan vielä kertaalleen näkyviin yhtälöiden (e) ja (f) kimmoisen aineen tapauksessa siirtymien avulla esitetyt muodot:

$$q + \frac{d}{dx}(EA\frac{du}{dx}) = 0 \ , \qquad \text{(j)}$$

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= -EA\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} \ , \\ H_l &= EA\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=l} \ . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(k)}$$

Sauvan potentiaalienergia

$$V(u) = \frac{1}{2}\int_0^l EA(\frac{du}{dx})^2 dx - \int_0^l qu dx + rt \ . \qquad \text{(l)}$$

Merkintä rt viittaa reunatermeihin eli sauvan päistä kulloinkin mahdollisesti tuleviin potentiaalienergian osuuksiin; vrt. lauseke (6.1.69).

Huomautus 3. Olemme käsitelleet edellä pelkästään jatkuvasti jakautunutta kuormitusta q. Usein kuitenkin tiettyjä kuormituksia idealisoidaan pistevoimien avulla. Vaikuttakoon sauvan pisteessä $x = x_P$ x-akselin suuntainen pistevoima P. Miten tämä muuttaa vallitsevia yhtälöitä? Nähdään ensinnäkin helposti, että sauvavoima ei ole jatkuva pisteessä $x = x_P$, vaan saadaan hyppyehto

$$[\![S]\!] = -P \qquad (6.1.70)$$

eli

$$S^+ - S^- = -P \ . \qquad (6.1.70')$$

Virtuaaliseen työyhtälöön (6.1.54) ilmestyy lisätermi $-P\delta u(x_P)$. Eräs tapa saada tämä tulos on suorittaa virtuaalisen työn periaatteen johto ottaen osittaisintegrointivaiheessa huomioon, että S ei olekaan jatkuva pisteessä $x = x_P$, vaan toteuttaa ehdon

(6.1.70). Toinen suoraviivaisempi tapa on seuraava. Ajatellaan pistekuorma Diracin deltafunktion Δ avulla esitetyksi jakautuneeksi kuormitukseksi

$$q_P = P\Delta(x-x_P) \tag{6.1.71}$$

Tällöin virtuaalisen työyhtälön (6.1.54) termi

$$-\int_0^1 q_P \delta u dx = -P\int_0^1 \Delta(x-x_P)\delta u dx = -P\delta u(x_P) \tag{6.1.72}$$

Diracin deltan määritelmän

$$\int f(x)\Delta(x-x_P)dx = f(x_P) \tag{6.1.73}$$

perusteella. Muutokset potentiaalienergian lausekkeeseen saadaan vastaavaan tapaan. Esimerkiksi lausekkeeseen (6.1.69) tulee lisätermi $-Pu(x_P)$.

Vastaavat tulokset voidaan tietenkin synnyttää kaikkein helpoiten suoraan partikkelimekaniikassa esitettyjen tuttujen kaavojen avulla.

Huomautus 4. Tarkastellaan sauvan mahdollista kimmoista tuentaa. Otaksutaan, että sauvaan vaikuttaa sen akselin suuntainen, siirtymään u verrannollinen palautusvoima ku sauvan pituutta kohti. Suure k (tässä $[k] = Nm^{-2}$) on ns. alustakerroin; vrt. kohta 4.7.2. Tämä otetaan siis huomioon kirjoittamalla vain yleensä

$$q := q - ku \tag{6.1.74}$$

sekä potentiaalienergian lausekkeessa

$$-qu := -qu + \frac{1}{2}ku^2 . \tag{6.1.75}$$

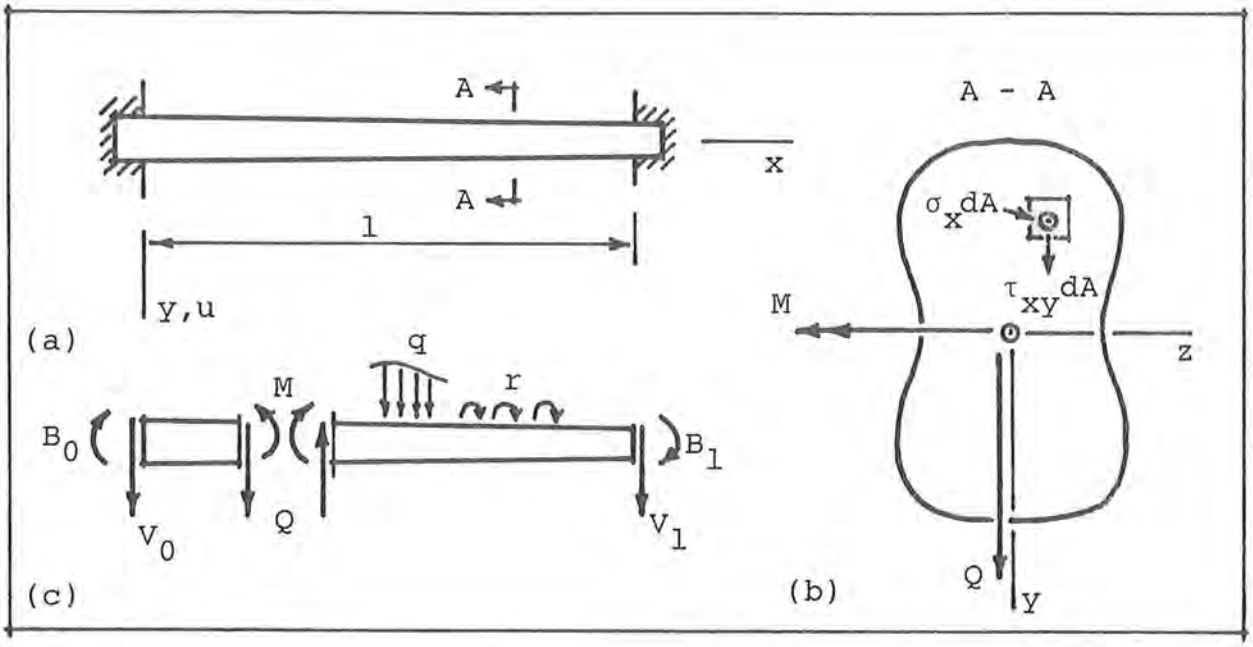
Termi $1/2 \cdot ku^2$ voidaan tulkita paitsi kuormituksen -ku potentiaalienergiatiheydeksi myös itse kimmoisen tukirakenteen muodonmuutosenergian tiheydeksi.

Nivelsauva on tietenkin pelkistetyn yksinkertainen rakenne-

tyyppi. Olemme käsitelleet sitä melko perusteellisesti eräänlaisena mallitapauksena. Jatkossa toimimme saman kaavan mukaan mutta tarvittaessa esitystä tiivistäen.

6.1.6 Palkki

Korkea palkki. Tarkastellaan kuvan 6.1.9 esittämää suoraa tasopalkkia. Viimeisellä termillä tarkoitetaan tässä, että xy-taso on



Kuva 6.1.9 (a) Palkki. (b) Palkin poikkileikkaus. (c) Palkin voimasuureita.

palkin symmetriataso ja että palkkia kuormitetaan siten, että symmetriatasoon liittyvä ainepinta säilyy tasona muodonmuutosten jälkeenkin. Oleelliset jännitysresultantit ovat tällöin leikkausvoima

$$Q \equiv Q_y = \int_A \tau_{xy} dA \tag{6.1.76}$$

ja taivutusmomentti

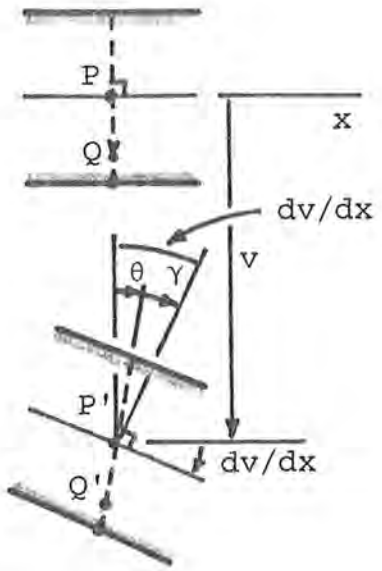
$$M \equiv -M_z = \int_A \sigma_x y dA \ . \tag{6.1.77}$$

Tässä on poikettu kuvan 6.1.1 esityksessä käytetyistä merkkisäännöistä. Tasopalkkien yhteydessä on nimittäin tavallista, että taivutusmomentti määritellään positiiviseksi, kun se aiheuttaa "vetoa" palkin alapintaan.

Käsitellään ensin ns. korkeaa palkkia; englanninkielinen vastaava nimitys on usein Timoshenko beam. Tällä tarkoitetaan tapausta, jossa leikkausjännityksistä τ_{xy} (tai leikkausvoimasta Q) syntyvät muodonmuutokset otetaan huomioon. Näiden muodonmuutosten merkitys kasvaa, kun palkin korkeuden suhde palkin pituuteen on suurehko, josta käytetty nimitys.

Kinemaattinen otaksuma: Ennen muodonmuutosta palkin poikkileikkaustasojen määrittämät ainepinnat ovat muodonmuutoksen jälkeenkin tasoja ja poikkileikkaus on omassa tasossaan muodoltaan muuttumaton. (Toisin sanoen poikkileikkaukset liikkuvat kuten jäykän kappaleen mallin mukaiset äärettömän ohuet tasolevyt.)

Lisäksi tässä otaksutaan, että x-akseli on ns. neutraaliakseli, jolla olleilla partikkeleilla akselin suuntainen siirtymä u häviää. Kuva 6.1.10 esittää näiden otaksumien perusteella syntyvää palkin poikkileikkauksen siirtymää suuresti liioiteltuna. Akselilla oleva partikkeli (piste P) siirtyy suoraan alaspäin ja poikkileikkaus saa lisäksi pienen rotaation θ (symmetriasyistä) z-akselin ympäri. Kuvaa tarkastelemalla saadaan approksimaatio (ks. piste Q)



Kuva 6.1.10 Palkin siirtymätila.

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= -y\theta(x) \ , \\ v(x,y,z) &= v(x,0,0) \equiv v(x) \ , \\ w &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \quad (6.1.78)$$

Täten korkean palkin teoriassa kaksi siirtymäsuuretta, taipuma v(x) ja kiertymä θ(x), määrittävät kaavojen (6.1.78) perusteella täysin palkin siirtymätilan. Ne ovat siis tässä esiintyvät, kohdan 6.1.5 huomautuksen 2 mukaiset yleistetyt siirtymät.

Kaavoja (3.3.36) soveltamalla ainoiksi nollasta eroaviksi venymäkomponenteiksi saadaan

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= -y\,\frac{d\theta}{dx} = y\kappa\ , \\ \gamma_{xy} &\equiv \gamma = \frac{dv}{dx} - \theta\ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.79)$$

On käytetty lyhennysmerkintää

$$\kappa = -\frac{d\theta}{dx}\ . \qquad (6.1.80)$$

Suureet $\kappa(x)$ ja $\gamma(x)$ ovat palkin ns. käyristymä (engl. change of curvature) ja liukuma. Ne ovat korkean palkin teorian mukaiset yleistetyt venymät. Kuvasta 6.1.10 näkyy liukuman γ geometrinen merkitys. Käyristymä κ kuvaa poikkileikkauksen kiertymän muutosvoimakkuutta koordinaatin x suhteen. Voidaan osoittaa, että $1/\kappa$ on sen suoran (merkillä varustettu) etäisyys z-akselista, jolla kahden lähekkäisen poikkileikkausainetason jatkeet leikkaavat toisensa deformoituneessa tilassa. Jos leikkaussuora on palkin yläpuolella, $1/\kappa$ ja κ ovat positiivisia ja kääntäen.

Dynaaminen otaksuma: Ainoat oleellisesti nollasta eroavat jännityskomponentit ovat σ_x ja τ_{xy} ja siis

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\ . \qquad (6.1.81)$$

Huomautus 1. Otaksumat (6.1.81) ovat itse asiassa tietyiltä osin ristiriidassa kinemaattisten otaksumien (6.1.78) kanssa. Jälkimmäistähän seurasi mm: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Jos kyseessä on esimerkiksi isotrooppista Hooken lakia noudattava materiaali, kaavat (4.2.14) antavat tulokset $\sigma_y = \lambda\varepsilon_x$, $\sigma_z = \lambda\varepsilon_x$. Koska yleensä $\varepsilon_x \neq 0$, siis myös $\sigma_y \neq 0$ ja $\sigma_z \neq 0$. Jotta saadaan realistinen likiteoria, kinemaattisia ja dynaamisia otaksumia täytyy käyttää hyväksi "oikeissa paikoissa". Äskeinen ristiriita poistuu, kun siirrytään hienostuneenpiin malleihin [4.4, s. 237]; emme kuitenkaan käsittele niitä tässä.

Saadaan ensinnäkin

$$\int_V \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV = \int_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}) dV$$

$$= \int_0^l \int_A \sigma_x y \delta\kappa dA dx + \int_0^l \int_A \tau_{xy} \delta\gamma dA dx$$

$$= \int_0^l (\int_A \sigma_x y dA) \delta\kappa dx + \int_0^l (\int_A \tau_{xy} dA) \delta\gamma dx$$

$$= \int_0^l (M\delta\kappa + Q\delta\gamma) dx \ . \qquad (6.1.82)$$

Emme käy tässä lävitse yksityiskohtaisesti palkkiin mahdollisesti vaikuttavien tilavuus- ja pintavoimien käsittelyä. Lopputuloksena on, että yleistettyjä siirtymiä $v(x)$ ja $\theta(x)$ vastaavat yleistetyt voimat tulevat olemaan $q(x)$ ja $r(x)$ (kuva 6.1.9 (c)). Suure q on palkin pystysuoran kuormituksen pituusintensiteetti ($[q] = Nm^{-1}$) ja r on jakautuneen momentin pituusintensiteetti ($[r] = Nmm^{-1} = N$). Tavallisimmin sovellutuksissa $r = 0$. Jos kuitenkin dynaamisissa tapauksissa otetaan huomioon poikkileikkausten rotaatioon liittyvät hitausvoimat, syntyy termi r^I. Tämän vuoksi kaavat kirjoitetaan jatkossa pitäen mukana myös osuutta r. Palkin päissä vaikuttavat yleistetyt voimat ovat pystysuora voima V ja momentti B (kuva 6.1.9 (c)). Saadaan

$$\int_V \{f\}^T \delta\{u\} dV + \int_S \{t\}^T \delta\{u\} dV = \int_0^l (q\delta v + r\delta\theta) dx +$$

$$+ V_0 \delta v(0) + B_0 \delta\theta(0) + V_l \delta v(l) + B_l \delta\theta(l) \ . \qquad (6.1.83)$$

Virtuaalinen työyhtälö (6.1.5) on muuntunut muotoon

$$\int_0^l (M\delta\kappa + Q\delta q) dx - \int_0^l (q\delta v + r\delta\theta) dx +$$

$$- V_0 \delta v(0) - B_0 \delta\theta(0) - V_l \delta v(l) - B_l \delta\theta(l) = 0 \ . \qquad (6.1.84)$$

Kinemaattisten ja dynaamisten reunaehtojen käsittely tapahtuu tuttuun tyyliin.

Hooken laista (4.2.15) saadaan kaavojen (6.1.81) perusteella ensin tulokset (vrt. huomautus 2)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x \ , \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.85)$$

Täten (ks. kaavat (6.1.76), (6.1.77) ja (6.1.79))

$$\left.\begin{aligned} Q &= \int_A G\gamma dA = (\int_A GdA)\gamma \ , \\ M &= \int_A Ey\kappa y dA = (\int_A Ey^2 dA)\kappa \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.86)$$

Nämä esitetään tavallisesti muodossa

$$\left.\begin{aligned} Q &= GA\gamma \ , \\ M &= EI\kappa \ , \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.87)$$

joissa suureet

$$\left.\begin{aligned} GA &\equiv \int_A GdA \ , \\ EI &\equiv \int_A Ey^2 dA \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.88)$$

ovat vastaavasti palkin ns. leikkausjäykkyys (engl. shearing stiffness) ja taivutusjäykkyys (engl. bending stiffness) ([GA] = N, [EI] = Nm^2). Merkinnät GA(x) ja EI(x) on jälleen käsitettävä yleisessä tapauksessa kahden kirjaimen muodostamiksi tunnuksiksi. Vain jos G ja E ovat vakioita poikkileikkauksen alueella, kyseessä ovat vastaavasti suureiden G ja A sekä E ja I tulot. Tällöin

$$I \equiv \int_A y^2 dA \qquad (6.1.89)$$

on poikkileikkauspinnan pintahitausmomentti (joskus sanotaan jäyhyysmomentti) z-akselin suhteen ([I] = m^4).

Kun siirtymät v ja θ ovat selvillä, myös venymät ε_x ja γ_{xy} tunnetaan ja jännitykset σ_x ja τ_{xy} voidaan laskea kimmoiselle aineelle kaavoista (6.1.85). Yhteyksiä (6.1.87) käyttäen saadaan vaihtoehtoiset esitykset

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= Ey\,\frac{M}{(EI)}\,, \\ \tau_{xy} &= G\,\frac{G}{(GA)}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.90)$$

Jos E ja G ovat vakioita poikkileikkauksen alueella, saadaan tavanomaiset kaavat

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= y\,\frac{M}{I}\,, \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{A}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.91)$$

Tällöin siis normaalijännitys muuttuu poikkileikkauksen alueella lineaarisesti y:n suhteen ja leikkaujännitys on vakio.

Huomautus 2. Jälkimmäisestä kaavasta (6.1.91) näkyy selvästi, että kyseessä on likiteoria. Palkin ylä ja alapintoihin ei vaikuta yleensä ulkoisia x-akselin suuntaisia traktiokomponentteja. Täten näissä kohdissa tulisi olla $\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$. Todellisuudessa palkin poikkileikkaukset eivät pysykään täysin tasoina vaan käyristyvät (engl. warping). Tämä seikka otetaan tavallisesti huomioon suorittamalla esimerkiksi ensimmäisessä kaavassa (6.1.87) sijoitus

$$GA := k(GA)\,, \qquad (6.1.92)$$

jossa k on ns. liukumakorjauskerroin (engl. shear correction factor) ([k] = -). Usein samalla termillä tarkoitetaan k:n käänteisarvoa. Lähteessä [4.6, s. 287] tätä suuretta $\xi = 1/k$ nimitetään poikkileikkauspinnan siirtymäkertoimeksi. Kirjallisuudessa on selostettu k:n arvon määrittämistapoja. Esimerkiksi suorakaidepoikkileikkaukselle saadaan homogeenisessa tapauksessa suuruusluokka-arvio k = 5/6. Liukuma γ — esimerkiksi kuvassa 6.1.10 — tulee käsittää eräänlaiseksi keskimääräiseksi arvoksi. Jälkimmäisiä kaavoja (6.1.90) ja (6.1.91) ei tulekaan soveltaa käytännössä. Leikkausjännitykselle saadaan realistisempi tulos otaksumalla σ_x:n lauseke oikeaksi ja operoimalla sitten kontinuumin tasapainoyhtälöiden avulla sopivasti [4.6, s. 205].

Tarkastellaan vielä dynaamista tapausta. Ajasta riippuvaa siirtymäkenttää (6.1.78) vastaa kiihtyvyyskenttä

$$a_x = -y\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,,\quad a_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,,\quad a_z = 0\,, \tag{6.1.93}$$

jossa nyt $v = v(x,t)$ ja $\theta = \theta(x,t)$. Saadaan

$$\int_V \{f^I\}\delta\{u\}dV = -\int_V \rho[-y\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v]dV$$

$$= -\int_0^1\int_A \rho y\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,y\delta\theta dAdx - \int_0^1\int_A \rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v dAdx$$

$$= -\int_0^1(\int_A \rho y^2 dA)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,\delta\theta dx - \int_0^1(\int_A \rho dA)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v dx$$

$$= -\int_0^1(\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v + J\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,\delta\theta)dx\,, \tag{6.1.94}$$

jossa

$$J \equiv \int_A \rho y^2 dA \tag{6.1.95}$$

on palkin poikkileikkauksen ns. <u>massahitausmomentti</u> z-akselin suhteen palkin pituutta kohti ($[J]$ = kgm) ja μ on määritelty jo kaavalla (6.1.64). Jos ρ on poikkileikkauksen alueella vakio, $J = \rho I$. Kaava (6.1.94) osoittaa, että yleistettyjä siirtymiä v ja θ vastaavat konjugaattiset hitausvoimat ovat $-\mu\partial^2 v/\partial t^2$ ja $-J\partial^2\theta/\partial t^2$.

Sopivat matriisimerkinnät tulevat olemaan

$$\left.\begin{array}{ll}
\underset{2\times1}{\{u\}} = \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix}\,, & \underset{2\times1}{\{\varepsilon\}} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix}\,, \\[2ex]
\underset{2\times1}{\{f\}} = \begin{Bmatrix} q \\ r \end{Bmatrix}\,, & \underset{2\times1}{\{\sigma\}} = \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix}\,, \\[2ex]
\underset{2\times1}{\{t\}} = \begin{Bmatrix} V \\ B \end{Bmatrix}\,, & \begin{array}{l} V \mathrel{\hat{=}} 0 < x < 1\,, \\ S \mathrel{\hat{=}} x = 0 \text{ ja } x = 1\,, \end{array}
\end{array}\right\} \tag{6.1.96}$$

$$\underset{2\times 2}{[{}_{\varepsilon}\partial_{u}]} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & -1 \\ 0 & -\partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad dV \mathrel{\hat{=}} dx \, .$$

Lisäksi

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{2\times 2}{[{}_{f}\partial_{\sigma}]} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 1 & -\partial/\partial x \end{bmatrix}, \\
&\underset{2\times 2}{[n]} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & -n_x \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (n_x = -1 \, , \text{ kun } x = 0) \\ (n_x = 1 \, , \text{ kun } x = l) \end{matrix} \\
&\underset{2\times 1}{\{f^I\}} = - \begin{Bmatrix} \mu\partial^2 v/\partial t^2 \\ J\partial^2\theta/\partial t^2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{6.1.97}$$

ja kimmoisella isotrooppisella aineella

$$\underset{2\times 2}{[D]} = \begin{bmatrix} kGA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} . \tag{6.1.98}$$

<u>Esimerkki 6.1.2</u> Korkea palkki. Kirjataan tasapainoyhtälön

$$\{f\} + [{}_{f}\partial_{\sigma}]\{\sigma\} = \{0\} \tag{a}$$

ja jännitys-traktioyhteyden

$$\{t\} = [n]\{\sigma\} \tag{b}$$

saamat yksityiskohtaiset muodot korkean palkin tapauksessa. Merkintöjen (6.1.96) ja (6.1.97) perusteella saadaan yhteydet

$$\begin{Bmatrix} q \\ r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d/dx & 0 \\ 1 & -d/dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

ja

$$\begin{Bmatrix} V \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & -n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix} \tag{d}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} &q + \frac{dQ}{dx} = 0 \ , \\ &r + Q - \frac{dM}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} &V_0 = -Q(0) \ , \quad B_0 = M(0) \ , \\ &V_1 = Q(1) \ , \quad B_1 = -M(1) \ . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f)}$$

Kimmoisen aineen tapauksessa yhtälöt (e) ja (f) saavat siirtymien avulla lausutut muodot

$$\left.\begin{aligned} &q + \frac{d}{dx}[kGA(\frac{dv}{dx} - \theta)]\Big|_{x=0} \ , \\ &r + kGA(\frac{dv}{dx} - \theta) + \frac{d}{dx}(EI\ \frac{d\theta}{dx}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(g)}$$

ja esimerkiksi

$$\left.\begin{aligned} &V_0 = -kGA(\frac{dv}{dx} - \theta)\Big|_{x=0} \ , \\ &B_0 = -EI\ \frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} \ . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(h)}$$

Palkin potentiaalienergian lauseke tulee olemaan

$$V(v,\theta) = \frac{1}{2}\int_0^1 [EI(\frac{d\theta}{dx})^2 + kGA(\frac{dv}{dx} - \theta)^2]dx - \int_0^1 (qv + r\theta)dx + rt \qquad \text{(i)}$$

Olemme pitäneet edellä suureita v ja θ korkean palkin yleistettyinä siirtyminä. Vaihtoehtoinen mahdollisuus on valita näiksi v ja γ, jolloin

$$\theta = \frac{dv}{dx} - \gamma \qquad \text{(j)}$$

ja

$$\kappa = -\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d\gamma}{dx} \ . \qquad \text{(k)}$$

Esimerkiksi potentiaalienergian lauseke tulee olemaan tällöin

$$V(v,\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 [EI(\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{d\gamma}{dx})^2 + kGA\gamma^2]dx +$$

$$- \int_0^1 [qv + r(\frac{dv}{dx} - \gamma)]dx + rt \ . \qquad \text{(l)}$$

Hoikka palkki. Kaikkein tavanomaisin palkkiteoria otaksuu, että leikkausmuodonmuutokset γ_{xy} häviävät. Toisin sanoen korkealle palkille esitetty kinemaattinen otaksuma muuttuu muotoon: Ennen muodonmuutosta palkin poikkileikkaustasojen määrittämät ainepinnat ovat muodonmuutoksen jälkeenkin tasoja, jotka ovat lisäksi kohtisuorassa palkin deformoitunutta akselia vastaan ja poikkileikkaus on omassa tasossaan muodoltaan muuttumaton.

Äskeiseen otaksumaan tukeutuvaa palkkiteoriaa nimitetään usein Bernoullin teoriaksi; puhutaan samoin ns. teknillisestä taivutusopista. Nimityksemme hoikka tai matala palkki viittaa tässä samaan asiaan. Englanninkielisiä termejä ovat mm. Bernoulli beam tai Bernoulli-Euler beam.

Jälkimmäisestä yhtälöstä (6.1.79) tulee nyt rajoitusyhtälö

$$\frac{dv}{dx} - \theta = 0 \tag{6.1.99}$$

eli

$$\theta = \frac{dv}{dx} . \tag{6.1.100}$$

Täten hoikan palkin tapauksessa kiertymä $\theta(x)$ ei ole enää riippumaton yleistetty siirtymä, vaan se on sidottu taipumaan kaavan (6.1.100) mukaisesti. Vastaavasti leikkausvoimasta Q tulee nyt rajoitevoima, eikä sille voida esittää ensimmäisen kaavan (6.1.87) tapaista konstitutiivista yhteyttä. Eräs tulkinta Bernoullin palkin syntymiselle on ajatella palkin materiaali anisotrooppiseksi ja antaa liukukertoimen G arvon kasvaa kaavassa (6.1.87) hyvin suureksi. Tässä ei puututa niihin rajoihin, joiden alaisina korkean tai hoikan palkin teoriaa on mielekästä käyttää. Jos kyseessä on epähomogeeninen rakenne, esimerkiksi ns. kerrospalkki (engl. sandwich beam), jossa palkin materiaali on pintakerroksia lukuunottamatta melko joustavaa, leikkausmuodonmuutosten osuus voi olla mitoiltaan hoikankin palkin tapauksessa huomattava.

Hoikalle palkille pätevät yhtälöt saadaan edellä korkealle palkille esitetyistä yhtälöistä ottamalla vain huomioon rajoite (6.1.100). Esimerkiksi kaavojen (6.1.78), (6.1.79) ja (6.1.80) vastineet ovat

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= -y\,\frac{dv(x)}{dx}\,, \\ v(x,y,z) &= v(x,0,0) \equiv v(x)\,, \\ w &= 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.101)$$

$$\varepsilon_x = -y\,\frac{d^2v}{dx^2} = y\kappa\,, \qquad (6.1.102)$$

ja

$$\kappa = -\,\frac{d^2v}{dx^2}\,. \qquad (6.1.103)$$

Nyt termi $1/\kappa$ on nimenomaan palkin deformoituneen akselin kaarevuussäde ja käyristymä siis sama kuin ko. käyrän kaarevuus. (Jos kyseessä on jo hieman alkukaarevuutta omaava palkki, κ tulee olemaan merkitykseltään yhtä kuin kaarevuuden muutos, joten termi käyristymä on sopivampi kuin termi kaarevuus.)

Viemättä kehittelyjen yksityiskohtia läpi annetaan suoraan tarvittvat matriisikaavat (esimerkissä 6.1.3 johdetaan eräitä tuloksia):

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1\times1}{\{u\}} = v\,, \quad \underset{1\times1}{\{\varepsilon\}} = \kappa\,, \\ &\underset{1\times1}{\{f\}} = q - \frac{\partial r}{\partial x}\,, \quad \underset{1\times1}{\{\sigma\}} = M\,, \\ &\underset{2\times1}{\{t\}} = \begin{Bmatrix} V+n_x r \\ B \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (n_x = -1\,,\ \text{kun } x = 0) \\ (n_x = 1\,,\ \text{kun } x = 1) \end{matrix} \\ &\underset{2\times1}{\{u_t\}} = \begin{Bmatrix} v \\ \partial v/\partial x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \partial/\partial x \end{Bmatrix}\{u\}\,, \\ &\underset{1\times1}{\{{}_\varepsilon\partial_u\}} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,, \quad \begin{matrix} V \mathrel{\hat{=}} 0 < x < 1\,, \\ S \mathrel{\hat{=}} x = 0 \ \text{ ja } \ x = 1\,, \end{matrix} \\ &dV \mathrel{\hat{=}} dx\,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.104)$$

Lisäksi

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{1\times 1}{[{}_f\partial_\sigma]} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,, \\
&\underset{2\times 1}{[n]} = \begin{Bmatrix} n_x\partial/\partial x \\ -n_x \end{Bmatrix}, \\
&\underset{1\times 1}{\{f^I\}} = -\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J\,\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1.105)$$

ja kimmoisella isotrooppisella aineella

$$\underset{1\times 1}{[D]} = EI\,. \qquad (6.1.106)$$

Edellä on määritelty erikseen siirtymä palkin alueella ja päissä merkinnöin $\{u\}$ ja $\{u_t\}$, jotta termi $\{t\}^T\delta\{u\} \to \{t\}^T\delta\{u_t\}$, ottaisi oikein huomioon palkin päissä vaikuttavien voimasuureiden tekemän virtuaalisen työn. Vaihtoehtoisesti siirtymä voitaisiin määritellä kaikkialla muodossa $\{u\} = [v,\ \partial v/\partial x]^T$, jolloin kuitenkin esitettyjä matriisimerkintöjä tulisi vastaavasti muuntaa. Todettakoon, että hitausvoimia käsiteltäessä jätetään osuus $J\partial^3 v/\partial x\partial t^2$ hoikilla palkeilla usein pienenä terminä pois.

Esimerkki 6.1.3 Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ. Tarkastellaan lausekkeen (6.1.83) saamaa muotoa hoikan palkin tapauksessa.

Saadaan

$$\int_0^l (q\delta v + r\delta\theta)dx + V_0\delta v(0) + B_0\delta\theta(0) + V_l\delta v(l) + B_l\delta\theta(l) = \qquad (a)$$

$$\int_0^l \left(q\delta v + r\,\frac{d\delta v}{dx}\right)dx + V_0\delta v(0) + B_0\left.\frac{d\delta w}{dx}\right|_{x=0} + V_l\delta v(l) + B_l\left.\frac{d\delta w}{dx}\right|_{x=l} = \qquad (b)$$

$$\int_0^l \left(q - \frac{dr}{dx}\right)\delta v dx + (V_0 - r_0)\delta v(0) + (V_l + r_l)\delta v(l) +$$

$$+ B_0\left.\frac{d\delta w}{dx}\right|_{x=0} + B_l\left.\frac{d\delta w}{dx}\right|_{x=l}\,. \qquad (c)$$

Esitys (b) on sinänsä oikein ja käytettävissä, mutta osittaisintegrointia soveltamalla (ks. kaava (L.2.11'')) synnytetty muoto (c) omaa tiettyä mielenkiintoa. Se osoittaa, että virtuaalisen työn periaatteen kannalta systeemi kokee poikittaisen kuormitusintensiteetin olevankin termin q sijasta muotoa q - dr/dx. Vastaavasti palkin päissä näyttää vaikuttavan pystyvoimat $V_0 - r_0$ ja $V_1 + r_1$. Normaalistihan termillä r ei ole paljon käytännön merkitystä, mutta käsittely palvelee lisäksi esimerkissä 6.1.5 myöhemmin tarkasteltavan laatan korvikeleikkausvoiman käsitteen ymmärtämistä.

Esimerkki 6.1.4 Hoikka palkki. Esitetään vastaavat yhteydet kuin esimerkissä 6.1.2.

Tasapainoyhtälön ja jännitys-traktioyhteyden vastineet ovat kaavojen (6.1.104) ja (6.1.105) perusteella

$$q - \frac{dr}{dx} + \frac{d^2M}{dx^2} = 0 \tag{a}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} V_0 - r_0 &= -\left.\frac{dM}{dx}\right|_{x=0}, \quad & B_0 &= M(0), \\ V_1 + r_1 &= \left.\frac{dM}{dx}\right|_{x=1}, \quad & B_1 &= -M(1). \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Formulaatiosta on siis eliminoitu rajoitevoima Q. Huomattakoon, että esimerkissä 6.1.2 esitetyt tasapainoyhtälöt

$$\left.\begin{aligned} q + \frac{dQ}{dx} &= 0, \\ r + Q - \frac{dM}{dx} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

ovat edelleen voimassa. Leikkausvoima saadaan siten tarvittaessa kaavasta

$$Q = \frac{dM}{dx} - r, \tag{d}$$

kun taivutusmomentti on selvillä. Huomataan lisäksi, että yhtälö (a) syntyy yhtälöistä (c) eliminoimalla Q.

Kimmoisen aineen tapauksessa yhtälöt (a) ja (b) saavat siirtymien avulla lausutut muodot

$$q - \frac{dr}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2v}{dx^2}\right) = 0 \tag{e}$$

ja esimerkiksi

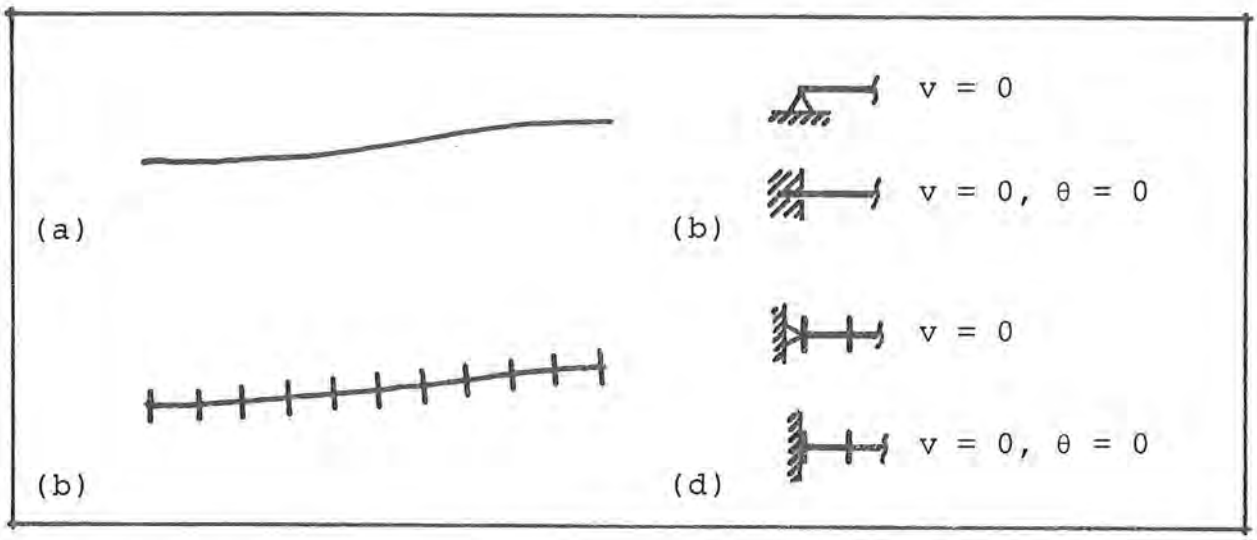
$$V_0 - r_0 = \left.\frac{d}{dx}\left(EI\,\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right|_{x=0} \tag{f}$$

$$B_0 = -EI \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=0} .$$

Palkin potentiaalienergia

$$V(v) = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l \left(q - \frac{dr}{dx}\right) v\,dx + rt . \qquad (g)$$

Huomautus 2. Teemme joitakin palkkimalliin ja reunaehtoihin liittyviä kommentteja. Koska palkki tai yleisemmin sauva voidaan ajatella matemaattisessa suhteessa tietyin ominaisuuksin varuste-



Kuva 6.1.11 Sauvan ja eräiden reunaehtojen symbolisia esityksiä.

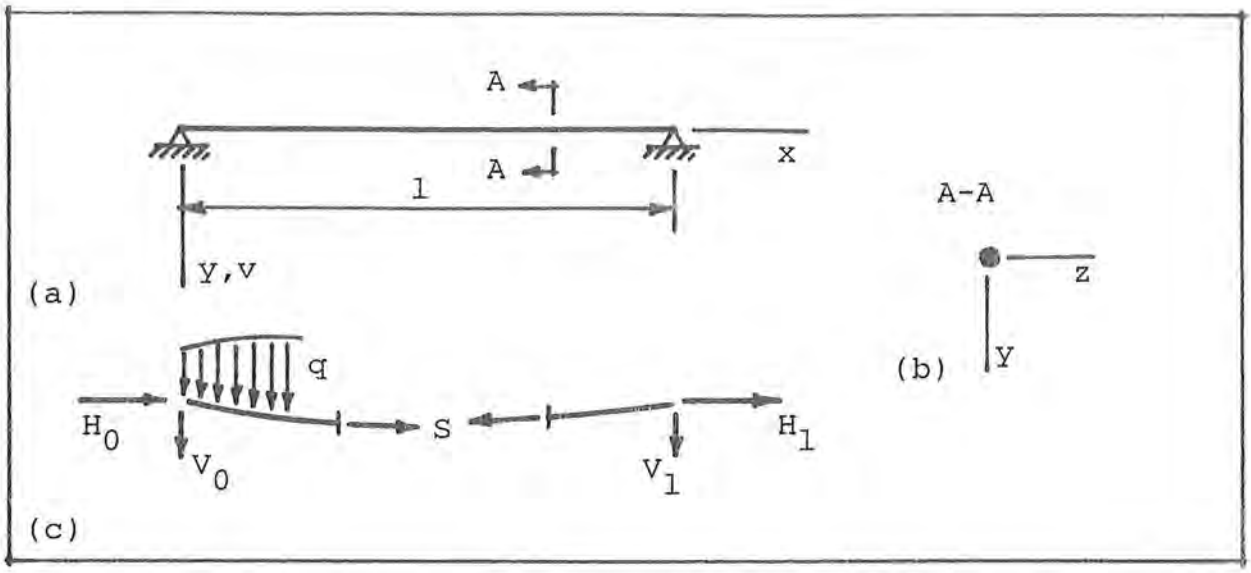
tuksi viivaksi, sauvan esittäminen piirroksissa pelkkänä akselina kuvan 6.1.11 (a) tapaan on usein luontevaa. Kuva (b) esittää vastaavasti symbolisesti kahta tavanomaista kinemaattista reunaehtoa: palkin ns. vapaasti tuettu pää (engl. freely supported end) ja jäykästi kiinnitetty pää (engl. fixed end). Edelliseen liittyy tavallisimmin traktioreunaehto B = 0. Vastaavina rajoitevoimina ovat edellisessä tapauksessa V ja jälkimmäisessä V ja B. Moninaisia muuntyyppisiä reunaehtoja voidaan esittää; ehtojen lukumäärän tulee vain olla palkkiteoriassa palkin kummassakin päässä kaksi.

Tietyissä tapauksissa kuvan (c) tapainen sauvan symbolinen esitys ("piikkimalli" tasotapauksessa) auttaisi kuitenkin äskeistä paremmin muistuttamaan, mistä sauvateoriassa on oikein kysymys: Sauva saa muodonmuutoksia nimenomaan poikkileikkaustensa välisten siirtymä- ja kiertymäerojen johdosta ja sauvan päissä vaikuttavat jännitysresultantit tekevät työtä juuri poikkileikkauspintoihin eivätkä akseliin. Tämän korostaminen on tärkeää etenkin Timoshenko-palkin yhteydessä. Vastaavasti voitaisiin esittää kuvan (b) symboliikan sijasta kuva (d). Siis jäykästi kiinnitetyssä tapauksessa palkin pään poikkileikkaus on "liimattu" kiinni ympäristöön.

Huomautus 3. Jos palkkiin vaikuttaa leikkausvoiman Q ja taivutusmomentin M lisäksi myös normaalivoima N tai S, vallitsevat yhtälöt saadaan tavallaan lineaarikombinaationa tämän kohdan (kohta 6.1.6) ja kohdan 6.1.5 esityksistä. Samoin yleistys tapauksiin, joissa palkin taivutusta tapahtuu sekä xy- että xz-tasoissa, ei ole periaatteessa vaikea. Huomautettakoon kuitenkin, että oleellisten vääntömomenttien M_t vaikuttaessa teoria mutkistuu, koska otaksuma tasoina pysyvistä poikkileikkauspinnoista ei ole tällöin yleensä riittävän hyvä. Akseliltaan kaarevien sauvojen käsittely ei poikkea myöskään ratkaisevasti otaksumiltaan edellä esitetyistä suuntaviivoista. Karkeimmillaan kaarevaa sauvaa voidaan kuvata tietyllä määrälllä suoria sauvaelementtejä.

6.1.7 Jännitetty lanka

Kuva 6.1.12 esittää esijännitysvoiman S^o alaista lankaa. Lanka otaksutaan täysin taipuisaksi; toisin sanoen langan ainoa oleellinen jännitysresultantti on siirtymistä



Kuva 6.1.12 (a) Jännitetty lanka. (b) Langan poikkileikkaus. (c) Langan voimasuureita.

riippumatta pelkästään lankavoima S. Lanka on ilman kuormitusta luonnollisesti täysin suorassa. Poikittaiskuormituksen q vaikuttaessa ei tasapaino ole selvästikään enää mahdollinen ilman langan taipumaa ja siitä seuraavaa lankavoiman S suunnan muuttumista paikan suhteen. Kyseessä on tarkasteluissamme ensimmäinen sovellutus, jossa tasapainoyhtälöt on muodostettava systeemin deformoitunut asema huomioon ottaen (geometrisesti epälineaarinen tapaus; ks. taulukko 4.1.1), jotta saavutettaisiin realistisia tuloksia.

Kinemaattinen otaksuma: Langan pieni siirtymä on pelkästään poikittainen eli langan akselilla

$$u = 0 \ , \quad v = v(x) \ , \quad w = 0 \ . \tag{6.1.107}$$

On siis lisäksi otaksuttu tasoliiketapaus. Langan akselin suuntainen venymä ε on ainoa oleellinen muodonmuutossuure. Geometrisesti lineaarisen teorian mukaiset kaavat antaisivat tuloksen

$\varepsilon = \partial u/\partial x = 0$. On sovellettava Green-Lagrangen äärellisten venymäkomponenttien lausekkeita (3.3.33). Saadaan

$$g_\varepsilon = g_{\varepsilon_x} = g_{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{2}(\frac{dv}{dx})^2 \tag{6.1.108}$$

ja siis

$$\delta g_\varepsilon = \frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx} . \tag{6.1.109}$$

Dynaaminen otaksuma: Lankavoiman S arvo ei muutu siirtymän v tapahtuessa eli

$$S = S^o . \tag{6.1.110}$$

Tämä otaksuma on mielekäs, jos esijännitysvoima S^o on "suuri" ja siirtymät ovat pieniä. Otaksumasta seuraa se erikoinen tilanne, että langan aineen konstitutiivisia ominaisuuksia ei tarvita lainkaan. Voidaan esimerkiksi ajatella, että käytetään esitystä (4.2.24) muodossa $\{^p\sigma\} = \{^p\sigma^o\}$.

Koska käsitellään kuitenkin pieniä siirtymiä, venymä (6.1.108) jää samoin pieneksi ja voidaan jättää viitteet g ja p pois. Saadaan kaavaa (6.1.49) hyväksikäyttäen

$$\int_V \{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}dV = \int_0^l S\delta\varepsilon dx = \int_0^l S\,\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\,dx . \tag{6.1.111}$$

Vastaavasti

$$\int_V \{f\}^T\delta\{u\}dV + \int_S \{t\}^T\delta\{u\}dS =$$

$$\int_0^l q\delta v dx + V_0\delta v(0) + V_l\delta v(l) . \tag{6.1.112}$$

Huomattakoon, että tehdyn kinemaattisen otaksuman perusteella vaakavoimat H_0 ja H_l eivät tee kinemaattisesti luvallisessa siirtymässä virtuaalista työtä, koska $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$. Tavanomaisimmat reunaehdot ovt tyyppiä $v(0) = \bar{v}_0$, $v(l) = \bar{v}_l$, jolloin siis kinemaattisesti luvallisessa virtuaalisessa siirtymässä

$\delta v(0) = \delta v(l) = 0$ ja lausekkeen (6.1.112) kaksi viimeistä termiä häviävät.

Emme pyri esittämään mitään matriisimerkintöjä, koska asetelma ei sovi aikaisemmin esitetyn lineaarisen teorian mukaisen standardimuodon sisälle.

Virtuaalisesta työyhtälöstä saadaan johdettua osittaisintegroimalla (vrt. esimerkki 6.1.1) helposti paikallinen tasapainoyhtälö

$$q + \frac{d}{dx}(S\,\frac{dv}{dx}) = 0 \ . \qquad (6.1.113)$$

Jos lankaan ei vaikuta vaakasuoraa kuormitusta (kuten on asianlaita kuvassa 6.1.12 (c)), S on vakio x:n suhteen (ks. huomautus) ja yhtälö (6.1.113) saa tavanomaisimman muotonsa

$$q + S\,\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \ . \qquad (6.1.114)$$

On mielenkiintoista todeta, että vaikka lauseke (6.1.108) on epälineaarinen, lopullinen vallitseva yhtälö tulee tehdyn dynaamisen otaksuman johdosta kuitenkin lineaariseksi.

Muodonmuutosenergian pituustiheydelle saadaan esimerkiksi kaavaa (4.10.1) analogisesti soveltamalla esitys $S\varepsilon = S\ 1/2\cdot(dv/dx)^2$. Saadaanhan nimittäin tulos $\partial(S\varepsilon)/\partial\varepsilon = S$, koska S on vakio. Potentiaalienergian lauseke tulee siis olemaan

$$V(v) = \frac{1}{2}\int_0^l S(\frac{dv}{dx})^2 dx - \int_0^l qv dx + rt \ . \qquad (6.1.115)$$

Mahdollinen dynaaminen tapaus hoidetaan sijoituksella

$$q := q - \mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \ , \qquad (6.1.116)$$

jossa μ on massan pituustiheys (6.1.64).

Huomautus 1. Jos välillä $0 < x < l$ ei vaikuta vaakasuoraa kuormitusta, on helppo todeta, että tarkasti ottaen vain lankavoiman

vaakakomponentti

$$S_H = S[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{-1/2} \tag{6.1.117}$$

on paikan suhteen vakio. Toisaalta kun $dv/dx << 1$, approksimaatio $S_H \approx S$ on hyvin tarkka. Lankavoiman pystykomponentille

$$S_V = S \frac{dv}{dx}[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{-1/2} \tag{6.1.118}$$

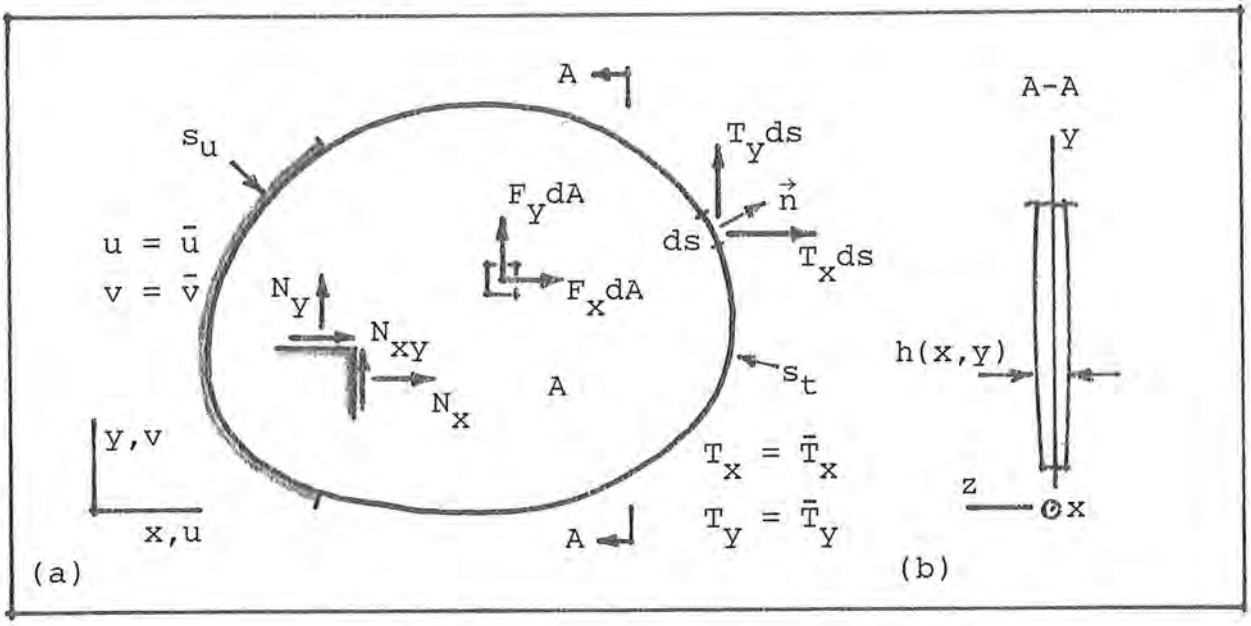
saadaan vastaavasti approksimaatio $S_V \approx Sdv/dx$. Täten esittämämme likiteorian puittissa saamme mm. kuvaan 6.1.12 (c) liittyvät tulokset

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= -S(0) , \quad V_0 = -S \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} , \\ H_1 &= S(1) , \quad V_1 = S \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=1} . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.119}$$

— — —

6.1.8 Levy

Kuva 6.1.13 esittää levyrakenteisiin liittyviä merkintöjä. Kysymyksessä on pitkälti kohdassa 6.1.2 käsitellyn tasojännitystapauksen toisinto. Aikaisempi tarkastelu rajoittui oikeastaan vain tutkimaan levyn tiettyä kerrosta; nyt siirrytään käsittelemään levyn paksuussuunnassa integroituja suureita. Oleelliset



Kuva 6.1.13 (a) Levy. (b) Levyn poikkileikkaus.

jännitysresultantit ovat jo kuvan 6.1.2 (c) kaavoissa esiintyvät suureet N_x, N_y ja N_{xy}.

Kinemaattinen otaksuma: Ennen muodonmuutosta levyn keskitasoa vastaan kohtisuorassa olleet ainesäikeet ovat muodonmuutoksen jälkeenkin suoria ja kohtisuorassa levyn tasona säilyvää keskitasoa vastaan. Tämä merkitsee, että kunkin ainesäikeen kaikilla partikkeleilla on samat keskitason suuntaiset siirtymäkomponentit eli

$$u = u(x,y) \ , \quad v = v(x,y) \ . \tag{6.1.120}$$

Keskitason "suuntaiset" venymäkomponentit

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.1.121}$$

eivät siis myöskään riipu z:sta.

Dynaaminen otaksuma: Kussakin levyn keskitason suuntaisessa kerroksessa vallitsee tasojännitystila eli

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \ . \tag{6.1.122}$$

Saadaan (A on levyn alue xy-tasossa)

$$\int_V \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV = \int_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy}) dV$$

$$= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy}) dz dA$$

$$= \int_A [(\int \sigma_x dz)\delta\varepsilon_x + (\int \sigma_y dz)\delta\varepsilon_y + (\int \tau_{xy} dz)\delta\gamma_{xy}] dA$$

$$= \int_A (N_x \delta\varepsilon_x + N_y \delta\varepsilon_y + N_{xy} \delta\gamma_{xy}) dA \ . \tag{6.1.123}$$

Edellä siis pelkkä merkintä $\int(\quad)dz$ viittaa määrättyyn integraaliin levyn paksuuden h ylitse.

Vastaavasti

$$\int_V \{f\}^T \delta\{u\} dV + \int_S \{t\}^T \delta\{u\} dS =$$

$$\int_A (F_x \delta u + F_y \delta v) dA + \int_S (T_x \delta u + T_y \delta v) ds \ . \tag{6.1.124}$$

Tässä F_x ja F_y ovat levyn kuormituskomponentit levyn pinta-alaa kohti ($[F] = Nm^{-2}$) ja T_x ja T_y taas levyn reunaan vaikuttavat kuormituskomponentit levyn reunan pituutta kohti ($[T] = Nm^{-1}$).

Isotrooppista Hooken lakia sovellettaessa käytetään tasojännitystilan kaavoja (6.1.16), jolloin

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \int \sigma_x dz = (\int \frac{E}{1-\nu^2} dz)\varepsilon_x + (\int \frac{E\nu}{1-\nu^2} dz)\varepsilon_y \ , \\ N_y &= \int \sigma_y dz = (\int \frac{E}{1-\nu^2} dz)\varepsilon_y + (\int \frac{E\nu}{1-\nu^2} dz)\varepsilon_x \ , \end{aligned}\right\} \tag{6.1.125}$$

$$N_{xy} = \int \tau_{xy} dz = (\int G dz)\gamma_{xy}$$

eli

$$\left.\begin{aligned} N_x &= d^p_{11}\varepsilon_x + d^p_{12}\varepsilon_y \,, \\ N_y &= d^p_{21}\varepsilon_x + d^p_{22}\varepsilon_y \,, \\ N_{xy} &= d^p_{33}\gamma_{xy} \,, \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.125')$$

jossa kertoimien d^p ($d^p_{12} = d^p_{21}$) merkitys selviää kaavoja (6.1.125) ja (6.1.125') vertaamalla. Suureita d^p voidaan nimittää vaikka <u>levyjäykkyyksiksi</u> ($[d] = Nm^{-1}$). <u>Kerroslevyillä</u> (engl. sandwich plate) eri materiaalikerrokset voivat olla konstruoidut voimakkaasti anisotrooppisiksi, jolloin tasojännitystilan merkintöjä (6.1.17) käytettäessä yhteyden $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ matriisi $[D]$ on lauseketta (6.1.19) mutkikkaampi. Tällöin vallitsee kaavojen (6.1.125) sijasta yleisempi yhteys

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{3\times 3}{[D^p]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} , \qquad (6.1.126)$$

jossa

$$[D^p] = \int [D] dz \,. \qquad (6.1.127)$$

Jos levyn ominaisuudet eivät muutu paksuussuunnassa ja jos kyseessä on lisäksi isotrooppinen homogeeninen materiaali, kaavojen (6.1.127) ja (6.1.125) nähdään antavan tulokset

$$[D^p] = h[D] = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} . \qquad (6.1.128)$$

Hitausvoimista kertyy levyn paksuuden yli integroituina termit

$$\left.\begin{aligned} F_x^I &\equiv -\int \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dz = -(\int \rho dz)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ F_y^I &\equiv -\int \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\, dz = -(\int \rho dz)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.129)$$

jossa siis

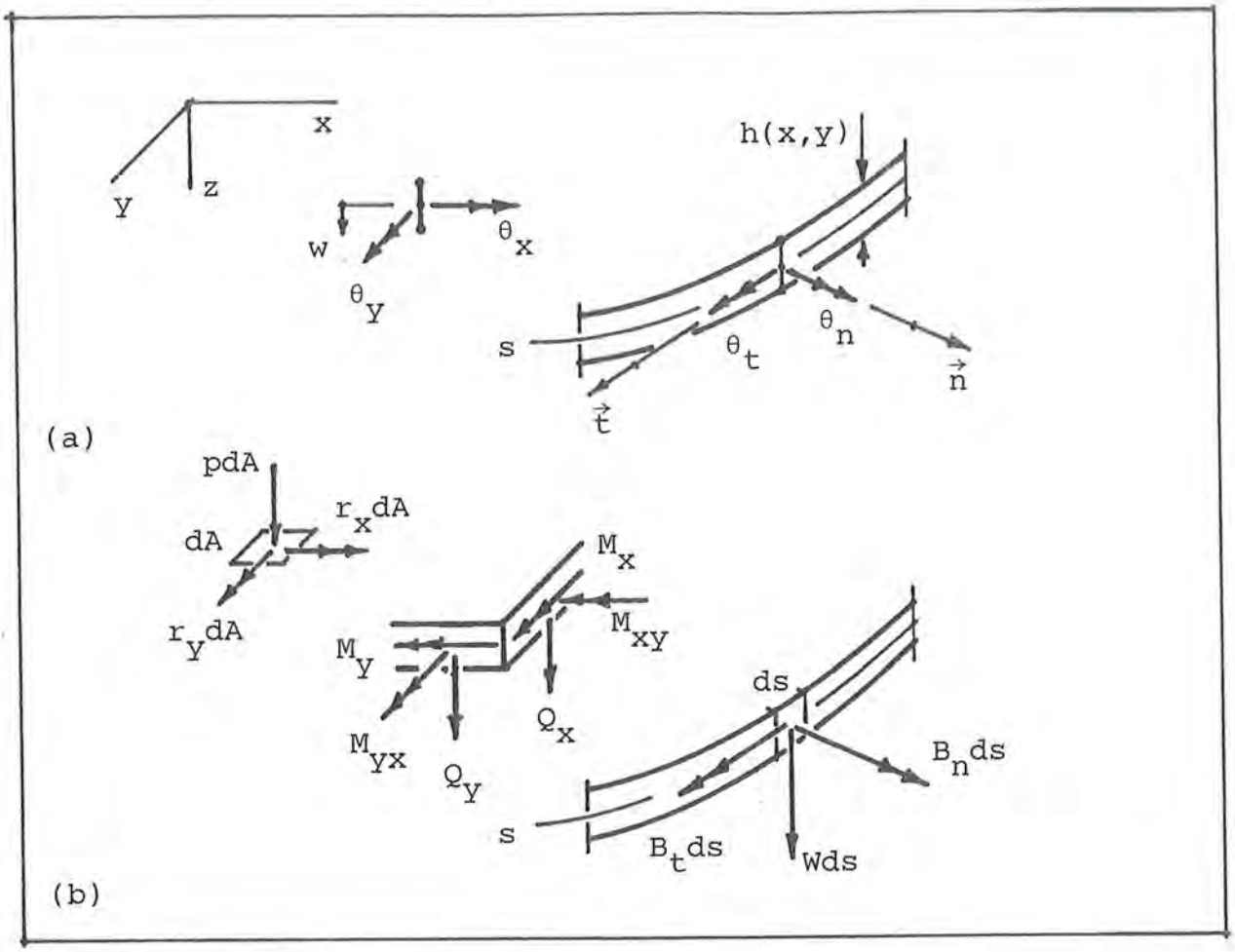
$$\mu \equiv \int \rho dz \qquad (6.1.130)$$

on nyt levyn massan pintatiheys ($[\mu] = \mathrm{kgm}^{-2}$); vrt. kaava (6.1.64). Jos tiheys on vakio z:n suhteen, $\mu = \rho h$.

Sopivat matriisimerkinnät ovat tasojännitystapauksen kaavojen (6.1.17) ja (6.1.18) perusteella niin ilmeiset, ettei niitä liene tarpeen kirjata.

6.1.9 Laatta

Paksu laatta. Tarkastellaan kuvan 6.1.14 esittämiä, laattaan liittyviä merkintöjä. Oleelliset voimasuureet näkyvät kuvassa (b).



Kuva 6.1.14 (a) Laatan kinemaattisia suureita. (b) Laatan voimasuureita.

Osa niiden lausekkeista on esitetty jo kuvassa 6.1.2 (c). Laatan yhteydessä sovelletut otaksumat ovat pitkälti analogisia palkille tehtyjen otaksumien kanssa. Palkin poikkileikkausten sijasta tarkastellaan nyt — kuten levyllä — laatan referenssitasoa (keskitasoa) vastaan alunperin kohtisuorassa olleita ainesäikeitä.

Käsitellään ensin ns. paksua laattaa (engl. thick plate); englanninkielisessä kirjallisuudessa käytetään usein myös termiä Mindlin plate. Se on Timoshenko-palkin laattavastine. Leik-

kausjännityksistä τ_{xz} ja τ_{yz} (tai leikkausvoimista Q_x ja Q_y) syntyvät muodonmuutokset otetaan huomioon. Jätämme seuraavassa laatan käsittelyn melko suppeaksi. Useimmat tulokset ovat tarvittaessa johdettavissa toistamalla vain kohdissa 6.1.5 ja 6.1.6 esitettyjä ajatuskulkuja.

Kinemaattinen otaksuma: Ennen muodonmuutosta laatan referenssitasoa vastaan kohtisuorassa olleet ainesäikeet ovat muodonmuutoksen jälkeenkin suoria ja pituudeltaan muuttumattomia. (Toisin sanoen nämä ainesäikeet liikkuvat kuten jäykän kappaleen mallin mukaiset äärettömän hoikat sauvat.) Lisäksi tässä otaksutaan, että referenssitaso = xy-taso on neutraalitaso, jolla olleilla partikkeleilla tason suuntaiset siirtymäkomponentit u ja v häviävät. Pienten kulmanmuutosten yhteydessä ainesäikeen rotaatio (ks. kohta 2.2.2) voidaan esittää vektorina (kuva (a))

$$\vec{\theta}(x,y) = \theta_x(x,y)\vec{i} + \theta_y(x,y)\vec{j} \ . \tag{6.1.131}$$

Huomattakoon, että tämä vektori on pakosti xy-tason suuntainen, koska äärettömän ohuen sauvan rotaatiota sauvan oman akselin ympäri ei voida määritellä. Ajatellaan nyt piirretyiksi kuvan 6.1.10 tapaiset esitykset laatan leikkauksissa y = vakio ja x = vakio. Pieni tarkastelu osoittaa silloin, että laatan siirtymien approksimaatio on muotoa

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= z\theta_y(x,y) \ , \\ v(x,y,z) &= -z\theta_x(x,y) \ , \\ w(x,y,z) &= w(x,y,0) \equiv w(x,y) \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.132}$$

Täten paksun laatan teorian mukaiset kolme yleistettyä siirtymää ovat taipuma w(x,y) ja kiertymäkomponentit $\theta_x(x,y)$ ja $\theta_y(x,y)$.

Kaavojen (3.3.36) perusteella nollasta eroaviksi venymäkomponenteiksi saadaan

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= z\,\frac{\partial\theta_y}{\partial x} = z\kappa_x \ , \\ \varepsilon_y &= -z\,\frac{\partial\theta_x}{\partial y} = z\kappa_y \ , \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xy} &= z\,\frac{\partial\theta_y}{\partial y} - z\,\frac{\partial\theta_x}{\partial x} = z\kappa_{xy}\,, \\ \gamma_{xz} &\equiv \gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y\,, \\ \gamma_{yz} &\equiv \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x\,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.133)$$

On käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\kappa_x = \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\,, \quad \kappa_y = -\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\,, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial\theta_y}{\partial y} - \frac{\partial\theta_x}{\partial x}\,. \qquad (6.1.134)$$

Suureita κ_x ja κ_y nimitetään vastaavasti kuin palkilla <u>käyristymiksi</u> ja $\kappa_{xy}/2$ on ns. <u>vääntymä</u> (engl. twist).

Dynaaminen otaksuma: Jännityskomponentti

$$\sigma_z = 0\,. \qquad (6.1.135)$$

Menettelemällä vastaavasti kuin kaavan (6.1.82) johdossa saadaan

$$\begin{aligned} \int_V \{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}dV &= \int_V (\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \\ &\qquad + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz})dV \\ &= \int [\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x z\delta\kappa_x+\sigma_y z\delta\kappa_y+\tau_{xy}z\delta\kappa_{xy}+ \\ &\qquad +\tau_{xz}\delta\gamma_x+\tau_{yz}\delta\gamma_y)dz]dA \\ &= \int_A (M_x\delta\kappa_x+M_y\delta\kappa_y+M_{xy}\delta\kappa_{xy}+Q_x\delta\gamma_x+Q_y\delta\gamma_y)dA\,. \end{aligned} \qquad (6.1.136)$$

Laatan reunalla on tapana toimia x- ja y-akselin suuntien sijasta paikallisen kierretyn nt-koordinaatiston suunnille referoitujen komponenttien avulla (kuva 6.1.14 (b)). Kysymyksessä on kuvan 4.7.4 esittämää asetelmaa muistuttava tapaus. Kierrettyä koordinaatistoa käytetään tavanomaisten reunaehtojen asettelun yksinkertaistamiseksi. Esimerkiksi ensimmäisten kaavojen

(4.7.5) vastineiksi saadaan

$$\left.\begin{aligned} \theta_n &= \vec{n}\cdot\vec{\theta} = n_x\theta_x + n_y\theta_y \,, \\ \theta_t &= \vec{t}\cdot\vec{\theta} = t_x\theta_x + t_y\theta_y = -n_y\theta_x + n_x\theta_y \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.137)$$

Emme esitä tässä traktiosuureiden W, B_n, B_t ja sisäisten jännityssuureiden Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy} välisiä yhteyksiä; ks. esimerkiksi [6.1]. Ne syntyvät periaatteessa kaavoja $\{t\} = [n]\{\sigma\}$ ja $\{t'\} = [L]^T\{t\}$ peräkkäin soveltamalla. Kierrettyjä paikallisia koordinaatteja voidaan käyttää tietenkin tarvittaessa vastaavasti myös esimerkiksi levyn yhteydessä.

Kuvassa 6.1.14 esitetyt, etenkin laatan reunaan liittyvät merkinnät eivät kaikki ole kovin tavanomaisia. Mm. seuraavia yhteyksiä voi esiintyä tässä käytettyjen ja kirjallisuudessa usein esiintyvien tunnusten välillä: $\theta_x \mathrel{\hat{=}} -\theta_y$, $\theta_y \mathrel{\hat{=}} \theta_x$, $\theta_n \mathrel{\hat{=}} -\theta_t$, $\theta_t \mathrel{\hat{=}} \theta_n$, $W \mathrel{\hat{=}} Q_n$, $B_n \mathrel{\hat{=}} -M_{ns}$, $B_t \mathrel{\hat{=}} M_n$. Lukuisia muitakin merkintätapoja näkyy ja täten on tarpeen olla tarkkana eri lähteitä seurattaessa.

Lausekkeen (6.1.83) vastineeksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_V \{f\}^T\delta\{u\}dV + \int_S \{t\}^T\delta\{u\}dS &= \\ &= \int_A (p\delta w + r_x\delta\theta_x + r_y\delta\theta_y)dA + \\ &\quad + \int_s (W\delta w + B_n\delta\theta_n + B_s\delta\theta_s)ds \,. \end{aligned} \qquad (6.1.138)$$

Poikittaisen kuormitusintensiteetin p ja jakautuneen momentin intensiteettien r_x ja r_y dimensiot ovat tässä: $[p] = Nm^{-2}$, $[r] = Nmm^{-2} = Nm^{-1}$. Tavallisimmin staattisissa sovellutuksissa $r_x = r_y = 0$.

Kimmoiselle materiaalille kirjoitetaan laatan yhteydessä tavallisesti yhteydet

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{3\times3}{[D]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{3\times3}{[D]}z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} , \tag{6.1.139}$$

ja

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \underset{2\times2}{[G]} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \underset{2\times2}{[G]} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} , \tag{6.1.140}$$

joissa erityisesti isotrooppisen Hooken lain tapauksessa

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} , \quad [G] = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{6.1.141}$$

Kaavan (6.1.139) käyttö merkitsee, että otaksumme laatan kunkin kerroksen z = vakio olevan oleellisesti tasojännitystilassa. (Isotrooppisen Hooken lain tapauksessa on riittänyt, että olemme ottaneet huomioon tiedon (6.1.135).)

Kertomalla yhtälö (6.1.139) puolittain koordinaatilla z ja suorittamalla integrointi laatan paksuuden yli saadaan kuvan 6.1.2 (c) kaavojen perusteella yhteydet

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{3\times3}{[D^b]} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} , \tag{6.1.142}$$

jossa

$$\underset{3\times3}{[D^b]} = \int \underset{3\times3}{[D]} z^2 dz \tag{6.1.143}$$

ja erityisesti isotrooppisessa homogeenisessa tapauksessa

$$[D^b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} . \tag{6.1.144}$$

Vastaavaan tapaan saadaan

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \underset{2\times 2}{[D^s]} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} , \tag{6.1.145}$$

jossa

$$\underset{2\times 2}{[D^s]} = k\int \underset{2\times 2}{[G]}dz \tag{6.1.146}$$

ja erityisesti isotrooppisessa homogeenisessa tapauksessa

$$[D^s] = kGh \ . \tag{6.1.147}$$

Korjauskerroin k on otettu mukaan vastaavista syistä, joita on selostettu kohdan 6.1.6 huomautuksessa 2. Täten samoin esimerkiksi kaavoja (6.1.140) ei tule käyttää suoraan leikkausjännitysten τ_{xz} ja τ_{yz} laskemiseen.

Dynaamisessa tapauksessa saadaan vastaavaan tapaan kuin kaavan (6.1.94) johdossa lopputulos

$$\int_V \{f^I\}^T \delta\{u\}dV =$$

$$-\int_A (\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + J \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta\theta_x + J \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta\theta_y)dA \ , \tag{6.1.148}$$

jossa μ on kaavan (6.1.130) mukainen laatan massan pintatiheys ($[\mu] = kgm^{-2}$) ja

$$J \equiv \int \rho z^2 dz \tag{6.1.149}$$

on esityksestä (6.1.95) poiketen nyt laatan materiaalisäikeen massahitausmomentti laatan pinta-alaa kohti ($[J] = kg$). Jos tiheys on vakio z:n suhteen, $J = \rho h^3/12$.

Matriisimerkinnät voidaan valita seuraavasti:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{3\times 1}{\{u\}} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}, \quad \underset{5\times 1}{\{\varepsilon\}} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \\
&\underset{3\times 1}{\{f\}} = \begin{Bmatrix} q \\ r_x \\ r_y \end{Bmatrix}, \quad \underset{5\times 1}{\{\sigma\}} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \\
&\underset{3\times 1}{\{t\}} = \begin{Bmatrix} W \\ B_n \\ B_s \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} V \mathrel{\hat{=}} A \ , & S \mathrel{\hat{=}} s \ , \\ dV \mathrel{\hat{=}} dA \ , & dS = ds \ , \end{matrix} \\
&\underset{3\times 1}{\{u_t\}} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_n \\ \theta_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y \\ 0 & -n_y & n_x \end{bmatrix} \{u\} \ , \\
&\underset{5\times 3}{[{}_{\varepsilon}\partial_u]} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 1 \\ \partial/\partial y & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & -\partial/\partial y & 0 \\ 0 & -\partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} .
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.1.150}
$$

Kimmoisella laatalla

$$
\underset{5\times 5}{[D]} = \begin{bmatrix} \underset{2\times 2}{[D^s]} & \underset{2\times 3}{[0]} \\ \underset{3\times 2}{[0]} & \underset{3\times 3}{[D^b]} \end{bmatrix} . \tag{6.1.151}
$$

Huomautus 1. Joskus voi olla edullista pitää paksun laatan yleistettyinä siirtyminä suureiden w, θ_x ja θ_y sijasta suureita w, γ_x ja γ_y (vrt. esimerkki 6.1.2).

Ohut laatta. Tämä on Bernoulli-palkin laattavastine. Kirjallisuudessa puhutaan tällöin tavallisesti Kirchhoff-laatasta. Liukumien γ_{xz} ja γ_{yz} otaksutaan häviävän. Saadaan siis rajoitusyhtälöt

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y = 0 \ , \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x = 0 \tag{6.1.152}$$

eli

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \ , \qquad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \ . \tag{6.1.153}$$

Vastaavat rajoitevoimat ovat Q_x ja Q_y. Täten ohuen laatan teoria perustuu kolmen siirtymäsuureen w, θ_x ja θ_y sijasta vain yhden suureen, laatan taipuman w(x,y) käsittelyyn. Esimerkiksi kaavat (6.1.134) muuntuvat siis muotoihin

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \ , \qquad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \ , \qquad \kappa_{xy} = -2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \ . \tag{6.1.154}$$

Sopivat matriisimerkinnät tulevat olemaan (ks. myös esimerkki 6.1.5)

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{1\times 1}{\{u\}} = w \ , \qquad \underset{3\times 1}{\{\varepsilon\}} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} , \\
&\underset{1\times 1}{\{f\}} = p + \frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y} \ , \qquad \underset{3\times 1}{\{\sigma\}} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} , \\
&\underset{2\times 1}{\{t\}} = \begin{Bmatrix} W - \partial B_n/\partial s - r_t \\ B_t \end{Bmatrix} ,
\end{aligned}\right\} \tag{6.1.155}$$

$$\left.\begin{aligned} &\underset{2\times 1}{\{u_t\}} = \begin{Bmatrix} w \\ -\partial w/\partial n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\partial/\partial n \end{Bmatrix}\{u\} \\ &[{}_{\varepsilon}\partial_u] = \begin{Bmatrix} -\partial^2/\partial x^2 \\ -\partial^2/\partial y^2 \\ -2\partial^2/\partial x\partial y \end{Bmatrix}, \qquad \begin{aligned} &V \mathrel{\hat{=}} A\ , \quad S \mathrel{\hat{=}} s\ , \\ &dV \mathrel{\hat{=}} dA\ , \quad dS \mathrel{\hat{=}} ds\ . \end{aligned} \end{aligned}\right|$$

Kimmoisella laatalla

$$[D] = \underset{3\times 3}{[D^b]}\ . \tag{6.1.156}$$

Huomautus 2. Sekä paksun että ohuen laatan teoriassa ovat voimassa siirtymään ja kiertymiin vastaavasti liittyvät tasapainoyhtälöt

$$\left.\begin{aligned} &p + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0\ , \\ &r_x + Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0\ , \\ &r_y - Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0\ . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.157}$$

Ohuen laatan tapauksessa rajoitevoimat Q_x ja Q_y voidaan siis tarvittaessa määrittää kaavoista

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + r_y\ , \\ Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - r_x\ , \end{aligned}\right\} \tag{6.1.158}$$

kun taivutus- ja vääntömomentit ovat selvillä. Sijoittamalla lausekkeet (6.1.158) ensimmäiseen tasapainoyhtälöön saadaan tulos

$$p + \frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0\ . \tag{6.1.159}$$

Jos tähän ajatellaan vielä sijoitetuiksi yhteydet (6.1.139) ja (6.1.154), havaitaan, että kimmoisen ohuen laatan taipuman differentiaaliyhtälö tulee olemaan (kuten vastaava hoikan palkin yhtälö; esimerkki 6.1.4, kaava (e)) neljättä kertalukua.

Huomautus 3. Siirryttäessä paksun laatan teoriasta ohuen laatan teoriaan tapahtuu ilmiö, jota ei esiinny vastaavana palkilla. Laatalla käytettävissä olevien reunaehtojen lukumäärä laskee nimittäin tällöin kolmesta kahteen, kun taas palkilla reunaehtojen lukumäärä säilyy palkin kummassakin päässä edelleen kahtena. Mindlin-laatalle voidaan esimerkiksi esittää kinemaattiset ehdot $w = \bar{w}$, $\theta_n = \bar{\theta}_n$ ja $\theta_t = \bar{\theta}_t$. Kirchhoff-laatalle riittävät vastaavasti ehdot $w = \bar{w}$, $\theta_t \equiv -\partial w/\partial n = \bar{\theta}_t$, koska kiertymä $\theta_n \equiv \partial w/\partial s$ määräytyy jo funktion $\bar{w}(s)$ perusteella. Traktioreunaehtojen suhteen reunaehtojen lukumäärän alentumista on vaikeampi heti ymmärtää. Esimerkissä 6.1.5 suoritettu tarkastelu valaisee hieman tätä seikkaa.

Esimerkki 6.1.5 Korvikeleikkausvoima. Tarkastellaan lausekkeen (6.1.138) muuntumista ohuen laatan teorian tapauksessa.

Saadaan (vrt. esimerkki 6.1.3)

$$\int_A (p\delta w + r_x \delta\theta_x + r_y \delta\theta_y)\,dA + \int_s (W\delta w + B_n \delta\theta_n + B_t \delta\theta_t)\,ds = \tag{a}$$

$$\int_A \left(p\delta w + r_x \frac{\partial \delta w}{\partial y} - r_y \frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) dA + \int_s \left(W\delta w + B_n \frac{\partial \delta w}{\partial s} - B_t \frac{\partial \delta w}{\partial n}\right) ds = \tag{b}$$

$$\int_A \left(p - \frac{\partial r_x}{\partial y} + \frac{\partial r_y}{\partial x}\right) \delta w\,dA + \int_s \left[\left(W - \frac{\partial B_n}{\partial s}\right)\delta w - B_t \frac{\partial \delta w}{\partial n}\right] ds +$$

$$\int_s (n_y r_x - n_x r_y)\,\delta w\,ds + \sum_{i=1}^{n} \Big|_{s_i}^{s_{i+1}} B_n \delta w = \tag{c}$$

$$\int_A \left(p + \frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y}\right) \delta w\,dA + \int_s \left[\left(W - \frac{\partial B_n}{\partial s} - r_t\right)\delta w - B_t \frac{\partial \delta w}{\partial n}\right] ds +$$

$$- \sum_{i=1}^{n} [\![B_n]\!]_i \, \delta w_i \, . \tag{d}$$

Ensin on otettu huomioon lausekkeet (6.1.153) sekä kuvasta 6.1.14 (a) päätettävissä olevat yhteydet $\theta_n = \partial w/\partial t = \partial w/\partial s$ ja $\theta_t = -\partial w/\partial n$. Tämän jälkeen termien $r_x \partial\delta w/\partial y$, $r_y \partial\delta w/\partial x$ ja $B_n \partial w/\partial s$ suhteen on sovellettu osittaisintegrointia. Pisteet $i = 1,2,\ldots,n$ viittaavat reunalla suureen B_n mahdollisiin epäjatkuvuuskohtiin. Näitä ovat tavallisimmin reunan kärkipisteet, jos reuna ei ole sileä. Reunaa pitkin tapahtuva osittaisintegrointi on täten suoritettava paloittain, joka seikka selittää kaavoissa esiintyvät summalausekkeet (huom. pisteet 1 ja n yhtyvät; reuna on tällöin kierretty ympäri.)

Saatu lauseke (d) osoittaa, että Kirchhoffin laatta — jossa $w(x,y)$ on ainoa yleistetty siirtymä — kokee laatan kuormituksen muodostuvan virtuaalisen työn periaatteen kannalta poikittaisesta kuormitusintensiteetistä

$$p + \frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y}, \tag{e}$$

reunalla vaikuttavasta poikittaisesta viivakuormituksesta

$$W - \frac{\partial B_n}{\partial s} - r_t \tag{f}$$

ja reunan kärjissä tai yleisemmin B_n:n epäjatkuvuuskohdissa i vaikuttavista poikittaisvoimista

$$-[\![B_n]\!]_i \,. \tag{g}$$

Lisäksi mukana on reunan suuntainen taivutusmomenttikuormitus B_t.

Lauseketta (f) nimitetään (tavallisesti $r_t = 0$) korvikeleikkausvoimaksi [4.4, s. 827]. Lausekkeen (d) muodosta voidaan päätellä, että Kirchhoff-laatan reunaehtoina saadaan antaa suureiden

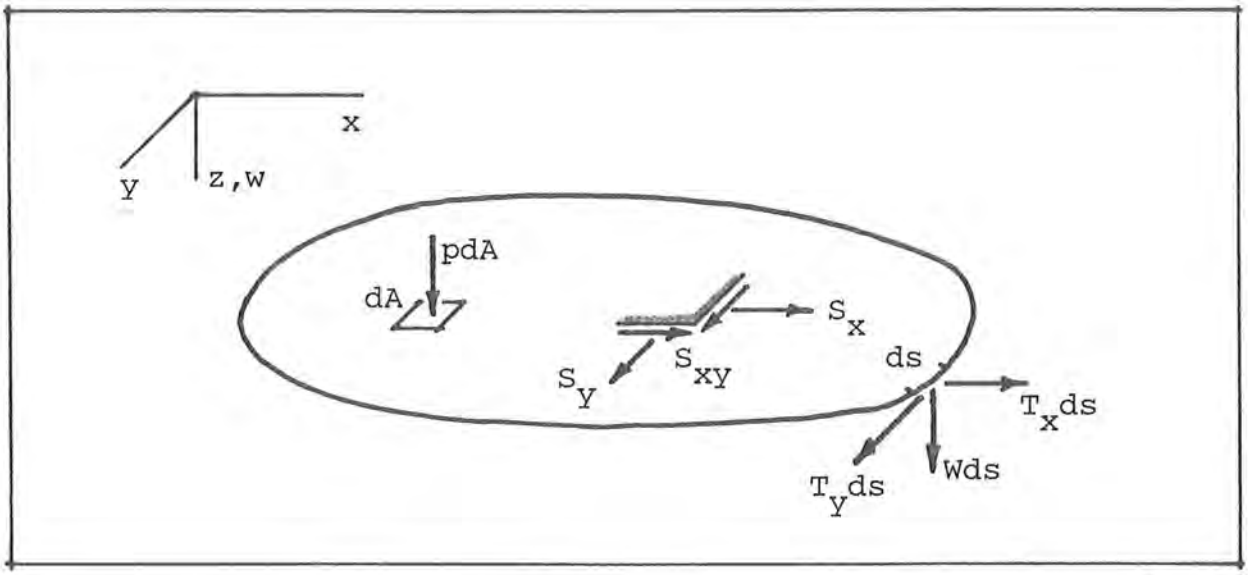
$$\left.\begin{array}{l} w \quad \text{tai} \quad W - \partial B_n/\partial s - r_t \,, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} \quad \text{tai} \quad B_t \end{array}\right\} \tag{h}$$

arvot; syntyy siis aina vain kaksi ehtoa (vrt. esitys (4.7.4)).

Huomautus 4. Kohdan 6.1.6 huomautus 3 pätee analogisesti tässäkin. Ohut levymäinen rakenne voi siis toimia samanaikaisesti sekä levynä että laattana. Samoin kuorta voidaan approksimoida karkeimmillaan esimerkiksi tietyllä määrällä kolmionmuotoisia tasoelementtejä.

6.1.10 Jännitetty kalvo

Kuva 6.1.15 esittää esijännitettyä, alunperin xy-tasossa sijaitsevaa kalvoa. Käsittely on läheisesti samanlainen kuin jännite-



Kuva 6.1.15 Jännitetty kalvo.

tyn langan tapauksessa. Oleelliset jännitysresultantit ovat N_x, N_y ja N_{xy}, joita tullaan merkitsemään tässä tunnuksilla S_x, S_y ja S_{xy}.

Kinemaattinen otaksuma: Kalvon pieni siirtymä on pelkästään poikittainen eli

$$u = 0 \ , \quad v = 0 \ , \quad w = w(x,y) \ . \tag{6.1.160}$$

Kalvon tasossa vallitsevat Green-Lagrangen äärelliset venymäkomponentit (3.3.33) saavat arvot

$$\left.\begin{aligned} {}^g\varepsilon_x &= {}^g\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \ , \\ {}^g\varepsilon_y &= {}^g\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \ , \\ {}^g\gamma_{xy} &= 2\,{}^g\varepsilon_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.161}$$

Vastaavat virtuaaliset venymät ovat

$$\left.\begin{aligned} \delta^g\varepsilon_x &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x} , \\ \delta^g\varepsilon_y &= \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y} , \\ \delta^g\gamma_{xy} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial x} . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.162)$$

Dynaaminen otaksuma: Jännitysresultanttien S_x, S_y ja S_{xy} arvot eivät muutu siirtymän w tapahtuessa eli

$$S_x = S_x^o , \quad S_y = S_x^o , \quad S_{xy} = S_{xy}^o . \qquad (6.1.163)$$

Saadaan kaavaa (6.1.123) hyväksikäyttäen (jätetään viitteet p ja g pois)

$$\int_V \{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}dV = \int_A (S_x\delta\varepsilon_x+S_y\delta\varepsilon_y+S_{xy}\delta\gamma_{xy})dA$$

$$= \int_A [S_x \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x} + S_y \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y} +$$

$$+ S_{xy}(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial x})]dA . \qquad (6.1.164)$$

Vastaavasti

$$\int_V \{f\}^T\delta\{u\}dV + \int_S \{t\}^T\delta\{u\}dS =$$

$$\int_A p\delta w dA + \int_s W\delta w ds . \qquad (6.1.165)$$

Tavallisin reunaehto on $w = \bar{w}$ koko reunalla, jolloin kinemaattisesti luvallisessa tapauksessa $\delta w = 0$ ja lausekkeen (6.1.165) jälkimmäinen termi häviää.

Virtuaalisen työyhtälön avulla paikalliseksi tasapainoyhtälöksi saadaan

$$p + \frac{\partial}{\partial x}(S_x \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_y \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x}(S_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(S_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}) = 0 \ . \qquad (6.1.166)$$

Jos jännitysresultantit ovat paikan suhteen vakioita, yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$p + S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.1.167)$$

ja jos kalvo on isotrooppisesti ja homogeenisesti esijännitetty eli jos $S_x = S_y \equiv S =$ vakio ja $S_{xy} = 0$, yhtälö on muotoa

$$p + S(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0 \ . \qquad (6.1.168)$$

Huomattakoon, että esijännitysresultantit eivät voi olla arvoiltaan täysin mielivaltaisia, vaan niiden on toteutettava kalvon tason suuntaiset "levytasapainoyhtälöt" (ks. kohdat 6.1.8 ja 6.1.2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} &= 0 \ , \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.169)$$

Ne on kirjoitettu tässä tapauksessa, jossa kalvoon ei vaikuta kalvon tason suuntaisia voimia.

Kalvon potentiaalienergian lauseke tulee olemaan

$$V(w) = \int_A [\frac{1}{2} S_x(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + \frac{1}{2} S_y(\frac{\partial w}{\partial y})^2 + S_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}] dA +$$

$$- \int_A pw dA + rt \ . \qquad (6.1.170)$$

Mahdollinen dynaaminen tapaus hoidetaan sijoituksella

$$p := p - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \qquad (6.1.171)$$

jossa μ ($[\mu] = kgm^{-2}$) on kalvon massan pintatiheys (6.1.130).

Huomautus 1. Esittämissämme jännitetyn kalvon kaavoissa jännitysresultantit S_x, S_y, S_{xy} ovat annettuja suureita ja siirtymä w on tuntematon. On mielenkiintoista todeta, että esimerkiksi tasapainoyhtälöt (6.1.166) ja (6.1.169) pätevät toisaalta mielivaltaiselle kalvotilassa (ks. kohta 6.1.1) olevalle kuorelle. Tällöin jännitysresultantit ovat tuntemattomia ja suure w täytyy tulkita annetuksi, kuoren muotoa kuvaavaksi paikalliseksi funktioksi eikä siirtymäksi. Tarkemmin sanoen valitaan kuoren kuhunkin pisteeseen kuvan 6.1.2 (b) tapaan paikallinen karteesinen koordinaatisto, jolloin kuoren muoto pisteen välittömässä ympäristössä on esitettävissä funktion $z = w(x,y)$ avulla. Itse asiassa termit $\partial^2 w/\partial x^2$ ja $\partial^2 w/\partial y^2$ kuvaavat tällöin kuoren kaarevuuksia. Näin tulkittuna yhtälö (6.1.168) antaa myös uudelleen pintajännityksen yhteydessä esitetyn tuloksen (5.2.44).

— — —

6.1.11 Yhdistetyt rakenteet

Käytännön rakenteita voidaan analysoida usein ajattelemalla ne koostuneiksi kohdissa 6.1.2...6.1.10 esitetyn kaltaisista rakenneosista. Laatta voi liittyä reunoiltaan palkkeihin. Palkin sisällä voi kulkea esijännityskaapeli, jota voidaan approksimoida kaarevana vetosauvana. Kevytrakenteet koostuvat tyypillisesti levyistä ja ohuista sauvoista jne.

Virtuaalisen työn periaate (ja sen erikoistapauksena potentiaalienergian stationaarisuuden periaate) sopii edelleen erinomaisesti tällaisten yhdistettyjen rakenteiden analysointiin. Muistetaan, että virtuaalinen työ on summeerautuva suure: työosuudet lasketaan siten yhteensä koko rakenteen avaruudesta varaamasta alueesta. Jos rakenteen eri osissa käytetään toisistaan poikkeavia sopivia siirtymien ja jännitysten approksimaatioita, tämä ei millään lailla estä edelleen soveltamasta virtuaalisen työn periaatetta. (Käytännössä ei ole nimittäin useinkaan mielekästä pyrkiä mallittamaan koko rakennetta puhtaana kolmidimensioisena kontinuumina ilman mitään yksinkertaistavia otaksumia.)

Analyysiin käytettyjen mallien valinta riippuu tietenkin kulloisestakin tarkoituksesta. Esimerkiksi tietyn laatan ja pilarin yhtymäkohdan välittömässä ympäristössä sekä tavanomainen laatta- että sauvateoria antavat aivan väärän tiedon jännityskentästä, jossa esiintyy voimakkaita keskittymiä. Kohtuullisella etäisyydellä yhtymäkohdasta jännitykset ovat tasaantuneet Saint-Venantin periaatteen hengen mukaisesti [4.4, s. 148] ja laatta- ja sauvateorian antamien tulosten voidaan jo otaksua olevan realistisia. Jos jännityskeskittymistä halutaan tarkempaa tietoa, tarkasteltava rajattu alue voidaan mallittaa erikseen kolmidimensioisena kontinuumina ottaen reunaehdot alkuperäisen karkean analyysin antaman ratkaisun perusteella.

6.1.12 Energiayhtälön erikoistapauksia

Yleistä. Kohdissa 6.1.1...6.1.11 esitetyt tarkastelut rajoittuivat puhtaasti mekaanisiin probleemeihin. On ilmeistä, että myös energiayhtälön ja sen heikon muodon yhteydessä voidaan tehdä vastaavantapaisia tilanteesta riippuvia yksinkertaistuksia. Asetelma ei ole kuitenkaan niin pitkälle standardisoitu terminologian yms. suhteen kuin rakenteiden mekaniikassa. Esimerkiksi levyn yhteydessä tullaan operoimaan suureilla $\int q_x dz$ ja $\int q_y dz$, jotka ovat jonkinlaisia levyn voimasuureiden N_x ja N_y vastineita. Edellisille ei ole kuitenkaan tiettävästi vakiintuneita nimityksiä lämmönsiirron teoriassa.

Palautetaan mieleen joitakin vallitsevia kaavoja suorittaen jälleen kuten kohdassa 6.1.1 merkinnälliset siirtymät $a \to x$, $dV^o \to dV$ jne. Tarkastelemme energiayhtälöä tässä kohdan 4.11.1 esityksen mukaan muodossa

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - Q = 0 \quad V\text{:ssä} , \tag{6.1.172}$$

jossa suureeseen Q kätketään tarvittaessa aina sopivasti tiettyjä termejä. Tavanomaisimmat reunaehdot ovat

$$T = \bar{T} \quad S_T\text{:llä} , \tag{6.1.173}$$

$$n_x q_x + n_y q_y + n_z q_z = \bar{q}_n \quad S_q\text{:lla} . \tag{6.1.174}$$

(Ks. myös kohdan 4.11 kaavoja (4.11.9), (4.11.10), (4.11.24).) Heikko muoto (4.11.6) on tässä

$$-\int_V (q_x \frac{\partial \delta T}{\partial x} + q_y \frac{\partial \delta T}{\partial y} + q_z \frac{\partial \delta T}{\partial z}) dV + \\ - \int_V Q \delta T dV + \int_S q_n \delta T dS = 0 , \tag{6.1.175}$$

jossa on käytetty vielä tulkintaa (4.11.11): $w = \delta T$.

Jos lämpövuovektorin otaksutaan syntyvän vain johtumisesta ja jos Fourierin lämmönjohtumislain otaksutaan olevan voimassa, pätee siis

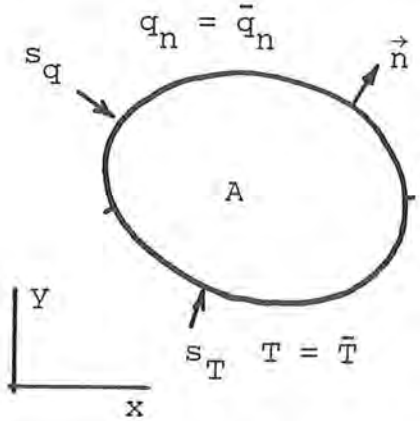
$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \\ \partial T/\partial z \end{Bmatrix} \tag{6.1.176}$$

eli $\{q\} = -[k]\{\nabla\}T$. Lisäksi variaatioperiaate $\delta\Pi = 0$ on käytettävissä, jossa funktionaali (4.11.23):

$$\Pi(T) = \frac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \\ \partial T/\partial z \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \\ \partial T/\partial z \end{Bmatrix} dV +$$

$$- \int_V QTdV + \int_{S_q} \bar{q}_n TdS \ . \tag{6.1.177}$$

<u>Tasotapaus</u>. Jos lämpötila ei riipu tietystä koordinaatista (esimerkiksi z-koordinaatista), saadaan kaksidimensioinen probleema, jossa on siis määritettävä funktio T(x,y). Tällainen lämpötilajakautuma syntyy z-akselin suuntaisessa sylinterin muotoisessa kappaleessa, jonka ominaisuudet ja reunaehdot eivät muutu z-akselin suunnassa. Analyysi voidaan suorittaa tarkastelemalla kappaleen mielivaltaista poikkileikkausta z = vakio (kuva 6.1.16). Tarvittavat kaavat ovat kolmidimensioisen tapauksen perusteella itsestään selvät; $q_z = 0$ ja suureiden riippuvuus z-koordinaatista häviää. Kirjataan kuitenkin jatkoa silmälläpitäen joitakin kaavoja näkyviin.



Kuva 6.1.16 Kappaleen poikkileikkaus.

Saadaan mm. yhtälöt

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - Q = 0 \qquad \text{A:ssa} \ , \tag{6.1.178}$$

$$T = \bar{T} \qquad s_T\text{:llä} \ , \tag{6.1.179}$$

$$n_x q_x + n_y q_y = \bar{q}_n \qquad s_q\text{:lla} \ . \tag{6.1.180}$$

Heikko muoto on

$$-\int_A (q_x \frac{\partial \delta T}{\partial x} + q_y \frac{\partial \delta T}{\partial y}) dA - \int_A Q \delta T dA + \int_s q_n ds = 0 \tag{6.1.181}$$

Fourierin laki on

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y}) \ , \\ q_y &= -(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y}) \end{aligned}\right\} \tag{6.1.182}$$

ja funktionaali (6.1.177) saa esitysmuodon

$$\Pi(T) = \frac{1}{2} \int_A [k_{xx}(\frac{\partial T}{\partial x})^2 + 2k_{xy} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yy}(\frac{\partial T}{\partial y})^2] dA +$$

$$- \int_A QTdA + \int_{s_q} \bar{q}_n T ds \ . \tag{6.1.183}$$

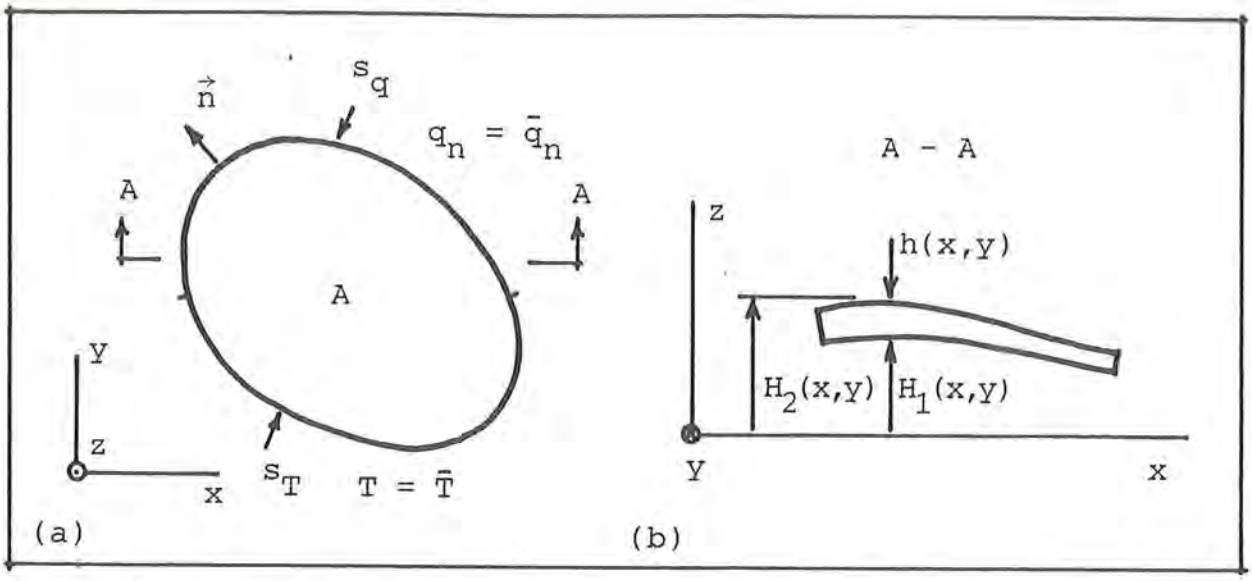
Esimerkiksi kenttäyhtälöstä tulee lausekkeet (6.1.182) huomioonottaen vielä

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial z}) + Q = 0 \ . \tag{6.1.184}$$

Isotrooppisessa ($k_{xx} = k_{yy} = k$, $k_{xy} = 0$) ja homogeenisessa tapauksessa (k ei riipu paikasta) yhtälö on yksinkertaisimmillaan:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{k} = 0 \ . \tag{6.1.185}$$

<u>Levy</u>. Tarkastellaan kuvan 6.1.17 esittämää levyä. Poiketen kohdan 6.1.8 esityksestä emme kuitenkaan tässä enää vaadi, että levyn pitäisi olla symmetrinen keskipintansa suhteen, jonka tuli siis vielä olla taso. Kuva 6.1.17 esittää siis täsmällisemmin



Kuva 6.1.17 (a) Levy. (b) Levyn poikkileikkaus.

sanottuna laakeaa, suunnilleen xy-tason suuntaista kuorta. (Kohdan 6.1.8 levyteorian otaksumat eivät olisi nyt sopivia, koska rakenne toimisi myös laattamaisesti.) Energiayhtälön kannalta pieni poikkeama tasosta ei osoittaudu tärkeäksi. Tulemme nimittämään levyn pintoja $z = H_1(x,y)$ ja $z = H_2(x,y)$ mukavuussyistä jatkossa vastaavasti levyn ala- ja yläpinnoiksi. Samoin lyhennysmerkintä $\int(\quad)dz$ tarkoittaa tässä seuraavaa:

$$\int(\quad)dz = \int_{H_1}^{H_2}(\quad)dz \ . \tag{6.1.186}$$

Jos olosuhteet levyn ala- ja yläpuolella ovat suunnilleen samanlaiset, on mielekästä tehdä seuraava otaksuma:

$$T = T(x,y) \ . \tag{6.1.187}$$

Toisin sanoen levyn lämpötilan otaksutaan olevan vakio z-akselin suunnassa. Jos levyn pinnat ovat täysin lämpöeristetyt — siis adiabaattiset reunat — päädytään tällöin edellä tasotapauksessa esitettyyn asetelmaan ja vastaaviin yhtälöihin. Usein pinnoilta tapahtuu kuitenkin konvektiivista lämmönsiirtymistä (esimerkiksi jäähdytysripa) ja vallitsevat yhtälöt täytyy johtaa erikseen. Käytetään tähän apuna energiayhtälön heikkoa muotoa.

Yhtälö (6.1.175) on kirjoitettavissa kuvan 6.1.17 geometrian huomioon ottaen muotoon (A on levyn keskipinnan projektio ja s pinnan reunan projektio xy-tasolle)

$$-\int_A\int \left(q_x \frac{\partial \delta T}{\partial x} + q_y \frac{\partial \delta T}{\partial y} + q_z \frac{\partial \delta T}{\partial z}\right) dz dA +$$

$$+ \int_A \left(q_n^{(1)} \delta T \frac{dS_2}{dA}\right) dA + \int_A \left(q_n^{(2)} \delta T \frac{dS_1}{dA}\right) dA +$$

$$+ \int_s\int q_n \delta T dz ds - \int_A\int Q \delta T dz dA = 0 \ . \qquad (6.1.188)$$

Tässä merkinnät

$$dS_i = \left[1 + \left(\frac{\partial H_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_i}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dA \ , \quad i = 1,2 \qquad (6.1.189)$$

viittaavat levyn ala- ja yläpinnan pinta-alkioiden lausekkeisiin. Yhtälön (6.1.188) muiden merkintöjen sisältö lienee ilmeinen.

Heikko muoto (6.1.188) on vielä miltei eksakti (levyn reunojen muodosta riippuen voi syntyä pieniä virheitä). Otaksumasta (6.1.187) seuraa, että myöskään virtuaalinen lämpötila ei riipu z-koordinaatista; ts.

$$\delta T = \delta T(x,y) \ . \qquad (6.1.190)$$

Yksinkertaistetaan käsittelyä lisäksi ottamalla huomioon, että rakenne on <u>laakea</u> (engl. shallow). Tämä tarkoittaa matemaattisesti, että

$$\left|\frac{\partial H_i}{\partial x}\right| << 1 \ , \quad \left|\frac{\partial H_i}{\partial y}\right| << 1 \ , \quad i = 1,2 \ . \qquad (6.1.191)$$

Kaavaa (6.1.189) tarkastelemalla ymmärretään, että approksimaatio

$$dS_i \approx dA \ , \quad i = 1,2 \qquad (6.1.192)$$

on tällöin hyvin perusteltu. Tämän approksimaation käyttö ei

ole tietenkään välttämätöntä, mutta lausekkeiden (6.1.189) soveltaminen otaksuman (6.1.187) yhteydessä olisi liioittelua. Yhtälö (6.1.188) saadaan siis muotoon

$$-\int_A [(\int q_x dz)\frac{\partial \delta T}{\partial x} + (\int q_y dz)\frac{\partial \delta T}{\partial y}]dA +$$

$$+ \int_A (q_n^{(1)}+q_n^{(2)})\delta T dA + \int_s (\int q_n dz)\delta T ds +$$

$$- \int_A (\int Q dz)\delta T dA = 0 \ . \qquad (6.1.193)$$

Käytetään lyhennysmerkintöjä

$$\hat{q}_x \equiv \int q_x dz \ , \quad \hat{q}_y \equiv \int q_y dz \ , \quad \hat{q}_n \equiv \int q_n dz \qquad (6.1.194)$$

ja

$$\hat{Q} \equiv \int Q dz \ . \qquad (6.1.195)$$

Suureet $\hat{q}(x,y)$, $\hat{q}(x,y)$ ja $\hat{q}_n(s)$ ovat lämpövirtoja levyn y-, x- tai s-suuntaisia pituuksia kohti ($[\hat{q}] = Wm^{-1}$). Suure $\hat{Q}$ on lämpölähteen antoisuus levyn xy-pinta-alaa kohti ($[\hat{Q}] = Wm^{-2}$). Lopullinen heikko muoto on täten

$$-\int_A [\hat{q}_x \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \hat{q}_y \frac{\partial \delta T}{\partial y} - (q_n^{(1)}+q_n^{(2)})\delta T]dA +$$

$$- \int_A \hat{Q}\delta T dA + \int_s \hat{q}_n \delta T ds = 0 \ . \qquad (6.1.196)$$

Rakenteiden mekaniikassa noudatettua terminologiaa mukaillen voisimme nyt nimittää termejä $\hat{q}_x$ ja $\hat{q}_y$ vaikka yleistetyiksi lämpövuokomponenteiksi.

Niin haluttaessa heikosta muodosta saadaan johdettua tuttuun tyyliin osittaisintegrointia soveltamalla kenttäyhtälö A:ssa

$$\frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} + q_n^{(1)} + q_n^{(2)} - \hat{Q} = 0 \qquad (6.1.197)$$

ja reunaehto osalla s_q

$$n_x \hat{q}_x + n_y \hat{q}_y = \bar{\hat{q}}_n \ . \qquad (6.1.198)$$

Kenttäyhtälö (6.1.197) eroaa siis tyypiltään tasotapauksen yhtälöstä (6.1.178) levyn ala- ja yläpintoihin yhteensä liittyvän lämpövirran tiheyden $q_n^{(1)} + q_n^{(2)}$ suhteen.

Huomautus 1. Yhtälö (6.1.197) voidaan johtaa vaihtoehtoisella tavalla integroimalla kolmidimensioinen yhtälö (6.1.172) ensin z:n suhteen levyn paksuuden yli ja soveltamalla sitten Leibnitzin sääntöä (L.2.13). Kohdassa 6.11 annetaan näyte tämäntapaisesta käsittelystä.

Koska tässä $\partial T/\partial z = 0$, Fourierin laki (6.1.176) johtaa tasotapaukseen liittyviin yhteyksiin (6.1.182). Niiden sijoitus kaavoihin (6.1.194) antaa (derivaatat $\partial T/\partial x$ ja $\partial T/\partial y$ eivät myöskään riipu koordinaatista z)

$$\left.\begin{aligned} \hat{q}_x &= -\hat{k}_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} - \hat{k}_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \ , \\ \hat{q}_y &= -\hat{k}_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} - \hat{k}_{xx} \frac{\partial T}{\partial y} \ , \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.199)$$

joissa

$$\left.\begin{aligned} &\hat{k}_{xx} \equiv \int k_{xx} dz \ , \quad \hat{k}_{yy} \equiv \int k_{yy} dz \ , \\ &\hat{k}_{xy} = \hat{k}_{yx} \equiv \int k_{xy} dz \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.200)$$

Käyttämällä merkillä ^ varustettuja levyn paksuuden yli integroimalla saatuja suureita olemme siis päätyneet miltei tasotapauksen lämmönjohtumisyhtälön kanssa identtisiin yhtälöihin.

Otaksutaan lämmönsiirron levyn pinnoilta tapahtuvan kaavan (4.7.18) mukaisesti konvektiivisesti:

$$q_n^{(i)} = \alpha(T-T_\infty) \ , \quad i = 1,2 \tag{6.1.201}$$

(Lämmönsiirtokerrointa h on merkitty tässä tunnuksella α, koska halutaan välttää mahdollinen sekaannus levyn paksuuden kanssa).

Kenttäyhtälö (6.1.197) on siis kaavoja (6.1.199) ja (6.1.201) käytettäessä seuraava:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\hat{k}_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{k}_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(\hat{k}_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{k}_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}) - 2\alpha(T-T_\infty) + \hat{Q} = 0 \ . \tag{6.1.202}$$

Ei ole vaikea osoittaa, että vastaava funktionaali on

$$\Pi(T) = \frac{1}{2}\int_A [\hat{k}_{xx}(\frac{\partial T}{\partial x})^2 + 2\hat{k}_{xy}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k}_{yy}(\frac{\partial T}{\partial y})^2]dA +$$

$$+ \int_A \alpha(t-T_\infty)^2 dA - \int_A \hat{Q}TdA + \int_{s_q} \bar{\hat{q}}_n Tds \ . \tag{6.1.203}$$

Usein reunalta s_q tapahtuva lämmönsiirto jätetään tässä yhteydessä pienenä terminä pois.

Huomautus 2. Mahdollinen lämpövirta levyjen pinnoilta ulos merkitsee tietenkin, että pintojen läheisyydessä levyn lämpötilan gradientilla tulee olla (ainakin isotrooppisessa tapauksessa) normaalin suuntainen nollasta eroava komponentti, jotta johtumista ulos voisi yleensä tapahtua. Täten otaksuma (6.1.187) ei siis ole täysin oikeellinen; se johtaa kuitenkin monessa suhteessa realistiseen likiteoriaan. Vastaavanlaatuisia ristiriitaisuuksia havaittiin edellä jo puhtaasti mekaanisten likiteorioiden yhteydessä.

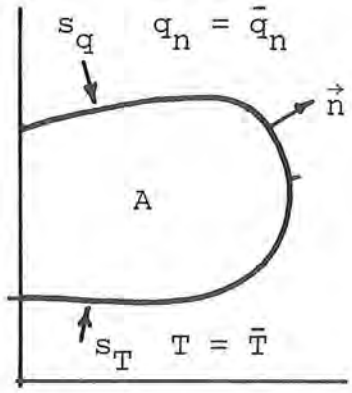
Otaksuma T on vakio levyn paksuuden suunnassa on analoginen siirtymiä koskevan otaksuman (6.1.120) kanssa, joka taas johti tietynlaisen mekaanisen levyteorian formulointiin. Tässä kohdin seuraava luonteva hienostettu otaksuma voisi olla muotoa

$$T = \frac{H_2 - z}{h} T_1(x,y) + \frac{z - H_1}{h} T_2(x,y) \ . \qquad (6.1.204)$$

Lämpötilakenttää approksimoidaan kahdella kahden muuttujan funktiolla T_1 ja T_2, jotka kuvaavat vastaavasti levyn ala- ja yläpinnan lämpötiloja. Lämpötilan otaksutaan siis jakautuvan lineaarisesti levyn paksuuden suunnassa. Kyseessä olisi analoginen tilanne mekaanisen yhdistetyn levy- ja laattateorian kanssa. Approksimaatio (6.1.204) voisi olla tarpeen tapauksissa, joissa levyn eri pintojen läheisyydessä vallitsisi oleellisesti erilaiset ympäristön lämpötila-arvot. Otaksumaan (6.1.204) liittyvät yhtälöt saataisiin jälleen lähtien liikkeelle heikosta muodosta (6.1.193).

Huomautus 3. Olemme käsitelleet levyä tähän asti otaksuen sen keskipinnan poikkeavan vain lievästi tasosta. Mutta levyn tietyn pisteen pienessä ympäristössä näin on aina asianlaita, kun vain valitaan referenssitaso yhtymään levyn keskipinnan tangenttitasoon ko. pisteessä. Tämä antaa mahdollisuuden analysoida mielivaltaisia kuorimaisia kappaleita. Funktionaalissa (6.1.203) asetetaan ensinnäkin vain $dA \to dS$, jossa S viittaa kuoren keskipintaan. Lisäksi x ja y on tulkittava kussakin kuoren pisteessä aina kahdeksi pinnan tangenttitasossa sijaitseviksi, toisiaan vastaan kohtisuorassa oleviksi suunniksi.

Pyörähdyssymmetrinen tapaus. Kuva 6.1.18 esittää kappaleen tyypillistä z-akselin kautta kulkevaa poikkileikkausta. Lämpötila ei riipu kulmasta θ, ja tehtäväksi jää siis funktion $T(r,z)$ tai $T(r,z,t)$ määrittäminen.



Kuva 6.1.18 Kappaleen poikkileikkaus.

Heikossa muodossa (6.1.175) esiintyvä termi

$$q_x \frac{\partial \delta T}{\partial x} + q_y \frac{\partial \delta T}{\partial y} + q_y \frac{\partial \delta T}{\partial y} = \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \delta T \qquad (6.1.205)$$

on koordinaatistosta riippumaton invariantti. Sylinterikoordinaatistossa

[3.2, s. 134]

$$\left.\begin{aligned} \vec{q} &= q_r\vec{e}_r + q_\theta\vec{e}_\theta + q_z\vec{e}_z \,, \\ \vec{\nabla}\delta T &= \frac{\partial\delta T}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\delta T}{\partial\theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial\delta T}{\partial z}\,\vec{e}_z \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.206)$$

ja siis

$$\vec{q}\cdot\vec{\nabla}\delta T = q_r\frac{\partial\delta T}{\partial r} + q_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\delta T}{\partial\theta} + q_z\frac{\partial\delta T}{\partial z} \,. \qquad (6.1.207)$$

Vielä erityisesti pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa

$$\vec{q}\cdot\vec{\nabla}\delta T = q_r\frac{\partial\delta T}{\partial r} + q_z\frac{\partial\delta T}{\partial z} \,. \qquad (6.1.208)$$

Heikko muoto on siis kaavojen (6.1.44) mukaista esitystä käyttäen

$$-\int_A (rq_r\frac{\partial\delta T}{\partial r} + rq_z\frac{\partial\delta T}{\partial z})dA +$$

$$-\int_A rQ\delta T dV + \int_S rq_n\delta T ds = 0 \,. \qquad (6.1.209)$$

Tästä voidaan osittaisintegroimalla päätellä, että vallitseva kenttäyhtälö A:ssa on

$$\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rq_z) - rQ = 0 \qquad (6.1.210)$$

ja reunaehto s_q:lla on

$$n_r(rq_r) + n_z(rq_z) = r\bar{q}_n \,. \qquad (6.1.211)$$

Nämä tulokset osoittavat tavallaan, että pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa "yleistetyt lämpövuokomponentit" ovat suureiden q_r ja q_z sijasta suureet rq_r ja rq_z.

Fourierin laissa (6.1.177) eli $\vec{q} = -\overleftrightarrow{k}\cdot\vec{\nabla}T$ koordinaatit x, y ja z viittaavat kolmeen mielivaltaiseen, toisiaan vastaan kohtisuoraan suuntaan. Sylinterikoordinaatistossa voidaan täten kirjoittaa

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\theta \\ q_z \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{rr} & k_{r\theta} & k_{rz} \\ k_{\theta r} & k_{\theta\theta} & k_{\theta z} \\ k_{zr} & k_{z\theta} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial T/\partial r \\ \frac{1}{r}\,\partial T/\partial\theta \\ \partial T/\partial z \end{Bmatrix} \tag{6.1.212}$$

ja erityisesti pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa

$$\left.\begin{aligned} rq_r &= -(rk_{rr}\frac{\partial T}{\partial r} + rk_{rz}\frac{\partial T}{\partial z}) \ , \\ rq_z &= -(rk_{zr}\frac{\partial T}{\partial r} + rk_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}) \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.1.213}$$

Kertominen r:llä on suoritettu, jotta saataisiin yhtälössä (6.1.210) esiintyvät suureet.

Vertailu tasotapauksen vastaavien kaavojen kanssa osoittaa, että kyseessä on täydellinen analogia: $x \mathrel{\hat{=}} r$, $y \mathrel{\hat{=}} z$, $q_x \mathrel{\hat{=}} rq_r$, $k_{xx} \mathrel{\hat{=}} rk_{rr}$, $Q = rQ$ jne. Täten variaatioperiaatteen funktionaali

$$\Pi(T) = \frac{1}{2}\int_A r[k_{rr}(\frac{\partial T}{\partial r})^2 + 2k_{rz}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z} + k_{zz}(\frac{\partial T}{\partial z})^2]dA +$$

$$- \int_A rQTdA + \int_{s_q} r\bar{q}_n Tds \ . \tag{6.1.214}$$

<u>Huomautus 4</u>. Jos alue A rajoittuu z-akseliin (kuten on laita kuvan 6.1.18 esittämässä tapauksessa), sillä on voimassa symmetriasyistä aina reunaehto $q_n = 0$; ks. kuitenkin lauseke (6.1.214).

6.1.88

6.2 Nestemekaniikan erikoistapauksia

6.2.1 Yleistä

Tämä kohta on periaatteessa kiinteän aineen mekaniikkaa koskevan kohdan 6.1.1 vastine. Virtausprobleemien ratkaisut poikkeavat kuitenkin tyypiltään usein oleellisesti kiinteän aineen mekaniikan tehtävien ratkaisuista. Kohdassa 6.8.1 käsitellään ns. yleistä konvektio-diffuusioyhtälöä. Epätäsmällistä terminologiaa käyttäen voinemme sanoa, että kiinteän aineen mekaniikan yhtälöt muistuttavat luonteeltaan yleensä puhdasta diffuusioyhtälöä ja taas nestemekaniikan yhtälöt ovat lähellä puhdasta konvektioyhtälöä. Puhdas diffuusio merkitsee mahdollisten epätasaisten jakautumien voimakasta tasoittumista paikan suhteen, kun etäännytään häiriökohdasta. Tästä esitettiin esimerkkinä kohdassa 6.1.11 laatan ja pilarin liittymäalueen tarkastelu. Hieman äskeistä muistuttava virtausmekaniikan asetelma voisi olla seuraava: Putkesta virtaa nestettä nesteen täyttämään säiliöön. Kun virtausnopeus putkessa on suurehko, vastaava nopeuskenttä säiliössä ei ole havaintojen mukaan lainkaan sileä, vaan pikemminkin kyseessä on putken suulta lähtevästä pitkälle ulottuvasta suihkusta. Toisin sanoen häiriö leviää konvektion johdosta kauas eikä Saint-Venantin periaatteen tapaista tasoittumista ilmene sanottavasti.

Nestemekaniikassa on tietenkin myös kehitetty eri tarkoituksiin soveltuvia yleisten yhtälöiden yksinkertaistettuja erikoismuotoja: Puhutaan putkivirtauksesta, avouomavirtauksesta, matalan veden virtauksesta, rajakerrosteoriasta jne. Rakenteiden mekaniikassa mutkikas geometria — esimerkiksi rivoilla vahvistettu kuori — voidaan analyysitarkoituksia varten ajatella usein jaetuksi yksinkertaisempiin osiin — sileä kuori ja erilliset sauvat — joille kullekin sovelletaan erikseen omaa teoriaansa. Nestemekaniikassa eri approksimaatioita omaavien geometriaosien vastaava suoraviivainen "liimaaminen" toisiinsa ei valitettavasti johda yleensä hyvään lopputulokseen, koska häiriöt eivät jää paikallisiksi. Tarve kohti täydellistä kolmidimensioista analyysiä kasvaa.

Seuraavassa esitetään joitakin nestemekaniikan yhtälöiden erikoistapauksia. Putkivirtaus ja avouomavirtaus käsitellään tavallisesti yksidimensioisina ja täten kyseessä ovat lähinnä sauvateorioiden nestemekaniikkavastineet. Paljon eroavaisuuksiakin on: Esimerkiksi referenssiviivan suuntaisen nopeuskomponentin jakauma putken tai uoman poikkileikkauksen alueella ei ole alkuunkaan lineaarinen; vrt. vastaava siirtymäkomponentti. Tarvittavat johdot vaatisivat melko pitkälliset kehittelyt. Jätämme siksi ko. nestemekaniikan erikoisalueen tässä pois. Todettakoon vielä, että elementtimenetelmä on parhaimmillaan useampidimensioisissa probleemeissa, joissa tarkasteltavan alueen reuna on muodoltaan monimutkainen. Yhdessä dimensiossahan reunat ovat hyvin yksinkertaiset: kaksi pistettä. Samoin edellä kohdassa 6.1 käsitellyt yksidimensioiset tapaukset on otettu mukaan lähinnä palvelemaan tiettyjä demonstraatiotarkoituksia; ks. esimerkiksi esimerkki 4.9.1.

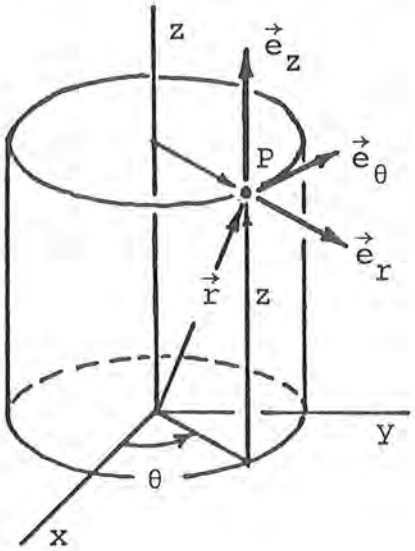
Käsittely tulee eroamaan kohdan 6.1 vastaavista tarkasteluista myös sikäli, että emme tule painottamaan heikkoja muotoja vaan lähinnä vallitsevia differentiaaliyhtälöitä. Välittömästi käsitellään vain tasovirtausta ja pyörähdyssymmetristä virtausta. Lisää esitarkastelua vaativat, sisällöltään periaatteessa tähän yhteyteen oikeastaan kuuluvat aiheet kuten rajakerrosteoria, voiteluprobleema ja matalan veden virtaus jätetään myöhempään vaiheeseen. Merkintöjä yksinkertaistetaan tarpeen vaatiessa — kun sekaannuksen vaaraa ei ole — seuraavasti: $v_x \to u$, $v_y \to v$, $v_z \to w$.

6.2.2 Tasovirtaus

Kiinteän aineen yhteydessä ns. tasotapaus voi tarkoittaa mekaanisessa mielessä joko tasojännitys- tai tasomuodonmuutostilaa. Nesteillä ei niiden luonteen vuoksi sen sijaan esiinny edellistä mahdollisuutta. Tasotapauksessa on siis kyse tasoliikkeestä ja tasomuodonmuutoksesta: Nesteen kaikki nopeusvektorit ovat tietyn tason suuntaisia ja yhtäsuuria tämän tason normaaleilla. Vallitsevien yhtälöiden muodot ovat itsestään selviä; kolmidimensioisista kaavoista häviävät vain riippuvuudet yhdestä, liiketasoa vastaan kohtisuorassa olevasta koordinaatista. Emme esitä näitä kaavoja vielä tässä, vaan lähempänä eräitä sovellutuskohteita; ks. esimerkiksi kohta 6.10.

6.2.3 Pyörähdyssymmetrinen virtaus

Sylinterikoordinaatisto. Sylinterikoordinaatistoa tarvitaan vastaavista syistä, jotka olivat esillä kohdassa 6.1.4. Käytetään lisäksi samoja tunnuksia (kuva 6.2.1), mutta nyt siis kyseessä on kuitenkin Eulerin esitystapa. Sen hengessä kantavektorit $\vec{e}_r$ ja $\vec{e}_\theta$ on liitettävä partikkelin hetkelliseen asemaan P. Täten ko. partikkelin liikkuessa kantavektorit eivät pysy yleensä vakioina.



Kuva 6.2.1 Sylinterikoordinaatisto.

Nopeuden esitys on

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z \ . \qquad (6.2.1)$$

Funktion $f = f(r,\theta,z,t)$ ainederivaatan $f^\bullet \equiv Df/Dt = \partial f/\partial t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}f$ esitysmuoto voidaan synnyttää etsimällä esimerkiksi lähteestä [3.2, s. 134] gradientin $\vec{\nabla}f$ lauseke

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \ , \qquad (6.2.2)$$

joten

$$f^\bullet \equiv \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial f}{\partial z} \ . \qquad (6.2.3)$$

Tämä kaava pätee myös vektorifunktiolle $\vec{f}$. Suoritetaan johto vielä malliksi vastaavasti kuin kaavojen (3.3.58)...(3.3.60) yhteydessä. Funktion $\vec{f}(r,\theta,z,t)$ muutos

$$d\vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\,dt \qquad (6.2.4)$$

riippumattomien muuttujien r, θ, z ja t muutosten dr, dθ, dz ja dt johdosta. Differentiaaligeometrinen tarkastelu osoittaa, että tietylle ainealkiolle

$$dr = v_r dt \ , \quad d\theta = v_\theta dt/r \ , \quad dz = v_z dt \ . \tag{6.2.5}$$

Täten päädytään tulokseen

$$f^{\bullet} \equiv \frac{D\vec{f}}{Dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + v_r \frac{\partial \vec{f}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} \ . \tag{6.2.6}$$

Suorittamalla tarvittavat derivoinnit lausekkeen $\vec{f} = f_r\vec{e}_r + f_\theta\vec{e}_\theta + f_z\vec{e}_z$ suhteen soveltaen tulon derivoimissääntöä ja ottaen huomioon, että $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta)$ ja $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$ päädytään lopulta tulokseen

$$\begin{aligned}\vec{f}^{\bullet} \equiv \frac{Df}{Dt} = &\left(\frac{\partial f_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{v_\theta}{r} f_\theta\right)\vec{e}_r + \\ &+ \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial f_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta}{r} f_r\right)\vec{e}_\theta + \\ &+ \left(\frac{\partial f_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\vec{e}_z \ .\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Tämän kaavan perusteella <u>kiihtyvyyden</u>

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z \tag{6.2.8}$$

komponenttien lausekkeet ovat

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \ , \\ a_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \ , \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.2.9}$$

Lähteen [3.2, s.134] mukaan vektorifunktion $\vec{f}$ roottori saa sylinterikoordinaatistossa muodon

$$\vec{\nabla}\times\vec{f} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial\theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rf_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z \ . \qquad (6.2.10)$$

Täten kulmanopeuden $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}/2$ komponentit ovat

$$\left.\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) , \\ \omega_\theta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) , \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right) . \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.11)$$

Deformaationopeuskomponenttien lausekkeet ovat (vrt. kaavat (6.1.33))

$$\left.\begin{aligned} d_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r} , & q_{\theta z} &= g_{z\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} , \\ d_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r} , & g_{zr} &= g_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} , \\ d_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} , & g_{r\theta} &= g_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} . \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.12)$$

Vektorifunktion $\vec{f}$ divergenssin lauseke on [3.2, s. 134]

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rf_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \ . \qquad (6.2.13)$$

Esimerkiksi jatkuvuusyhtälön muotojen (5.3.3) ja (5.3.7) vastineet ovat täten

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad (6.2.14)$$

ja

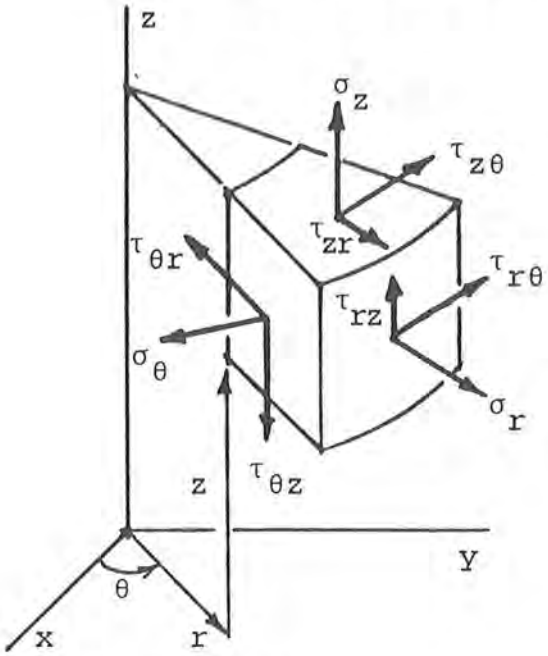
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \ . \qquad (6.2.15)$$

Viimeisen kaavan vasen puoli on dilataationopeus (vrt. kaava (5.3.8))

$$d_V \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = d_r + d_\theta + d_z = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (6.2.16)$$

kuten havaitaan suorittamalla kaavan (6.2.12) ensimmäiseen termiin liittyvä derivointi.

Voidaan osoittaa, että kaavan (3.4.17) määrittelemä paine p tietyssä pisteessä on invariantti suure siinä mielessä, että sen arvo ei muutu valittiinpa toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat kolme akselien x, y ja z suuntaa miten hyvänsä. Täten kuvan 6.2.2 jännityskomponenttien merkintöjä käyttäen voidaan tässä kirjoittaa paineen lauseke



Kuva 6.2.2 Jännityskomponentit.

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) \ . \qquad (6.2.17)$$

Kaavojen (3.4.16) ja (3.4.15) vastineet ovat

$$\sigma_r = -p + \sigma_r^* \ , \quad \sigma_\theta = -p + \sigma_\theta^* \ , \quad \sigma_z = -p + \sigma_z^* \qquad (6.2.18)$$

ja

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} \ , \quad \tau_{zr} = \tau_{rz} \ , \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} \ . \qquad (6.2.19)$$

Stokesin kitkalaki (5.2.23) saa muodon

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^* &= 2\mu d_r + \lambda^*(d_r+d_\theta+d_z) \ , & \tau_{\theta z} &= \mu g_{\theta z} \ , \\ \sigma_\theta^* &= 2\mu d_\theta + \lambda^*(d_r+d_\theta+d_z) \ , & \tau_{zr} &= \mu g_{zr} \ , \\ \sigma_z^* &= 2\mu d_z + \lambda^*(d_r+d_\theta+d_z) \ , & \tau_{r\theta} &= \mu g_{r\theta} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.20)$$

Cauchyn liikeyhtälöiden (5.4.10) komponenttimuodot ovat

$$\left.\begin{aligned}
&\rho b_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\theta^*}{r} = \rho a_r \,, \\
&\rho b_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + 2\,\frac{\tau_{r\theta}}{r} = \rho a_\theta \,, \\
&\rho b_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho a_z \,.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2.21)$$

Kiihtyvyyskomponenttien lausekkeet saadaan kaavoista (6.2.9).

Traktio-jännitysyhteyden (5.4.26) komponenttimuodot ovat

$$\left.\begin{aligned}
t_r &= -n_r p + n_r \sigma_r^* + n_\theta \tau_{\theta r} + n_z \tau_{zr} \,, \\
t_\theta &= -n_\theta p + n_r \tau_{r\theta} + n_\theta \sigma_\theta^* + n_z \tau_{z\theta} \,, \\
t_z &= -n_z p + n_r \tau_{rz} + n_\theta \tau_{\theta z} + n_z \sigma_z^* \,.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2.22)$$

Energiayhtälön (5.2.26) termi

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \qquad (6.2.23)$$

ja termi

$$\overleftrightarrow{\sigma} : \overleftrightarrow{d} = -p d_V + \sigma_r^* d_r + \sigma_\theta^* d_\theta + \sigma_z^* d_z + \\ + \tau_{\theta z} g_{\theta z} + \tau_{zr} g_{zr} + \tau_{r\theta} g_{r\theta} \,. \qquad (6.2.24)$$

Fourierin isotrooppinen lämmönjohtumislaki (5.2.40) saa komponenttimuodon

$$q_r^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial r} \,, \quad q_\theta^c = -k\,\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \,, \quad q_z^c = -k\,\frac{\partial T}{\partial z} \,. \qquad (6.2.25)$$

Lämpövirran tiheys - lämpövuoyhteys (5.6.40) on

$$q_n = n_r q_r + n_\theta q_\theta + n_z q_z \,. \qquad (6.2.26)$$

Pyörähdyssymmetria. Pyörähdyssymmetriseen tapaukseen liittyvät yhtälöt saadaan helposti sylinterikoordinaatistossa esitetyistä kaavoista asettamalla $v_\theta \equiv 0$, $q_\theta \equiv 0$ ja ottamalla huomioon, että suureiden riippuvuus koordinaatista θ häviää. Esitetään tärkeimpiä kaavoja.

Nopeusvektori on muotoa

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_z\vec{e}_z \tag{6.2.27}$$

ja kiihtyvyyskomponentit ovat

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\,, \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.2.28}$$

Kulmanopeuden ainoa nollasta eroava komponentti on

$$\omega_\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\,. \tag{6.2.29}$$

Nollasta eroavien deformaationopeuskomponenttien lausekkeet ovat

$$d_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}\,,\quad d_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}\,,\quad d_\theta = \frac{v_r}{r}\,,\quad g_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \tag{6.2.30}$$

ja dilataationopeus

$$d_V = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,. \tag{6.2.31}$$

Jatkuvuusyhtälöt (6.2.14) ja (6.2.15) ovat vastaavasti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \tag{6.2.32}$$

ja

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,. \tag{6.2.33}$$

Jännityskomponentit $\tau_{\theta z}$ ja $\tau_{r\theta}$ häviävät ja Cauchyn liikeyhtälöt ovat

$$\left.\begin{aligned} \rho b_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\theta^*}{r} &= \rho a_r \ , \\ \rho b_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho a_z \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.34)$$

Kun r on suuri, yhtälöiden nähdään lähestyvän muodoltaan tasovirtauksen vastaavia yhtälöitä. Traktio-jännitysyhteydet ovat

$$\left.\begin{aligned} t_r &= -n_r p + n_r \sigma_r^* + n_z \tau_{zr} \ , \\ t_z &= -n_z p + n_r \tau_{rz} + n_z \sigma_z^* \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.35)$$

Energiayhtälön termi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{\partial q_z}{\partial z} \qquad (6.2.36)$$

ja termi

$$\overleftrightarrow{\sigma} : \overleftrightarrow{d} = -p d_V + \sigma_r^* d_r + \sigma_z^* d_z + \sigma_\theta^* d_\theta + \tau_{rz} q_{rz} \ . \qquad (6.2.37)$$

6.3 Nopeuspotentiaali ja virtafunktio

Pyörteetön kokoonpuristumaton virtaus. Kohdassa 3.3.3 virtauksen todettiin olevan pyörteetöntä, mikäli kulmanopeusvektori häviää eli mikäli ns. pyörteettömyysehto

$$\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{0} \tag{6.3.1}$$

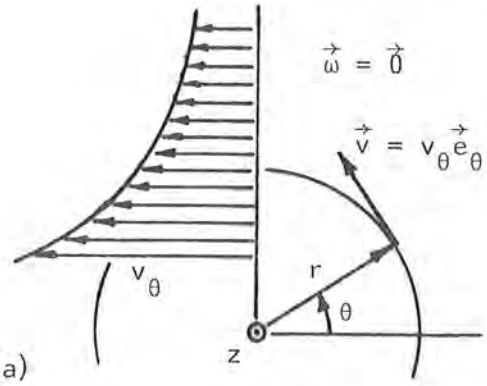
eli ehdot (ks. kaavat (3.3.76'))

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \,, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \tag{6.3.1'}$$

ovat voimassa. Jos näin ei ole, virtauksen sanotaan vastaavasti olevan pyörteellistä (engl. rotational). Kitkallinen virtaus on yleensä pyörteellistä. Sen sijaan kitkattomaksi otaksuttu virtaus voidaan usein käsitellä kohdassa 6.5 esitetyistä syistä pyörteettömänä.

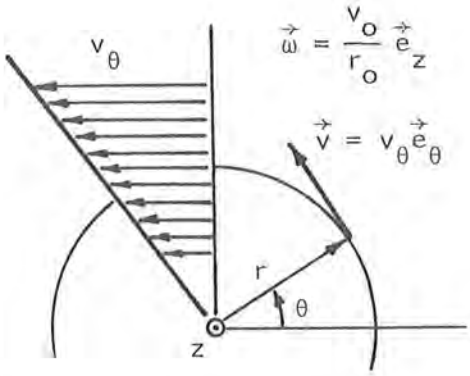
Esimerkki 6.3.1 Pyörteetön ja pyörteellinen virtaus. Termiä pyörteetön ei tule ottaa kovin kuvaannollisesti. Tarkastellaan tähän liittyen kuvissa (a) ja (b) sekä vastaavissa kaavoissa (a) ja (b) esitettyjä nopeusjakautumia. Suureet r_o ja v_o ovat mielivaltaisia pituuden ja nopeuden referenssiarvoja.

Kummassakin tapauksessa on kyse tasovirtauksesta, jossa partikkelit ovat tasaisessa ympyräliikkeessä z-akselin ympäri. Ainoa nollasta eroava sylinterikoordinaatiston nopeuskomponentti v_θ riippuu vain muuttujasta r: $v_\theta = v_\theta(r)$. Kaavojen (6.2.11) perusteella ainoa mahdollisesti nollasta



(a)

$$\left.\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= \frac{r_o}{r} v_o \\ v_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$



(b)

$$\left.\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= \frac{r}{r_o} v_o \\ v_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

eroava $\vec{\omega}$:n komponentti on tässä

$$\omega_z = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr} \qquad \text{(c)}$$

ja suorittamalla laskelmat saadaan vastaavasti tulokset $\omega_z = 0$ ja $\omega_z = v_o/r_o$, joten kuvan (a) esittämä virtaus on pyörteetöntä ja kuvan (b) pyörteellistä. Maallikko kuvaisi ilmeisestikin kumpaakin virtausta z-akselin ympäri tapahtuvana pyörteenä. Jälkimmäinen tapaus vastaa jäykän kappaleen rotaatiota z-akselin ympäri kulmanopeudella $v_o/r_o \cdot \vec{e}_z$.

Virtauksen kokoonpuristumattomuus on hyvin usein realistinen otaksuma varsinaisilla nesteillä ja myös kaasuilla. Tällöin siis pätee kokoonpuristumattomuusehto (ks. kaava (5.3.7))

$$d_V \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \qquad (6.3.2)$$

eli

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \,. \qquad (6.3.2')$$

Kun tässä puhutaan lyhyesti ideaalivirtauksesta, sillä tarkoitetaan yhtälöt (6.3.1) ja (6.3.2) toteuttavaa tapausta eli siis pyörteetöntä kokoonpuristumatonta virtausta. Ideaalivirtauksen yhtälöt ovat nestemekaniikan kannalta poikkeuksellisesti lineaarisia, joka helpottaa ratkaisuyrityksiä huomattavasti. Tuntemattomia on kolme, v_x, v_y, v_z ja yhtälöitä neljä. Tämä selittyy sillä, että yhtälöt (6.3.1') eivät ole riippumat-

tomia; esimerkiksi eliminoimalla v_z kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä derivointien ja vähennyslaskun avulla päädytäänkin muuttujan z suhteen derivoituun kolmanteen yhtälöön.

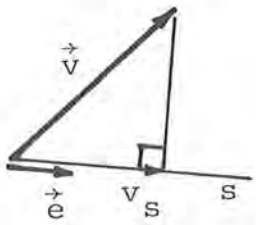
Nopeuspotentiaali. Käytännössä ei kuitenkaan pyritä yleensä ratkaisemaan suoraan ideaalivirtauksen tuntemattomia v_x, v_y ja v_z, vaan usein otetaan käyttöön tietty apumuuttuja, ns. nopeuspotentiaali (engl. velocity potential) $\phi(x,y,z,t)$ ($[\phi] = m^2s^{-1}$) siten, että

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\nabla}\phi} \tag{6.3.3}$$

eli

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}. \tag{6.3.3'}$$

Nopeusvektorin komponentti tiettyyn suuntaan s (kuva 6.3.1) on $v_s = \vec{v}\cdot\vec{e}$. Toisaalta funktion ϕ differentiaali muutoksen $d\vec{s} = ds\vec{e} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$ johdosta on



Kuva 6.3.1 Nopeuden $\vec{v}$ komponentti v_s suunnalle s.

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$= \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{s} = \vec{\nabla}\phi\cdot ds\vec{e}$$

$$= \vec{v}\cdot\vec{e}ds = v_s ds. \tag{6.3.4}$$

Täten

$$\boxed{v_s = \frac{\partial\phi}{\partial s}} \tag{6.3.5}$$

eli virtausnopeuden skalaarikomponentti tiettyyn suuntaan on yhtä suuri kuin nopeuspotentiaalin derivaatta tähän suuntaan. Kaavat (6.3.3') ovat tämän tuloksen erikoistapauksia.

Nimitys nopeuspotentiaali tulee siitä, että nopeusvektori saadaan nopeuspotentiaalin gradienttina samaan tapaan kuin

konservatiivinen voima saadaan potentiaalienergian miinusmerkkisenä gradienttina (vrt. kaava (2.3.11)). Usein kirjallisuudessa miinusmerkki otetaankin mukaan määritelmään (6.3.3). Tällöin tietysti myös kaava (6.3.5) täytyy varustaa miinusmerkillä.

Sijoittamalla lauseke (6.3.3) yhtälön (6.3.1) vasemmalle puolelle tai sijoittamalla samoin lausekkeet (6.3.3') yhtälöiden (6.3.1') vasemmille puolille havaitaan, että yhtälöt toteutuvat. Täten nopeuspotentiaalin käyttö takaa automaattisesti pyörteettömyysehdon toteutumisen — pyörteetöntä virtausta nimitetäänkin monasti potentiaalivirtaukseksi —, ja jäljelle jää vain kokoonpuristumattomuusehto (6.3.2), joka tulee muotoon

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0} \tag{6.3.6}$$

eli

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \ . \tag{6.3.6'}$$

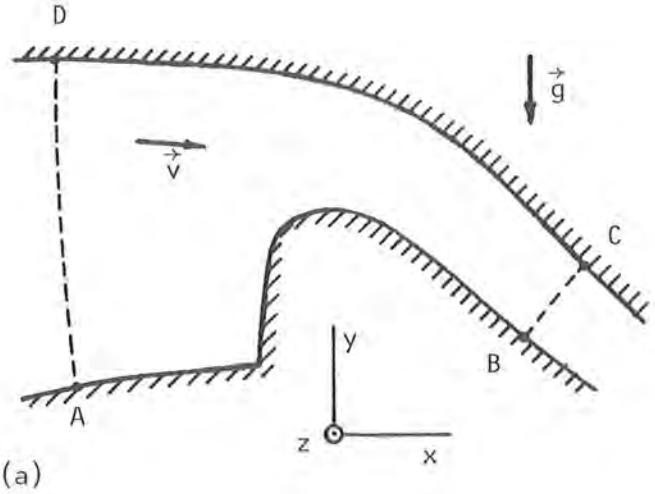
Funktio ϕ ratkaistaan tästä tutusta Laplacen differentiaaliyhtälöstä tiettyjen reunaehtojen alaisena, jonka jälkeen nopeus saadaan helposti kaavan (6.3.3) avulla.

Kun paineen arvo tunnetaan yhdessä alueen pisteessä, paine kaikkialla muualla saadaan Bernoullin yhtälön (6.4.30) avulla, joka johdetaan kohdassa 6.4.

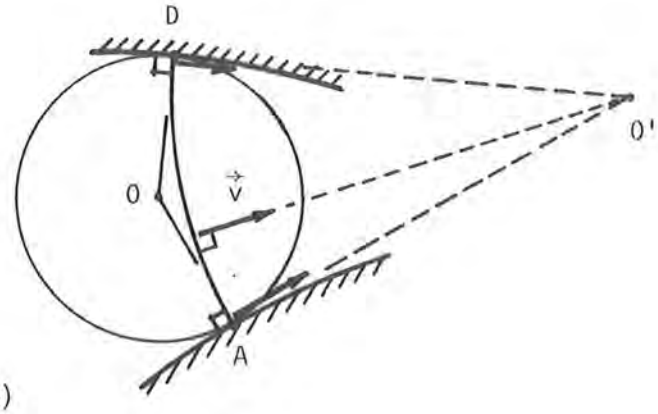
Esimerkki 6.3.2 Nopeuspotentiaalin käyttö. Kuva (a) esittää seinämien AB ja CD rajoittamaa z-akselin suunnassa muuttumatonta aluetta, jossa virtauksen otaksutaan olevan xy-tason suuntaista vakiotiheysnesteen ideaalivirtausta. Tarkastellaan virtauksen määrittämistehtävää nopeuspotentiaalia käytettäessä erityisesti reunaehtojen kannalta.

Tehtävänä on siis määrittää funktio $\phi(x,y)$ — myös riippuvuus ajasta saisi olla mukana, sillä tämä ei muuttaisi käsittelyä — sopivasti valitussa xy-tason alueessa. Juuri sopivan alueen valinta niin, että voidaan asettaa mielekkäät reunaehdot synnyttää nytkin tietyn ongelman (vrt. kohta 5.7).

Tässä tapauksessa seinämät AB ja CD muodostavat erään selvän reunan osan, jolla nopeuskomponentti reunan normaalin suunnassa häviää ja saa-



(a)



(b)

daan siis reunaehdot

$$v_n = 0 \text{ reunalla AB ja CD .} \qquad \text{(a)}$$

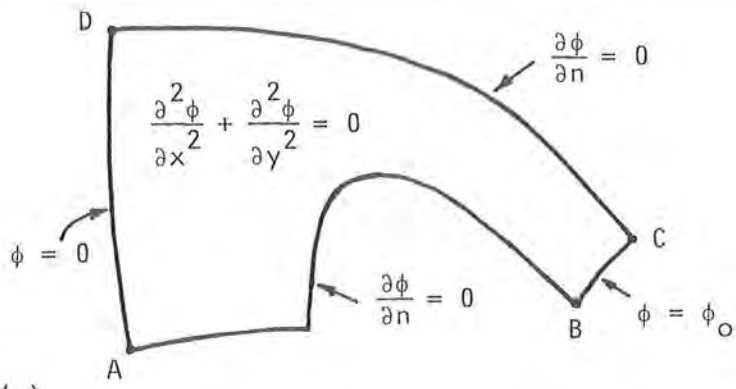
Reunaviivojen BC ja DA valinta on epämääräisempää. Eräs mahdollisuus on otaksua, että kohdilla, joilla seinämät ovat jonkin matkaa likimain yhdensuuntaisia, virtauskin on likimain yhdensuuntaisvirtausta. Kuva (b) esittää tähän liittyvää periaatteessa mahdollista konstruktiota. Valitaan toiselta reunalta piste A. Piirretään pisteen A kautta reunan normaali. Piirretään pisteen A kautta kulkevia yhä suurempisäteisiä ympyröitä, joiden keskipiste on normaalilla, kunnes saadaan ympyrä, joka sivuaa toista reunaa ja saadaan piste D. Alueen rajaksi otetaan O' — keskeinen ympyränkaari DA. Otaksutaan, että tällä reunan osalla virtausnopeusvektorien vaikutussuorat kulkevat aina pisteen O' kautta. Tällöin tangentiaalinopeus v_t häviää. Tämä pitää täsmällisesti paikkansa pisteissä A ja D, koska kiinteät seinämät ovat ideaalivirtauksessa yleensä virtaputkia ja tässä reunat siis virtaviivoja. Näin on saatu likimääräiset reunaehdot

$$v_t = 0 \quad \text{reunalla BC ja DA .} \qquad \text{(b)}$$

Huomautettakoon, että kuvaan (b) liittyvä konstruktio on tämän kirjoittajan ehdotelma, eikä mikään yleisesti alan kirjallisuudessa esiintyvä ohje. Joka tapauksessa jotain vastaavantapaisia otaksumia on tehtävä mielekkäiden reunaehtojen asettamiseksi.

Reunaehdot täytyy vielä lausua nopeuspotentiaalin ϕ avulla. Kaavan (6.3.5) perusteella reunaehdot (a) merkitsevät, että nopeuspotentiaalin derivaatan normaalin n suuntaan eli ns. normaaliderivaatan $\partial\phi/\partial n$ tulee hävitä. Reunaehdot (b) taas merkitsevät, että nopeuspotentiaalin derivaatan reunan tangentin suunnassa tulee hävitä eli nopeuspotentiaalin tulee siis olla vakio osilla DA ja BC. Tiettyyn nopeuspotentiaalin lausekkeeseen voidaan lisätä tai vähentää mielivaltainen vakio ilman, että derivoimalla saatu nopeus (6.3.3) muuttuu; vrt. vertailupisteen valinta potentiaalienergian käsitteen yhteydessä kohdassa 2.3.1. Tällä perusteella ϕ:lle voidaan ottaa vaikka arvo nolla osalla DA. Osalla BC ϕ:lle otetaan mielivaltainen vakioarvo ϕ_o.

Syntyvän reuna-arvotehtävän matemaattinen asetelma näkyy kuvassa (c). Ratkaisun löydyttyä — tavallisimmin numeerisesti — voidaan laskea tilavuusvirta leikkauksen BC läpi lausekkeesta



(c)

$$Q_o = b \int_B^C v_n ds$$

$$= b \int_B^C \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \,, \qquad (c)$$

jossa b on alueen levys z-akselin suunnassa. Jos tehtävässä oli alunperin annettu tilavuusvirran arvo Q, on vain kerrottava ensin saatu nopeuskenttä luvulla Q/Q_o. Tämä perustuu kuvan (c) tehtävän lineaarisuuteen; ratkaisu riippuu lineaarisesti arvosta ϕ_o. Jos paine tunnetaan esimerkiksi pisteessä D, Bernoullin yhtälön (6.4.30) vasen puoli voidaan laskea (D ≙ 1) ja tämän jälkeen paine kaikkialla alueessa mm. mahdollisen kavitaatiovaaran selvittämiseksi.

Jos kuvan (a) seinämä CD korvataan vapaalla pinnalla, tehtävä vaikeutuu oleellisesti. Vapaan pinnan asema on lisätuntematon, joka pyritään sovittamaan iteratiivisesti paikoilleen käyttäen ehtona tietoa, että Bernoullin yhtälöstä lasketun paineen tulee yhtyä vapaalla pinnalla ulkoiseen ilmanpaineeseen.

Virtafunktio. Tasovirtauksessa ja pyörähdyssymmetrisessä virtauksessa erittäin hyödyllinen toinen yleinen apumuuttuja on ns. virtafunktio (engl. stream function) ψ ($[\psi] = m^2 s^{-1}$). Karteesisessa suorakulmaisessa xy-koordinaatistossa $\psi(x,y,t)$ määritellään tasovirtauksessa kaavoilla

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \,, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \,,} \qquad (6.3.7)$$

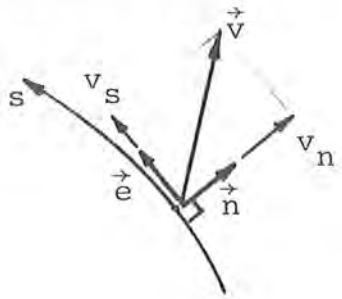
joiden sijoitus tasovirtauksen kokoonpuristumattomuusehtoon

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (6.3.8)$$

osoittaa, että virtafunktion käyttö takaa automaattisesti kokoonpuristumattomuusehdon toteutumisen. Kokoonpuristumattomuus on nestemekaniikassa paljon yleisempi ja realistisempi otaksuma kuin

pyörteettömyys, joten virtafunktio on tässä suhteessa tärkeämpi apuväline kuin nopeuspotentiaali ja sitä käytetään paljon myös kitkallisen virtauksen yhteydessä. Toisaalta virtafunktio ei yleisty yksinkertaisella tavalla kolmeen dimensioon. Määritelmissä (6.3.7) valitaan kirjallisuudessa plus- ja miinusmerkkien paikat usein käänteisesti.

Virtafunktiolla on se havainnollinen merkitys, että sen tasaarvokäyrät ovat samalla virtaviivoja. Tarkastellaan tämän todistamiseksi kuvaa 6.3.2. Olkoon s suunnattu käyrä, jonka tiettyyn pisteeseen asetetaan positiiviseen suuntaan osoittava yksikkötangenttivektori $\vec{e}$ sekä tästä myötäpäivään 90° kääntymällä yksikkönormaalivektori $\vec{n}$. Kun merkitään $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j}$, niin kuvan perusteella $\vec{e} = -n_y\vec{i} + n_x\vec{j}$. Funktion ψ differentiaali muutoksen



Kuva 6.3.2 Suunnattu käyrä s.

$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$= ds\vec{e} = -n_y ds\vec{i} + n_x ds\vec{j} \qquad (6.3.9)$$

johdosta on

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy = v_y n_y ds + v_x n_x ds$$

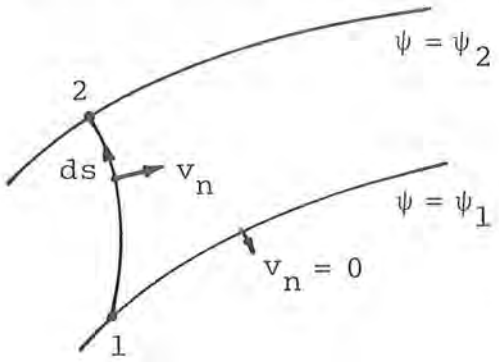
$$= (v_x n_x + v_y n_y)ds = \vec{v}\cdot\vec{n}ds = v_n ds\ . \qquad (6.3.10)$$

Täten

$$\boxed{v_n = \frac{\partial\psi}{\partial s}} \qquad (6.3.11)$$

eli virtausnopeuden skalaarikomponentti tiettyyn suuntaan on yhtä suuri kuin virtafunktion derivaatta tästä suunnasta 90° vastapäivään kierrettyyn suuntaan. Kaavat (6.3.7) ovat tämän tuloksen erikoistapauksia. Jos määritelmissä (6.3.7) vaihdetaan merkit, on äskeisessä lauseessa tehtävä muutos vastapäivään → myötäpäivään.

Olkoon sitten funktiolla ψ pisteessä 1 arvo ψ_1 (kuva 6.3.3). Funktion ψ arvo mielivaltaisessa toisessa pisteessä 2



Kuva 6.3.3 Tilavuusvirran laskeminen.

$$\psi_2 = \psi_1 + \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial s}\, ds$$

$$= \psi_1 + \int_1^2 v_n ds \; . \qquad (6.3.12)$$

Jos integroimistieksi otetaan itse virtaviiva, nopeuskomponentti v_n on nolla virtaviivan määritelmän perusteella ja siis virtaviivalla ψ on vakio kuten piti todistaakin. Kun integrointi suoritetaan virtaviivalta eroavaan pisteeseen 2, suure

$$\boxed{\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 v_n ds} \qquad (6.3.13)$$

ilmaisee virtaviivojen $\psi = \psi_2$ ja $\psi = \psi_1$ välistä kulkevan tilavuusvirran z-akselin suuntaista leveyttä kohti laskettuna.

On helppo todeta, että tasovirtauksessa virtafunktion ja nopeuspotentiaalin tasa-arvokäyrät leikkaavat toisensa kohtisuoraan.

Ideaalivirtauksen käsittely tasovirtauksessa virtafunktion avulla tulee hyvin samantapaiseksi kuin nopeuspotentiaalia käytettäessä. Pyörteettömyysehdoista (6.3.1') jää jäljelle vain viimeinen:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \; , \qquad (6.3.14)$$

josta saadaan siis kaksidimensioinen Laplacen yhtälö

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \; .} \qquad (6.3.15)$$

Esimerkki 6.3.3 Virtafunktion käyttö. Tarkastellaan esimerkkiä 6.3.2 uudestaan nyt virtafunktioon liittyvien reunaehtojen kannalta.

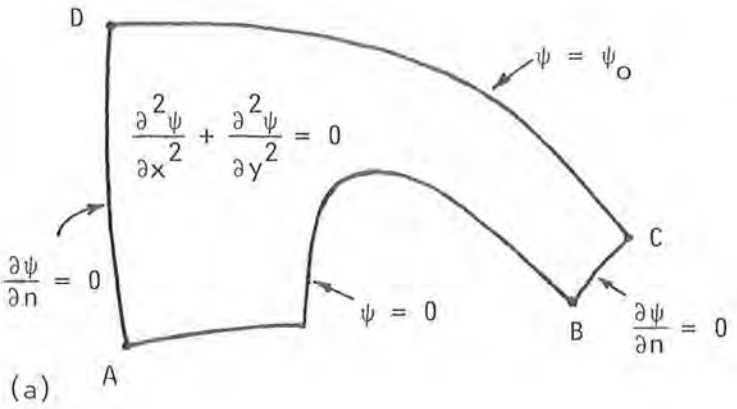
Reunaehdot

$$v_t = 0 \quad \text{reunalla BC ja DA} \tag{a}$$

merkitsevät kaavan (6.3.11) perusteella, että normaaliderivaatan $\partial\psi/\partial n$ tulee hävitä. Reunaehdot

$$v_n = 0 \quad \text{reunalla AB ja CD} \tag{b}$$

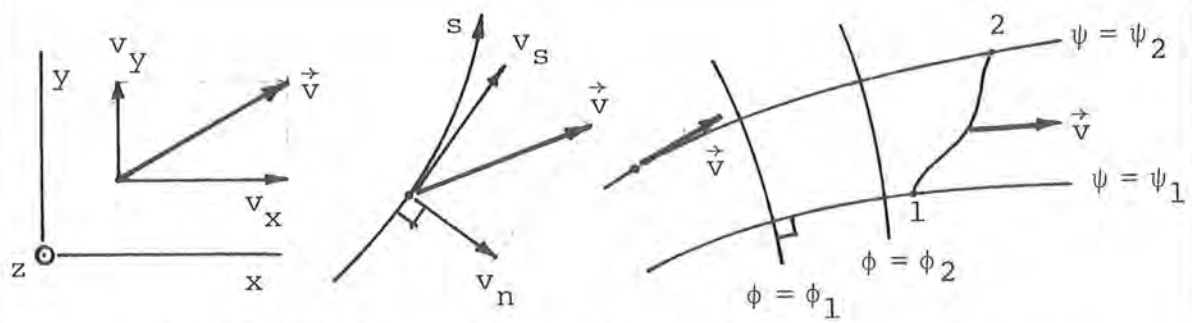
merkitsevät vastaavasti, että virtafunktion derivaatan reunan tangentin suunnassa tulee hävitä eli virtafunktion tulee olla vakio osilla AB ja CD. Esimerkiksi osalle AB ψ:n arvoksi voidaan ottaa vaikka nolla. Jos virtaama Q on annettu, voidaan kaavan (6.3.13) tulkinnan perusteella ottaa ψ:n arvoksi reunalla CD $\psi_o = Q/b$. Kuva (a) esittää syntyvän reuna-arvotehtävän asetelman.



(a)

Taulukkoon 6.3.1 on lopuksi kerätty yhteenvetona oleellisimmat tasovirtauksen nopeuspotentiaalia ja virtafunktiota koskevat tulokset.

Taulukko 6.3.1 Nopeuspotentiaali ja virtafunktio tasovirtauksessa.



Nopeuspotentiaali $\phi(x,y,t)$	Virtafunktio $\psi(x,y,t)$

Taulukko 6.3.1 jatkuu

$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$ (1) $v_s = \frac{\partial\phi}{\partial s},$ (2)	$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ (1') $v_n = \frac{\partial\psi}{\partial s}$ (2')
Pyörteettömyysehto $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ (3)	Kokoonpuristumattomuusehto $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ (3')
toteutuu automaattisesti	
Ideaalivirtauksen vallitsevaksi yhtälöksi jää Laplacen yhtälö	
$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$ (4)	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$ (4')

Kaavojen (1) ja (2) mukaan virtausnopeuden skalaarikomponentti tiettyyn suuntaan on yhtä suuri kuin nopeuspotentiaalin derivaatta tähän suuntaan.

Kaavojen (1') ja (2') mukaan virtausnopeuden skalaarikomponentti tiettyyn suuntaan on yhtä suuri kuin virtafunktion derivaatta tästä suunnasta 90° vastapäivään kierrettyyn suuntaan.

Virtafunktion tasa-arvokäyrät ovat virtaviivoja. Kahta mielivaltaista pistettä 1 ja 2 yhdistävän mielivaltaisen käyrän z-akselin suuntaan siirtyessään muodostaman pinnan läpi kulkeva tilavuusvirta z-akselin suuntaista leveyttä kohti on

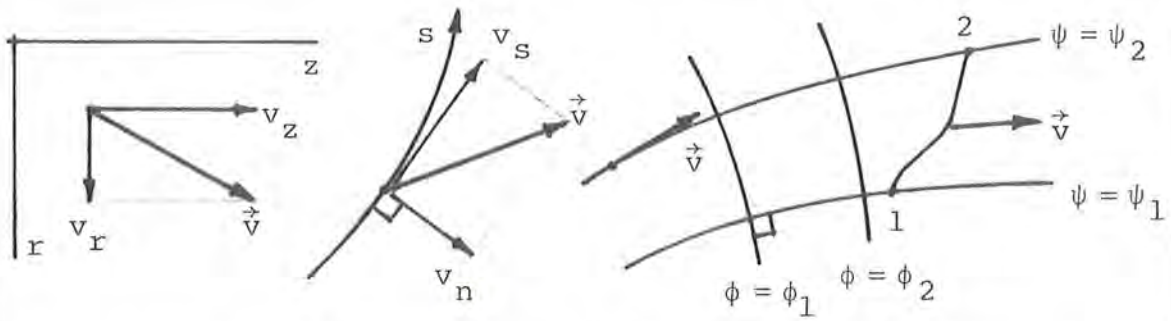
$$\psi_2 - \psi_1 \,. \tag{5}$$

Tässä virta määritellään positiiviseksi, kun pisteestä 1 pisteeseen 2 päin kuljettaessa virtaussuunta on vasemmalta oikealle päin.

<u>Pyörähdyssymmetrinen virtaus</u>. Käytetään kohdassa 6.2.3 esitettyjä merkintöjä. Kaavan (6.2.29) mukaisesti ainoan nollasta mahdollisesti eroavan kulmanopeuskomponentin ω_θ lauseke on

$$\omega_\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \,. \tag{6.3.16}$$

Taulukko 6.3.2 Nopeuspotentiaali ja virtafunktio pyörähdyssymmetrisessä virtauksessa



Nopeuspotentiaali $\phi(r,z,t)$	Virtafunktio $\psi(r,z,t)$
$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}$, $v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$ (1)	$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ (1')
$v_s = \frac{\partial\phi}{\partial s}$ (2)	$v_n = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial s}$ (2')
Pyörteettömyysehto	Kokoonpuristumattomuusehto
$\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$ (3)	$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0$ (3')
toteutuu automaattisesti	
Ideaalivirtauksen vallitsevaksi yhtälöksi jää yhtälö	yhtälö
$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{\partial\phi}{\partial z}(r\frac{\partial\phi}{\partial z}) = 0$ (4)	$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}) = 0$ (4')

Kaavojen (1) ja (2) sekä (1') ja (2') tulkinta on vastaava kuin taulukon 6.3.1 esittämässä tapauksessa; jälkimmäisissä kaavoissa on lisäksi mukana kerroin 1/r.

Virtafunktion tasa-arvokäyrät ovat virtaviivoja.

Kahta mielivaltaista pistettä 1 ja 2 yhdistävän mielivaltaisen käyrän z-akselin ympäri pyörähtäessään muodostaman pinnan läpi kulkeva tilavuusvirta on

$$2\pi(\psi_2 - \psi_1) \quad . \qquad (5)$$

Tässä virta määritellään positiiviseksi, kun pisteestä 1 pisteeseen 2 päin kuljettaessa virtaussuunta on vasemmalta oikealle päin.

Täten pyörteettömyysehto on tässä

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \ . \tag{6.3.17}$$

Kokoonpuristumattomuusehto (6.2.33) on

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \ , \tag{6.3.18}$$

josta tulee symmetrisemmän näköinen kertomalla yhtälö puolittain r:llä ja ottamalla huomioon, että r ei riipu z:sta:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 \ . \tag{6.3.19}$$

Nopeuspotentiaalin ϕ ja virtafunktion ψ käyttöön liittyvät oleellisimmat tulokset on kerätty taulukkoon 6.3.2 ilman johtoja. Virtafunktiota ψ nimitetään pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa yleensä Stokesin virtafunktioksi.

Huomautus 1. Tasovirtauksessa nopeuspotentiaalin ja virtafunktion tasa-arvopinnat ovat z-akselin suuntaisia sylinteripintoja. Vastaavat tasa-arvoviivat ovat näiden pintojen ja xy-tason leikkausviivoja. Pyörähdyssymmetrisessä virtauksessa nopeuspotentiaalin ja virtafunktion tasa-arvopinnat ovat z-akselin suhteen pyörähdyspintoja. Vastaavat tasa-arvoviivat ovat näiden pintojen ja valitun z-akselin kautta kulkevan rz-meridiaanitason leikkausviivoja. Tasovirtauksessa käytetään joskus apuna napakoordinaatistoa ja pyörähdyssymmetrisessä virtauksessa pallokoordinaatistoa. Tarvittavat kaavat on esitetty mm. lähteessä [6.4, s. 562, s. 593].

Huomautus 2. Virtafunktio ψ voidaan laajentaa koskemaan pysyvää kokoonpuristuvaa tasovirtausta tai pyörähdyssymmetristä virtausta. Kaavojen (5.3.6') ja (6.2.32) perusteella vastaavat jatkuvuusyhtälöt ovat

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0 \tag{6.3.20}$$

ja (vrt. kaavojen (6.3.18) ja (6.3.19) välinen askel)

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r v_z) = 0 \ . \tag{6.3.21}$$

Vertailu kaavojen (6.3.8) ja (6.3.19) kanssa osoittaa, että nämä jatkuvuusyhtälöt toteutuvat automaattisesti, kun virtafunktio valitaan siten, että vastaavasti

$$v_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y} \ , \qquad v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6.3.22}$$

ja

$$v_r = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \ , \qquad v_z = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \ . \tag{6.3.23}$$

On kuitenkin huomattava, että tiheys ρ on nyt tuntematon suure, joka on määritettävä osana ratkaisua.

— — —

6.4 Bernoullin yhtälö

Otaksumaluettelo. Nestemekaniikan kirjallisuudessa esiintyy suuri määrä enemmän tai vähemmän samannäköisiä kaavoja, jotka kaikki kulkevat Bernoullin yhtälön nimellä. Ne saadaan manipuloimalla Cauchyn liikeyhtälöä sopivasti ja tekemällä lisäksi tiettyjä otaksumia, joiden määrästä ja luonteesta riippuu vallitsevan yhtälön yksityiskohtainen muoto. Lähteen [6.5, s. 73] mukaan D. Bernoulli (1700-82) ei tuntenut nimeään kantavaa yhtälöä.

Kirjoitetaan näkyviin Cauchyn liikeyhtälön muoto (5.4.10):

$$\boxed{\rho\vec{b} \qquad -\vec{\nabla}p \qquad +\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* \quad = \quad \rho\vec{a}} \tag{6.4.1}$$

↑	↑	↑	↑
Tilavuus-voimatermi	Paine-termi	Kitka-termi	Kiihtyvyys-termi

Tähän on merkitty lisäksi näkyviin eräitä usein käytettyjä nimityksiä. Jos kiihtyvyystermi siirretään yhtälön toiselle puolelle, syntyvää suuretta $-\rho\vec{a}$ nimitetään hitaustermiksi. Jakamalla liikeyhtälö vielä puolittain tiheydellä ρ ja sijoittamalla kiihtyvyyden $\vec{a}$ lauseke (3.3.79) sadaan tässä yhteydessä sopiva muoto

$$\vec{b} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\ . \tag{6.4.2}$$

Kirjataan sitten eräitä otaksumia ja katsotaan, mitä niistä seuraa. Merkitään: otaksuma n = O(n).

O(1) Kitkaton virtaus. Kitkattomassa virtauksessa eli ideaalinesteen virtauksessa kaikkien leikkausjännitysten otaksutaan häviävän. Kohdan 3.4.3 huomautuksen 1 mukaisesti siis myös kaikki deviaatiojännitykset häviävät eli

$$\boxed{\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}} \tag{6.4.3}$$

eli vielä

$$\sigma_x^* = \sigma_y^* = \sigma_z^* = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \ . \qquad (6.4.3')$$

Tätä otaksumaa on käsitelty jo kohdassa 5.4. Yhtälö (6.4.2) muuttuu Eulerin liikeyhtälöksi (5.4.13).

0(2) Pyörteetön voimakenttä. Jos on olemassa funktio Ω siten, että kenttävoiman intensiteetti

$$\boxed{\vec{b} = -\vec{\nabla}\Omega} \qquad (6.4.4)$$

eli karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$b_x = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}\ , \quad b_y = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}\ , \quad b_z = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}\ , \qquad (6.4.4')$$

voimakenttää nimitetään pyörteettömäksi (engl. irrotational). Pyörteettömyyden määrittely voi tapahtua myös kahdella muulla tavalla [3.2, s. 77], joista toinen: vektorin $\vec{b}$ roottori häviää eli $\vec{\nabla}\times\vec{b} = \vec{0}$, on pyörteettömän virtauksen määritelmän ($\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{0}$) perusteella helposti muistettavissa. Suuretta Ω ($[\Omega] = \mathrm{Jkg}^{-1}$) tullaan nimittämään tässä voimapotentiaaliksi (engl. force potential, body force potential).

Huomautus 1. Kaavan (6.4.4) mukaisesta asetelmasta käytetään nestemekaniikan kirjallisuudessa hyvin yleisesti nimitystä konservatiivinen voimakenttä. Itse suuretta Ω nimitetään taas usein myös voimafunktioksi (engl. force function) ja kaava (6.4.4) varustetaan joskus plusmerkillä. Tässä esityksessä on kuitenkin haluttu välttää kaavan (6.4.4) yhteydessä sanaa konservatiivinen. Tämä siksi, että kiinteän aineen mekaniikassa termi konservatiivinen on varattu normaalin käytännön mukaan siihen, että esimerkiksi kaavassa (2.3.11) potentiaalienergia $V = V(\vec{r})$ saa olla vain paikan funktio; ts. aika ei saa olla eksplisiittisesti mukana argumenttiluettelossa. Nestemekaniikassa voidaan kuitenkin sallia riippuvuuden $\Omega = \Omega(\vec{r})$ — joka on varsinainen konservatiivinen tapaus — lisäksi myös tapaus

$\Omega = \Omega(\vec{r},t)$ ja silti oleelliset tärkeät yhteydet pysyvät voimassa. Selitys tähän annetaan huomautuksessa 6. Otsikon teksti voisi tietenkin olla partikkelimekaniikan mukaisesti monogeeninen voimakenttä, mutta tätä terminologiaa ei näytetä käytettävän koskaan nestemekaniikassa.

Konservatiivisen (ja monogeenisen) voimakentän tapauksessa Ω saadaan jakamalla kohdassa 2.3.1 esitetty partikkeliin vaikuttavan voiman potentiaalienergia $V(\vec{r})$ (ajasta riippuva potentiaalienergia $V'(\vec{r},t)$) partikkelin massalla. (Vrt. kohdan 4.10 suure U^b.)

Esimerkki 6.4.1 Keskipakovoima. Määritetään keskipakovoimakentästä syntyvä voimapotentiaali.

Kuvan 2.3.6 kaava (2.3.19) antaa tuloksen ($\Omega = V/m$)

$$\Omega^A = -\frac{1}{2}\omega_F^2(x^2+y^2) \ , \tag{a}$$

josta seuraa kaavojen (6.4.4') mukaisesti

$$b_x^A = \omega_F^2 x \ , \quad b_y^A = \omega_F^2 y \ , \quad b_z^A = 0 \tag{b}$$

kuten pitääkin (ks. kaavat (2.3.18)).

Huomattakoon, että kaava (2.3.19) olisi muotoa

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}m\omega_F^2 e^2 = -\frac{1}{2}m\omega_F^2(x^2+y^2) \\ &= -\frac{1}{2}m\omega_F^2[(x^o+u)^2 + (y^o+v)^2] \\ &= -m\omega_F^2[\tfrac{1}{2}(x^o)^2 + x^o u + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}(y^o)^2 + y^o v + \tfrac{1}{2}v^2] \ , \end{aligned} \tag{c}$$

jos vertailusuoraksi (suoraksi, jolla $V = 0$) otetaan z-akseli. Kohdan 2.3.1 yhteydessä asioita on tarkasteltu kuitenkin Lagrangen esityksen kannalta, jolloin vakion $-m\omega_F^2[(x^o)^2+(y^o)^2]/2$ poisjättö eli vertailupisteen muuttaminen yksinkertaistaa hieman lausekkeita. Merkinnän ω_F ja viitteen A käytön syy selviää huomautuksessa 2.

Huomautus 2. Äskeinen esimerkki käsitteli keskipakovoimakenttää, joten kyseessä oli näennäisvoima. Yleisesti jos toimitaan eiinertiaalikehyksessä, kaavasta (2.3.142) saadaan näennäiskenttä-

voiman intensiteetti

$$\vec{b}^A = -\vec{a}_0 - \dot{\vec{\omega}}_F \times \vec{r} - \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r}) - 2\vec{\omega}_F \times \vec{v} \ . \qquad (6.4.5)$$

Merkintöihin on tehty tiettyjä muutoksia. Kehyksen kulmanopeus $\vec{\omega}_F(t)$ on varustettu viitteellä F (frame), jottei syntyisi sekaannusta itse nesteen kulmanopeuden $\vec{\omega}(\vec{r},t)$ kanssa. Jos operoidaan koko ajan ei-inertiaalikehyksessä, on lisäksi syytä luopua kaavan (2.2.8) johdossa käytetyistä erityistunnuksista ja siirtyä tavanomaisempiin merkintöihin ($\vec{s} \to \vec{r}$, $\vec{v}_r \to \vec{v}$) ymmärtäen vain oikein niiden merkitykset.

Esimerkissä 6.4.1 käsiteltiin jo keskipakovoimakentän $-\vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r})$ osuutta, jonka havaittiin olevan pyörteetön. Huomattakoon kuitenkin, että jos $\vec{\omega}$ ei ole vakio (suunnaltaan tai suuruudeltaan tai molempia), myös termi $-\dot{\vec{\omega}}_F \times \vec{r}$ tulee mukaan ja se taas on pyörteellinen. Tämä voidaan osoittaa kehittämällä lauseke $\vec{\nabla} \times (-\dot{\vec{\omega}}_F \times \vec{r})$, josta tulee nollasta eroava.

On mielenkiintoista todeta, että Coriolistermi $-2\vec{\omega} \times \vec{v}$ on myös pyörteellinen, vaikka se kohdassa 2.3.1 luokiteltiin konservatiiviseksi voimaksi. (Ks. kuitenkin huomautus 4.)

Tarkastellaan vielä yksinkertaisena esimerkkinä kehyksen puhdasta translaatiota kiihtyvyydellä $\vec{a}_0(t)$, jolloin siis $\vec{b}^A = -\vec{a}_0$. On helppo todeta ($\vec{\nabla} \times (-\vec{a}_0) = \vec{0}$, koska $\vec{a}_0$ ei riipu paikasta), että kyseessä on pyörteetön voimakenttä ja että $\Omega^A = (a_0)_x x + (a_0)_y y + (a_0)_z z$. Tässä on siis esimerkki tapauksesta $\Omega = \Omega(\vec{r},t)$, jos $\vec{a}_0$ ei ole ajan suhteen vakio.

0(2') Vakiopainovoimakenttä. Otaksuman 2 käytännössä ylivoimaisesti tavallisin erikoistapaus on tavanomaisen suunnaltaan ja suuruudeltaan vakioarvoisen $\vec{b} = \vec{g}$ painovoimakentän tapaus eli ns. vakiopainovoimakenttä. Tällöin voimapotentiaali

$$\boxed{\Omega = gh \ ,} \qquad (6.4.6)$$

jossa g on putoamiskiihtyvyyden arvo ja h on korkeusasema ylöspäin positiivisena mitattuna johonkin mielivaltaiseen vaakasuoraan vertailutasoon nähden. Korkeusasema on koordinaatiston

valinnan mukaisesti aina tietty funktio $h = h(x,y,z)$ ja koska g on vakio

$$\vec{b} = \vec{g} = -g\vec{\nabla}h \tag{6.4.7}$$

eli

$$b_x = g_x = -g\,\frac{\partial h}{\partial x}\,, \quad b_y = g_y = -g\,\frac{\partial h}{\partial y}\,, \quad b_z = g_z = -g\,\frac{\partial h}{\partial z}\,. \tag{6.4.7'}$$

Usein otetaan yksinkertaisesti $h = z$, jolloin kaavat (6.4.7) antavat $b_x = 0$, $b_y = 0$ ja $b_z = -g$.

0(3) Barotrooppinen homogeeninen neste. Tilanyhtälö (5.2.5) ajatellaan kirjoitetuksi muotoon $\rho = \rho(p)$. Tällöin voidaan määritellä ns. painefunktio (engl. pressure function) Ψ ($[\Psi] = \mathrm{Jkg}^{-1}$) funktion $1/\rho(p)$ integraalifunktiona:

$$\boxed{\Psi(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}\,.} \tag{6.4.8}$$

Tämän tarkoitus selviää seuraavasta. Ketjuderivoimalla saadaan (Integraalifunktion derivaatta on ko. integroitava funktio.)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial x} &= \frac{d\Psi}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} &= \frac{d\Psi}{dp}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\,, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} &= \frac{d\Psi}{dp}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.4.9'}$$

Täten yhteisesti (Kerrotaan yhtälöt vektoreilla $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.)

$$\boxed{\vec{\nabla}\Psi = \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}p\,.} \tag{6.4.9}$$

Kaavan (6.4.9) oikean puolen nähdään esiintyvän liikeyhtälössä (6.4.2).

Painefunktio sisältää mielivaltaisen integroimisvakion, jonka valinnalla ei ole merkitystä kunhan se vain pidetään sitten kiinteänä tietyn tarkastelun aikana; vrt. potentiaalienergian vertailupisteen valinta.

Painefunktio esitetään usein myös määrätyn integraalin muodossa

$$\psi(p) = \int_{p^o}^{p} \frac{1}{\rho(p)}\, dp \ , \qquad (6.4.10)$$

jossa p^o on jokin valittu referenssipaine. Tällöin siis $\psi(p^o) = 0$.

Polytrooppisessa tapauksessa (kaava (5.2.7)) saadaan integroimalla lopuksi painefunktion lauseke (ρ^o on referenssipainetta p^o vastaava tiheys)

$$\Psi = \frac{n}{n-1}\,\frac{p^o}{\rho^o}\left[\left(\frac{p}{p^o}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] . \qquad (6.4.11)$$

Kun n = 1 eli isotermisessä tapauksessa tämä ei päde, vaan silloin

$$\Psi = \frac{p^o}{\rho^o} \ln \frac{p}{p^o} \qquad (6.4.12)$$

Todettakoon vielä, että otsikossa esiintyvää sanaa homogeeninen (ks. kohta 5.1) on tarvittu, jotta voitaisiin kirjoittaa $\Psi = \Psi(p(\vec{r},t))$. Epähomogeenisessa tapauksessa yhteyden $\rho = \rho(p)$ yksityiskohtainen muoto riippuisi paikasta ja ajasta ja tulisi siis kirjoittaa $\rho = \rho(\vec{r},t,p(\vec{r},t))$, jolloin saataisiin riippuvuus $\Psi = \Psi(\vec{r},t,p(\vec{r},t))$ eikä $\Psi = \Psi(p(\vec{r},t)$. Vrt. kuvaan 5.2.1 liittyvä teksti.)

Huomautus 3. Otsikko barotrooppinen homogeeninen neste on hieman huolimaton. Täsmällisempää olisi sanoa homogeenisen nesteen barotrooppinen virtaus. Nesteen ominaisuudet kun eivät yleensä sinänsä määritä, voidaanko tilanyhtälö kirjoittaa muotoon $f(\rho,p) = 0$, vaan lähinnä prosessi, jonka alaisena nestealkio tulee olemaan. Lähteessä [6.6, s. 150] puhutaan kylläkin käsit-

teestä pietsotrooppinen neste (engl. piezotropic fluid), jolla tarkoitetaan, että barotrooppisuus on nimenomaan nesteen ominaisuus.

— — —

0(3') Vakiotiheysneste. Otaksuman 3 hyvin tavallisena erikoistapauksena saadaan vakiotiheysneste, jolloin (otetaan kaavassa (6.4.10) $p^o = 0$)

$$\Psi = \int_0^p \frac{1}{\rho}\, dp = \frac{1}{\rho}\int_0^p dp = \frac{1}{\rho}\,\Big|_0^p p \qquad (6.4.13)$$

eli

$$\boxed{\Psi = \frac{p}{\rho}\,.} \qquad (6.4.14)$$

0(4) Pysyvä virtaus. Tällöin siis kaikki riippuvuudet ajasta ja samoin lokaaliset derivaatat häviävät eli

$$\boxed{\frac{\partial(\ )}{\partial t} = 0} \qquad (6.4.15)$$

ja mm. virtaviivojen asemat eivät muutu alueessa ajan muuttuessa.

0(5) Pyörteetön virtaus. Pyörteettömässä virtauksessa virtauksen kulmanopeus

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{0}\,.} \qquad (6.4.16)$$

Bernoullin yhtälö (muoto 1) [0(1), 0(2), 0(3)]. Merkitään aina tarvittaessa tulosten ja tässä siis myös otsikon yhteyteen hakasuluissa luettelo niistä otaksumista, joita on käytetty tai tullaan käyttämään.

Kun otaksutaan 0(1): kitkaton virtaus ($\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$), 0(2): pyörteetön voimakenttä ($\vec{b} = -\vec{\nabla}\Omega$) ja 0(3): barotrooppinen homogeeninen neste ($1/\rho\cdot\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\Psi$), liikeyhtälö (6.4.2) muuntuu seuraavasti:

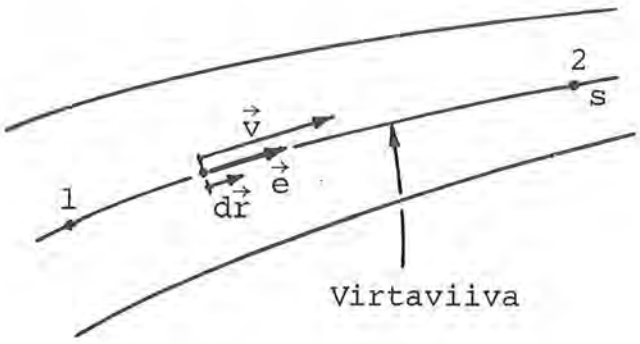
$$\vec{b} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} \ ,$$

$$-\vec{\nabla}\Omega - \vec{\nabla}\Psi + \vec{0} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} \ ,$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega\right) = \vec{0} \ . \qquad (6.4.17)$$

Manipulointien tarkoituksena on ollut saada mahdollisimman paljon termejä gradienttimuotoon.

Haluttu yhteys syntyy ottamalla yhtälön kummankin puolen skalaariset viivaintegraalit tietyllä hetkellä — aika siis jäädytetään integrointia suoritettaessa — pitkin tiettyä nesteessä olevaa tietä, jolloin saadaan edelleen yhtälö, jonka oikea ja siis myös vasen puoli ovat nollia. Tie valitaan kulkemaan pitkin jotain virtaviivaa mielivaltaisesta pisteestä 1 toiseen mielivaltaiseen pisteeseen 2 (kuva 6.4.1). Tämä valinta tehdään, koska silloin päästään eroon kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ sisältävästä termistä $2\vec{\omega}\times\vec{v}\cdot d\vec{r}$; vektorit $\vec{v}$ ja $d\vec{r}$ ovat tällöin yhdensuuntaisia ko. skalaarikolmitulossa. Saadaan siis yhtälö



Kuva 6.4.1 Integroimistie.

$$\int_1^2 \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega\right)\cdot d\vec{r} = 0 \ . \qquad (6.4.18)$$

Koska mielivaltaiselle funktiolle $f(\vec{r},t)$ pätee

$$\int_1^2 \vec{\nabla}f\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$$

$$= \int_1^2 df = \Big|_1^2 f = f_2 - f_1 \,, \tag{6.4.19}$$

yhtälö saa muodon [0(1), 0(2), 0(3)]

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \Psi_1 + \Omega_1 = \frac{v_2^2}{2} + \Psi_2 + \Omega_2 + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\, ds \,.} \tag{6.4.20}$$

Tämä on eräs Bernoullin yhtälö (muoto 1). Se koskee siis tietyllä hetkellä kahdessa samalla virtaviivalla olevassa pisteessä laskettuja suureiden v, Ψ ja Ω arvoja, kun otaksumat 1, 2 ja 3 ovat voimassa. Tässä vektori $\vec{e}$ on suunnattu kuvan 6.4.1 esittämällä tavalla, jolloin $\vec{v} = v\vec{e}$, $d\vec{r} = ds\vec{e}$ ja $\partial\vec{v}/\partial t \cdot d\vec{r} = \partial v/\partial t \cdot ds$. Viimeisen tuloksen täsmällisempi johto on seuraava. Derivaatta

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(v\vec{e}) = \frac{\partial v}{\partial t}\,\vec{e} + v\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \,, \tag{6.4.21}$$

joten

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial v}{\partial t}\,\vec{e}\cdot ds\vec{e} + v\,\cancel{\frac{\partial \vec{e}}{\partial t}\cdot ds\vec{e}} = \frac{\partial v}{\partial t}\, ds \,. \tag{6.4.22}$$

On käytetty hyväksi tunnettua tietoa, että yksikkövektorin derivaatta on kohtisuorassa ko. vektoria vastaan. Merkinnän $\vec{v} = v\vec{e}$ käyttö merkitsee, että v on käsitettävä tässä skalaariseksi nopeudeksi; ts. se voi olla myös negatiivinen jos pisteet 1 ja 2 on valittu tässä järjestyksessä virtauksen suhteen vastakkaiseen suuntaan.

Bernoullin yhtälö (6.4.20) näkyy usein myös muodossa [0(1), 0(2), 0(3)]

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega + \int \frac{\partial v}{\partial t}\, ds = C} \quad = \text{vakio tietyllä}$$

virtaviivalla tietyllä hetkellä. (6.4.20')

Kaava saadaan yhtälöstä (6.4.20) ajattelemalla piste 1 kiinnitetyksi ja poistamalla mielivaltaisen pisteen 2 tunnus.

Huomautus 4. Yhtälön (6.4.20) eräs käytännössä harvemmin näkyvä muoto saadaan suorittamalla integrointi pitkin jotain pyörreviivaa (ks. kohta 6.5). Tällöin nimittäin skalaarikolmitulo $2\vec{\omega}\times\vec{v}\cdot d\vec{r}$ häviää jälleen, koska vektorit $\vec{\omega}$ ja $d\vec{r}$ ovat yhdensuuntaiset. Samoin nähdään käyvän myös huomautuksessa 2 mainitun Coriolisvoimatermin suhteen, sillä myös skalaarikolmitulo $-2\vec{\omega}_F\times\vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$, jos integroidaan pitkin (liikkuvan koordinaatiston suhteen mitattua) virtaviivaa.

Jos kyseessä on lisäksi 0(4): pysyvä virtaus ($\partial v/\partial t = 0$), yhtälöstä (6.4.20) saadaan muoto [0(1), 0(2), 0(3), 0(4)]

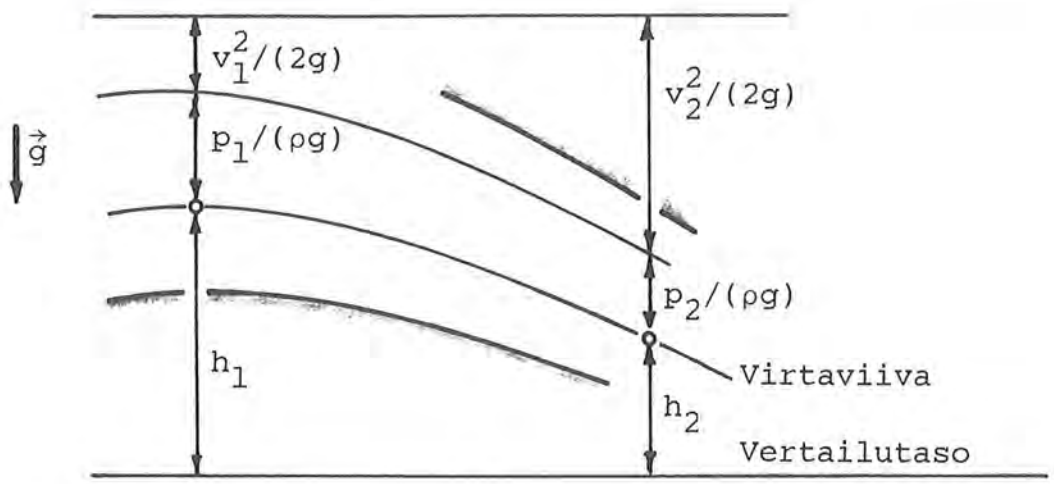
$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \Psi_1 + \Omega_1 = \frac{v_2^2}{2} + \Psi_2 + \Omega_2 \ .} \qquad (6.4.23)$$

Yhtälö (6.4.20') muuntuu vastaavasti siten, että C on vakio myös ajan suhteen.

Hydrauliikassa paljon käytetty yhtälö syntyy edellisestä otaksumalla erityisesti 0(2'): vakiopainovoimakenttä ($\Omega = gh$) ja 0(3)') vakiotiheysneste ($\Psi = p/\rho$). Jakamalla yhtälö (6.4.23) lisäksi puolittain putoamiskiihtyvyydellä g saadaan muoto [0(1), 0(2'), 0(3'), 0(4)]

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 \ .} \qquad (6.4.24)$$

Yhtälön termeillä on pituuden dimensio. Tähän liittyen näitä termejä on tapana havainnollistaa kuvan 6.4.2 tapaisella esityksellä; lisänä tavanomaisia nimityksiä, jotka vaihtelevat melko paljon eri lähteissä. Yhtälö (6.4.24) voidaan siis ilmaista sanomalla, että kokonaiskorkeus on tietyllä virtaviivalla vakio.



h = asemakorkeus (eng. elevation head, geometrical head)

$p/(\rho g)$ = painekorkeus (engl. pressure head)

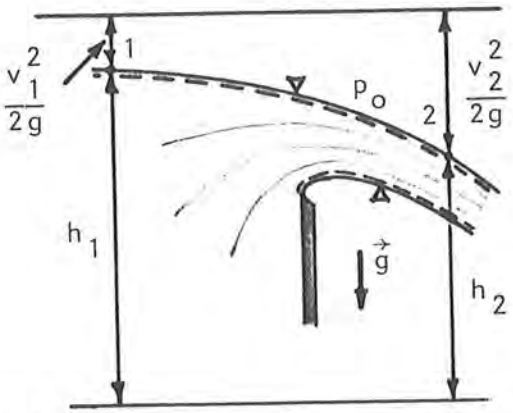
$v^2/(2g)$ = nopeuskorkeus (engl. velocity head)

$p/(\rho g)+h$ = pietsometrinen korkeus (engl. piezometric head)

$v^2/(2g)+p/(\rho g)+h$ = kokonaiskorkeus (engl. total head)

Kuva 6.4.2 Bernoullin yhtälön termejä.

Esimerkki 6.4.2 Vapaa pinta. Kuva (a) esittää veden virtausta teräväreunaisen ylisyöksypadon kohdalla. Pisteessä 1 vapaalla pinnalla on mitattu virtausnopeuden arvo v_1. Vapaan pinnan muoto tunnetaan samoin mittausten perusteella. Mikä on virtausnopeuden arvo mielivaltaisessa vapaalla pinnalla olevassa pisteessä 2?



(a)

Otaksutaan vakiotiheysneste ja pysyvä tasovirtaus. Stationaarisessa tapauksessa vapaan pinnan tiettyyn pisteeseen liittyvän virtausnopeusvektorin on oltava aina pinnan tangenttitason suuntainen, sillä muulloin pinnan muodostavilla nestealkioilla olisi tietty normaa-

linopeus eikä pinta siis pysyisi paikoillaan. Tämän perusteella tietyn vapaan pinnan pisteen kautta kulkeva virtaviiva kulkee jatkuvasti pitkin vapaata pintaa ja erityisesti kuvan (a) tapauksessa pisteet 1 ja 2 ovat siis samalla virtaviivalla. Otaksutaan, että virtaus tapahtuu kitkattomasti ja sovelletaan Bernoullin yhtälöä (6.4.24):

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 \,, \tag{a}$$

josta saadaan

$$v_2 = [v_1^2+2g(h_1-h_2)]^{1/2} \,. \tag{b}$$

Edellä on toimittu ilmanpaine referenssiarvona otetun ns. mittapaineen (engl. gauge pressure) avulla, jolloin painekorkeustermit häviävät. Yhtä hyvin voidaan käyttää myös absoluuttista painetta p_o, sillä vastaavat painekorkeudet kumoavat toisensa yhtä suurina termeinä.

Bernoullin yhtälö (muoto 2) [0(1), 0(2), 0(3), 0(5)]. Olipa Bernoullin yhtälön muoto 1 kirjoitettu koskemaan tiettyä virtaviivaa tai pyörreviivaa niin sen soveltamisessa tarvitaan siis periaatteessa tieto nopeuskentästä, jotta virtaviivat tai pyörreviivat olisivat selvillä. Täten Bernoullin yhtälön soveltaminen vaatii kohtuullisen hyvän arvauksen nopeuskentästä, joka voi olla vaikeaa. Jos voidaan tehdä lisäksi otaksuma 5: pyörteetön virtaus ($\vec{\omega} = \vec{0}$), käsittely helpottuu huomattavasti.

Lähdetään liikkeelle liikeyhtälöstä (6.4.17) ja otetaan otaksuman 5 johdosta lisäksi käyttöön virtauspotentiaali ϕ (ks. kaava (6.3.3)):

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi + \cancel{2\vec{\omega}\times\vec{v}} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega\right) = \vec{0} \,. \tag{6.4.25}$$

Derivointi ajan ja paikan suhteen ovat vaihdannaisia operaatioita ja siis

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

$$= \vec{\nabla}\,\frac{\partial\phi}{\partial t} \,, \tag{6.4.26}$$

joten liikeyhtälö saadaan muotoon

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega \right) = \vec{0} \ . \qquad (6.4.27)$$

Kun nyt otetaan yhtälön kummankin puolen skalaariset viivaintegraalit pisteestä 1 pisteeseen 2 pitkin mielivaltaista nesteessä olevaa tietä, yhtälö saa muodon [0(1), 0(2), 0(3), 0(5)]

$$\boxed{\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1 + \frac{v_1^2}{2} + \Psi_1 + \Omega_1 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_2 + \frac{v_2^2}{2} + \Psi_2 + \Omega_2 \ .} \qquad (6.4.28)$$

Tämä on eräs Bernoullin yhtälö (muoto 2). Se koskee siis tietyllä hetkellä kahdessa alueen mielivaltaisessa pisteessä laskettuja suureiden $\partial\phi/\partial t$, v, Ψ ja Ω arvoja, kun otaksumat 1, 2, 3 ja 5 ovat voimassa. (Yhtälön termit $v^2/2$ voidaan tarvittaessa korvata merkinnällä $(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)/2$.) Kaavojen (6.4.27) ja (6.4.28) välisen askeleen suorittaminen tapahtuu samaan tapaan kuin muodon 1 johdossa.

Bernoullin yhtälö (6.4.28) näkyy usein myös muodossa [0(1), 0(2), 0(3), 0(5)]

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega = C} \quad = \text{vakio koko}$$

alueessa tietyllä hetkellä . (6.4.28')

Tämä tulos nähdään oikeaksi myös yhtälöstä (6.4.27), jonka mukaan suluissa olevan lausekkeen täytyy olla paikan suhteen vakio.

Jos kyseessä on lisäksi 0(4): pysyvä virtaus ($\partial\phi/\partial t = 0$), yhtälöstä (6.4.28) saadaan muoto [0(1), 0(2), 0(3), 0(4), 0(5)]

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \Psi_1 + \Omega_1 = \frac{v_2^2}{2} + \Psi_2 + \Omega_2 \ .} \qquad (6.4.29)$$

Tämä muistuttaa muotoa (6.4.23), mutta nyt siis 1 ja 2 ovat nestealueen mielivaltaisia pisteitä. Yhtälö (6.4.28') muuntuu vastaavasti siten, että C on vakio myös ajan suhteen.

Yhtälön (6.4.24) vastineeksi saadaan muoto [0(1), 0(2'), 0(3'), 0(4'), 0(5)]

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 \,.} \qquad (6.4.30)$$

Kuva 6.4.2 voitaisiin toistaa tässä miltei sellaisenaan; pisteiden 1 ja 2 ei vain tarvitse olla samalla virtaviivalla.

Bernoullin yhtälön kuten (6.4.30) tavanomainen käyttötarkoitus on paineen jakautumisen määrittäminen, kun nopeuskenttä ajatellaan tunnetuksi (vrt. esimerkki 6.3.2).

Huomautus 5. Edellä Bernoullin yhtälöstä käytetyt nimitykset muoto 1 ja muoto 2 eivät ole yleisessä käytössä. Nämä muodot ovat kuitenkin tietynlaiset perustyypit, jotka on helppo erikoistaa kunkin yksityistapauksen mukaisiksi. Kaasumekaniikassa on esimerkiksi tavallista, että massavoimiin liittyvä termi Ω jätetään muiden Bernoullin yhtälön termien rinnalla pienenä pois.

Tässä esitettyjen Bernoullin yhtälöiden muotojen oleellisena rajoituksena on otaksuma kitkattomasta virtauksesta 0(1): $\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$. Esimerkiksi yhtälö (6.4.18) on periaatteessa helppo täydentää kitkallisessa tapauksessa termillä $\int 1/\rho(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^*)\cdot d\vec{r}$, mutta käytännössä tämän termin arvioiminen on hyvin vaikeaa. Putkivirtausta ja avouomavirtausta varten on johdettu omia kitkallista virtausta koskevia Bernoullin yhtälön muotoja, joilla on paljon sovellutuksia [3.5]. Näiden muotojen johdossa mekaanisen energian taseen periaate on sopiva lähtökohta. (Muistetaan, että myös tämä periaate synnytettiin manipuloimalla Cauchyn liikeyhtälöä.)

Huomautus 6. Bernoullin yhtälön ja partikkelimekaniikan ns. energiaperiaatteen (kaava (2.3.61)) johtamistavan välillä on tiettyä näennäistä samankaltaisuutta. Energiaperiaate voidaan johtaa yhdelle partikkelille ottamalla liikeyhtälön $\vec{F} = m\vec{a}$ kummankin puolen skalaariset viivaintegraalit pitkin partikkelin rataa:

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)dt \qquad (6.4.31)$$

eli $W = \Delta K$. (Kohdassa 2.3.5 tämä tulos johdettiin partikkelisysteemille ja hieman eri tavoin.) Oleellinen ero on kuitenkin nyt siinä, että yhtälön (6.4.31) integraaleihin liittyy fysikaalisesti ajan muutos, koska differentiaali $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Bernoullin yhtälön johdossahan aika jäädytettiin eli $d\vec{r}$ on vain integroimisreittiin liittyvä differentiaalinen kaari-alkio (, vaikkakin esimerkiksi pysyvässä virtauksessa nestepartikkelit sattuvatkin vaeltamaan pitkin virtaviivoja, joita käytetään integroimisteinä muodossa 1.).

— — —

6.5 Pyörteisyys ja sirkulaatio

Lisää pyörteisyydestä. Kirjallisuudessa pyörteisyyttä eli pyörrevektoria merkitään usein tunnuksella $\vec{\zeta}$ tai $\vec{\xi}$; siis $\vec{\xi} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = 2\vec{\omega}$. Tulemme toimimaan lähinnä kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ avulla. Esitettyjen kaavojen muuttaminen tarvittaessa suuretta $\vec{\xi}$ koskeviksi on täten vain vakiolla kertomisoperaatio.

Pyörteisyys esiintyy eräissä nestemekaniikan formulaatioissa perustuntemattomana. Todettakoon vielä, että jos dilataationopeuden $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ ja pyörteisyyden $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ jakautumat tunnetaan tietyssä alueessa, nopeuskenttä $\vec{v}$ määräytyy yksikäsitteisesti, mikäli vielä $\vec{v}$:n normaalikomponentti on annettu alueen reunalla [3.3, s. 127].

Kohdassa 3.3.3 esitettiin virtausnopeuskentän $\vec{v}(\vec{r},t)$ suhteen mm. käsitteet virtaviiva, virtaputki ja virtasäie. Kulmanopeuskentän $\vec{\omega}(\vec{r},t)$ yhteydessä on tapana määritellä vastaavasti käsitteet pyörreviiva (engl. vortex line), pyörreputki (engl. vortex tube) ja pyörresäie (engl. vortex filament). Esimerkiksi pyörreviiva on siis viiva, jonka kuhunkin pisteeseen kuuluva kulmanopeusvektori (pyörrevektori) sivuaa tätä viivaa.

Määritelmästä $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}/2$ johtuen kulmanopeusvektori on ns. lähteetön eli solenoidaalinen eli divergenssivapaa (engl. solenoidal, divergence-free); toisin sanoen

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} = 0\ .} \tag{6.5.1}$$

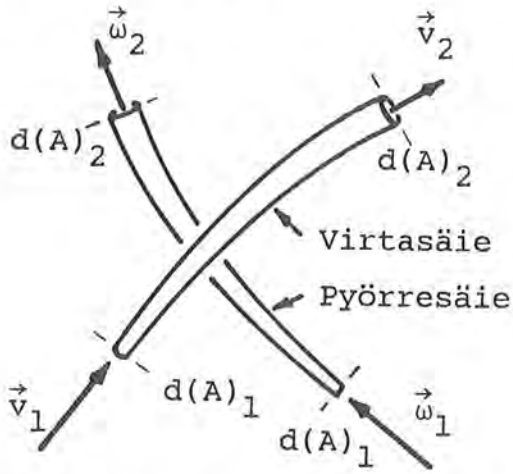
Tämä voidaan todeta helposti laskemalla ko. skalaaritulo [3.2, s. 45]. Kokoonpuristumattoman nesteen virtausnopeusvektori on myös lähteetön, sillä jatkuvuusyhtälö on silloin muotoa $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$. Tämän perusteella kokoonpuristumattoman virtauksen nopeuskenttää koskevat kinemaattiset tulokset voidaan siirtää sellaisinaan vastaavasti kulmanopeuskenttää koskeviksi.

Esimerkkinä edellisestä ovat kuvaan 6.5.1 liittyvät kaavat

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(dA)_1}{(dA)_2} \tag{6.5.2}$$

ja

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(dA)_1}{(dA)_2} \tag{6.5.3}$$



Kuva 6.5.1 Virtasäie ja pyörresäie.

eli vielä ns. tilavuusvuo

$$vdA = \text{vakio} \tag{6.5.2'}$$

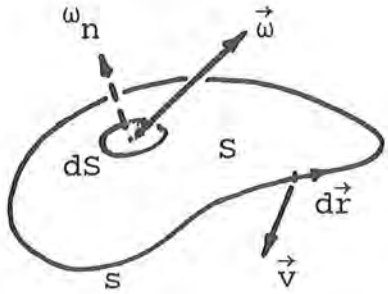
tietyllä virtasäikellä ja ns. pyörrevuo

$$\omega dA = \text{vakio} \tag{6.5.3'}$$

tietyllä pyörresäikeellä. Tarkastellaan kuvan 6.5.1 virtasäikeen vaipan ja kahden, virtasäikeen akselia vastaan kohtisuorassa olevan pinta-alkion $(dA)_1$ ja $(dA)_2$ rajoittamaa kontrollialuetta. Koska $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, divergenssilause (L.2.9") antaa tuloksen $\int v_n dS = 0$ koko kontrollipintaa koskevana. Vaipalla $v_n = 0$ virtasäikeen määritelmän perusteella. Jäljelle jää yhtälö $(v_n)_1(dA)_1 + (v_n)_2(dA)_2 = 0$. Normaalinopeus v_n on ± skalaarinen virtausnopeus v (määritellään kaavalla $\vec{v} = v\vec{e}$, jossa $\vec{e}$ on virtasäikeen tangenttiyksikkövektori). Pieni tarkastelu antaa tuloksen $v_1(dA)_1 = v_2(dA)_2$. Toisin sanoen virtausnopeus on kääntäen verrannollinen virtasäikeen pinta-alaan. Pienillä virtaputkilla pätee vastaava tulos likimäärin keskimääräisiä nopeuksia koskevana. Tieto näistä tuloksista lisää suuresti virtaviivojen avulla esitetyn virtauskentän havainnollisuutta. Pyörrevektorin suhteen saadaan täten välittömästi kaavojen (6.5.3) ja (6.5.3')

esittämät analogiset yhteydet. Merkintä ω tarkoittaa siis skalaarista kulmanopeutta: $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$.

Sirkulaatio. Ns. sirkulaatio (engl. circulation) Γ ($[\Gamma] = m^2s^{-1}$) määritellään nestemekaniikassa tietyllä hetkellä (aika jäädytetään) laskettuna viivaintegraalina



$$\left.\begin{aligned}\Gamma &= \int_s \vec{v}\cdot d\vec{r}\ ,\\ &= \int_s v_s ds\end{aligned}\right\} \qquad (6.5.4)$$

Kuva 6.5.2 Umpinainen käyrä s ja sen rajaama pinta S.

nesteessä olevaa umpinaista käyrää pitkin. Sirkulaatio on siis vektorianalyysistä tutun käsitteen vektorin kierto käyrän ympäri [3.2, s. 62] sovellutus virtausnopeuskenttään $\vec{v}(\vec{r},t)$ nähden. Korostettakoon, että sirkulaatiolla ei millään lailla tarkoiteta, että nesteen pitäisi virrata jotenkin ko. umpinaista käyrää pitkin. Kyseessä on puhtaasti matemaattinen apukäsite.

Sirkulaatiolla on läheinen yhteys pyörteisyyden kanssa. Jos sirkulaation laskemiseen valittu käyrä on sellainen, että siihen voidaan liittää käyrään rajoittuva kokonaan nesteessä oleva pinta S (kuva 6.5.2), voidaan soveltaa Stokesin lausetta (L.2.12"). Se antaa ($\vec{f} \mathrel{\hat{=}} \vec{v}$, $d\vec{s} \mathrel{\hat{=}} d\vec{r}$)

$$\Gamma = 2\int_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}dS = 2\int_S \omega_n dS\ . \qquad (6.5.5)$$

Jos otetaan erityisesti infinitesimaalisen pieni umpinainen käyrä, kaava (6.5.5) saa muodon

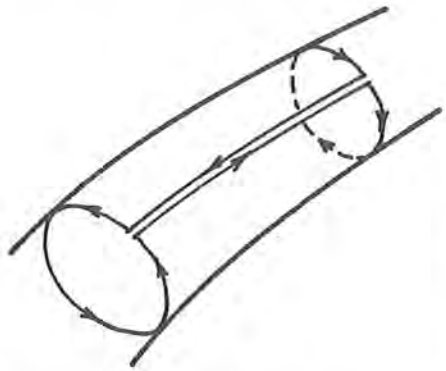
$$d\Gamma = 2\vec{\omega}\cdot\vec{n}dS = 2\omega_n dS\ . \qquad (6.5.6)$$

Kuvan 6.5.1 merkintöjä käyttäen ja valiten tarkasteltavaksi käyräksi pinta-alkion dA reuna saadaan tulos

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{d\Gamma}{dA}, \qquad (6.5.7)$$

joka osoittaa kaavan (6.5.3') perusteella lisäksi, että myös sirkulaatio $d\Gamma$ on vakio tietyllä pyörresäikeellä.

Vastaava tulos pätee myös äärelliselle pyörreputkelle: sirkulaatiolla pyörreputken ympäri on sama arvo kaikkialla putken pituudella. Tätä tulosta nimitetään joskus Helmholtzin ensimmäiseksi pyörrelauseeksi. Lause johdetaan helposti kuvan 6.5.3 esittämän tapaista umpinaista käyrää pitkin otetun sirkulaation tarkastelulla. Kun sovelletaan jälleen Stokesin lausetta ja otetaan huomioon, että kaksi vierekkäistä viivaintegraaliosuutta kumoavat toisensa, päästäänkin haluttuun tulokseen.



Kuva 6.5.3 Pyörreputki ja sen vaipalla kulkeva umpinainen käyrä.

Pyörreviiva ei voi alkaa eikä loppua nesteessä, sen täytyy joko olla umpinainen, ulottua alueen reunoihin tai äärettömyyteen. Äskeistä nimitetään joskus Helmholtzin toiseksi pyörrelauseeksi. Tämä ymmärretään kuvaa 6.5.1 ja kaavaa (6.5.3') tarkastelemalla. Savurengas on esimerkki umpinaisesta pyörreputkesta.

Koska $\vec{\omega}$ on nolla pyörteettömässä virtauksessa viimemainitun määritelmän perusteella, kaava (6.5.5) antaa heti tuloksen:

Sirkulaatio Γ häviää pyörteettömässä virtauksessa jokaisen umpinaisen käyrän suhteen, johon voidaan liittää kokonaan nesteessä oleva pinta.	(6.5.8)

Toisin sanoen sirkulaatio häviää pyörteettömässä virtauksessa jokaisen umpinaisen reudusoituvan käyrän (engl. closed reducible curve) [3.2, s. 72] suhteen. Samoin havaitaan, että pyörteettömässä virtauksessa ei voi esiintyä umpinaisia redusoituvia vir-

taviivoja [3.2, s. 87]. Sirkulaatiosta tulisi nimittäin laskettuna pitkin umpinaista virtaviivaa tällöin selvästi nollasta eroava. Kappaleiden takana — vallitsevan virtaussuunnan suhteen — olevassa virtauskentässä eli ns. vanassa (engl. wake) esiintyy havaintojen mukaan tyypillisesti umpinaisia virtaviivoja, joten kyseessä täytyy olla pyörteellinen virtaus.

Jos tarkasteltava umpinainen käyrä ei ole redusoituva, sirkulaation ei tarvitse hävitä, vaikka virtaus on pyörteetöntä. Tällä tuloksella on tärkeä merkitys mm. siipiprofiilien nostovoiman käsittelyssä. On helppo osoittaa [3.2, s. 78], että sirkulaatiolla on pyörteettömässä virtauksessa kuitenkin aina sama arvo kahden toisiinsa redusoituvan umpinaisen käyrän suhteen. Täten esimerkiksi pyörteettömässä tasovirtauksessa siipiprofiilin ympäri otetun sirkulaation arvo ei riipu reitin valinnasta.

Esimerkin 6.3.1 kuvaan (a) liittyvä virtaus vaatii kommentin. Siinähän virtaviivat ovat selvästi umpinaisia käyriä ja kuitenkin virtauksen väitettiin olevan pyörteetöntä. Tarkemmin ottaen virtaus on kyllä pyörteetöntä kaikkialla muualla paitsi origossa, jossa virtauskentässä on ns. singulariteetti. Kun origoa lähestytään eri suunnista, virtausnopeus kasvaa aina erisuuntaisena rajatta ja nopeuskentän derivaatat eivät ole olemassa. Jos sirkulaation laskemisessa käytetään käyrää, joka kiertää origon, kaavan (6.5.5) johdossa tarvittavat säännöllisyysvaatimukset eivät ole voimassa, eikä kaavaa saada soveltaa. Täten lause (6.5.8) ei ole välttämättä voimassa, jos ko. pinnalla on singulaarisia pisteitä. Esimerkkitapauksessamme voimme tulkita asetelman myös seuraavasti. Poistetaan origo alueesta, jolloin $\vec{\omega} = \vec{0}$ kaikkialla uudessa alueessa. Tämä ei ole enää kuitenkaan yhdesti yhtenäinen. Origon kiertävät käyrät eivät ole redusoituvia. Ne antavat kaikki saman sirkulaation arvon $\Gamma = 2\pi r_o v_o$.

Huomautus 1. Ideaalinesteestä sanotaan usein, että se liukuu pitkin kiinteää seinämää (tai myös pitkin muotoaan muuttavaakin seinämää).

Vastaavasti voisi olla luontevaa sanoa, että todellinen neste vierii (engl. roll) pitkin kiinteää seinämää. Ajatellaan kuvan 6.5.1 umpinainen käyrä tuoduksi infinitesimaalisen pienenä ko.

seinämää koskevaksi. Takertumisehdon perusteella $\vec{v} = \vec{0}$ ja siis $d\Gamma = 0$, joten kaava (6.5.6) antaa tuloksen

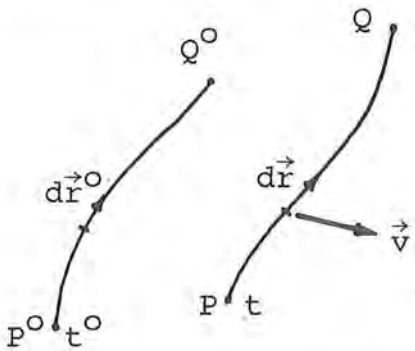
$$\omega_n = 0 \ . \tag{6.5.9}$$

Toisin sanoen kulmanopeusvektori on kiinteän seinämän kohdalla seinämän tangenttitasossa.

Jäykän kappaleen kinematiikassa osoitetaan seuraavaa. Kun jäykkä kappale vierii toista paikoillaan olevaa jäykkää kappaletta pitkin, edellisen kappaleen kappaleiden yhteisessä kosketuspisteessä olevan partikkelin nopeus häviää ja kappaleen hetkellinen rotaatioakseli kulkee kosketuspisteen kautta. Kulmanopeusvektori on hetkellisen rotaatioakselin suuntainen ja ns. puhtaassa vierimisessä (engl. pure rolling) rotaatioakseli on taas nimenomaan tangenttitason suuntainen [2.5, s. 25]. Muuten kyseessä on ns. "rolling and pivoting". Edellisen perusteella voinemme puhua puolileikillisesti todellisen nesteen vierimisestä. Vieriminen taas merkitsee, että seinämät ovat juuri niitä paikkoja, jotka syöttävät virtauskenttään pyörteisyyttä.

Sirkulaation ainederivaatta. Tarkastellaan ensin aineviivan (engl. material line) PQ (kuva 6.5.4) liittyvän viivaintegraalin

$$\int_P^Q \vec{v}\cdot d\vec{r} \tag{6.5.10}$$



Kuva 6.5.4 Aineviiva hetkellä t^o ja t.

ainederivaatan lausekkeen määrittämistä. Aineviivalla tarkoitetaan koko ajan samoista kontinuumipartikkeleista muodostuvaa viivaa (vrt. ainetilavuus ja ainepinta).

Muodollinen lyhyt johto esitetään alan kirjallisuudessa tavallisesti suunnilleen seuraavasti:

$$\frac{D}{Dt}\int_P^Q \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_P^Q \frac{D}{Dt}(\vec{v}\cdot d\vec{r}) \tag{6.5.11}$$

ja

$$\frac{D}{Dt}(\vec{v}\cdot d\vec{r}) = \frac{D\vec{v}}{Dt}\cdot d\vec{r} + \vec{v}\cdot\frac{D(d\vec{r})}{Dt} = \vec{a}\cdot d\vec{r} + \vec{v}\cdot d\,\frac{D\vec{r}}{Dt}$$

$$= \vec{a}\cdot d\vec{r} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = \vec{a}\cdot d\vec{r} + d(\tfrac{1}{2}\,\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$= \vec{a}\cdot d\vec{r} + \frac{d}{ds}(\tfrac{1}{2}\,v^2)ds\ , \qquad (6.5.12)$$

joten

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_P^Q \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_P^Q \vec{a}\cdot d\vec{r} + \frac{1}{2}\,v_Q^2 - \frac{1}{2}\,v_P^2\ .} \qquad (6.5.13)$$

Tämä yhteys on siis puhtaasti kinemaattinen. Merkinnät v_Q ja v_P tarkoittavat virtausvauhteja pisteissä Q ja P. Kaavoihin (6.5.11) ja (6.5.12) liittyvien askeleiden oikeellisuuteen on kuitenkin ainakin nopeasti katsoen vaikea uskoa. Esimerkissä 6.5.1 uskottavuutta yritetään parantaa.

Kun kaavaa (6.5.13) sovelletaan sirkulaatioon (6.5.4), jolloin P- ja Q-piste yhtyvät, saadaan siis tulos (jos nopeuskenttä on jatkuva)

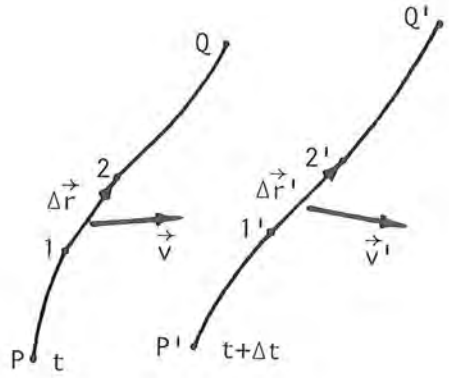
$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = \int_S \vec{a}\cdot d\vec{r}} \qquad (6.5.14)$$

eli sirkulaation ainederivaatta on yhtä suuri kuin virtauskiihtyvyysvektorin kierto ko. käyrän ympäri.

Esimerkki 6.5.1 Ainederivaatta. Käsitellään kaavan (6.5.13) johto äskeistä huolellisemmin.

Derivaatan määritelmän muistaen meidän tulee laskea ensin integraali $\int_P^Q \vec{v}\cdot d\vec{r}$ kahdella lähekkäisellä ajan hetkellä. Käsittely helpottuu, jos ajattelemme integraaleja aluksi summina

$$I \approx \Sigma\vec{v}\cdot\Delta\vec{r}\ , \quad I' \approx \Sigma\vec{v}'\cdot\Delta\vec{r}' \qquad (a)$$



(a)

Hetkellä t

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r} \ , \tag{b}$$

$$\vec{v}_2 \approx \vec{v}_1 + \frac{d\vec{v}}{ds}\Delta s \ . \tag{c}$$

(Nopeus $\vec{v}$ voidaan ajatella hetkellä t käyrällä PQ kaarenpituuden s funktioksi, joten voidaan kirjoittaa kaava (c).) Hetkellä t + Δt

$$\vec{r}_1' \approx \vec{r}_1 + \vec{v}_1\Delta t \ , \tag{d}$$

$$\vec{r}_2' \approx \vec{r}_2 + \vec{v}_2\Delta t = \vec{r}_2 + \vec{v}_1\Delta t + \frac{d\vec{v}}{ds}\Delta s\Delta t \tag{e}$$

ja siis

$$\Delta\vec{r}' = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' \approx \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \frac{d\vec{v}}{ds}\Delta s\Delta t$$

$$= \Delta\vec{r} + \frac{d\vec{v}}{ds}\Delta s\Delta t \ . \tag{f}$$

Partikkelin kokema nopeuden muutosnopeus on $D\vec{v}/Dt = \vec{a}$, joten

$$\vec{v}' \approx \vec{v} + \vec{a}\Delta t \ . \tag{g}$$

Summa

$$I' = \Sigma\vec{v}'\cdot\Delta\vec{r}'$$

$$\approx \Sigma(\vec{v}+\vec{a}\Delta t)\cdot(\Delta\vec{r}+\frac{d\vec{v}}{ds}\Delta s\Delta t)$$

$$\approx \Sigma\vec{v}\cdot\Delta\vec{r} + (\Sigma\vec{a}\cdot\Delta\vec{r})\Delta t + (\Sigma\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{ds}\Delta s)\Delta t \ . \tag{h}$$

Toisen kertaluvun (Δt:n suhteen) pieni termi on jätetty jo pois. Derivaatta

$$\frac{D}{Dt}\int_P^Q \vec{v}\cdot d\vec{r} = \lim_{\substack{\Delta\vec{r}\to\vec{0}\\ \Delta t\to 0}} \frac{I' - I}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta\vec{r}\to\vec{0}} \left(\Sigma\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} + \Sigma\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{ds}\Delta s\right)$$

$$= \int_P^Q \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_P^Q \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{ds}\,ds\ . \qquad \text{(i)}$$

Viimeinen integraali

$$\int_P^Q \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{ds}\,ds = \int_P^Q \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\,\vec{v}\cdot\vec{v}\right)ds = \int_P^Q \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\,v^2\right)ds = \Big|_P^Q \frac{1}{2}\,v^2\ , \qquad \text{(j)}$$

joten päästiin kaavaan (6.5.13).

<u>Kelvinin sirkulaatiolause</u>. Oletetaan kohdassa 6.4 selostettujen otaksumien 1, 2 ja 3 olevan voimassa eli O(1): <u>kitkaton virtaus</u> ($\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$), O(2): <u>pyörteetön voimakenttä</u> ($\vec{b} = -\vec{\nabla}\Omega$), O(3): <u>barotrooppinen homogeeninen neste</u> ($1/\rho\cdot\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\Psi$). Cauchyn liikeyhtälöstä (6.4.1) saadaan ensin otaksuman 1 johdosta (tiheydellä ρ jaettu Eulerin liikeyhtälö)

$$\vec{a} = \vec{b} - \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}p \qquad (6.5.15)$$

ja sitten otaksumien 2 ja 3 johdosta tulos [O(1),O(2),O(3)]

$$\boxed{\vec{a} = -\vec{\nabla}(\Omega+\Psi)\ .} \qquad (6.5.16)$$

Täten kiihtyvyys on suureen $\Omega+\Psi$ miinusmerkkinen gradientti.

Sijoitetaan kiihtyvyyden lauseke (6.5.16) yhtälön (6.5.14) oikealle puolelle. Suureen gradientin viivaintegraali on (ks. kaava (6.4.19)) suureen arvo ylärajalla miinus suureen arvo alarajalla. Koska kyseessä on umpinainen käyrä, ylä- ja alaraja yhtyvät ja saadaan siis tulos [O(1),O(2),O(3)]

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0} \qquad (6.5.17)$$

eli pyörteettömän voimakentän alaisena olevan kitkattoman barotrooppisen homogeenisen nesteen virtaus tapahtuu siten, että jokaisen nesteessä olevan umpinaisen ainekäyrän yli otettu sirkulaatio säilyy vakiona. Tämä on ns. Kelvinin sirkulaatiolause (Kelvin v. 1869) (engl. Kelvin's circulation theorem, Thompson's theorem on the permanence of circulation). (Nämä eri nimitykset johtuvat siitä, että William Thompson kulki aateloinnin jälkeen lordi Kelvinin nimellä.)

Kelvinin lauseen eräs tärkeä seuraus on:

Pyörteettömän voimakentän alaisena olevan kitkattoman barotrooppisen homogeenisen nesteen virtaus säilyy jatkuvasti pyörteettömänä, jos se on ollut jollakin hetkellä pyörteetöntä. (6.5.18)

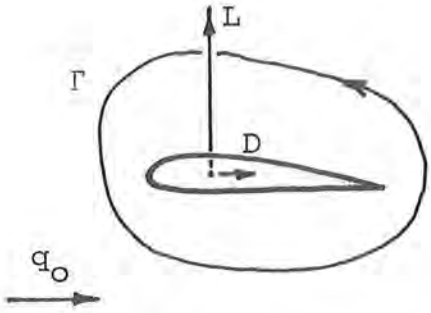
Tämä tulos saadaan seuraavasti. Jos tietyllä hetkellä $\vec{\omega} = \vec{0}$ tarkasteltavassa nestesysteemissä, kaavan (6.5.5) perusteella $\Gamma = 0$ jokaisen alueessa olevan redusoituvan käyrän suhteen. Kelvinin lauseen perusteella siis jokaisen tarkasteltavan ainekäyrän suhteen pätee jatkuvasti $\Gamma = 0$. Kaavasta (6.5.5) seuraa silloin kääntäen, että $\vec{\omega} = \vec{0}$ jatkuvasti ko. nestesysteemissä. (Ajatellaan alkutilanteessa kunkin nestealkion ympäri otetuksi kaikkiin mahdollisiin suuntiin infinitesimaalisia umpinaisia käyriä. Mielivaltaisella hetkellä nämä ainekäyrät edustavat edelleen kaikkia mahdollisia suuntia, joissa siis $\omega_n = 0$, joten pakosti myös $\vec{\omega} = \vec{0}$.)

Tuloksen (6.5.18) eräs sovellutus on tapaus, jossa neste on lähtenyt liikkeelle täydellisestä lepotilasta. Lepotilassa $\vec{v} \equiv \vec{0}$ ja kulmanopeusvektori häviää varmasti. Toinen tärkeä tavallinen tapaus koskee alueeseen saapuvaa tasaista yhdensuuntaisvirtausta, jossa siis $\vec{v} \equiv$ vakio. Jälleen nesteen $\vec{\omega} \equiv \vec{0}$ ennen saapumistaan alueeseen.

Mahdollinen virtauksen pyörteettömyys helpottaa huomattavasti nestemekaniikan tehtävien käsittelyä: Voidaan mm. käyttää apuna

nopeuspotentiaalia. Toisaalta etenkin otaksuma kitkattomuudesta ei ole realistinen yleensä muualla kuin ulkoisessa virtauksessa rajakerroksen ja vanan ulkopuolella. Myöskään barotrooppisuus-otaksuma ei ole aina sovelias. Esimerkiksi vapaassa konvektio-virtauksessa nestealkion tiheys riippuu lämpötilasta eikä paineesta. Sen sijaan otaksuma pyörteettömästä voimakentästä on käytännössä miltei aina voimassa.

Ideaalivirtaus ja nostovoima. Tarkastellaan tasovirtauksessa olevaa periaatteessa äärettömän pitkää kantosiipeä (engl. aerofoil) ja sen kuvassa 6.5.5 esitettyä poikkileikkausta (engl. wing section) eli ns. siipiprofiilia. Kantosiipien suunnittelussa pyritään ns. virtaviivaiseen (engl. streamlined) muodon saavuttamiseen, jolloin virtaukseen liittyvä pyörteellinen rajakerros ja vana-alue jää ohueksi, jos Re on suuri. Tällaisissa tapauksissa voidaan kitkattoman virtauksen mallillakin saada eräitä hyödyllisiä tuloksia ja ainakin ratkaisu voi toimia sopivana lähtökohtana kitkallisen mallin mukaiselle käsittelylle.



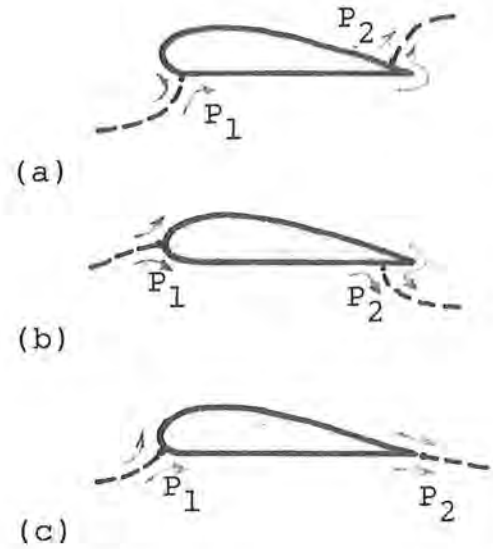
Kuva 6.5.5 Siipiprofiilin ohi tapahtuva virtaus.

Otaksutaan siis ideaalivirtaus eli vakiotiheysnesteen pyörteetön kokoonpuristumaton virtaus. Kuvan 6.5.5 tapauksessa kyseessä on ulkoinen virtaus ja nestealue ei ole yhdesti yhtenäinen (engl. single-connected) [3.2, s. 72] tasotapauksessa; siipiprofiilin ympäri otetut umpinaiset käyrät eivät ole redusoituvia.

Kuvassa 6.5.5 ei ole esitetty nestealueen ulkoista rajaa ja siellä vallitsevia reunaehtoja. Ne voisivat olla vaikka esimerkeissä 6.3.2 ja 6.3.3 käsitellyn tyyppisiä. Siipiprofiilin pinnalla reunaehto on muotoa $v_n = w_n$ ja erityisesti kiinteiden seinämien kohdilla muotoa $v_n = 0$. Matemaatikot ovat osoittaneet — ks. esimerkiksi [6.7, s. 112] — että joka tapauksessa ideaalivirtauksen yhtälöiden ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, kun alue on ei-yhdesti yhtenäinen. Esimerkiksi tasotapauksessa on yksikäsitteisyyden saavuttamiseksi annettava lisäksi kunkin alueessa olevan saarekkeen ympäri otetun sirkulaation arvo. (Ei aina

täsmällisesti totta; ks. [6.8, s. 42].)

Kuva 6.5.6 esittää kaaviollisesti kolmella eri sirkulaation Γ arvolla tietylle siipiprofiilille saatuja patopisteiden P_1 ja P_2 paikkoja ja niiden kautta kulkevia virtaviivoja. (Pistettä, jossa virtausnopeus häviää, nimitetään joskus patopisteeksi (engl. stagnation point).) Nämä kaikki tulokset ovat ideaalivirtauksen yhtälöiden kannalta yhtä oikeita. Todellisessa virtauksessa esiintyy kitkaa ja silloin ratkaisu on yksikäsitteinen ilman sirkulaation lukkoon lyöntiä. Havainnot ovat osoittaneet, että ideaalinesteen mallilla saatu ratkaisu on lähimmillään totuutta, kun sirkulaation arvo valitaan tietyllä tavalla. Valinta perustuu ns. Kutta-ehtoon (engl. Kutta condition): Virtausnopeuden tulee olla äärellinen jättöreunan kärjessä.



Kuva 6.5.6 Patopisteiden paikkoja.

Kuvien 6.5.6 (a) ja (b) esittämissä tapauksissa virtausta tapahtuu profiilin terävän jättöreunen (engl. trailing edge) ympäri. Tällöin virtausnopeus tulee kärjen kohdalla teoriassa äärettömän suureksi. Kuvan (c) esittämässä tapauksessa Kutta-ehto toteutuu. Jos profiilin pintojen välinen kulma β kärjessä on nollasta eroava — kuten kuvassa (c) — Kutta-ehto merkitsee, että nopeuden täytyy hävitä kärjessä eli patopiste siirtyy sinne. Itse asiassa nopeus pienenee tällöin nollaan ja kasvaa kohtuulliseen arvoon hyvin lyhyellä alueella kärjen ympäristössä. Kärjestä lähtevä virtaviiva on kulman β puolittajan suuntainen. Jos kulma β on nolla, virtaviiva on kärjen suuntainen ja nopeus pysyy nollasta eroavana. Joka tapauksessa Kutta-ehdon toteutuminen synnyttää ratkaisun, jossa ideaalinesteen mallin mukainen virtaus ohittaa jättöreunan juohevasti. Profiilin ympäri otetun sirkulaation arvo tulee siis valita juuri siten, että Kutta-ehto toteutuu. Profiiliin vaikuttava nostovoima L ja vastusvoima D

(kuva 6.5.5) profiilin poikkileikkausta vastaan kohtisuoraa pituutta kohti saadaan integroimalla profiilin pintaan vaikuttavasta paineesta. Kun kyseessä on kuvan 6.5.5 tapaan äärettömässä alueessa oleva stationaarinen tasainen yhdensuuntaisvirtaus, voidaan johtaa merkilliset tulokset [6.6, s. 160]:

$$L = -\rho q_o \Gamma \ , \tag{6.5.19}$$

ja

$$D = 0 \ . \tag{6.5.20}$$

Nostovoiman ja vastusvoiman suunnat määritellään vastaavasti kohtisuoraan häiriintymätöntä virtausnopeutta (itseisarvo q_o) vastaan ja sen suuntaiseksi. Valitut suureiden L, D ja Γ positiiviset suunnat näkyvät kuvassa 6.5.5.

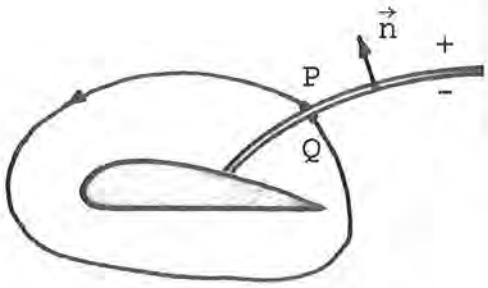
Yhtälöä (6.5.19) nimitetään joskus Kutta-Zhukovskin-lauseeksi. Se antaa tietyissä tapauksissa kohtuullisen tarkan nostovoiman arvion. Lauseen sisältö on sikäli yllättävä, että virtauksessa olevan kappaleen poikkileikkauksen muodon yksityiskohdat eivät tule suoraan lainkaan näkyviin. Sen sijaan vastusvoiman häviäminen on täysin epärealistinen, kitkattomasta mallista johtuva tulos.

Huomautus 2. Kutta-ehdon toteuttaminen aiheuttaa tiettyjä ongelmia nopeuspotentiaalia tai virtafunktiota käytettäessä.

Sirkulaatio on nopeuspotentiaalin ϕ avulla lausuttuna (vrt. kaava (6.4.19)):

$$\Gamma = \int_P^Q \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_P^Q \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r} = (\phi_Q - \phi_P) \ . \tag{6.5.21}$$

Umpinaisen integroimistien alku- ja loppupisteiden P ja Q ajatellaan tässä olevan kaksi äärettömän läheistä erillistä pistettä (kuva 6.5.7). Jos ϕ on jatkuva, Γ häviää siis aina. Jotta nollasta eroava sirkulaatio saataisiin aikaan, ratkaisuun on täten konstruoitava ϕ:lle vakiohyppäys $\Delta\phi = \phi_Q - \phi_P = \Gamma$ pitkin mielivaltaisesti valittua, profiilin reunalta alueen reunalle ulottuvaa käyrää. Lisäksi tulee olla $(\partial\phi/\partial n)^+ = (\partial\phi/\partial n)^-$, jotta



Kuva 6.5.7 Nopeuspotentiaalin ϕ epäjatkuvuus.

nopeuskenttä olisi ko. käyrän kohdalla jatkuva.

Koska ideaalineste liukuu pitkin profiilin reunakäyrää, tämä on stationaarisessa tapauksessa virtaviiva. (Jos virtausta tarkastellaan jäykäksi kappaleeksi otaksuttuun siipiprofiiliin kiinnitetyn koordinaatiston suhteen, reunakäyrä on aina virtaviiva.) Kohdan 6.3 perusteella virtafunktiolla ψ on siis vakioarvo profiilin reunalla. Tämän reunaehdon käytössä virtafunktioformulaation yhteydessä on kuitenkin se vaikeus, että ko. vakion arvo on aluksi tuntematon. Se tulee sovittaa sellaiseksi, että Kutta-ehto toteutuu.

Jos nopeuskomponentit ovat suoraan perustuntemattomina, eiyhdesti yhtenäisen alueen käsittely ei tuota edellä esitetyn tyyppisiä ongelmia. Profiilin reunan suuntaisen virtausnopeuskomponentin arvon antaminen yhdessä reunan pisteessä riittää tekemään ratkaisun yksikäsitteiseksi. Samoin Kutta-ehto on helppo toteuttaa.

Kun kappaleen poikkileikkauksella ei ole selvää terävää jättöreunaa, mitään selkeää Kutta-ehtoa ei voida esittää ja ratkaisu ei ole siis yksikäsitteinen. Tällöin kuitenkin myös vanaalue tulee suureksi ja koko ideaalivirtauksella saatu ratkaisu on joka tapauksessa arvoltaan kyseenalainen.

Kolmidimensioisessa tapauksessa ulkoiseen virtaukseen liittyvä alue on tavallisesti yhdesti yhtenäinen. Esimerkkinä lentokone, kun unohdetaan mahdolliset pienet solat yms. Jotta kantosiivellä olisi nostovoimaa, siiven poikkileikkauksen ympäri lasketun sirkulaation arvon tulee olla edelleen nollasta eroava. Jos otaksutaan pyörteetön virtaus, lause (6.5.8) antaa kuitenkin sirkulaatiolle arvon nolla. (Siiven tietyn poikkileikkauksen ympäri kulkevaan umpinaiseen käyrään voidaan liittää esimerkiksi säkkimäinen, siiven kärjen sisäänsä jättävä, kokonaan nesteessä oleva pinta.) Voidaan vieläpä osoittaa, että äärettömässä alueessa vakionopeudella puhtaassa translaatiossa liikkuvaan jäyk-

kään kappaleeseen vaikuttavien dynaamisten painevoimien resultantti häviää teoriassa kokonaan, kun otaksutaan vakiotiheysnesteen kitkaton pyörteetön kokoonpuristumaton virtaus. Tämä tulos kulkee nimellä d'Alembertin paradoksi (ks. kaava (6.5.20). Paradoksi ratkeaa tietenkin sillä, että ideaalinesteen malli ei ole realistinen.

Äärellisen siiven nostovoimaa voidaan kuitenkin arvioida pyörteettömän virtauksenkin avulla, kunhan virtauskenttä tehdään sopivasti epäjatkuvaksi. (Huomattakoon, että esimerkiksi Kelvinin lauseen johdossa otaksutaan, että nopeuskenttä on jatkuva: $\vec{v}_Q = \vec{v}_P$. Jos näin ei ole, esitettyjä yhtälöitä tulee modifioida.)

Tarkastellaan kuvaa 6.5.6 (c) ajatelleen, että se esittää nyt kantosiiven poikkileikkausta kolmidimensioisessa tapauksessa. Kun alunperin toisiaan koskettavat nestealkiot erkanevat pisteessä P_1, "ne eivät enää tiedä toisistaan" kulkiessaan pitkin siiven ala- ja yläpintaa. Siiven alapinnalla on keskimäärin suurempi paine kuin yläpinnalla. Tämä paine-ero synnyttää siiven kärjen ympäri tapahtuvaa virtausta siten, että alapinnalla virtaus on kärkeen päin ja yläpinnalla kärjestä poispäin. Kun ko. nestepartikkelit saapuvat jättöreunalle, niillä on erisuuret nopeuskomponentit ainakin jättöreunan suunnassa ja saadaan epäjatkuva nopeuskenttä. Muistetaan, että ideaalinesteen malli sallii periaatteessa nestekerrosten epäjatkuvan liukumisen toistensa suhteen. Aihetta on käsitelty mm. lähteessä [6.9].

Äskeistä selittelyä voidaan tietenkin soveltaa myös kaksidimensioisessa tapauksessa. Kuitenkin Bernoullin yhtälö (6.4.30) osoittaa, että mahdollisen epäjatkuvuuspinnan eri puolilla virtausvauhdilla tulee olla pysyvässä virtauksessa sama arvo. (Otetaan pisteet 1 ja 2 yhtälössä (6.4.30) mahdollisen epäjatkuvuuspinnan eri puolilta äärettömän läheltä toisiaan. Paine on fysikaalisista syistä jatkuva: $p_1 = p_2$, ja koska pisteet yhtyvät: $h_1 = h_2$. Täten $v_1 = v_2$.) Kahdessa dimensiossa tuloksesta $v_1 = v_2$ seuraa siis yhteys $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, koska nopeuskomponentit epäjatkuvuuspinnan normaalin suunnassa häviävät. Kolmessa dimensiossa näin ei käy, koska nopeudella on epäjatkuvuuspinnan suunnassa jo kaksi komponenttia.

Pyörteisyyden kuljetusyhtälö. Joskus pyritään esitykseen jossa paine on eliminoitu pois Cauchyn liikeyhtälöstä. Paine esiintyy siinä muodossa $\vec{\nabla}p$ eli kyseessä on skalaarin gradientti, joka taas on aina pyörteetön vektori [3.2, s.45], kuten voidaan laskemalla helposti todeta. Toisin sanoen $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}p) = \vec{0}$. Eliminointi suoritetaankin ottamalla liikeyhtälön molempien puolien roottori. Saatua yhtälöä nimitetään usein pyörteisyyden kuljetusyhtälöksi (engl. vorticity transport equation).

Aputarkasteluna käsitellään ensin kiihtyvyyden roottorin $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ lauseketta lähtien liikkeelle esityksestä (3.3.79):

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\frac{v^2}{2}) + 2\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) \ . \tag{6.5.22}$$

Nyt [3.2, s. 43...45]

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 2\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} \ , \\
&\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\frac{v^2}{2}) = \vec{0} \ , \\
&\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{\omega} - \cancel{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})}\vec{v} - \vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \ .
\end{aligned}\right\} \tag{6.5.23}$$

Nämä kaavat ovat epähavainnollisia, mutta ne voidaan kyllä todeta oikeiksi suorittamalla laskelmat — suurella työllä — komponenttiesityksen avulla. Täten

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = 2[\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{\omega} - \vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})] \tag{6.5.24}$$

eli

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{a} = 2[\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})] \ .} \tag{6.5.25}$$

Käyttämällä hyväksi jatkuvuusyhtälöstä seuraavaa dilataationopeuden lauseketta $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = -1/\rho\cdot D\rho/Dt$ yhtälöstä (6.5.25) saadaan myös muoto

$$\boxed{2\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = 2\,\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}\times\vec{a}\ .} \qquad (6.5.26)$$

Tämä tulos kulkee nimellä Beltramin diffuusioyhtälö (engl. diffusion equation of Beltrami). Huomattakoon, että kaavoihin (6.5.25) ja (6.5.26) on päästy pelkästään kinematiikan avulla.

Palataan Cauchyn liikeyhtälön

$$\vec{b} - \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}p + \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* = \vec{a} \qquad (6.5.27)$$

käsittelyyn. Johdetaan pyörteisyyden kuljetusyhtälö kahdessa erikoistapauksessa. Ensin tapaus: 0(2): pyörteetön voimakenttä ($\vec{b} = -\vec{\nabla}\Omega$), 0(3'): vakiotiheysneste ja vakioviskositeetti paikan suhteen. Liikeyhtälö saa muodon

$$-\vec{\nabla}\Omega - \frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla}p + \frac{\mu}{\rho}\,\nabla^2\vec{v} = \vec{a}\ . \qquad (6.5.28)$$

On käytetty hyväksi kahden viimeisen otaksuman vallitessa pätevää yhteyttä $\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* = \mu\nabla^2\vec{v}$; vrt. yhtälö (5.4.12). Yhtälössä (6.5.28) esiintyvät gradientit ovat pyörteettömiä ja koska ρ ja μ otaksuttiin vakioiksi, roottorilla operointi antaa siis yhtälön

$$\frac{\mu}{\rho}\,\vec{\nabla}\times(\nabla^2\vec{v}) = 2\left[\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right]\ . \qquad (6.5.29)$$

Vielä [3.2, s. 45]

$$\vec{\nabla}\times(\nabla^2\vec{v}) = \nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 2\nabla^2\vec{\omega} \qquad (6.5.30)$$

ja saadaan pyörteisyyden kuljetusyhtälö

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\omega}\ .} \qquad (6.5.31)$$

Tasovirtauksessa (olkoon liiketaso xy-taso) $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, jossa

$$\omega = \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\ . \qquad (6.5.32)$$

Termi $\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$ häviää, koska tekijävektorit ovat kohtisuorassa toisiaan ja saadaan yhtälö

$$\boxed{\frac{D\omega}{Dt} = \nu\nabla^2\omega} \tag{6.5.33}$$

eli

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v_x\frac{\partial\omega}{\partial x} + v_y\frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) . \tag{6.5.33'}$$

Kyseessä on tyypillinen konvektio — diffuusioyhtälö (ks. kohta 6.8).

Tarkastellaan sitten toista tapausta: 0(1): kitkaton virtaus ($\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$), 0(2): pyörteetön voimakenttä ($\vec{b} = -\vec{\nabla}\Omega$), 0(3): barotrooppinen homogeeninen neste ($1/\rho\cdot\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\Psi$). Kyseessä ovat siis samat otaksumat kuin Kelvinin lauseen johdossa. Liikeyhtälöstä saadun kaavan (6.5.16) perusteella kiihtyvyys $\vec{a}$ on tällöin tietyn suureen gradientti, joten $\vec{\nabla}\times\vec{a} = \vec{0}$ ja esimerkiksi yhtälöstä (6.5.25) saadaan pyörteisyyden kuljetusyhtälö

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} - \vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) .} \tag{6.5.34}$$

Yhtälöstä (6.5.26) saadaan taas

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} .} \tag{6.5.35}$$

Tämä tulos kulkee usein nimellä Helmholtzin kolmas pyörrelause.

Jos tietyllä hetkellä nestealkiolla $\vec{\omega} = \vec{0}$, kaavojen (6.5.34) ja (6.5.35) oikeat puolet häviävät, joten suureiden $\vec{\omega}$ ja $\vec{\omega}/\rho$ muutosnopeudet ovat nollia ko. alkiolle. Tästä seuraa, että alkiolle pätee jatkuvasti yhteys $\vec{\omega} = \vec{0}$. Tämä tuloshan johdettiin jo edellä Kelvinin lauseen seurauksena.

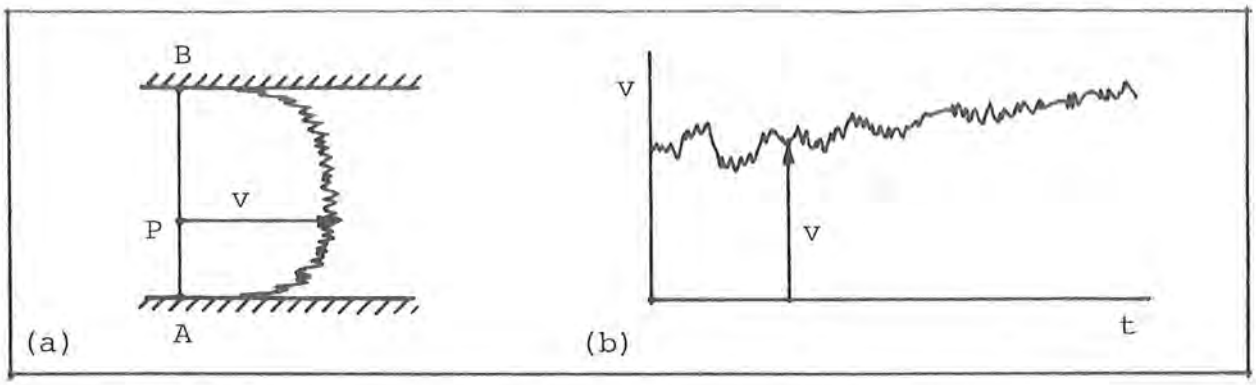
Tasoliikkeessä (xy-taso) jälleen $\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} = \vec{0}$ ja esimerkiksi yhtälö (6.5.35) saa muodon

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = 0 .} \tag{6.5.36}$$

Toisin sanoen nestealkion liikkeessä suureen ω/ρ arvo säilyy vakiona. Tämä voidaan tulkita myös liikemäärämomentin (alkion massakeskiön suhteen) säilymisen periaatteen mukaiseksi tulokseksi. Esimerkiksi vakiotiheysnesteen virtauksessa ω on siis vakio kullekin nestealkiolle ja vielä pysyvässä vakiotiheysnesteen virtauksessa ω on vakio kullakin virtaviivalla.

6.6 Turbulenssi

Yleistä. Kuva 6.6.1 esittää kaaviollisesti kahden kiinteän seinämän välissä tapahtuvasta turbulenttisesta virtauksesta saatuja



Kuva 6.6.1 (a) Virtausakselin suuntaisen nopeuskomponentin v jakautuma viivalla AB tietyllä hetkellä. (b) Nopeuskomponentti v pisteessä P ajan funktiona.

mittaustuloksia. Myös muut nopeuskomponentit, jännitykset, paine jne. käyttäytyvät vastaavasti.

Ajatellaan — siis lähinnä ajatuskoe — että kuvassa 6.6.1 esitetyt mittaukset suoritetaan lukuisassa määrässä (n kpl) kokeita, jotka ovat geometrialtaan ja alkuehdoiltaan identtisiä ja jotka aloitetaan samanaikaisesti. Esimerkiksi nopeuskomponentille $v(\vec{r},t)$ tai yleensä mielivaltaiselle suureelle $f(\vec{r},t)$ saataisiin periaatteessa mittaustulokset

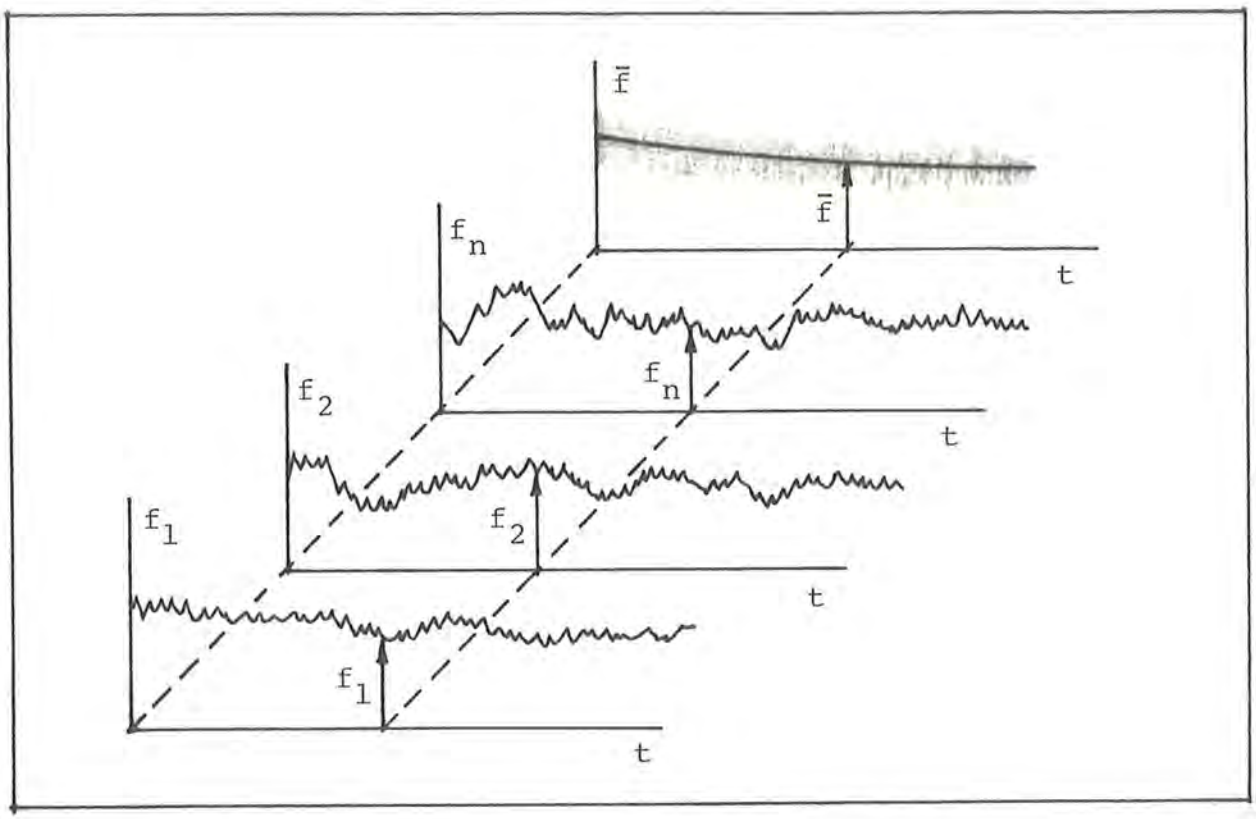
$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f_1(\vec{r},t) \ , \\ f_2 &= f_2(\vec{r},t) \ , \\ &\ldots \\ f_n &= f_n(\vec{r},t) \ , \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.1)$$

jossa indeksit viittaavat kokeen numeroon. Näiden tulosten muodostamaa joukkoa sanotaan usein ryhmäksi (engl. ensemble).

Jos funktiot (6.6.1) ovat identtisiä, kysymyksessä on laminaarinen virtaus. Jos funktiot (6.6.1) vaihtelevat kokeesta kokeeseen, kysymyksessä on turbulenttinen virtaus. Näitä toteamuksia voidaan pitää laminaarisen ja turbulenttisen virtauksen määritelminä [6.10, s. 39]

On huomattava, ettei laminaarisen virtauksen tarvitse olla välttämättä yksinkertaista, vaan se voi muodostua hyvinkin monimutkaisista pyörteilyistä. Oleellista on, että laminaarinen virtaus on ns. determinististä (engl. deterministic) eli se määräytyy yksikäsitteisesti valitun geometrian, alkuehtojen, aineominaisuuksien jne. perusteella. Turbulenttinen virtaus on sen sijaan ns. satunnaista tai stokastista (engl. random, stochastic) eli sitä ei voida ennustaa yksikäsitteisesti; ainoastaan tiettyjä todennäköisyyksiä voidaan käsitellä.

Kuvassa 6.6.2 on esitetty vierekkäin yksinkertaisuuden vuoksi vain kolme suureelle f jossain tietyssä pisteessä mitattua koetu-



Kuva 6.6.2 Ryhmäkeskiarvon muodostaminen.

losta. Kuten on jo kohdassa 5.1 todettu, pyrkimyksenä on toimia sopivasti määriteltyjen keskimääräisten arvojen ja niiden suhteen laskettujen poikkeamien avulla. Teoreettisesti tyydyttävin tapa määritellä keskimääräinen arvo on kirjoittaa

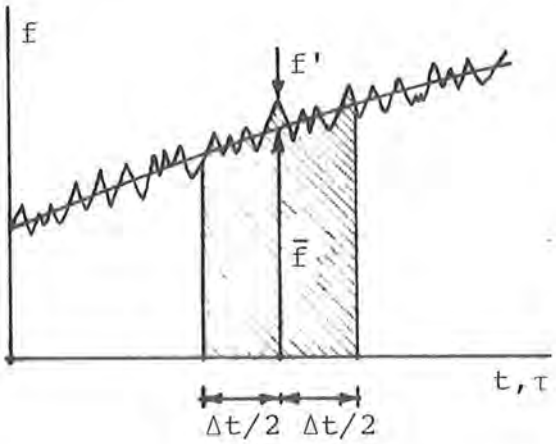
$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i \,, \qquad (6.6.2)$$

jossa $\bar{f}$ on ns. ryhmäkeskiarvo (engl. ensemble mean). Siis kullakin ajan hetkellä otettaisiin tavanomainen keskiarvo ja periaatteessa tarvittaisiin ääretön määrä kokeita. Kuvaa 6.6.2 katsellen voidaan ajatella, että käyrä $\bar{f} = \bar{f}(t)$ syntyy kaikkein "tummimmasta" kohdasta $t\bar{f}$-tasolla, kun vastaavat koetuloskäyrät projisioidaan sille.

Käytännössä ryhmäkeskiarvon käyttöön ei ole yleensä mahdollisuuksia. Tarvittava tieto pyritään saamaan irti yhdestä tyypillisestä koetuloksesta määrittelemällä suureen f ns. aikakeskiarvo (engl. time average, temporal mean value) $\bar{f}$ kaavalla

$$\boxed{\bar{f}(\vec{r},t) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(\vec{r},\tau)\,d\tau\ ,} \qquad (6.6.3)$$

jossa Δt on ns. aikaväli (engl. time interval), jonka valintaan palataan kohta. Kaavan sisältöä voidaan havainnollistaa kuvan 6.6.3 esittämällä tavalla. Keskiarvo $\bar{f}$ tietyllä arvolla t saadaan jakamalla vinoviivoitetun alueen pinta-ala aikavälillä Δt. Aikavälin Δt täytyy olla suuri verrattuna yhteen tyypilliseen satunnaisheilahdukseen kuluvaan aikaan, mutta taas toisaalta pieni verrattuna aikaan, joka vaaditaan keskimääräisen arvon muuttumiseen merkittävästi. Jos ilmiö on sellainen, että em. ehdot täyttävä aikaväli on löydettävissä, aikakeskiarvoa voidaan käyttää ryhmäkeskiarvon sijasta [6.10]. Jos sopivaa aikaväliä ei ole olemassa, aikakeskiarvokäsitteellä ei ole enää merkitystä.



Kuva 6.6.3 Aikakeskiarvon muodostaminen.

Stationaarisessa tapauksessa määritelmä (6.6.3) kirjoitetaan muotoon

$$\bar{f}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(\vec{r},\tau)\,d\tau \qquad (6.6.4)$$

ja keskiarvo ei riipu siis ajasta. Käytännössä Δt rajoitetaan tietenkin johonkin sopivaan äärelliseen arvoon. Turbulenssiteoriat ovat pisimmälle kehitettyjä juuri stationaarisissa tapauksissa.

Olipa kyseessä määritelmä (6.6.2) tai (6.6.3) satunnaissuure f esitetään tämän jälkeen aina muodossa (ks. kuva 6.6.3)

$$\boxed{f = \bar{f} + f' \ .} \qquad (6.6.5)$$

Suuretta $\bar{f}$ nimitettään tässä keskiarvo-osaksi, keskiarvosuureeksi f (esimerkiksi keskiarvonopeuskomponentti $\bar{v}_x$) ja suuretta f' taas heilahteluosaksi, heilahtelusuureeksi f (esimerkiksi heilahtelunopeuskomponentti v_x') (engl. fluctuating part, deviation).

Huomautus 1. Kaavoissa (6.6.3) ja (6.6.4) on käytetty integroimismuuttujana tunnusta τ — ns. mykkä muuttuja (engl. dummy variable) — korostamaan sitä, että integraali on periaatteessa ala- ja ylärajojensa perusteella ajan t funktio. Usein kirjallisuudessa kuitenkin esiintyy τ:n sijalla tunnus t. Samoin usein integroimisrajoiksi otetaan arvot t ja $t+\Delta t$.

— — —

Määritelmään (6.6.3) perustuen voidaan johtaa mm. taulukossa 6.6.1 esitetyt laskusäännöt. Tässä $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ja g ovat mieli-

Taulukko 6.6.1 Turbulenssin laskusääntöjä.

$(\overline{f'}) \approx 0$,	(1)
$(\bar{\bar{f}}) \approx \bar{f}$,	(2)
$(\overline{f_1+f_2+\ldots+f_n}) = \bar{f}_1+\bar{f}_2+\ldots+\bar{f}_n$,	(3)
$(\overline{kf}) = k\bar{f}$, (k ei riipu ajasta)	(4)
$(\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$, ...	(5)
$(\overline{\frac{\partial f}{\partial t}}) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$,	(6)

Taulukko 6.6.1 jatkuu

$$\overline{(\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{f}_n)} \approx \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \ldots \cdot \bar{f}_n \,, \tag{7}$$

$$\overline{(\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \ldots \cdot \bar{f}_n g')} \approx 0 \,, \tag{8}$$

$$\overline{(f_1 f_2)} \approx \bar{f}_1 \bar{f}_2 + \overline{(f_1' f_2')} \,, \tag{9}$$

$$\overline{(f_1 f_2 f_3)} \approx \bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3 + \overline{(f_1' f_2' f_3')} + \\ + \bar{f}_1 \overline{(f_2' f_3')} + \bar{f}_2 \overline{(f_3' f_1')} + \bar{f}_3 \overline{(f_1' f_2')} \,, \tag{10}$$

$$\overline{\left(\int f dV\right)} = \int \bar{f} dV \,, \quad \text{(V on kiinteä)} \tag{11}$$

$$\overline{\left(\int f dS\right)} = \int \bar{f} dS \,. \quad \text{(S on kiinteä)} \tag{12}$$

valtaisia satunnaisfunktioita. Sulkumerkkejä on käytetty korostamaan aikakeskiarvon ottamisjärjestystä. Jatkossa sulkuja ei käytetä. Samoin jatkossa otaksutaan, että likimääräismerkillä varustetut yhtälöt pätevät tarkasti. Näin on sitä tarkemmin, mitä hitaammin keskiarvosuureet muuttuvat ajan suhteen. Stationaarisessa tapauksessa kaavat ovat tarkasti voimassa.

Esimerkki 6.6.1 Laskukaavoja. Johdetaan taulukon 6.6.1 kaavat (1), (5), (6) ja (9). Kaavojen (1) ja (9) tapauksessa otaksutaan stationaarinen tapaus: $\bar{f}$ = vakio t:n (ja τ:n) suhteen.

(a) Soveltamalla kaavaa (6.6.3) funktioon $f' = f - \bar{f}$ saadaan

$$\overline{f'} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int (f - \bar{f}) d\tau = \frac{1}{\Delta t} \int f d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int \bar{f} d\tau$$

$$= \bar{f} - \frac{1}{\Delta t} \bar{f} \int d\tau = \bar{f} - \frac{1}{\Delta t} \bar{f} \Delta t = \bar{f} - \bar{f} = 0 \,. \tag{a}$$

(b) Soveltamalla kaavaa (6.6.3) funktioon $\partial f / \partial x$ saadaan

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int \frac{\partial f}{\partial x} d\tau \,. \tag{b}$$

Toisaalta matematiikassa on osoitettu, että määrätyn integraalin derivoiminen integrandissa esiintyvän parametrin (tässä x) suhteen saadaan suo-

rittaa seuraavasti [3.3, s. 29]:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta t}\int f d\tau\right) = \frac{1}{\Delta t}\int \frac{\partial f}{\partial x}\, d\tau \ . \qquad \text{(c)}$$

Kaavojen (b) ja (c) vertailu osoittaa kaavan (5) pätevän siis myös epästationaarisessa tapauksessa.

(c) Soveltamalla kaavaa (6.6.3) funktioon $\partial f/\partial t$ saadaan ($t \to \tau$ integraalissa)

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int \frac{\partial f(\vec{r},\tau)}{\partial \tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left| f(\vec{r},\tau)\right|_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{\Delta t}\left[f(\vec{r},t+\Delta t/2) - f(\vec{r},t-\Delta t/2)\right] \ . \qquad \text{(d)}$$

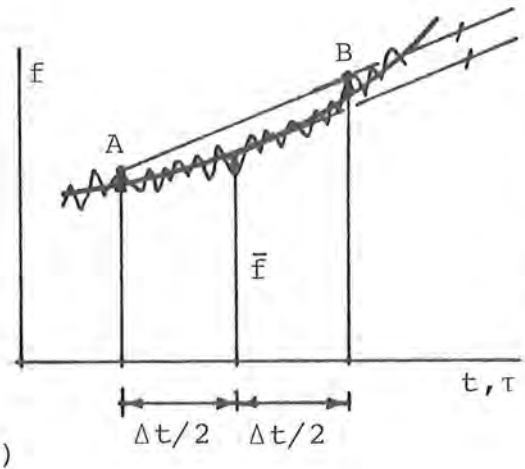
Toisaalta Leibnitzin sääntöä soveltamalla saadaan

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(\vec{r},\tau)\, d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int \frac{\partial f(\vec{r},\tau)}{\partial t}\, d\tau + f\left|\frac{\partial(t+\Delta t/2)}{\partial t}\right|_{\tau=t+\Delta t/2} - f\left|\frac{\partial(t-\Delta t/2)}{\partial t}\right|_{\tau=t-\Delta t/2}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[0 + f(\vec{r},t+\Delta t/2)\cdot 1 - f(\vec{r},t-\Delta t/2)\cdot 1\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[f(\vec{r},t+\Delta t/2) - f(\vec{r},t-\Delta t/2)\right] \ . \qquad \text{(e)}$$



(a)

Tässä on siis sovellettu kaavaa (3.3.83) asettaen $x \to \tau$, $d/dt \to \partial/\partial t$. Kaava (6) pätee siis yleisesti. Kuvasta (a) näkyy kaavan (e) geometrinen merkitys: Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on aina keskiarvofunktion $\bar{f}$ kuvaajalle asetetun tangentin suuntainen.

(d) Soveltamalla kaavaa (6.6.3) funktioon $f_1 f_2$ saadaan

$$\overline{f_1 f_2} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int f_1 f_2 d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int (\bar{f}_1 + f_1')(\bar{f}_2 + f_2')\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int \bar{f}_1\bar{f}_2 d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int \bar{f}_1 f_2' d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int f_1'\bar{f}_2 d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int f_1' f_2' d\tau$$

$$= \bar{f}_1\bar{f}_2 \frac{1}{\Delta t}\int d\tau + \bar{f}_1 \frac{1}{\Delta t}\int f_2' d\tau + \bar{f}_2 \frac{1}{\Delta t}\int f_1' d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int f_1' f_2' d\tau$$

$$= \bar{f}_1\bar{f}_2 + \cancel{\bar{f}_1\overline{f_2'}} + \cancel{\bar{f}_2\overline{f_1'}} + \overline{f_1' f_2'} = \bar{f}_1\bar{f}_2 + \overline{f_1' f_2'} \,, \qquad \text{(f)}$$

joka osoittaa kaavan (9) oikeaksi.

Aikakeskiarvokäsitettä sovelletaan jatkossa seuraavaa ajattelutapaa käyttäen. Yleiset nestemekaniikan yhtälöt ovat voimassa myös turbulenttisessä virtauksessa sellaisinaan. Käytännössä ei ole kuitenkaan mitään mahdollisuuksia ratkaista turbulenttista virtausta jokaista yksityiskohtaa myöten. Yleensä vain juuri keskiarvokäyttäytyminen kiinnostaa. Ottamalla yleisten yhtälöiden molempien puolien aikakeskiarvot saadaan edelleen yhtälöitä. Näissä yhtälöissä esiintyy haluttujen keskiarvosuureiden lisäksi yleensä myös — valitettavasti — heilahtelusuureiden tiettyjä yhdistelmiä, joita ei voida jättää huomiotta. Jotta syntyvien yhtälöiden avulla voitaisiin ratkaista keskiarvosuureet, heilahtelusuureista syntyvät lisätuntemattomat täytyy ensin voida arvioida kirjoittamalla sopivia lisäyhtälöitä. Tämä on erittäin vaikea tehtävä, jonka ainakin osittaiseksi ratkaisemiseksi tehdään paljon kokeellista ja teoreettista tutkimustyötä.

Periaatteessa kaikki nestemekaniikan suureet kuten $\vec{v}$, p, ρ, T, μ, jne. käyttäytyvät turbulenttisessa virtauksessa satunnaisesti. Jatkossa tullaan kuitenkin käsittelemään yksinkertaisuuden vuoksi lähinnä vain vakiotiheysnesteen (tällöin $\bar{\rho} = \rho =$ vakio, $\rho' = 0$) turbulenttista virtausta.

Jatkuvuusyhtälö. Johdetaan vakiotiheysnestettä koskevan jatkuvuusyhtälön (5.3.7') keskiarvomuoto. Jatkuvuusyhtälö on

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \,, \qquad (6.6.6)$$

jossa siis

$$v_x = \bar{v}_x + v_x' \,, \quad v_y = \bar{v}_y + v_y' \,, \quad v_z = \bar{v}_z + v_z' \,. \qquad (6.6.7)$$

Otetaan yhtälön (6.6.6) molempien puolten aikakeskiarvot:

$$\overline{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \qquad (6.6.8')$$

eli

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \bar{\vec{v}} = 0 \ .} \qquad (6.6.8)$$

On sovellettu taulukon 6.6.1 kaavoja (3) ja (5).

Keskiarvonopeuksia koskeva yhtälö (6.6.8) on siis täsmälleen vastaava kuin hetkellisiä nopeuksia koskeva yhtälö (6.6.6). Heilahtelunopeuksia sisältäviä termejä ei ilmesty mukaan tässä tapauksessa, joten turbulenssin käsittely ei aiheuta mitään vaikeuksia.

Heilahtelusuureita ilmestyy vasta silloin, kun yhtälöissä esiintyy kahden tai useamman satunnaissuureen tai niiden derivaattojen tuloja. Jos tarkastellaan esimerkiksi täydellistä jatkuvuusyhtälöä (5.3.3'):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \ , \qquad (6.6.9)$$

jossa nyt myös $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, saadaan

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z}} = \bar{0} \ ,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho v_x})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{\rho v_y})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{\rho v_z})}{\partial z} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}\bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho}\bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\rho}\bar{v}_z)}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial (\overline{\rho' v_x'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{\rho' v_y'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{\rho' v_z'})}{\partial z} = 0 \ . \qquad (6.6.10)$$

Tässä on sovellettu jo taulukon 6.6.1 kaavaa (9). Yhtälö (6.6.10) sisältää nyt siis myös heilahtelutermejä.

Liikeyhtälöt. Turbulenssin käsittelyssä on edullista käyttää Cauchyn liikeyhtälöissä (5.4.4) lauseketta (5.4.9). Komponenttimuotoiset liikeyhtälöt ovat siis

$$\left.\begin{aligned}
&\rho b_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \\
&\qquad \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}, \\
&\rho b_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \\
&\qquad \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z}, \\
&\rho b_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \\
&\qquad \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.11)$$

Pyritään keskiarvomuuttujissa lausuttuihin liikeyhtälöihin ja otetaan siis yhtälöiden (6.6.11) molemmista puolista aikakeskiarvot. Jotta käsittely tulisi kohtuullisen yksinkertaiseksi, rajoitutaan jälleen vakiotiheysnesteen tapaukseen. Satunnaissuureiksi jäävät jännityskomponentit, nopeuskomponentit ja vielä mahdollisesti kenttävoiman intensiteetti; tavallisesti kuitenkin kyseessä on deterministinen suure kuten painovoima. Taulukon 6.6.1 sääntöjä soveltamalla saadaan helposti tulos

$$\left.\begin{aligned}
&\rho \bar{b}_x + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} = \\
&\qquad \frac{\partial(\rho \bar{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_x \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_y \bar{v}_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_z \bar{v}_x)}{\partial z} +
\end{aligned}\right|$$

$$+ \frac{\partial(\rho\overline{v_x'v_x'})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\overline{v_y'v_x'})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\overline{v_z'v_x'})}{\partial z} , \qquad (6.6.12)$$

. . .

Koska tiheys ρ on vakio, se voitaisiin pitää myös derivointimerkkien ulkopuolella. Havaitaan, että keskiarvoliikeyhtälöihin ilmestyi myös heilahtelutermien yhdistelmiä $\overline{v_x'v_x'}$, $\overline{v_y'v_x'}$ jne. On tapana käyttää lyhennysmerkintöjä

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x^t &= -\rho\overline{v_x'v_x'} , & \tau_{yz}^t &= \tau_{zy}^t = -\rho\overline{v_y'v_z'} = -\rho\overline{v_z'v_y'} , \\ \sigma_y^t &= -\rho\overline{v_y'v_y'} , & \tau_{zx}^t &= \tau_{xz}^t = -\rho\overline{v_z'v_x'} = -\rho\overline{v_x'v_z'} , \\ \sigma_z^t &= -\rho\overline{v_z'v_z'} , & \tau_{xy}^t &= \tau_{yx}^t = -\rho\overline{v_x'v_y'} = -\rho\overline{v_y'v_x'} . \end{aligned}} \qquad (6.6.13)$$

Termeillä on jännityksen dimensio ja suureita (6.6.13) nimitetäänkin näennäisjännityksiksi, turbulenttisiksi jännityksiksi tai tavallisimmin Reynoldsin jännityksiksi (engl. apparent stress, Reynolds stress). Tensorimerkinnöin $\overleftrightarrow{\sigma}^t = -\rho\overline{\vec{v}'\vec{v}'}$.

Vakiotiheysnesteellä pätee yhtälö (6.6.8). Tämän perusteella ensimmäisen yhtälön (6.6.12) oikean puolen ensimmäinen rivi (ρ on vakio)

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x\bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y\bar{v}_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_z\bar{v}_x)}{\partial z}\right]$$

$$= \rho\left[\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial z} + \bar{v}_x\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \rho\frac{\bar{D}\bar{v}_x}{Dt} . \qquad (6.6.14)$$

On käytetty yläviivalla varustettua ainederivaattamerkintää

$$\frac{\bar{D}(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \bar{v}_x\frac{\partial(\ )}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial(\ )}{\partial y} + \bar{v}_y\frac{\partial(\ )}{\partial z} \qquad (6.6.15)$$

muistuttamaan, että tässä toimitaan konvektiivisten termien laskemisessa keskiarvonopeuskentän avulla. Suure $\bar{D}\bar{v}_x/Dt$ on siis

keskiarvonopeuskenttää vastaava kiihtyvyys. Kun otetaan huomioon kaava (6.6.14) ja lyhennysmerkinnät (6.6.13), yhtälöt (6.6.12) saadaan muotoon

$$\left.\begin{array}{l} \rho b_x + \dfrac{\partial(\bar{\sigma}_x+\sigma_x^t)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\bar{\tau}_{yx}+\tau_{yx}^t)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\bar{\tau}_{zx}+\tau_{zx}^t)}{\partial z} = \rho\,\dfrac{D\bar{v}_x}{Dt} \\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (6.6.16')$$

Nämä ovat vakiotiheysnesteen turbulenttisen virtauksen keskiarvosuureille kirjoitetut Cauchyn liikeyhtälön komponenttiyhtälöt karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa esitettyinä. Yleisen esityksen (5.4.4) vastineeksi tulee

$$\boxed{\rho\bar{\vec{b}} + \vec{\nabla}\cdot(\bar{\overleftrightarrow{\sigma}} + \overleftrightarrow{\sigma}^t) = \rho\,\frac{D\bar{\vec{v}}}{Dt}\,.} \qquad (6.6.16)$$

Samoin yhtälön (5.4.10) vastine on

$$\rho\bar{\vec{b}} - \vec{\nabla}\bar{p} + \vec{\nabla}\cdot(\bar{\overleftrightarrow{\sigma}}^* + \overleftrightarrow{\sigma}^t) = \rho\,\frac{D\bar{\vec{v}}}{Dt}\,. \qquad (6.6.17)$$

Yhteenvetona voidaan siis todeta, että keskiarvosuureille saadaan muodollisesti aivan samannäköiset liikeyhtälöt kuin ennenkin; keskiarvojännityksiä on ainoastaan täydennettävä Reynoldsin jännityksillä. Ne edustavat kuitenkin yleisessä tapauksessa kuutta lisätuntematonta, joiden käsittely on turbulenssiteorian ydinkohtia.

Reynoldsin jännitysten fysikaaliseen selittämiseen voidaan jälleen soveltaa junanvaunuanalogiaa (ks. kohta 3.4.3). Otaksutaan, että virtausta tarkkailee havaitsija, joka pystyy tekemään havaintoja vain keskimääräisestä virtauksesta, mutta turbulenttinen satunnaisliike pyörteineen jää häneltä huomaamatta. Pyörteiden mukana liikkuvat nesteosaset aiheuttavat voimakasta liikemäärän vaihtoa eri kerrosten välillä samaan tapaan kuin molekyylien tapauksessa, vaikkakin kyseessä on nyt eri mittakaavassa tapahtuva ilmiö; esimerkiksi lähteessä [6.11] on mainittu tietyissä kaasun virtauksissa tyypillisiksi pyörteiden mitoiksi arvo 0,1 mm.

Esitetyn havaitsijan kannalta liikemäärän vaihto näkyy jännityksinä.

Huomautus 2. Kaavoissa (6.6.16') ja (6.6.16) sekä (6.6.17) olisi voitu merkitä $\bar{D}\bar{v}_x/Dt \equiv \bar{a}_x$ sekä $\bar{D}\vec{\bar{v}}/Dt \equiv \vec{\bar{a}}$, jolloin kaavojen ulkonäkö olisi ollut lähempänä vastaavia hetkellisesti päteviä alkuperäisiä muotoja kuten (5.4.4). Tämä olisi kuitenkin harhaanjohtavaa ja jätetään tekemättä, koska hetkellisestä nopeuskentästä $\vec{v}$ lasketun kiihtyvyyden $\vec{a} = D\vec{v}/Dt = \partial\vec{v}/\partial t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$ aikakeskiarvo $\vec{\bar{a}}$ ei ole sama kuin keskiarvonopeuskentästä $\vec{\bar{v}}$ lasketun kiihtyvyyden arvo $\bar{D}\vec{\bar{v}}/Dt = \partial\vec{\bar{v}}/\partial t + \vec{\bar{v}}\cdot\vec{\nabla}\vec{\bar{v}}$. Huomattakoon, että kirjallisuudessa käytetään usein merkinnän $\bar{D}(\ )/Dt$ sijasta tavanomaista merkintää $D(\ )/Dt$.

— — —

Siirrytään tämän jälkeen tarkastelemaan Newtonin nestettä edelleen vakiotiheystapauksessa. Otaksutaan lisäksi, että myös viskositeetti on vakio eikä siis satunnaissuure. (Jos esimerkiksi lämpötila T heilahtelisi voimakkaasti, viskositeetti $\mu = \mu(T)$ voisi käyttäytyä samoin.) Jos viskositeettia ei pidetä satunnaissuureena, Stokesin kitkalaeista (5.2.23') syntyy lausekkeiden (3.3.69) perusteella ottamalla aikakeskiarvot yksinkertaiset yhteydet

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}^*_x &= 2\mu\bar{d}_x = 2\mu\,\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\,, \\ \bar{\tau}_{yz} &= \mu\bar{g}_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial\bar{v}_z}{\partial y}\right)\,, \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.18'')$$

eli

$$\{\bar{\sigma}^*\} = [D^*]\{\bar{d}\} = [D^*][{}_d\partial_v]\{\bar{v}\} \qquad (6.6.18')$$

eli

$$\bar{\sigma}^*_{ij} = 2\mu\bar{d}_{ij} = 2\mu\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i}\right)\,. \qquad (6.6.18)$$

Näitä suureita nimitetään usein laminaarisiksi jännityksiksi, koska niillä on keskiarvonopeuksien suhteen täsmälleen vastaavat

lausekkeet kuin laminaarisen virtauksen jännityksillä hetkellisten nopeuksien suhteen. Kun nämä konstitutiiviset yhteydet sijoitetaan liikeyhtälöihin (6.6.16) tai (6.6.17), syntyviä kaavoja nimitetään usein Reynoldsin liikeyhtälöiksi. Kirjoittamatta niitä todetaan, että ne ovat ulkonäöltään kuten Navier-Stokesin yhtälöt täydennettyinä Reynoldsin jännityksillä.

Jotta turbulenttisen virtauksen ratkaisua voitaisiin yleensä yrittää, Reynoldsin jännityksille täytyy esittää jonkinlaiset konstitutiiviset yhteydet. Boussinesq (v. 1877) ehdotti, että Reynoldsin jännityksille otetaan esitykset

$$\left.\begin{aligned}
-\rho\overline{v_x'v_x'} &\equiv \sigma_x^t = 2\mu^t\bar{d}_x - \left(\tfrac{2}{3}\rho k\right), \\
-\rho\overline{v_y'v_y'} &\equiv \sigma_y^t = 2\mu^t\bar{d}_y - \left(\tfrac{2}{3}\rho k\right), \\
-\rho\overline{v_z'v_z'} &\equiv \sigma_z^t = 2\mu^t\bar{d}_z - \left(\tfrac{2}{3}\rho k\right), \\
-\rho\overline{v_y'v_z'} &\equiv \tau_{yz}^t = \mu^t\bar{g}_{yz}, \\
-\rho\overline{v_z'v_x'} &\equiv \tau_{zx}^t = \mu^t\bar{g}_{zx}, \\
-\rho\overline{v_x'v_y'} &\equiv \tau_{xy}^t = \mu^t\bar{g}_{xy},
\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.19')$$

eli

$$-\rho\overline{v_i'v_j'} \equiv \sigma_{ij}^t = 2\mu^t\bar{d}_{ij} - \left(\tfrac{2}{3}\rho\delta_{ij}k\right), \qquad (6.6.19)$$

joissa

$$k = \tfrac{1}{2}(\overline{v_x'v_x'}+\overline{v_y'v_y'}+\overline{v_z'v_z'}) = \tfrac{1}{2}(\overline{v_x'^2}+\overline{v_y'^2}+\overline{v_z'^2}) . \qquad (6.6.20)$$

Suure μ^t on ns. turbulenttinen viskositeetti eli pyörreviskositeetti (engl. turbulent viscosity, eddy viscosity). Boussinesqin esittämässä muodossa kaavoista ilmeisesti puuttuivat suluissa olevat normaalijännityksiin liittyvät termit.

Tarkastellaan ensin hieman näiden termien ja suureen k merki-

tystä. Kun virtausta mitataan hyvän erotuskyvyn omaavalla laitteella, havaitaan, että myös laminaariselta näyttävässä virtauksessa esiintyy pientä heilahtelua, joka kasvaa Reynoldsin luvun kasvaessa. Tarkasti ottaen täytyy siis olla käytettävissä jokin heilahtelun suuruutta kuvaava mitta, jonka avulla virtaus kussakin pisteessä voidaan luokitella joko laminaariseksi tai turbulenttiseksi. Virtauksen liike-energia massaa kohti eli ns. ominaisliike-energia $1/2 \cdot v^2 dm/dm = 1/2 \cdot v^2$ sopii tähän tarkoitukseen. Ominaisliike-energian aikakeskiarvo

$$\frac{1}{2}\overline{v^2} = \frac{1}{2}\overline{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} = \frac{1}{2}(\overline{v_x v_x}+\overline{v_y v_y}+\overline{v_z v_z})$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{v}_x\bar{v}_x+\bar{v}_y\bar{v}_y+\bar{v}_z\bar{v}_z+\overline{v_x' v_x'}+\overline{v_y' v_y'}+\overline{v_z' v_z'})$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2+\bar{v}_z^2+\overline{v_x'^2}+\overline{v_y'^2}+\overline{v_z'^2})$$

$$= \frac{1}{2}\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\overline{v_x'^2}+\overline{v_y'^2}+\overline{v_z'^2}) = \frac{1}{2}\bar{v}^2 + k \ . \qquad (6.6.21)$$

Havaitaan, että ominaisliike-energian keskiarvo $1/2 \cdot \overline{v^2}$ on yhtä kuin keskiarvonopeuden avulla laskettu ominaisliike-energia $1/2 \cdot \bar{v}^2$ plus heilahtelunopeuksista kertyvä positiivinen lisätermi. (Positiivisen suureen kuten $v_x'^2 = v_x' v_x'$ aikakeskiarvo on luonnollisesti positiivinen. Tämän perusteella Reynoldsin jännitysten normaalikomponentit σ_x^t, σ_y^t ja σ_z^t ovat siis negatiivisia.)

Virtauksen ns. turbulenssiaste (engl. degree, level, intensity of turbulence) määritellään lausekkeena

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2}+\overline{v_y'^2}+\overline{v_z'^2}}}{\bar{v}} = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2}+\overline{v_y'^2}+\overline{v_z'^2}}}{\sqrt{3(\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2+\bar{v}_z^2)}} \ . \qquad (6.6.22)$$

Tämän arvoa $\approx 0{,}0001$ voidaan pitää käytännössä rajana, jonka alapuolella virtaus on laminaarista [6.10, s. 40].

Suureesta k käytetään kirjallisuudessa nimitystä turbulenssin liike-energia (engl. turbulence kinetic energy ($[k] = m^2 s^{-2}$). Kun kaavoista (6.6.19) lasketaan määritelmän (3.4.17) mukaisesti

Reynoldsin jännityksiin liittyvä paine

$$p^t = -\frac{1}{3}(\sigma_x^t+\sigma_y^t+\sigma_z^t) \ , \tag{6.6.23}$$

saadaan

$$p^t = -2\mu^t \frac{1}{3}(\cancel{\bar{d}_x+\bar{d}_y+\bar{d}_y}) + \left(\frac{2}{3}\rho k\right) = \left(\frac{2}{3}\rho k\right) . \tag{6.6.24}$$

(Keskiarvonopeuskenttään liittyvä dilataationopeus $\bar{d}_x+\bar{d}_y+\bar{d}_y$ häviää vakiotiheysnesteellä yhtälön (6.6.8) perusteella.) Toisaalta kaavoista (6.6.19) havaitaan myös suoraan tulos

$$p^t = -\frac{1}{3}(-\rho\overline{v_x'v_x'}-\rho\overline{v_y'v_y'}-\rho\overline{v_z'v_z'}) = \frac{2}{3}\rho k \ . \tag{6.6.25}$$

Jos siis käytettäisiin Boussinesqin esittämiä muotoja, kaava (6.6.24) antaisi paineelle arvon nolla, joka tulos olisi ristiriidassa kaavan (6.6.25) kanssa. Pitämällä kaavoissa (6.6.19) sulkulauseketermit mukana saadaan siis johdonmukainen esitys.

Jakamalla Reynoldsin jännitykset vielä paineosaan ja dilataatiosaan siten, että $\sigma_x^t = -p^t+\sigma_x^{*t}$, $\sigma_y^t = -p^t+\sigma_y^{*t}$, $\sigma_z^t = -p^t+\sigma_z^{*t}$ kaavojen (6.6.19) perusteella saadaan heti tulokset

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{*t} &= 2\mu^t\bar{d}_x = 2\mu^t \frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} \ , \\ \tau_{yz}^t &= \mu^t\bar{g}_{yz} = \mu^t\left(\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial\bar{v}_z}{\partial y}\right) \ , \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.6.26}$$

eli täsmälleen kaavoja (6.6.18) vastaavat muodot. Jos unohdetaan termin p^t osuus, havaitaan, että lausekkeiden (6.6.26) käyttö muuntaa Reynoldsin liikeyhtälöt Navier-Stokesin yhtälöiden muotoon, joissa vain on käytettävä todellisen viskositeetin μ sijasta ns. <u>efektiivistä viskositeettia</u> (engl. effective viscosity)

$$\mu^{eff} = \mu + \mu^t \ . \tag{6.6.27}$$

Usein turbulenttisessa virtauksessa $\mu << \mu^t$ ja kaava (6.6.26) voidaan kirjoittaa muotoon $\mu^{eff} \approx \mu^t$. (Virtausta rajoittavien seinämien välittömässä läheisyydessä turbulenssi häviää, jolloin termin μ osuus on oleellinen.)

Kaavojen (6.6.19) käyttö merkitsee itse asiassa siis vain, että olemme kätkeneet tietämättömyytemme tuntemattomaan kertoimeen μ^t, joka ei ole valitettavasti ainevakio, vaan riippuu virtauksen luonteesta ja vaihtelee myös siis paikan mukaan. Lisäksi kuutta tuntematonta suuretta on mallitettu vain yhden suureen μ^t avulla, joka ei ole välttämättä kovin realistista. Oikeastaan jokainen jännityskomponentti vaatisi oman pyörreviskositeettinsa.

Kaavoja (6.6.19) sovelletaan kuitenkin insinöörikirjallisuudessa melko paljon. Ehkä tavallisin viskositeetin μ^t arviointitapa perustuu ns. k-ε mallin käyttöön [6.11], jossa viskositeetin μ^t arvo kussakin pisteessä riippuu suureiden k ja ε arvoista ko. pisteessä. Suureille k ja ε on johdettu omat osittaisdifferentiaaliyhtälöt, jotka täytyy ratkaista samanaikaisesti muiden tehtävässä vallitsevien yhtälöiden kanssa. Suure k on kaavalla (6.6.20) määritelty turbulenssin liike-energia ja ε on kaavalla ($x \hat{=} 1$, $y \hat{=} 2$, $z \hat{=} 3$)

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i}\right)} \qquad (6.6.28)$$

määritelty ns. turbulenssin liike-energian dissipaationopeus (engl. rate of dissipation of turbulence kinetic energy) ($[\varepsilon] = m^2 s^{-3}$). Huomattakoon kuitenkin, että suureiden k ja ε lausekkeita ei sinänsä tarvita, koska k ja ε ovat suoraan tehtävän eräitä tuntemattomia.

Eräs vanhempi, seinämien läheisyydessä tapahtuvan turbulenttisen virtauksen käsittelyssä käytetty teoria perustuu ns. sekoittumispituusmallin (engl. mixing length model) käyttöön (Prandtl v. 1925).

Tässä ei puututa tämän enempää turbulenssimalleihin, vaan viitataan alan erikoiskirjallisuuteen.

Energiayhtälö. Otetaan malliesimerkiksi energiayhtälön muoto (5.6.36):

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q}^{c} + \rho r \ , \tag{6.6.29}$$

josta dissipaatiofunktio Φ on jätetty käsittelyn yksinkertaistamiseksi pois ja on merkitty $c_p \to c$. Lämmönjohtumiseen liittyvää lämpövuovektoria ei ole myöskään vielä haluttu esittää Fourierin lämmönjohtumislain avulla. Oletetaan lisäksi, että voimme pitää suureita ρ, c ja k ajan ja paikan suhteen vakioina.

Käytetään apuna esitystä (5.6.39'), jolloin yhtälö (6.6.29) saa yksityiskohtaisen muodon

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho c v_x T) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho c v_y T) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho c v_z T) +$$

$$- \frac{\partial q^c}{\partial x} - \frac{\partial q^c}{\partial y} - \frac{\partial q^c}{\partial z} + \rho r \ . \tag{6.6.30}$$

Tässä siis pidetään vain termejä T sekä v_x, v_y ja v_z satunnaissuureina: $T = \bar{T} + T'$, $v_x = \bar{v}_x + v_x'$, ... Otetaan yhtälön (6.6.30) molempien puolien aikakeskiarvot ja sovelletaan taulukon 6.6.1 laskusääntöjä. Saadaan tulos

$$\rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho c \bar{v}_x \bar{T}) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho c \bar{v}_y \bar{T}) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho c \bar{v}_z \bar{T}) +$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}(\rho c \overline{v_x' T'}) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho c \overline{v_y' T'}) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho c \overline{v_z' T'}) +$$

$$- \frac{\partial \bar{q}^c}{\partial x} - \frac{\partial \bar{q}^c}{\partial y} - \frac{\partial \bar{q}^c}{\partial z} + \rho \bar{r} = 0 \ . \tag{6.6.31}$$

Havaitaan, että keskiarvoenergiayhtälöön ilmestyi heilahteluter-mien yhdistelmät $\overline{v_x' T'}$, $\overline{v_y' T'}$ ja $\overline{v_z' T'}$. Käytetään lyhennysmerkintöjä

$$\boxed{q_x^t = \rho c \overline{v_x' T'} \ , \quad q_y^t = \rho c \overline{v_y' T'} \ , \quad q_z^t = \rho c \overline{v_z' T'} \ .} \tag{6.6.32}$$

Termeillä on lämpövuovektorin $\vec{q}$ dimensio. Suuretta $\vec{q}^{\,t} = \rho c \overline{\vec{v}' T'}$

voitaisiinkin nimittää vaikka näennäislämpövuovektoriksi tai turbulenttiseksi lämpövuovektoriksi.

Vakiotiheysnesteellä pätee yhtälö (6.6.8). Tämän perusteella ja koska c on vakio

$$\rho c \frac{\bar{D}\bar{T}}{Dt} = \rho c\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)$$

$$= \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c \bar{v}_x \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c \bar{v}_x \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c \bar{v}_y \bar{T}) +$$

$$= \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c \bar{v}_x \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c \bar{v}_x \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c \bar{v}_y \bar{T}) \quad . \qquad (6.6.33)$$

Kun otetaan huomioon tämä kaava ja lyhennysmerkinnät (6.6.32), keskiarvoenergiayhtälö (6.6.31) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boxed{\rho c \frac{\bar{D}\bar{T}}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot(\bar{\vec{q}}^c + \vec{q}^t) + \rho \bar{r} \ .} \qquad (6.6.34)$$

Vertailu yhtälön (6.6.29) kanssa osoittaa, että keskiarvosuureille saadaan muodollisesti aivan samannäköinen energiayhtälö kuin ennenkin; lämpövuovektoria on vain täydennettävä turbulenttisella lämpövuovektorilla.

Jos otaksutaan Fourierin lämmönjohtumislaki (5.2.40) ja otetaan siitä puolittain aikakeskiarvot, saadaan

$$\bar{\vec{q}}^c = -k\vec{\nabla}\bar{T} \qquad (6.6.35)$$

eli

$$\bar{q}_x^c = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} , \quad \bar{q}_y^c = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} , \quad \bar{q}_z^c = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} . \qquad (6.6.35')$$

Tavanomainen tapa esittää turbulenttinen konstitutiivinen yhteys on kirjoittaa kaavan (6.6.35) hengessä riippuvuus

$$\vec{q}^t = -k^t \vec{\nabla}\bar{T} \qquad (6.6.36)$$

eli

$$q_x^t = -k^t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \quad q_y^t = -k^t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad q_z^t = -k^t \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}. \qquad (6.6.36')$$

Kerroin k^t on nimeltään turbulenttinen lämmönjohtavuus tai pyörrejohtavuus (engl. turbulent thermal conductivity, eddy conductivity). On jälleen muistettava, että k^t ei ole nesteen aineominaisuus vaan sen arvo riippuu virtauksen luonteesta. Tietämättömyyteemme on kätketty kertoimeen k^t, jonka arvioimiseksi on esitetty alan kirjallisuudessa erilaisia turbulenssimalleja. Kaavan (6.6.27) vastineena on tässä esitys

$$k^{eff} = k + k^t . \qquad (6.6.37)$$

Jos k^{eff} ajatellaan tunnetuksi, yhtälön (6.6.34) käsittely tulee aivan vastaavaksi kuin laminaarisessa tapauksessa.

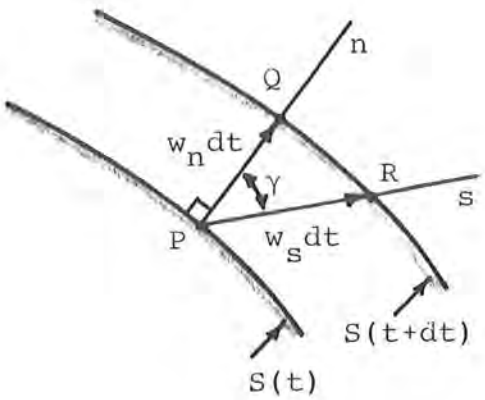
Turbulenttisen virtauksen laskemisesta insinöörimenetelmin voidaan yhteenvetona hieman kärjistäen todeta, että se on samantyyppistä kuin laminaarisessa virtauksessa; tuntemattomia tulee vain enemmän (esimerkiksi k ja ε). Täten kaikki laminaaristen virtausten numeerisissa laskentamenetelmissä saavutetut edistysaskeleet ovat todennäköisesti hyödynnettävissä myös turbulenttisten virtausten yhteydessä.

6.7 Pintojen kinematiikkaa

Yleistä. Seuraavassa tarkastellaan hieman pintojen liikettä. Syntyviä yhteyksiä voidaan soveltaa mm. eräiden Eulerin esityksessä tarvittavien reunaehtojen yhteydessä sekä epäjatkuvuuksien (esimerkiksi shokit) käsittelyssä.

Kolmessa dimensiossa olevan tietyn pinnan S(t) (kuva 6.7.1) yhtälö olkoon

$$\boxed{F(x,y,z,t) = 0 \,.} \qquad (6.7.1)$$



Kuva 6.7.1 Pinnan liike.

Jos aika t on mukana argumenttiluettelossa, pinnan asema muuttuu ajan muuttuessa ja voidaan puhua pinnan siirtymänopeudesta tai lyhyemmin vain pinnan nopeudesta. Tällöin on kuitenkin pidettävä tarkasti mielessä, onko kysymyksessä ns. ainepinta eli materiaalipinta (ks. kohta 3.4.5) vai sen vastakohtana matemaattisesti ilman kontinuumin mukana oloa määritelty pinta; sanotaan tätä lyhyesti vain pinnaksi. Ainepinta tarkoittaa koko ajan samoista kontinuumipartikkeleista muodostuvaa pintaa. Täten jos ainepinta on esimerkiksi tietyllä hetkellä valitun kappaleen eli systeemin reunapinta, tämä ainepinta on siis jatkuvasti ko. reunapinta (vrt. kuva 3.4.5).

Ainepinnan siirtymänopeuden määrittely ei tuota vaikeuksia; nopeus tietyssä pinnan pisteessä tietyllä hetkellä olkoon tässä pisteessä sijaitsevan partikkelin nopeus $\vec{v}$. Mutta mikä on pelkästään matemaattisesti määritellyn pinnan nopeus, kun pinta ei muodostukaan partikkeleista? Tässä käsittely täytynee hoitaa kuvan 6.7.1 osoittamalla tavalla. Asetetaan hetkellä t pinnalla olevan tietyn pisteen P kautta kulkevia suoria, kuten Ps ja Pn. Kun aika muuttuu, pinta leikkaa näitä suoria pisteissä Q ja R ja voidaan määritellä pinnan siirtymisnopeus tiettyyn suuntaan vastaavasti algebrallisten jananpituuksien PQ ja PR muutosnopeuksina

$$\boxed{w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PQ}{\Delta t} ,} \tag{6.7.2}$$

$$w_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PR}{\Delta t} . \tag{6.7.3}$$

Täten pelkän pinnan yhteydessä ei ole mielekästä puhua nopeudesta vektorina $\vec{w}$ vaan ainoastaan nopeudesta tiettyyn suuntaan. Normaalin suunta on luonnollisin, joten tavallisesti toimitaan juuri suureen w_n avulla. Kuvasta 6.7.1 nähdään, että

$$w_s = \frac{w_n}{\cos\gamma} . \tag{6.7.4}$$

Johdetaan pinnan normaalin suuntaisen siirtymisnopeuden w_n lauseke pinnan yhtälön (6.7.1) avulla. Matematiikasta muistetaan, että funktion $F(x,y,z,t)$ gradientti [3.2, s. 36]

$$\vec{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} \tag{6.7.5}$$

tietyssä pisteessä on kohtisuorassa tämän pisteen kautta kulkevaa funktion F tasa-arvopintaa (tässä siis pintaa $F = 0$) vastaan. Täten pinnan yksikkönormaali

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|} . \tag{6.7.6}$$

Otaksutaan, että kuvassa 6.7.1 esitetty suora Pn on suunnattu juuri yhtälön (6.7.6) määrittämään normaalin suuntaan. Pisteellä P olkoot ajan hetkellä t koordinaatit x, y ja z. Kun aika on kasvanut arvoon t+dt, pinta on siirtynyt kulkemaan pisteen Q kautta, jolla on koordinaatit $x + n_x w_n dt$, $y + n_y w_n dt$ ja $z + n_y w_n dt$, koska on liikuttu normaalin suunnassa. Koska pisteet P ja Q ovat siis hetkillä t ja t+dt kyseessä olevalla pinnalla, yhtälön (6.7.1) tulee toteutua eli

$$F_P \equiv F(x,y,z,t) = 0 , \tag{6.7.7}$$

$$F_Q \equiv F(x+n_x w_n dt,\ y+n_y w_n dt,\ z+n_z w_n dt,\ t+dt)$$

$$= F(x,y,z,t) + \frac{\partial F}{\partial x} n_x w_n dt + \frac{\partial F}{\partial y} n_y w_n dt +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial z} n_z w_n dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$= F_P + \left[\frac{\partial F}{\partial t} + (n_x \frac{\partial F}{\partial x} + n_y \frac{\partial F}{\partial y} + n_z \frac{\partial F}{\partial z}) w_n\right] dt$$

$$= 0 + \left[\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{n}\cdot\vec{\nabla}F) w_n\right] dt = 0 \ . \qquad (6.7.8)$$

Arvon F_Q laskemisessa on siis sovellettu ensimmäisen asteen Taylorin kehitelmää tai toisin sanoen funktion kokonaisdifferentiaalin lauseketta. Yhtälöstä (6.7.8) seuraa ensin tulos

$$w_n = - \frac{\partial F/\partial t}{\vec{n}\cdot\vec{\nabla}F} \ . \qquad (6.7.9)$$

Toisaalta kaavasta (6.7.6) saadaan

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}F = \frac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|}\cdot\vec{\nabla}F = \frac{|\vec{\nabla}F|^2}{|\vec{\nabla}F|} = |\vec{\nabla}F| \qquad (6.7.10)$$

ja lopullinen haluttu yhteys on siis

$$\boxed{w_n = - \frac{\partial F/\partial t}{|\vec{\nabla}F|} \ .} \qquad (6.7.11)$$

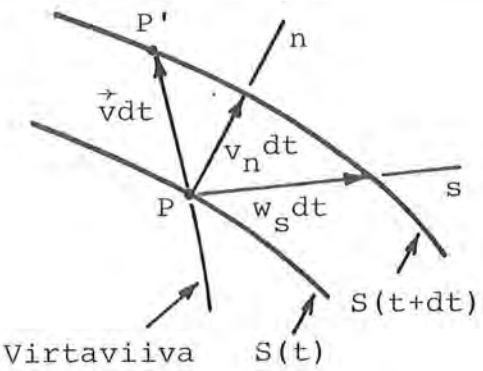
Jos pinta on paikoillaan avaruudessa, pinnan yhtälö on muotoa $F(x,y,z) = 0$, joten $\partial F/\partial t = 0$ ja siirtymänopeus on nolla kuten pitääkin.

Huomautus 1. Tärkeässä lähteessä [5.4] matemaattisen pinnan nopeus esitetään vektorina $\vec{v}$; siis vastoin edellä esitettyä, kuvaan 6.7.1 liittyvää tekstiä. Kuitenkin tutkimalla ko. lähteessä syntyviä lopullisia kaavoja havaitaan suureen $\vec{v}$ esiintyvän aina muodossa $\vec{n}\cdot\vec{v}$, joka siis vastaa kaavan (6.7.2) määrittelemää suuretta.

Ainepinnan liike. Kuvan 6.7.2 perusteella havaitaan, että ainepinnan liikkeessä ko. pinnan siirtymisnopeus normaalin suunnassa w_n on yhtä suuri kuin nopeuden $\vec{v}$ normaalin suuntainen komponentti $\vec{n}\cdot\vec{v} = v_n$ eli

$$w_n = v_n \,. \qquad (6.7.12)$$

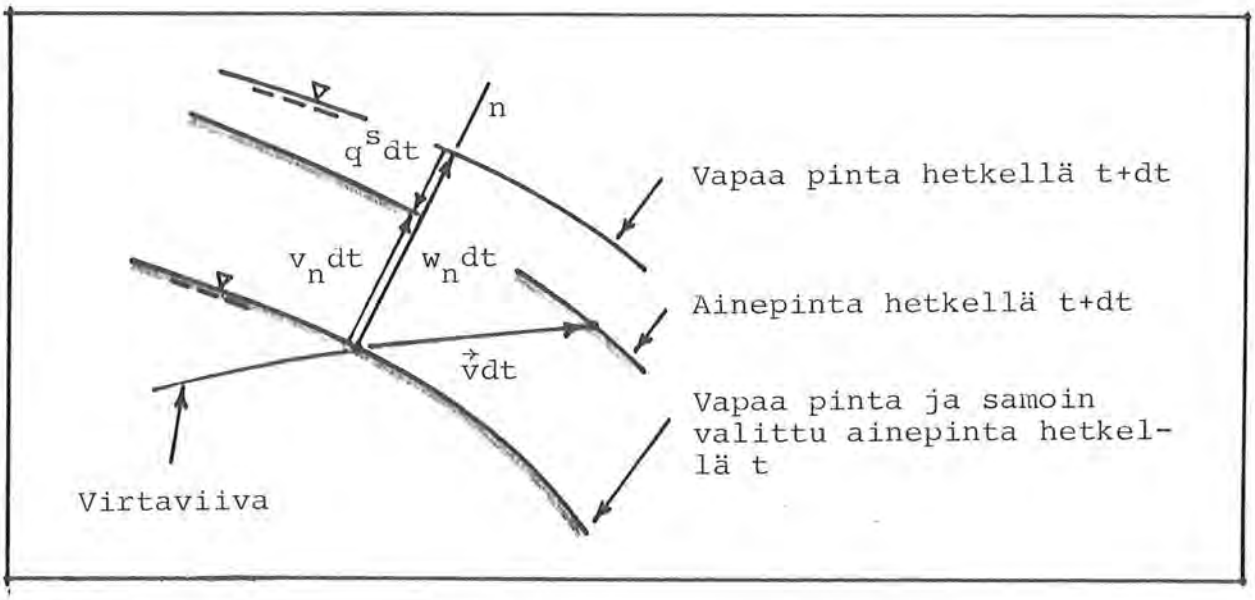
Sen sijaan pinnan siirtymisnopeus suuntaan s ei ole vektorin $\vec{v}$ komponentti tälle suunnalle vaan on käytettävä kaavaa (6.7.4).



Kuva 6.7.2 Ainepinnan liike.

Edellä esitettyjä käsitteitä tarvitaan lisäksi mm. ns. huokoisen seinämän (engl. porous wall) ja nesteen vapaan pinnan käsittelyssä, kun pintaan voi siirtyä nestettä (esimerkiksi sade) tai siitä voi tapahtua haihtumista. Huokoinen seinämä tarkoittaa nimensä mukaisesti huokosia sisältävää kiinteästä aineesta muodostunutta seinämää, jonka läpi tapahtuu nesteen virtausta; ns. suotovirtausta (engl. seepage). Tavallisin esimerkki tästä on veden virtaus maaperästä vesistöön.

Kuvassa 6.7.3 on tarkasteltu esimerkkinä vapaan pinnan liikettä



Kuva 6.7.3 Vapaan pinnan liike.

tapauksessa, jossa pintaan kertyy nestettä siten, että tilavuusvirran tiheys on q^s ($[q^s] = (m^3/s)/m^2 = ms^{-1}$); toisin sanoen nestekerros paksunee nopeudella q^s. Indeksi s viittaa sanaan seepage, mutta tässä q^s johtuu positiivisena esimerkiksi sateesta ja negatiivisena esimerkiksi haihtumisesta. Kuva 6.7.3 voisi esittää yhtä hyvin esimerkiksi muotoaan muuttavan huokoisen seinämän tapausta kun vain korvataan sana vapaa pinta sanalla seinämän reunapinta. Yleisesti pätee

$$\boxed{w_n = v_n + q^s ,} \tag{6.7.13}$$

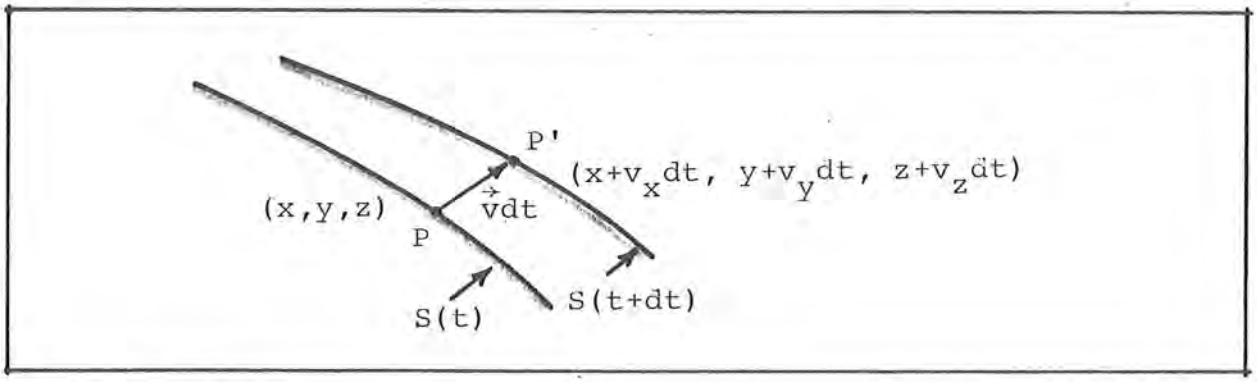
jossa siis w_n on kyseessä olevan pinnan siirtymisnopeus pinnan normaalin suunnassa, v_n on vastaavan ainepinnan nopeuden normaalin suuntainen komponentti ja q^s pintaan saapuvan tilavuusvirran tiheys (laskettuna positiivisena, kun virtaus lähestyy pintaa positiivisen n-akselin suunnasta). Usein termi q^s jää pois ja saadaan yksinkertaisempi tulos

$$w_n = v_n . \tag{6.7.14}$$

Olkoon tietyn ainepinnan yhtälö tässä myös muotoa (6.7.1):

$$F(x,y,z,t) = 0 . \tag{6.7.15}$$

Käsittely on samantyyppinen kuin edellä kuvaan 6.7.1 liittyvässä



Kuva 6.7.4 Ainepinnan liike.

johdossa. Pisteessä P, jonka koordinaatit ovat x, y ja z, hetkellä t ollut partikkeli on siirtynyt hetkellä t+dt pisteeseen P',

jonka koordinaatit ovat $x + v_x dt$, $y + v_y dt$ ja $z + v_z dt$ (kuva 6.7.4). Koska pisteet P ja P' ovat siis hetkillä t ja t+dt kyseessä olevalla ainepinnalla, yhtälön (6.7.15) tulee toteutua eli

$$F_P \equiv F(x,y,z,t) = 0 \ , \tag{6.7.16}$$

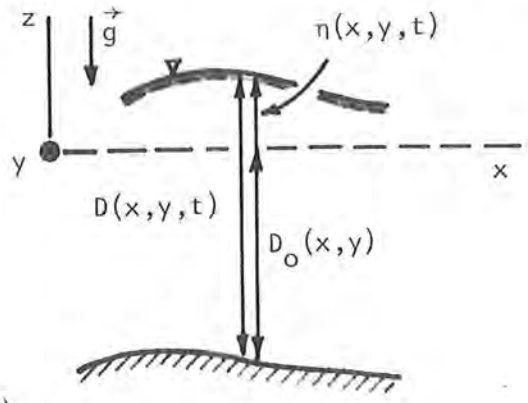
$$\begin{aligned} F_{P'} &\equiv F(x+v_x dt,\ y+v_y dt,\ z+v_z dt,\ t+dt) \\ &= F(x,y,z,t) + \frac{\partial F}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial F}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial F}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\ &= F_P + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} + v_z \frac{\partial F}{\partial z}\right) dt \\ &= 0 + \frac{DF}{Dt} dt = \frac{DF}{Dt} dt = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.7.17}$$

Täten ainepinnan yhtälön (6.7.15) vasemman puolen tulee toteuttaa koko ajan yhtälö

$$\boxed{\frac{DF}{Dt} = 0 \ ,} \tag{6.7.18}$$

jossa kyseessä on siis kaavan (6.3.60) mukainen ainederivaatta.

Esimerkki 6.7.1 Pinnan aaltoilu. Kuva (a) esittää nesteen aaltoiluun liittyvää asetelmaa. Taso z = 0 yhtyy vapaaseen pintaan, kun neste on lepotilassa. Aallon korkeusasema on $\eta(x,y,t)$, pohjan syvyys on $D_o(x,y)$ ja nesteen kokonaissyvyys $D = D_o + \eta$. Määritetään pinnalla ja pohjalla vallitsevat kinemaattiset ehdot.



(a)

Otaksutaan, että termi q^s on tässä vapaalla pinnalla nolla (ei sadetta eikä haihtumista), jolloin vapaa pinta on koko ajan ainepinta. Kirjoittamalla vapaan pinnan yhtälö

$$z = \eta(x,y,t) \tag{a}$$

muotoon $z - \eta = 0$ ja vertaamalla tätä yhtälöön (6.7.15) nähdään, että tässä

$$F = z - \eta(x,y,t) \ . \tag{b}$$

Täten ehto (6.7.18) antaa yhtälön

$$- \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z \frac{\partial z}{\partial z} = 0 \qquad \text{(c)}$$

eli

$$- \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z = 0 \ , \quad \text{kun } z = \eta \ . \qquad \text{(d)}$$

Pysyvässä virtauksessa $\eta = \eta(x,y)$ ja ehto saa muodon

$$- v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z = 0 \ . \qquad \text{(e)}$$

Kaava (6.7.5) antaa tässä

$$\vec{\nabla} F = - \frac{\partial \eta}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \vec{j} + 1\vec{k} \qquad \text{(f)}$$

ja siis

$$|\vec{\nabla} F| = \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{(g)}$$

Huomautettakoon, että usein kaltevuudet $\partial\eta/\partial x << 1$, $\partial\eta/\partial y << 1$, jolloin saadaan yksinkertainen approksimaatio $|\vec{\nabla} F| \approx 1$. Joka tapauksessa kaavan (6.7.6) perusteella $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{\nabla} F$ ja yhtälö (e) on siis samanarvoinen yhtälön $\vec{n} \cdot \vec{v} \equiv v_n = 0$ kanssa. Toisin sanoen pysyvässä virtauksessa virtausnopeusvektori $\vec{v}$ on vapaalla pinnalla pinnan tangenttitason suuntainen.

Otaksutaan samoin, että termi q^s häviää pohjalla (ei suotovirtausta). Pohjan muodostama pinta on tällöin koko ajan ainepinta tehtiinpä todellisen nesteen tai ideaalinesteen otaksuma. Edellisessä tapauksessa pohjaan koskettavat nestepartikkelit pysyvät paikoillaan jatkuvasti. Jälkimmäisessä tapauksessa nestepartikkelit liukuvat pitkin pohjaa. Pohjapinnan yhtälön

$$z = - D_o(x,y) \qquad \text{(h)}$$

perusteella tässä

$$F = -D_o(x,y) - z \ . \qquad \text{(i)}$$

Yhtälöstä (6.7.18) saadaan ehto

$$0 - v_x \frac{\partial D_o}{\partial x} - v_y \frac{\partial D_o}{\partial y} - v_z \frac{\partial z}{\partial z} = 0 \qquad \text{(j)}$$

eli

$$- v_x \frac{\partial D_o}{\partial x} - v_y \frac{\partial D_o}{\partial y} - v_z = 0 \ , \quad \text{kun } z = - D_o \ . \qquad \text{(k)}$$

Todellisella nesteellä $v_x = v_y = v_z = 0$ pohjalla, joten ehto (k) toteutuu automaattisesti. Ideaalinesteen tapauksessa ehto (k) on jälleen samanarvoinen kuin ehto $\vec{n} \cdot \vec{v} = v_n = 0$ eli että virtausnopeusvektorin tulee olla pohjan tangenttitason suuntainen. Usein ehtoa $v_n = 0$ sovelletaan myös todellisen nesteen mallin yhteydessä. Tämä merkitsee, että tarkastellaankin tilannetta hieman pohjapinnan yläpuolella.

Edellä kirjoitettiin pinnalla $F = z - \eta$ ja pohjalla $F = -D_o - z$. Aivan yhtä hyvin olisi tietenkin voitu ottaa vastaavasti $F = \eta - z$ ja $F = D_o + z$. Käytetyt valinnat tehtiin niin, että $\vec{\nabla}F$ tulee osoittamaan pinnalla ja pohjalla nestealueesta ulospäin.

6.8 Yleinen konvektio-diffuusioyhtälö

6.8.1 Yleistä

Tarkastellaan ns. yleistä konvektio-diffuusioyhtälöä (engl. convection-diffusion equation, advection-diffusion equation, convective transport equation)

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d - S = 0} \qquad (6.8.1)$$

↑	↑	↑	↑
Epästationaarisuus-termi	Konvektio-termi	Diffuusio-termi	Lähde-termi

eli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \{\nabla\}^T\{J^a\} + \{\nabla\}^T\{J^d\} - S = 0 \qquad (6.8.1')$$

eli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J_i^a}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J_i^d}{\partial x_i} - S = 0 \qquad (6.8.1'')$$

Edellä ns. konvektiovuovektori tai lyhyemmin konvektiovuo (engl. convection flux)

$$\boxed{\vec{J}^a = \vec{v}\phi} \qquad (6.8.2)$$

eli

$$\{J^a\} = \{v\}\phi \qquad (6.8.2')$$

eli

$$J_i^a = v_i\phi \ . \qquad (6.8.2'')$$

Ns. yleistetyn diffuusiovuovektorin tai lyhyemmän diffuusiovuon

(engl. diffusion flux) $\vec{J}^d$ ja suureen ϕ välinen tavallisin konstitutiivinen yhteys on tyyppiä

$$\boxed{\vec{J}^d = -\overleftrightarrow{\Gamma}\cdot\vec{\nabla}\phi} \tag{6.8.3}$$

eli

$$\{J^d\} = -[\Gamma]\{\nabla\}\phi \tag{6.8.3'}$$

eli

$$J_i^d = -\sum_{j=1}^{3} \Gamma_{ij} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}, \tag{6.8.3''}$$

jossa $\Gamma_{ji} = \Gamma_{ij}$. Tässä $\overleftrightarrow{\Gamma}$ ($[\Gamma]$) on yleistetty diffusiivisuustensori (diffusiivisuusmatriisi) (diffusiivisuus = engl. diffusivity).

Yhtälön (6.8.1) — tai ainakin läheisesti sitä muistuttavan yhtälön — havaitaan esiintyvän monessa yhteydessä, kun kontinuumin liikkeen käsittelyssä sovelletaan Eulerin esitystapaa. Suure $\phi(x_1,x_2,x_3,t)$ voi olla fysikaaliselta merkitykseltään kulloinkin esimerkiksi tiheys, tiheys kertaa lämpötila, seoksen virtauksessa tiheys kertaa tietyn seoskomponentin massaosuus ym. Kaavassa (6.8.1") on käytetty koordinaattiakselien tunnusten x, y ja z sijasta esityksen tiivistämiseksi merkintöjä x_1, x_2 ja x_3.

Yhtälö (6.8.1) saadaan mekaniikan säilymis- tai taseyhtälöitä soveltamalla. Yhtälöön merkitty konvektiotermi tai advektiotermi (konvektio eli kuljettuminen = engl. convection, advection) syntyy siitä, että kontinuumi kuljettaa mukanaan liikkeensä johdosta nopeudella $\vec{v}$ ainealkioihinsa sitoutunutta suuretta ϕ. (Konvektio ja advektio ovat tavallisesti synonyymejä. Edellinen esiintyy yleisemmin insinöörikirjallisuudessa ja jälkimmäinen meteorologiassa, jossa termi konvektio liittyy ilmamassojen pystyliikkeeseen [6.12, s.10]. Koska tunnus c on jo varattu viittaamaan johtumiseen, käytämme konvektion yhteydessä tässä tunnusta a.)

Ns. diffuusiotermi kuvaa suureen ϕ arvon muuttumista paikan suhteen periaatteessa levossa olevan materian läpi tapahtuvien

mikroskooppisten mekanismien johdosta (esimerkiksi lämmönsiirrossa johtumisen ja säteilyn osuus). Attribuuttia yleistetty käytetään korostamaan sitä, että diffuusio-sana voi tässä liittyä muunkinlaiseen tapahtumaan kuin seosten komponenttien liikkeeseen, jossa yhteydessä termiä normaalisti käytetään. Kaavat (6.8.3) on varustettu miinusmerkeillä, koska näin matriisin $[\Gamma]$ lävistäjäalkiot tulevat tavallisesti positiivisiksi. (Esimerkiksi lämpö virtaa lämpötilan laskevaan suuntaan.)

Lähdetermi (engl. source term) kuvaa yleisesti suureen ϕ syntymistä esimerkiksi kemiallisen reaktion johdosta ja epästationaarisuustermi (engl. unsteady term) kuvaa taas luonnollisesti ilmiön mahdollisesta aikariippuvuudesta johtuvaa suureen ϕ arvon muuttumista.

Konvektio-diffuusioyhtälö saa siis lausekkeita (6.8.2) ja (6.8.3) käytettäessä lopullisen muodon

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\phi) - \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\Gamma}\cdot\vec{\nabla}\phi) - S = 0\ .} \qquad (6.8.4)$$

Konvektio-diffuusioyhtälöä käsitellään tässä lähinnä kahdesta syystä. Ensinnäkin eräät numeeriset ratkaisualgoritmit (ks. esimerkiksi [6.13]) pitävät kaikkia nestemekaniikan yhtälöitä yhtälön (6.8.4) erikoistapauksina kätkemällä formulaatioon sopimattomat lausekkeet lähdetermiin S. Tällä filosofialla käsittely tulee ajatuksellisesti hyvin suoraviivaiseksi. Toiseksi yhtälön (6.8.4) ääritapauksia tarkastelemalla saadaan lisävalaistusta mielekkäiden reunaehtojen tyypeistä ja ratkaisun yleisestä kvalitatiivisesta kulusta.

Huomautus 1. Konvektio-diffuusioyhtälö esiintyy kirjallisuudessa hyvin usein — kuten esimerkiksi lähteessä [6.13] — muodon (6.8.4) sijasta muodossa

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\psi) - \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\Gamma}\cdot\vec{\nabla}\psi) - S = 0\ ,} \qquad (6.8.5)$$

jossa ρ on tiheys ja siis nyt

$$\vec{J}^a = \rho\vec{v}\psi \ , \quad \vec{J}^d = -\overleftrightarrow{\Gamma}\cdot\vec{\nabla}\psi \ . \tag{6.8.6}$$

Se, kumpaa muotoa on mukavampi käyttää riippuu tapauksesta. Pyritään tekemään ero yhtälömuotojen (6.8.4) ja (6.8.5) välillä eri tunnusten ϕ ja ψ käytöllä. Toisesta muodosta päästään aina toiseen merkitsemällä vastaavasti $\phi = \rho\psi$, $\overleftrightarrow{\Gamma} := \overleftrightarrow{\Gamma}/\rho$ tai $\psi = \phi/\rho$, $\overleftrightarrow{\Gamma} := \rho\overleftrightarrow{\Gamma}$. Vielä jos ρ ei ole paikan suhteen vakio, lähdetermiin tulee kätkeä tiettyjä lisälausekkeita. Joskus yhtälöiden vasemmilla puolilla esiintyy lisäksi termi $c\phi$ tai $c\psi$, jossa annettu kerroin c on ns. yleistetty nielutekijä (engl. generalized sink factor).

Tulon derivoimissäännön ja jatkuvuusyhtälön soveltaminen voi muuttaa huomattavasti konvektio-diffuusioyhtälön ulkomuotoa. Esimerkiksi termi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\psi)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i\psi)$$

$$= \rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i \rho v_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \sum_i \psi\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_i)$$

$$= \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_i v_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) + \psi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_i)\right]$$

$$= \rho\frac{D\psi}{Dt} + \psi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right] = \rho\frac{D\psi}{Dt} \tag{6.8.7}$$

ja yhtälö (6.8.5) saa muodon

$$\boxed{\rho\frac{D\psi}{Dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d - S = 0 \ .} \tag{6.8.5'}$$

Vastaavasti termi

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\phi)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i\phi)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \sum_i \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$= \frac{D\phi}{Dt} + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \qquad (6.8.8)$$

ja yhtälö (6.8.4) saa muodon

$$\boxed{\frac{D\phi}{Dt} + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d - S = 0\ .} \qquad (6.8.4')$$

Todettakoon vielä, että konvektio — diffuusioyhtälön suure ϕ tai ψ voi olla myös vektori. Tällöin esimerkiksi termit $\vec{v}\vec{\phi}$ ja $\vec{v}\vec{\phi}$ ovat toisen kertaluvun tensoreita eli dyadejä.

Huomautus 2. Nestemekaniikan kirjallisuudessa puhutaan usein säilymislaeista tai -yhtälöistä (engl. conservation law); esimerkiksi liikemäärän säilymislaki. Yleensä kuitenkin vain kappaleen massa säilyy ja on siis oikeampaa puhua taseyhtälöistä.

Toinen äskeistä muistuttava, mutta hieman eri asiaa merkitsevä sanonta on: yhtälö on kirjoitettu säilymismuotoon tai divergenssimuotoon (engl. conservation form, divergence form). Tarkastellaan ainetilavuuksiin V(t) liittyviä integraaleja

$$I(t) = \int_{V(t)} \phi(\vec{r},t)dV \qquad (6.8.9)$$

ja

$$J(t) = \int_{V(t)} \rho(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)dV\ . \qquad (6.8.10)$$

Ne kuvaavat valittuun kappaleeseen liittyviä tietyn suureen kokonaisarvoja. Edellisessä ϕ on suureen I intensiteetti tilavuutta kohti ja jälkimmäisessä ψ on suureen I intensiteetti massaa kohti. Jos I ja J säilyvät, DI/Dt = 0 ja DJ/Dt = 0. Reynoldsin lauseen muoto (3.3.88) antaa tällöin globaalit yhtälöt

$$\int_V \frac{\partial\phi}{\partial t}\, dV + \int_S v_n\phi dS = 0 \qquad (6.8.11)$$

ja

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi)dV + \int_S v_n \rho\psi dS = 0 \ . \qquad (6.8.12)$$

Toisaalta Gaussin lauseen soveltaminen johtaa muotoihin

$$\int_V [\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\phi)]dV = 0 \qquad (6.8.11')$$

ja

$$\int_V [\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\psi)]dV = 0 \ . \qquad (6.8.12')$$

Vastaavat paikalliset yhtälöt ovat siis

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\phi) = 0 \qquad (6.8.13)$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\psi) = 0 \ . \qquad (6.8.14)$$

Mm. näiden yhtälöiden sanotaan olevan säilymismuodossa. Nimityksen selitys lienee siis siinä, että vastaavat integraalit I ja J säilyvät arvoiltaan vakiona. Yhtälöiden vasempien puolien nähdään esiintyvien osana konvektio-diffuusioyhtälöiden (6.8.4) ja (6.8.5) vasempia puolia. Yleensäkin kun kirjallisuudessa puhutaan säilymis- tai divergenssimuodosta, sillä näytetään tarkoittavan yhtälöä, jossa esiintyy "mahdollisimman paljon" muotoa $\vec{\nabla}\cdot(\ )$-olevia termejä. Esittämämme konvektio-diffuusioyhtälöt (6.8.4) ja (6.8.5) ovat siis säilymismuodossa. Sen sijaan versiot (6.8.4') ja (6.8.5') eivät ole. Tähän aihepiiriin palataan vielä kohdassa 6.8.3.

Nestemekaniikan probleemoissa esiintyy yleensä useita samanaikaisia konvektio-diffuusioyhtälöitä, joissa kussakin suureella ϕ tai ψ on eri merkitys ja ratkaisu on siis etsittävä kytkettyjen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden muodostamasta ryhmästä. Lähteessä [6.13] esitetty ratkaisufilosofia lähtee kuitenkin liikkeelle siitä, että kukin ϕ tai ψ ratkaistaan "omasta" yhtälöstään, jossa tällöin muita suureita pidetään annettuina. Koska

yhtälösysteemi on yleensä aina epälineaarinen (etenkin liikeyhtälöiden kautta), joudutaan joka tapauksessa soveltamaan iteratiivista ratkaisutapaa, joten tämä ajattelu on täysin luontevaa. Kunkin yhtälön muut suureet kuin sen ϕ tai ψ on siis ajateltava tunnetuiksi edellisistä iteraatiokierroksista. (Käytännössä yhtälöt on lisäksi vielä luonnollisesti diskretoitava.) Todettakoon, että näin ajatellen kukin konvektio-diffuusioyhtälö on lineaarinen suureen ϕ tai ψ suhteen.

Tarkastellaan esimerkkeinä kolmen yhtälön — jatkuvuusyhtälön, energiayhtälön ja liikeyhtälön — tulkitsemista konvektio-diffuusioyhtälöiksi.

Jatkuvuusyhtälö (5.3.3) on

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho) = 0 \ . \tag{6.8.15}$$

Yhtälöstä (6.8.4) tai (6.8.5) saadaan heti tulkinta

$$\phi \mathrel{\hat{=}} \rho \quad \text{tai} \quad \psi \mathrel{\hat{=}} 1 \ , \quad \vec{J}^d = \vec{0} \ , \quad S = 0 \ . \tag{6.8.16}$$

Energiayhtälö (5.6.35) on kokoonpuristumattomassa tapauksessa (jaetaan yhtälö termillä c_V ja merkitään $c_V \to c$)

$$\rho\,\frac{DT}{Dt} - \frac{1}{c}\,\vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) - \frac{\rho r}{c} - \frac{\Phi}{c} = 0 \tag{6.8.17}$$

eli (ks. kaava (6.8.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}T) - \vec{\nabla}\cdot(\frac{k}{c}\,\vec{\nabla}T) - \frac{\rho r}{c} - \frac{\Phi}{c} = 0 \ . \tag{6.8.17'}$$

Vertailu yhtälöön (6.8.5) antaa tulkinnan

$$\psi \mathrel{\hat{=}} T \ , \quad \overleftrightarrow{\Gamma} \mathrel{\hat{=}} \frac{k}{c}\overleftrightarrow{I}, \quad S \mathrel{\hat{=}} \frac{\rho r}{c} + \frac{\Phi}{c} \ . \tag{6.8.18}$$

Yhtälöön (6.8.17) on päästy otaksuen c paikan suhteen vakioksi. Jos näin ei ole, lähdetermiin tulee lisälauseke.

Liikeyhtälöt (5.4.10) ovat (ks. kaava (5.4.9))

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) - \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* + \vec{\nabla}p - \rho\vec{b} = \vec{0} \ . \tag{6.8.19}$$

Vertailu yhtälön (6.8.5) kanssa antaa tulkinnan

$$\vec{\psi} \mathrel{\hat{=}} \vec{v} \ , \quad \overleftrightarrow{J}^{d} \mathrel{\hat{=}} -\overleftrightarrow{\sigma}^{*} \ , \quad \vec{S} \mathrel{\hat{=}} -\vec{\nabla}p + \rho\vec{b} \ . \tag{6.8.20}$$

Stokesin kitkalain vallitessa $\overleftrightarrow{\sigma}^{*} = 2\mu\overleftrightarrow{d} + \lambda^{*}d_{V}\overleftrightarrow{I}$ (ks. kaavat (5.2.23)). Tämä ei ole aivan muotoa $-\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$, vaikka tähänkin esitysmuotoon tietenkin päästään niin haluttaessa sopivien manipulointien avulla siirtämällä tiettyjä lausekkeita lähdetermiin. Oleellista on, että $\vec{J}^{d}$ riippuu joka tapauksessa $\vec{v}$:n derivaatoista eikä itse $\vec{v}$:stä kuten $\vec{J}^{a}$. Jotta voisimme pitää liikeyhtälöä lineaarisena, meidän tulee ajatella liikemäärävuotensoria $\rho\vec{v}\vec{v}$ esityksenä $\rho\bar{\vec{v}}\vec{v}$, jossa $\bar{\vec{v}}$ on esimerkiksi edellisen iteraation kautta tunnettu suure. Huomataan vielä, että myös termi $\vec{\nabla}p$ voidaan esittää divergenssimuodossa, sillä $\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\cdot(p\overleftrightarrow{I})$.

6.8.2 Peclet'n luku ja reunaehdot

Yleistä. Konvektio-diffuusioyhtälön (6.8.4) tai (6.8.5) termien tarkastelu osoittaa, että esimerkiksi suureilla $v_1\phi$ ja $\Gamma_{11}\partial\phi/\partial x_1$ tai vastaavasti suureilla $\rho v_1\psi$ ja $\Gamma_{11}\partial\psi/\partial x_1$ on sama dimensio. Voidaan siten päätellä, että vastaavasti

$$\boxed{Pe = \frac{vL}{\Gamma}} \quad \text{tai} \quad \boxed{Pe = \frac{\rho vL}{\Gamma}\,,} \tag{6.8.21}$$

ns. Peclet'n luku (engl. Peclet number), on dimensioton suure, joka kuvaa tietyllä tavalla konvektion ja diffuusion voimakkuuksien suhdetta. Suure v on sovittu karakteristinen virtausvauhti, L sovittu karakteristinen pituus ja Γ sovittu karakteristinen diffusiivisuus.

Nähdään, että jatkuvuusyhtälön (6.8.15) $Pe = \infty$. Energiayhtälöllä (6.8.17) $Pe = vL\rho c/k$, jossa k on karakteristinen lämmönjohtavuus. Liikeyhtälöiden (6.8.19) Peclet'n luvun havaitaan olevan kaavalla (5.1.4) määritellyn Reynoldsin luvun $Re = \rho vL/\mu$.

Konvektio-diffuusioyhtälöä on mielenkiintoista tarkastella ääritapauksissa $Pe = \infty$ ja $Pe = 0$. Edellisessä tapauksessa diffuusion osuus häviää kokonaan konvektion rinnalla ja saadaan ns. puhdas konvektioyhtälö (engl. pure convection equation). Jälkimmäisessä tapauksessa konvektion osuus häviää diffuusion rinnalla ja saadaan ns. puhdas diffuusioyhtälö (engl. pure diffusion equation). Vastaavasti yhtälön kertaluku alenee edelliseen tapaukseen siirryttäessä kahdesta yhteen, mikä seikka tulee näkymään myös reunaehdoissa.

Osoittautuu, että virtauksen suunnalla alueen reunan suhteen on tärkeä merkitys reunaehtojen kannalta. Luokitellaan alueen (otetaan tässä tasoalue) A reuna virtauskentän perusteella yleisesti kolmeen osaan s_1^v, s_2^v ja s_3^v (yläviite v viittaa virtausnopeuteen $\vec{v}$), joita nimitetään vastaavasti sisäänvirtausreunaksi (engl. inflow boundary), neutraaliksi reunaksi (engl. neutral boundary) ja ulosvirtausreunaksi (engl. outflow boundary). Luokittelu tapahtuu seuraavasti:

sisäänvirtausreuna s_1^v , jos $v_n < 0$,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{neutraali reuna} & s_2^v\,, & \text{jos } v_n = 0\,, \\ \text{ulosvirtausreuna} & s_3^v\,, & \text{jos } v_n > 0\,. \end{array}\right\} \qquad (6.8.22)$$

Edellä $v_n \equiv \vec{n}\cdot\vec{v}$ on virtausnopeuden normaalikomponentti reunan suhteen eli ns. normaalinopeus. Neutraali reuna esiintyy, kun $\vec{v} = \vec{0}$ (esimerkiksi todellisen nesteen virtaus kiinteän seinämän kohdalla) tai kun $\vec{v}$ on yhdensuuntainen reunan kanssa (esimerkiksi ideaalinesteen virtaus kiinteän seinämän kohdalla).

Havainnollisuuden saavuttamiseksi siirrytään tarkastelemaan ensin pysyvää tasovirtausta (x_1x_2-taso) ja merkitään $x_1 \to x$, $x_2 \to y$, indeksi $1 \to x$, indeksi $2 \to y$. Selostamme tilannetta yhtälön (6.8.4) kannalta, jolloin siis yhtälömme on

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\phi) + \frac{\partial J_x^d}{\partial x} + \frac{\partial J_x^d}{\partial y} - S = 0\,, \qquad (6.8.23)$$

jossa diffuusiovuokomponentit ovat vielä

$$\left.\begin{array}{l} J_x^d = -(\Gamma_{xx}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \Gamma_{xy}\dfrac{\partial\phi}{\partial y})\,, \\[2ex] J_y^d = -(\Gamma_{yx}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \Gamma_{yy}\dfrac{\partial\phi}{\partial y})\,. \end{array}\right\} \qquad (6.8.24)$$

<u>Puhdas konvektioyhtälö</u>. Yhtälöä (6.8.23) vastaava puhdas konvektioyhtälö on

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y) - S = 0\,. \qquad (6.8.25)$$

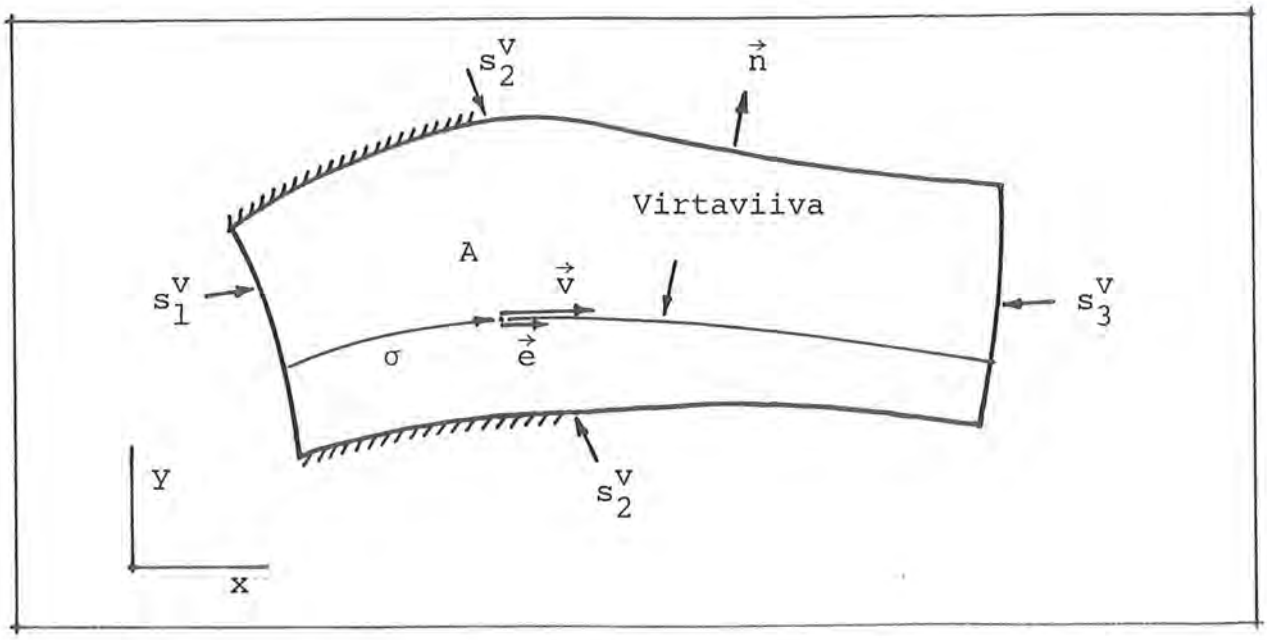
Tulon derivoimissääntöä soveltamalla saadaan myös muoto

$$v_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y})\phi - S = 0\,. \qquad (6.8.25')$$

Jos kyseessä on kokoonpuristumattoman nesteen virtaus, kokoonpuristumattomuusehto $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$ saattaa yhtälön vielä yksinkertaisempaan muotoon

$$v_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\phi}{\partial y} - S = 0\,. \qquad (6.8.26)$$

Tarkastellaan yhtälön (6.8.25') käyttäytymistä tietyllä virtaviivalla. Käytetään kuvan 6.8.1 mukaisia merkintöjä. Olkoon



Kuva 6.8.1 Eräitä merkintöjä.

virtaviivan suuntainen yksikkövektori $\vec{e}$. Täten

$$v_x = e_x v \ , \quad v_y = e_y v \ , \tag{6.8.27}$$

jossa v on skalaarinen virtausnopeus. Suureen $\phi(x,y)$ derivaatta tiettyyn suuntaan $\vec{e}$ saadaan kaavasta

$$\frac{\partial\phi}{\partial e} = e_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \ , \tag{6.8.28}$$

joten yhtälön (6.8.25') termi

$$v_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\phi}{\partial y} = v(e_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\phi}{\partial y}) = v \frac{\partial\phi}{\partial e} \ . \tag{6.8.29}$$

Puhdas konvektioyhtälö saadaan siis tietyllä virtaviivalla muotoon (merkitään $\partial\phi/\partial e = d\phi/d\sigma$, jossa σ on virtaviivaa pitkin sisäänvirtausreunalta alkaen mitattu kaarenpituus)

$$v \frac{d\phi}{d\sigma} + (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y})\phi - S = 0 \ . \tag{6.8.30}$$

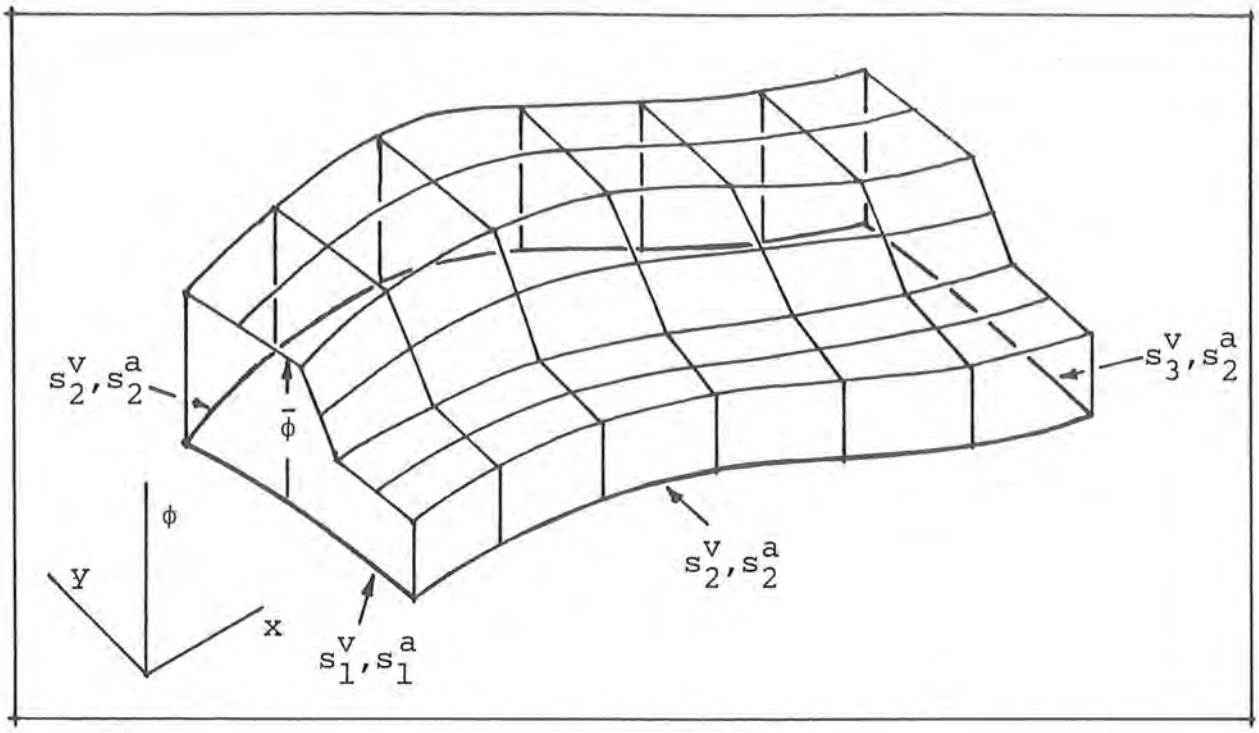
Koska sovitun filosofian mukaisesti suureita $\vec{v}$ (eli v_x, v_y ja v) ja S pidetään alueessa tunnettuina, ne tunnetaan myös periaatteessa virtaviivalla suureen σ funktioina. Täten stationaarinen puhdas konvektioyhtälö on tietyllä virtaviivalla tavallinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jossa riippumattomana muuttujana on virtaviivaa pitkin mitattu kaarenpituus.

Suure ϕ määräytyy kullakin virtaviivalla periaatteessa ko. differentiaaliyhtälön ratkaisuna, kun vain ϕ:n arvo on annettu yhdessä pisteessä virtaviivalla. Matemaattisesti tämä piste voisi sijaita missä hyvänsä virtaviivalla. Fysikaalisista syistä ϕ:n arvo on kuitenkin annettava sisäänvirtausreunalla. (Analoginen tilanne olisi esimerkiksi partikkelin vino heittoliike. Rata määräytyy matemaattisesti takaperin esimerkiksi antamalla partikkelin asema ja nopeus partikkelin pudotessa maahan. Mutta todellisuudessa vino heittoliike syntyy vain lähettämällä partikkeli liikkeelle tietystä asemasta tietyllä nopeudella.) Täten puhtaaseen konvektioyhtälöön liittyvä reunaehto on

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{reunalla } s_1^a \equiv s_1^v \,. \tag{6.8.31}$$

Lopulla osaa reunaa $s_2^a \equiv s_2^v \cup s_3^v$ ei tarvitse — eikä saakaan — antaa reunaehtoja. (Yläviite a viittaa puhtaaseen konvektioyhtälöön liittyvään reunan jaotteluun.)

Puhdas konvektioyhtälö kuvaa siis kohdan 4.7.4 huomautuksen 1 mukaan etenemistehtävää, koska reunaehtoja ei ole annettu alueen kaikilla reunoilla. Alan kirjallisuuden [4.5] mukaan kyseessä on hyperbolinen tapaus ja virtaviivojen havaitaan olevan karakteristikoita. Oleellista on, että mahdolliset funktiossa $\bar{\phi}(s)$ esiintyvät epäsileydet säilyvät ja siirtyvät tasoittumatta alueeseen. Havainnollisimmin tämä voidaan todeta kokoonpuristumattoman virtauksen yhteydessä, kun vielä lähdetermi S = 0. Tällöin yhtälö (6.8.30) saa muodon $d\phi/d\sigma = 0$ eli ϕ on vakio kullakin virtaviivalla. Kuva 6.8.2 esittää kvalitatiivisesti tyypillisen ratkaisun kulkua. Jos $\bar{\phi}$ olisi täysin epäjatkuva — siis hyppäys — sekin säilyisi alueessa tasoittumatta.



Kuva 6.8.2 Puhtaan konvektioyhtälön kvalitatiivinen ratkaisu.

Huomautus 1. Jos kuvan 6.8.1 esityksestä poiketen alueen sisällä on sulkeutuvia virtaviivoja, ne on periaatteessa ajateltava katkaistuiksi ja ϕ:n arvo annetuksi katkaisuviivan toisella puolella, jotta ϕ määräytyisi koko alueessa.

Puhdas diffuusioyhtälö. Yhtälöä (6.8.23) vastaava puhdas diffuusioyhtälö on (vaihdetaan merkit)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_{xx}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \Gamma_{xy}\frac{\partial\phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{yx}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \Gamma_{yy}\frac{\partial\phi}{\partial y}) + S = 0 \ , \qquad (6.8.32)$$

Kehittämällä saadaan ($\Gamma_{yx} = \Gamma_{xy}$)

$$\Gamma_{xx}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\Gamma_{xy}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \Gamma_{yy}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = f \ , \qquad (6.8.32')$$

jossa

$$f = -[S + (\frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yx}}{\partial y})\frac{\partial \phi}{\partial x} + (\frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial x})\frac{\partial \phi}{\partial y}] \ . \qquad (6.8.33)$$

Tämä on elliptinen yhtälö, mikäli [4.2, s. 355]

$$\Delta \equiv (2\Gamma_{xy})^2 - 4\Gamma_{xx}\Gamma_{yy} = 4(\Gamma_{xy}^2 - \Gamma_{xx}\Gamma_{yy}) < 0 \ . \qquad (6.8.34)$$

Jos diffusiivisuusmatriisi $[\Gamma]$ on positiivisesti definiitti — kuten fysikalisista syistä johtuen yleensä on asianlaita —, pätee mm. [4.2, s. 15]

$$\det[\Gamma] = \Gamma_{xx}\Gamma_{yy} - \Gamma_{xy}^2 > 0 \ . \qquad (6.8.35)$$

Tällöin siis epäyhtälö (6.8.34) toteutuu ja täten stationaarinen puhdas diffuusioyhtälö on toisen kertaluvun elliptinen osittais-differentiaaliyhtälö eli reuna-arvotehtävä. Alueen A kaikilla reunoilla on siis annettava reunaehtoja.

Tavallisimmat reunaehdot ovat Dirichlet'n reunaehto

$$\phi = \bar{\phi} \qquad s_1^d\text{:llä} \qquad (6.8.36)$$

ja Neumann-tyyppinen reunaehto

$$J_n^d \equiv \vec{n}\cdot\vec{J}^d = \bar{J}_n^d \qquad s_2^d\text{:llä} \qquad (6.8.37)$$

eli

$$-n_x(\Gamma_{xx}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \Gamma_{xy}\frac{\partial \phi}{\partial y}) - n_y(\Gamma_{yx}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \Gamma_{yy}\frac{\partial \phi}{\partial y}) = \bar{J}_n^d \ . \qquad (6.8.37')$$

Osat s_1^d ja s_2^d muodostavat yhdessä koko reunan eli $s = s_1^d \cup s_2^d$. (Yläviite d viittaa puhtaaseen diffuusioyhtälöön liittyvään reunan jaotteluun.)

Tarkastellaan yhtälön (6.8.32) erikoistapauksena Poissonin yhtälöä

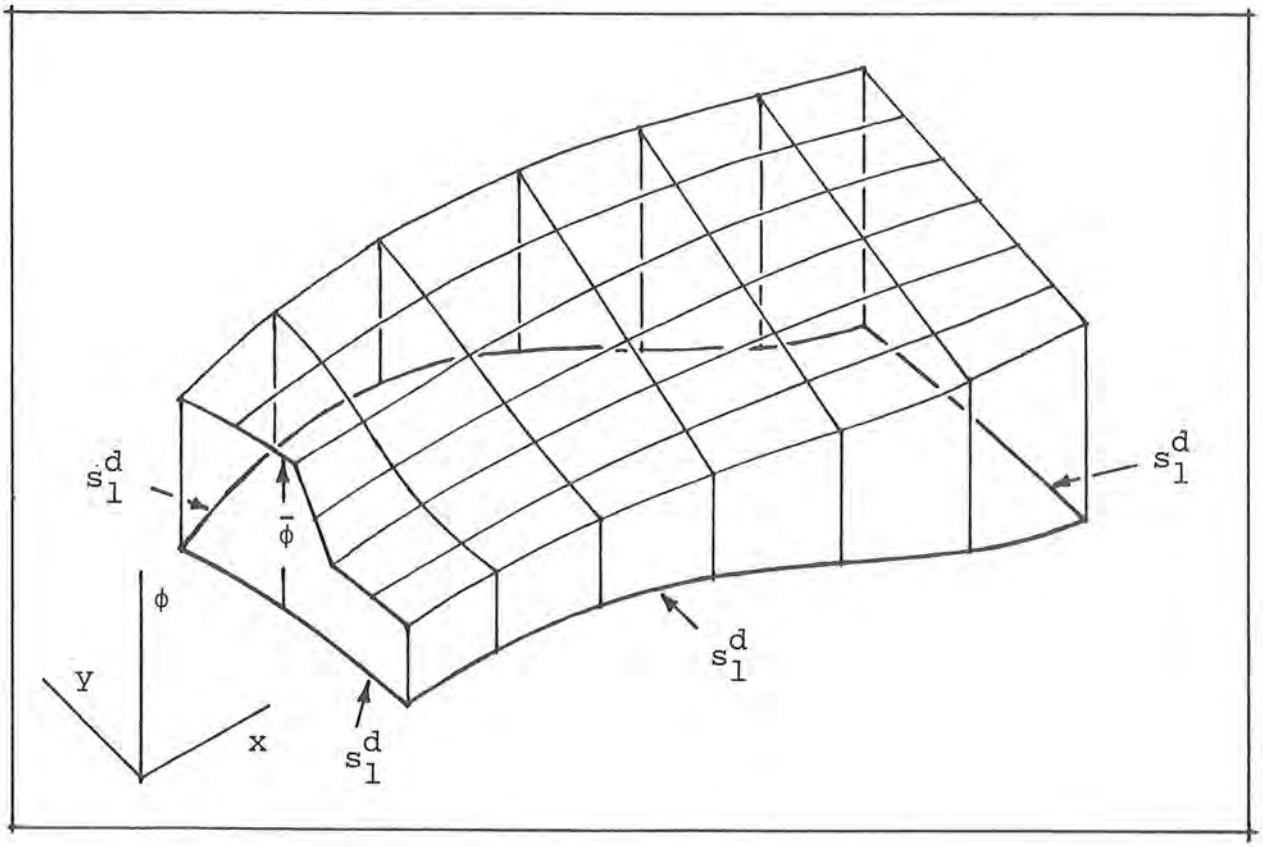
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{S}{\Gamma} = 0 \qquad (6.8.38)$$

ja reunaehtoja

$$\phi = \bar{\phi} \qquad s_1^d\text{:llä} \ , \tag{6.8.39}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\bar{J}_n^d}{\Gamma} \qquad s_2^d\text{:llä} \ . \tag{6.8.40}$$

(Asetetaan $\Gamma_{xy} = \Gamma_{yx} = 0$ ja $\Gamma_{xx} = \Gamma_{yy} = \Gamma$ = vakio paikan suhteen.) Näitä yhtälöitä voidaan havainnollistaa muistamalla, että kyseessä voidaan ajatella olevan esimerkiksi jännitetyn tasokalvon pieniä siirtymiä kuvaavat yhtälöt (ks. kohta 6.1.10). Suure ϕ on kalvon poikittaissiirtymä, Γ on kalvossa vallitseva tasainen esijännitysvoima pituutta kohti ja S on poikittaiskuormitus pinta-alaa kohti. Kuva 6.8.3 esittää kvalitatiivisesti tyypillisen



Kuva 6.8.3 Puhtaan diffuusioyhtälön kvalitatiivinen ratkaisu.

ratkaisun kulkua. Tässä on otaksuttu ehto (6.8.39) koko reunalle. Kuvaan on piirretty vastaava epäsileä reunajakautuma sille

reunan osalle, jota vastaa kuvassa 6.8.2 osa s_1^a. Intuitio sanoo, että reunaehtojen mahdolliset epäsileydet tasoittuvat nopeasti alueen sisälle mentäessä. Samoin ymmärretään, että kuvan pitkänomaisen geometrian tapauksessa kussakin päässä vallitsevat reunaehdot eivät vaikuta sanottavasti ratkaisun kulkuun toisessa päässä. Toisin sanoen kuhunkin pisteeseen syntyvään ratkaisun arvoon vaikuttavat voimakkaimmin pisteen läheisimpien reunojen reunaehdot. Tilanne on siis oleellisesti erilainen kuin puhtaassa konvektioprobleemassa, jossa sisäänvirtausreunan reunaehdot vaikuttavat heikentymättöminä periaatteessa loputtoman pitkälle virtaussuunnassa.

Konvektio-diffuusioyhtälö. Varsinaisen konvektio-diffuusioyhtälön ratkaisu on ymmärrettävästi luonteeltaan jonkinlainen painotettu keskiarvo puhtaan konvektioyhtälön ja puhtaan diffuusioyhtälön ratkaisuista. Peclet'n luvun arvo vaikuttaa aivan oleellisesti lopputulokseen.

Käytettävissä olevista sallituista reunaehdoista ei ole alan kirjallisuudessa tiettävästi mitään yhtenäisiä esityksiä. Tavallisimmin annetaan kuitenkin jälleen tutut reuna-arvotehtävän ehdot

$$\phi = \bar{\phi} \qquad s_1\text{:llä} \quad (s_1^v \subset s_1) \tag{6.8.41}$$

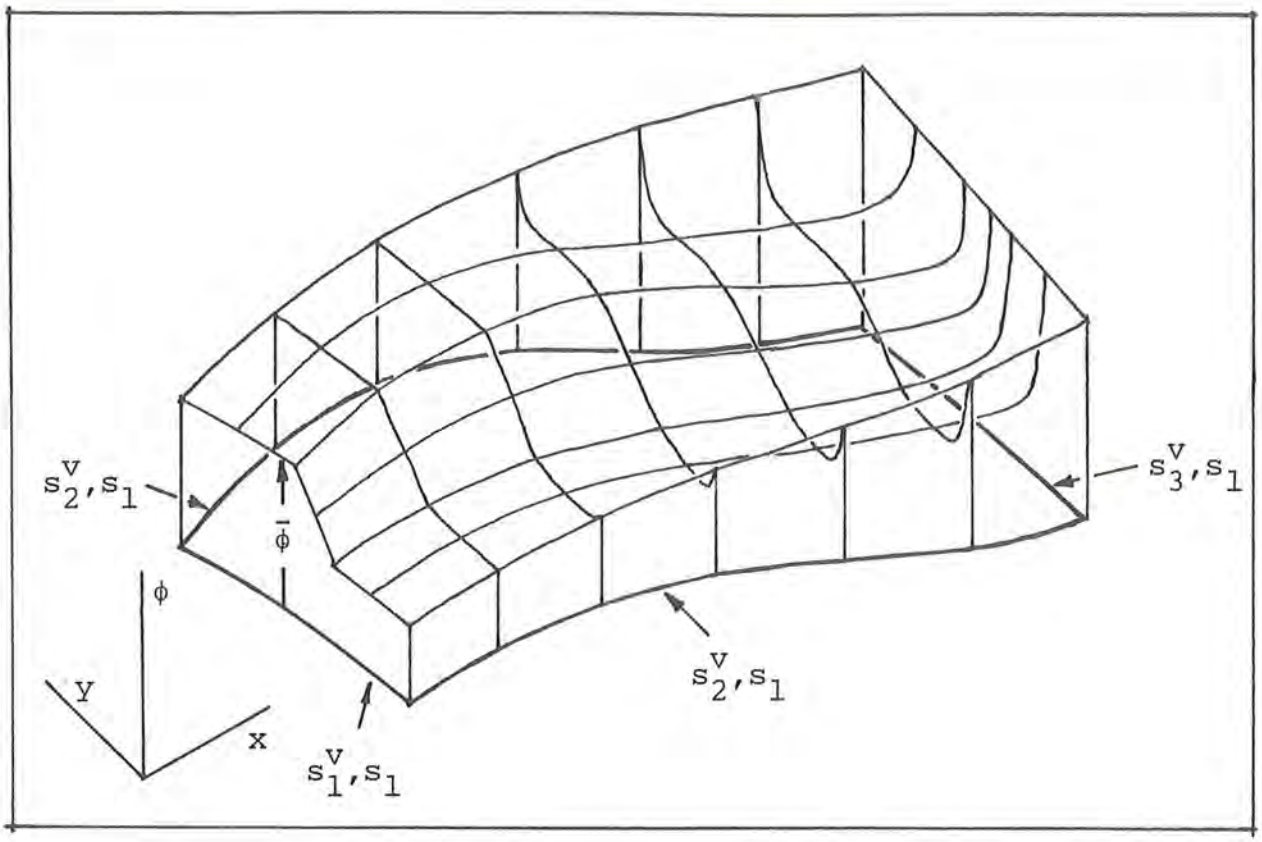
ja

$$J_n^d = \bar{J}_n^d \qquad s_2\text{:lla} \ . \tag{6.8.42}$$

Tässä osat s_1 ja s_2 muodostavat koko reunan eli $s = s_1 \cup s_2$. Kaavassa (6.8.41) suluissa oleva esitys viittaa siihen, että yleensä ϕ on annettava vähintään sisäänvirtausreunalla s_1^v.

Kuvaan 6.8.4 on hahmoteltu näkyviin kvalitatiivisesti mahdollinen ratkaisun kulku kohtuullisen Peclet'n luvun arvon tapauksessa, kun reunaehdot ovat koko reunalla tyyppiä $\phi = \bar{\phi}$. Kuva on piirretty siten, että reunaehdot vastaavat kuvassa 6.8.3 esitettyjä ehtoja. Tarkastelemalla nyt samanaikaisesti kuvia 6.8.2, 6.8.3 ja 6.8.4 ymmärretään ratkaisun luonne.

Ratkaisu alueessa muistuttaa sitä voimakkaammin puhtaan konvektioyhtälön ratkaisua mitä suurempi arvo Peclet'n luvulla on.



Kuva 6.8.4 Konvektio-diffuusioyhtälön kvalitatiivinen ratkaisu.

Kuitenkin ratkaisun on saatava reunoilla reunaehtojen ilmaisemat arvot. Tämä merkitsee, että ϕ joutuu muuttamaan arvojaan hyvin voimakkaasti tiettyjen reunojen läheisyydessä; syntyy rajakerros. Rajakerroskäsite ei siis liity pelkästään virtauskenttään, vaan se voi esiintyä myös muiden suureiden kuten lämpötila, massaosuus jne. yhteydessä. (Lämpötilakentän suhteen tästä on erittäin havainnollinen esitys lähteessä [6.14, s.78].) Rajakerroksessa gradientit ovat suuria kohtisuoraan rajakerrosta vastaan ja täten myös diffuusio on voimakasta. Täten esimerkiksi virtauskentän yhteydessä ei voida jättää huomioonottamatta rajakerroksessa esiintyvää diffuusiovuota — oleellisesti sama kuin leikkausjännitys — vaikka rajakerros olisi hyvinkin ohut.

Ymmärretään heti, että numeerisia menetelmiä käytettäessä on varauduttava erityiseen rajakerrosten mallintamiseen joko käyttämällä niiden alueella hyvin tiheitä verkkoja tai sitten esimerkiksi kehittämällä rajakerroksia koskevia, niiden erityispiirteet huomioonottavia yhtälösysteemeitä (rajakerrosteoria), jotka

käsitellään erikseen ja niiden ratkaisu sovitetaan sitten iteratiivisesti rajakerroksen ulkopuoliseen sileään ratkaisuun. Tätä jälkimmäistä tapaa on sovellettu laajasti esimerkiksi siipiprofiilien ympärillä tapahtuvan virtauksen käsittelyssä.

Diffuusion vaikutuksesta ratkaisun epäsileydet tasoittuvat ja pitkänomaisissa geometrioissa rajakerrokset paksunevat ja täyttävät vähitellen koko virtauskentän. Numeeristen menetelmien yhteydessä esiintyy usein termi valediffuusio (engl. false diffusion, crosswind diffusion). Sillä tarkoitetaan lyhyesti sanottuna haitallista ilmiötä, jossa numeerinen mallintaminen synnyttää diffuusiomaisia tuloksia, vaikka kyseessä olisi jopa puhdas konvektioyhtälö. Valediffuusiota tapahtuu, kun virtaussuunta on vinossa hilaviivojen (engl. grid lines) suhteen ja kun riippuvalla muuttujalla ϕ on samalla nollasta eroava gradientti kohtisuoraan virtaussuuntaa vastaan [6.13, s. 108]. (Lähteessä [6.13] on erinomainen esitys valediffuusiosta.)

Huomautus 2. Kuvan 6.8.4 esittämään ratkaisuun on syytä liittää seuraava kommentti. Dirichlet-tyyppinen reunaehto ei ole yleensä fysikaalisista syistä mielekäs ulosvirtausreunalla, kun Peclet'n luvun arvo on suuri [6.13, s. 104]. Edellä on jo todettu, että oikeellisten reunaehtojen valinta on usein vaikea tehtävä nestemekaniikassa. Eräs ajatuskoe: Funktio ϕ voisi esittää vaikka tietyn merkkiaineen konsentraatiota. Ajatellaan heti sisäänvirtausreunan ulkopuolelle lukuisa määrä reunaehtomiehiä. Jokaisella on suutin, josta hän päästää annetun ohjeen mukaan ko. merkkiainetta virtaukseen. Näin saadaan aikaan Dirichlet-ehto. Sen sijaan ulosvirtausreunalla voidaan vain vastaanottaa virtaus konsentraatioineen, mutta siihen ei pystytä syöttämään annettua arvoa. Eräs melko yleinen ulosvirtausreunan reunaehto perustuu arvioon, että suurilla Peclet'n luvun arvoilla diffuusion osuus on pieni konvektion rinnalla virtaussuunnassa ja asetetaan täten $J_n^d = 0$.

Epästationaarisuus. Täydennetään yhtälö (6.8.23) epästationaarista tapausta koskevaksi:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\phi) + \frac{\partial J_x^d}{\partial x} + \frac{\partial J_y^d}{\partial y} - S = 0 \ . \qquad (6.8.43)$$

Voimme esittää tämän uuden asetelman hieman mielikuvitusta käyttäen myös seuraavasti:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\phi) + \frac{\partial}{\partial t}(1\phi) +$$

$$+ \frac{\partial J_x^d}{\partial x} + \frac{\partial J_y^d}{\partial y} + \frac{\partial (J_t^d \equiv 0)}{\partial t} - S = 0 \ . \qquad (6.8.44)$$

Toisin sanoen olemme saaneetkin kolmidimensioisen "stationaarisen" tapauksen ja "virtaviivat" määräytyvät xyt-avaruuden nopeuskentästä $(v_x, v_y, 1)$. Tällä tulkinnalla voimme mm. yrittää laajentaa tavanomaisissa stationaarisissa tapauksissa hyväksi havaittuja numeerisia menetelmiä myös epästationaarisiin tehtäviin.

6.8.3 Heikko muoto

Yleistä. Konvektio-diffuusioyhtälön ja yleensäkin nestemaknaiikan yhtälöiden numeeristen ratkaisumenetelmien yhteydessä alan kirjallisuudessa jatkuvasti esiintyvä tärkeä käsite on ns. ylävirtamenettely (engl. upwinding, upwind scheme, upstream scheme). Hieman epätieteellisesti voidaan sanoa, että tietyn spatiaalisen pisteen kannalta ylävirran puoleinen riippuvaan muuttujaan ϕ liittyvä informaatio on arvokkaampaa kuin alavirran puoleinen. Tämä ymmärretään jo senkin perusteella, että puhtaassa konvektiotehtävässä reunaehdot voitiin antaa pelkästään sisäänvirtausreunalla. Puhtaassa diffuusiotehtävässä virtausta ei enää esiinny ja äskeinen suuntien eriarvoisuus häviää. Konvektio-diffuusiotehtävässä suunnan painottuminen riippuu Peclet'n luvun arvosta. Ylävirtamenettely tarkoittaa vastaavasti lyhyesti sitä, että numeerisissa malleissa painotetaan voimakkaammin tietyn pisteen ylävirran kuin alavirran puoleista informaatiota.

Konvektio-diffuusioyhtälö reunaehtoineen ei muodosta konvektiotermin johdosta ns. itseadjungoitua systeemiä [6.15, s.225]. Täten sille ei ole olemassa klassillisessa mielessä vastaavaa variaatioperiaatetta. (Tiettyjen muunnosten jälkeen variaatioperiaate voidaan kuitenkin esittää, mutta tähän ajatukseen perustuvat numeeriset mallit eivät ole saavuttaneet paljon suosiota.) Yleisesti ottaen käyttökelpoisten variaatioperiaatteiden määrä on Eulerin esitystavan synnyttämien konvektiotermien johdosta nestemekaniikassa vähäisempi kuin kiinteän aineen mekaniikassa ja tavallisesti on turvauduttava jäännösmenetelmien käyttöön.

Ylävirratus synnytetään elementtimenetelmässä tavallisimmin käyttämällä epäsymmetrisiä, muotofunktioista poikkeavia painofunktioita, joilla on suuremmat arvot ylä- kuin alavirran puolella. Epäsymmetrisyyden määrä on sidottu tietyllä tavalla paikalliseen Peclet'n lukuun (karakteristinen pituus liittyy elementtikokoon). Kun painofunktiot poikkeavat muotofunktioista, jäännösmenetelmää nimitetään nykyään usein Petrov-Galerkin-menetelmäksi. Tämän vastakohtana taas tavanomaista Galerkinin keinoa nimitetään joskus Bubnov-Galerkin-menetelmäksi.

Elementtimenetelmässä ylävirratusta on sovellettu v. 1976 lähtien. Useita eri versioita on esitetty, mutta parhaat menettelytavat eivät ole vielä täysin kiteytyneet. Seuraavassa esitetään eräitä heikkoja muotoja, joita voidaan pitää diskretoinnin pohjana.

Jatkuvat painofunktiot. Tässä yhteydessä on syytä suorittaa vertailua kohdassa 4.11.1 esitetyn energiayhtälön heikon muodon kanssa. Puhtaassa diffuusiotapauksessa päädytään nimittäin juuri siellä johdettuun formulaatioon. Lausekkeiden lyhentämiseksi käsitellään lähinnä tasotapausta.

Tarkastellaan kenttäyhtälöä

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d - S = 0 \qquad (6.8.45)$$

eli (tasotapauksessa)

$$\frac{\partial J_x^a}{\partial x} + \frac{\partial J_y^a}{\partial y} + \frac{\partial J_x^d}{\partial x} + \frac{\partial J_y^d}{\partial y} - S = 0 \qquad (6.8.45')$$

ja reunaehtoa

$$J_n^d - \vec{n}\cdot\vec{J}^d = 0 \qquad (6.8.46)$$

eli

$$J_n^d - n_x J_x^d - n_y J_y^d = 0 \ . \qquad (6.8.46')$$

Kuten kohdassa 4.11.1 saadaan ensin esitys

$$\int_A [(\frac{\partial J_x^a}{\partial x} + \frac{\partial J_y^a}{\partial y})w + (\frac{\partial J_x^d}{\partial x} + \frac{\partial J_y^d}{\partial y})w - Sw]dA +$$

$$+ \int_S (J_n^d - n_x J_x^d - n_y J_y^d)w ds = 0 \ . \qquad (6.8.47)$$

Muutetaan yhtälön muotoa osittaisintegroimalla siten, että diffuusiovuovektorin komponentteihin kohdistuvat osittaisderivaatat häviävät. Konvektiovuovektorin komponenttien suhteen vastaavaa ei haluta tässä tehdä. Ideanahan on alentaa lopullises-

sa approksimaatiossa esiintyviltä funktioilta vaadittavaa jatkuvuutta. Termissä $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d$ esiintyy ϕ:n toisen kertaluvun derivaattoja ja termissä $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a$ vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja. Toisaalta osittaisderivointi synnyttää painofunktioon jo ensimmäisen derivaatan, joten termin $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a$ suhteen mahdollisesti suoritettu osittaisderivointi ei helpottaisi kokonaisasetelmaa. Kaavoja (L.2.11) soveltamalla saadaan

$$\int_A \left(\frac{\partial J_x^d}{\partial x} w + \frac{\partial J_y^d}{\partial y} w\right) dA =$$

$$= \int_s (n_x J_x^d w + n_y J_y^d w) ds - \int_A \left(J_x^d \frac{\partial w}{\partial x} + J_y^d \frac{\partial w}{\partial y}\right) dA \ . \qquad (6.8.48)$$

Tämän lausekkeen sijoitus yhtälöön (6.8.47) antaa tuloksen

$$\int_A \left(\frac{\partial J_x^a}{\partial x} + \frac{\partial J_y^a}{\partial y}\right) w dA - \int_A \left(J_x^d \frac{\partial w}{\partial x} + J_y^d \frac{\partial w}{\partial y}\right) dA +$$

$$- \int_A S w dA + \int_s J_n^d w ds = 0 \ . \qquad (6.8.49)$$

Reunalla s_1 vallitseva reunaehto $\phi = \bar{\phi}$ merkitsee, että vastaava diffuusiovuon tiheys J_n^d on tuntematon. Sen mukaantulo yhtälöihin vältetään valitsemalla painofunktiot siten, että $w = 0$ osalla s_1. Yhtälö (6.8.49) saa tavanomaisen sovellutusmuodon

$$\int_A \left(\frac{\partial J_x^a}{\partial x} + \frac{\partial J_y^a}{\partial y}\right) w dA - \int_A \left(J_x^d \frac{\partial w}{\partial x} + J_y^d \frac{\partial w}{\partial y}\right) dA +$$

$$- \int_A S w dA + \int_{s_2} \bar{J}_n^d w ds = 0 \ . \qquad (6.8.50')$$

Kolmessa dimensiossa saadaan vastaavaksi lopulliseksi yhtälöksi (tiivistetään merkintöjä)

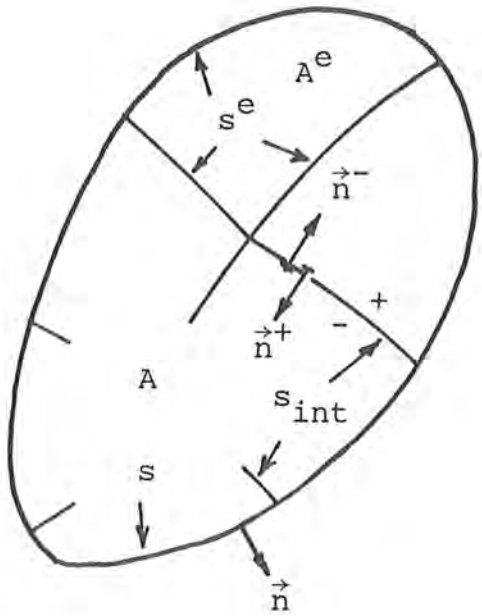
$$\boxed{\begin{aligned}&\int_V [(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a)w - \vec{J}^d\cdot\vec{\nabla}w)dV + \\ &- \int_V SwdV + \int_{S_2} \bar{J}^d_n wdS = 0 \ .\end{aligned}} \qquad (6.8.50)$$

Eräs tapa ottaa huomioon epästationaarisuus on lopuksi tapahtuva sijoitus $S := S - \partial\phi/\partial t$ (ks. yhtälö (6.8.43)).

Olisimme selvästikin voineet johtaa yhtälön (6.8.50) myös suoraan kohdassa 4.11.1 esitetyn tuloksen (4.11.8) avulla kätkemällä vain konvektiotermin manipulaatioiden ajaksi lähdetermiin.

Yhtälöä (6.8.50) on sovellettu paljon jatkuvien painofunktioiden yhteydessä. Epäjatkuvien painofunktioiden käytöllä on kuitenkin osoittautunut olevan tiettyjä etuja. Tarkastellaan tätä seuraavaksi.

<u>Epäjatkuvat painofunktiot</u>. Esitys nojautuu osittain lähteeseen [6.16]. Jaetaan tarkasteltava alue A osa-alueisiin eli elementteihin A^e, e = 1,2,... (kuva 6.8.5). Kukin elementti ajatellaan avoimeksi alueeksi (engl. open region), jonka reunaa merkitään tunnuksella s^e. Avoimen alueen A reunaa merkitään vastaavasti tunnuksella s. Elementtien yhteiset reunat $s_{int} = \bigcup_e s^e - s$ muodostavat alueen, jonka läpi kuljettaessa painofunktiot voivat saada hyppäyksiä. Nimitetään joukkoa s_{int} alueen <u>sisäreunaksi</u> (engl. interior boundary). Joukkoa s voidaan vastaavasti nimittää tätä korostettaessa alueen ulkoreunaksi.



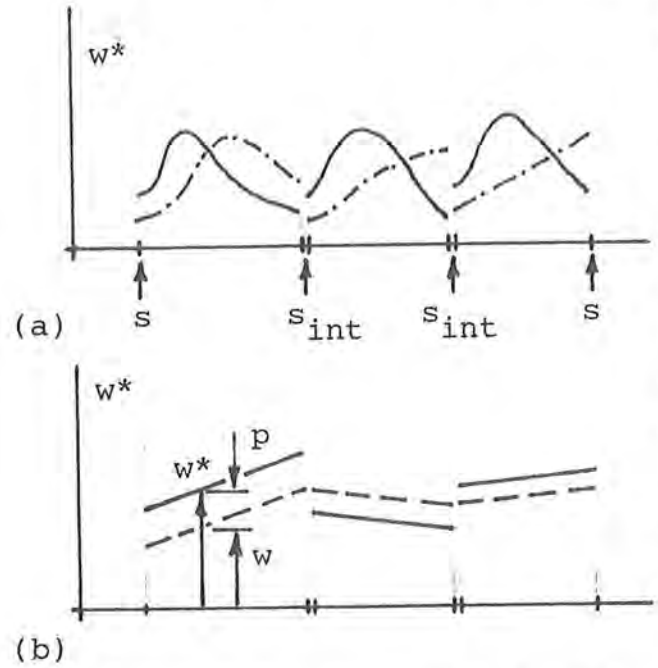
Kuva 6.8.5 Tasoalue.

Painofunktiot voivat olla epäjatkuvia sisäreunalla s_{int}. Merkitään epäjatkuvaa painofunktiota tunnuksella w* ja ajatel-

laan w* jaetuksi sovitulla tavalla jatkuvaan osaan w ja epäjatkuvaan osaan p:

$$w^* = w + p \ . \tag{6.8.51}$$

Kuva 6.8.6 (a) esittää kaaviollisesti kahta mahdollista epäjatkuvan painofunktion w* valintaa yksidimensioisessa tapauksessa; kyseessä voisi olla vaikka kuvan 6.8.5 alueen A läpi kulkeva leikkaus. Jos painofunktiot voidaan valita äärettömän monella tavalla, ymmärretään, että vallitsevan kenttäyhtälön on toteuduttava vastaavan heikon muodon — kuten (6.8.50), kun $w \to w^*$ — kautta kunkin osa-alueen sisäpisteissä. Mutta itse viivoilla s_{int} emme ilmeisestikään saa tämän painotuksen kautta mitään aikaan. Jos ϕ:n yrite on jatkuva, sen jatkuvuus tietenkin säilyy, mutta ϕ:n derivaatoillakin tulee olla kohtien s_{int} molemmilla puolilla vallitsevan differentiaaliyhtälön johdosta tiettyjä keskinäisiä riippuvuuksia. Asetelmaan saadaan korjaus ottamalla lähtökohtana olleen kenttäyhtälöön (6.8.45) ja reunaehdon (6.8.46) lisäksi mukaan vielä viivoilla s_{int} vaadittava diffuusiovuon tiheyden jatkuvuusehto



Kuva 6.8.6 (a) Kaksi epäjatkuvaa painofunktiota w*. (b) Jako osiin w ja p.

$$[\![J_n^d]\!] = 0 \qquad s_{int}\text{:llä} \tag{6.8.52}$$

eli

$$(J_n^d)^+ - (J_n^d)^- = 0 \tag{6.8.52'}$$

eli

$$\vec{n}^- \cdot (\vec{J}^d)^+ - \vec{n}^- \cdot (\vec{J}^d)^- = 0 \tag{6.8.52''}$$

eli ($\vec{n}^+ = -\vec{n}^-$)

$$n_x^+(J_x^d)^+ + n_y^+(J_y^d)^+ + n_x^-(J_x^d)^- + n_y^-(J_y^d)^- = 0 \ . \qquad (6.8.52''')$$

Huomautus 1. Mistä tiedetään, että ehto (6.8.52) vastaa todellisuutta? Konvektio-diffuusioyhtälö (6.8.45) on syntynyt tavallisesti globaalin muodon

$$\int_S \vec{n}\cdot(\vec{J}^a+\vec{J}^d)dS - \int_V SdV = 0 \qquad (6.8.53)$$

eli

$$\int_S (J_n^a+J_n^d)dS - \int_V SdV = 0 \qquad (6.8.53')$$

seurauksena, kun on sovellettu Gaussin lausetta. (Globaali muoto on voimassa myös tapauksissa, joissa alueen läpäisee jokin epäjatkuvuuspinta, jolla differentiaaliyhtälöä (6.8.45) ei voida kirjoittaa.) Ottamalla tarkasteltavaksi alueeksi kohtaan S_{int} liittyvä äärettömän ohut aineliuska, voidaan synnyttää jatkuvuusehto (tilavuusintegraalin osuus häviää rajalla pintaintegraalin rinnalla)

$$[\![J_n^a+J_n^d]\!] = 0 \ . \qquad (6.8.54)$$

Se on ns. kokonaisvuon tiheyden jatkuvuusehto. Lähteessä [6.16] on esitetty myös formulaatio, joka käyttää ehdon (6.8.52) sijasta ehtoa (6.8.54). Tämä ehto pätee siis yleisesti, vaikka S_{int} sattuisi olemaan (muita suureita kuin w* koskeva) epäjatkuvuusviiva. Sen sijaan pelkkää diffuusiovuon tiheyttä koskevan jatkuvuusehdon (6.8.52) ei tarvitse aina välttämättä olla totta. Huomattakoon kuitenkin, että jos tarkka ratkaisu on riittävän sileä, ko. ehto on ilmeisesti oikeellinen. Muistetaan vielä, että sisäreuna S_{int} ei liity välttämättä itse ratkaisun mahdollisiin epäjatkuvuuskohtiin, vaan vain valitun elementtiverkon rajoihin. Jos ratkaisu ei ole riittävän sileä, ehdon (6.8.52) oikeellisuus on tutkittava erikseen käyttäen hyväksi kohdassa

5.7.5 esitettyjä periaatteita.

Suoritetaan äskeiseen liittyen hieman lisätarkastelua. Olkoon kyseessä tapaus, jossa voidaan kirjoittaa $\phi = \rho\psi$. Tällöin $J_n^a = \vec{n}\cdot\vec{J}^a = \vec{n}\cdot(\rho\vec{v}\psi) = \rho v_n\psi$. Jos kyseessä on stationaarinen tapaus, kaava (5.7.34) antaa tuloksen $[\![\rho v_n]\!] = \rho^+ v_n^+ - \rho^- v_n^- = 0$. Jos ψ voidaan otaksua jatkuvaksi, saadaan siis yhteys $\rho^+ v_n^+ \psi^+ - \rho^- v_n^- \psi^- = 0$ eli $[\![J_n^a]\!] = 0$. Kun tämä otetaan huomioon yhtälössä (6.8.54), jäljelle jää juuri ehto (6.8.52).

Todettakoon vielä, että lähteessä [6.16] on käytetty vektoreille $\vec{n}^+$ ja $\vec{n}^-$ eri suuntia kuin tässä esityksessä.

Yhtälö (6.8.47) täydennetään nyt jatkuvuusehdon (6.8.52) huomioonottamalla muotoon (tiivistetään merkintöjä)

$$\sum_e \int_{A^e} [(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a)w^* + (\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d)w^* - Sw^*]dA +$$

$$+ \int_s (J_n^d - \vec{n}\cdot\vec{J}^d)wds + \int_{s_{int}} [\![J_n^d]\!]wds = 0 \ . \qquad (6.8.55)$$

Huomataan, että kenttäyhtälöä on painotettu epäjatkuvalla funktiolla $w^* = w + p$ ja reunaehtoa ja jatkuvuusehtoa sen jatkuvalla osuudella w. Lisäksi kenttäyhtälön painotus tapahtuu vain alueessa $A - s_{int}$. Tämä näkyy siinä, että integraali lasketaan elementeittäin. Sijoitetaan esitys $w^* = w + p$ yhtälöön (6.8.55). Funktiolla p painotetut termit jätetään osittaisintegroimatta. Termiin $(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d)w$ nähden suoritetaan osittaisintegrointi erikseen kussakin elementissä. Elementissä e saadaan

$$\int_{A^e} (\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d)wdA = \int_{A^e} (\frac{\partial J_x^d}{\partial x} w + \frac{\partial J_y^d}{\partial y} w)dA$$

$$= \int_{s^e} (n_x J_x^d w + n_y J_y^d w)ds - \int_{A^e} (J_x^d \frac{\partial w}{\partial x} - J_y^d \frac{\partial w}{\partial y})dA$$

$$= \int_{s^e} \vec{n}\cdot\vec{J}^d wds - \int_{A^e} \vec{J}^d\cdot\vec{\nabla}wdA \ . \qquad (6.8.56)$$

Viivaintegraalitermi $\int \vec{n}\cdot\vec{J}^d w ds$ kumoaa yhtälössä (6.8.55) alueen reunalla olevan vastaavan termin, jos elementin jokin reunan osa $\subset s$. Tarkastellaan elementin tiettyä sisäreunaan s_{int} rajoittuvaa reunaa. Olkoon tämä varustettu plus- ja miinuspuolilla siten, että ko. elementissä $\vec{n}\cdot\vec{J}^d = \vec{n}^-\cdot(\vec{J}^d)^-$. Mutta tällöin reunaan rajoittuvassa vastakkaisessa elementissä $\vec{n}\cdot\vec{J}^d = \vec{n}^+\cdot(\vec{J}^d)^+ = -\vec{n}^-\cdot(\vec{J}^d)^+$. Esimerkiksi kaavan (6.8.52") perusteella havaitaan siis, että myös hyppytermi katoaa yhtälöstä (6.8.55). Jäljelle jää esitys (siirrytään kolmidimensioiseen tapaukseen)

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_V [(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a)w^* - J^d\cdot\vec{\nabla}w + (\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d)p]dV + \\ &- \int_V Sw^*dV + \int_{S_2} \bar{J}^d_n w dS = 0 \ ,\end{aligned}} \qquad (6.8.57)$$

kun vielä valitaan $w = 0$ S_1:llä.

Jos funktio p häviää, joudutaan takaisin esitykseen (6.8.50). Funktio p katsotaan lähteessä [6.16] eräänlaiseksi häiriötermiksi (engl. perturbation), jonka valinnalla saadaan aikaan sopiva ylävirratus. Kuva 6.8.6 (a) esittää kaaviollisesti tapausta, jossa w on elementeittäin lineaarinen ja p elementeittäin vakio.

Epästationaarisuus voidaan jälleen hoitaa sijoituksella $S := S - \partial\phi/\partial t$. Toinen mahdollisuus on käyttää hyväksi kohdan 6.8.2 lopussa esitettyä tulkintaa ja soveltaa elementtiesitystä paikka-aika-avaruudessa.

Kontrollialuekeino. Käsitellään lyhyesti erästä jäännösmenetelmän versiota, jota sovelletaan paljon nestemekaniikan yhteydessä. Menetelmän englanninkielisiä nimityksiä ovat mm. control-volume formulation, finite-volume formulation, finite-cell formulation. Puhumme tässä kontrollialuekeinosta. Kyseessä on itse asiassa osa-aluekeinon (ks. esimerkki 4.9.1) soveltaminen.

Esimerkiksi kolmidimensioisessa tapauksessa tarkasteltava alue jaetaan suurinpiirtein heksaedrin muotoisiin tilavuusosiin eli elementteihin eli kontrollialueisiin (eli osa-alueisiin). Käytetään epäjatkuvia painofunktioita, jotka saavat kukin tietyssä kontrollialueessa arvon yksi ja kaikkialla muualla arvon

nolla. Esimerkiksi yhtälöstä (6.8.45) seuraa siis ensin yhtälö

$$\int_{V^e} (\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^d)dV - \int_{V^e} SdV = 0 \ , \tag{6.8.58}$$

jossa e viittaa kontrollialueeseen. Gaussin lauseen soveltaminen tuottaa sitten muodon

$$\int_{S^e} (J_n^a+J_n^d)dS - \int_{V^e} SdV = 0 \ . \tag{6.8.59}$$

Huomataan yleensäkin, että jos kenttäyhtälö on säilymismuodossa (ks. kohdan 6.8.1 huomautus 2), esitetty manipulaatio tuottaa integraalimuodossa olevan yhtälön, jossa esiintyy kontrollialueen pinnan yli otettuja integraaleja, joiden integrandit ovat tyypiltään vuon tiheyksiä $\vec{n}\cdot\vec{J}$. Näillä on yleensä selkeä fysikaalinen merkitys ja ne esiintyvät usein samoin reunaehdoissa, joka seikka helpottaa reunaehtojen käsittelyä. Diskreetit yhtälöt synnytetään yhtälön (6.8.59) tyyppisistä yhteyksistä approksimoimalla niissä esiintyviä suureita sopivasti.

<u>Puhtaan stationaarisen diffuusioyhtälön variaatioperiaate</u>. Kuten edellä on käynyt ilmi, puhdas stationaarinen diffuusioyhtälö reunaehtoineen on tyyppiä

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} - S = 0 \qquad V\text{:ssä} \ , \tag{6.8.60}$$

$$\phi = \bar{\phi} \qquad S_1\text{:llä} \ , \tag{6.8.61}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{J} = \bar{J}_n \qquad S_2\text{:lla} \ , \tag{6.8.62}$$

joissa vielä

$$\vec{J} = -\overleftrightarrow{\Gamma}\cdot\vec{\nabla}\phi \ . \tag{6.8.63}$$

(Diffuusioon liittyvä viite d on jätetty tässä yhteydessä mukavuussyistä pois.) Saadaan siis muuttujaa ϕ koskeva yhtälösysteemi

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\Gamma}\cdot\vec{\nabla}\phi) + S = 0 \\ &\phi = \bar{\phi} \\ &-\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\Gamma}\cdot\vec{\nabla}\phi = \bar{J}_n \end{aligned}}$$

V:ssä , (6.8.64)

S_1:llä , (6.8.65)

S_2:lla . (6.8.66)

Yhtälöiden kaksidimensioiset havainnollisemmat vastineet esiintyvät kaavoina (6.8.32), (6.8.36) ja (6.8.37').

Tyyppiä (6.8.64) oleva differentiaaliyhtälö kulkee alan kirjallisuudessa usein nimellä kvasiharmoninen yhtälö (engl. quasi-harmonic equation). Tätä nimitystä näytetään käytettävän etenkin silloin, kun diffusiivisuusmatriisi on diagonaalinen, jolloin yhtälö hieman yksinkertaistuu. Kvasiharmoninen yhtälö esiintyy hyvin monien fysikaalisten ilmiöiden yhteydessä. Tässä monisteessa näitä ovat mm. jännitetyn kalvon probleema, lämmönjohtuminen, voiteluvirtaus sekä erikoistapauksina kaikki probleemat, joissa päädytään Poissonin tai vielä Laplacen differentiaaliyhtälöön. Laplacen yhtälön ratkaisuja nimitetään tunnetusti harmonisiksi funktioiksi, joka seikka selittänee osittain termiä kvasiharmoninen.

Kvasiharmonisella yhtälöllä (6.8.64) standardireunaehtoineen (6.8.65) ja (6.8.66) on olemassa vastaava variaatioperiaate

$$\boxed{\delta\Pi = 0 \ ,} \tag{6.8.67}$$

jossa funktionaali

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2}\int_V (\{\nabla\}\phi)^T[\Gamma](\{\nabla\}\phi)dV + \\ - \int_V S\phi dV + \int_{S_2} \bar{J}_n\phi dS \ . \tag{6.8.68}$$

Luvallisen argumenttifunktion ϕ tulee toteuttaa oleellinen reunaehto $\phi = \bar{\phi}$ osalla S_1. Funktionaali (6.8.68) — usein vielä tietyillä täydennyksillä varustettuna — on elementtimenetelmäkirjallisuudessa jatkuvasti vastaantuleva olio.

6.9 Kokoonpuristuva virtaus

6.9.1 Yleistä

Kaasut ovat huomattavasti helpommin kokoonpuristuvia kuin varsinaiset nesteet. Täten oleellisesti kokoonpuristuva virtaus esiintyy tavallisimmin kaasujen yhteydessä ja termillä kaasumekaniikka tarkoitetaankin juuri virtauksen tarkastelua kokoonpuristuvuus huomioon ottaen. (Teorian erikoistapauksena saadaan tietysti myös kokoonpuristumaton tapaus.) Kokoonpuristuvaan virtaukseen liittyy useita erikoispiirteitä, joiden ymmärtämiseksi aikaisemmin esitettyjä yleisiä yhtälöitä tulee työstää edelleen sekä lisäksi tarvitaan apuna uusiakin käsitteitä kuten entropia.

Energiayhtälö kytkeytyy voimallisesti mukaan vallitseviin kaavoihin. Kun edellä on puhuttu ideaalinesteestä tai kitkattomasta virtauksesta, olemme otaksuneet nesteen leikkausjännitysten häviävän. Jos kuitenkin kitka jätetään huomiotta asettamalla viskositeetti $\mu = 0$, on johdonmukaista asettaa samanaikaisesti myös lämmönjohtavuus $k = 0$. On nimittäin osoitettu, että kitka ja lämmönjohtuminen ovat saman mikroskooppisella tasolla tapahtuvan ilmiön seurauksia. Kaasumekaniikassa puhutaan usein lyhyesti ns. Eulerin rajasta ($\mu \to 0$, $k \to 0$), kun tarkastellaan kitkattoman ja lämpöäjohtamattoman mallin mukaista virtausta. Tästä tapauksesta käytetään edelleen joskus todellisen nesteen vastakohtana nimitystä ideaalineste.

6.9.2 Lisää termodynamiikkaa

Entropia. Kohdassa 3.2 viitattiin entropian kasvun periaatteen aksioomaan. Tavallisempi nimitys on termodynamiikan toinen pääsääntö (engl. the second law of thermodynamics). Se voidaan esittää klassillisessa muodossaan mm. seuraavasti [2.6, s. 56]: Kappaleella on olemassa tilasuure S, ns. entropia, siten että mielivaltaisessa prosessissa

$$\boxed{dS \geq \frac{đW_Q}{T}\,,} \qquad (6.9.1)$$

jossa $đW_Q$ on kappaleen ulkopuoleltaan saama differentiaalinen lämpö ja T on kappaleen termodynaaminen lämpötila.

Jos kaavassa (6.9.1) esiintyy yhtäsuuruusmerkki, vastaavan prosessin sanotaan olevan reversiibeli eli palautuva (engl. reversible). Jos näin ei ole, prosessin sanotaan olevan irreversiibeli eli palautumaton (engl. irreversible).

Varsinaisessa kenttäteoriassa toinen pääsääntö täytyy esittää kaavaa (6.9.1) yleisemmässä muodossa [2.6, s. 68]. Jos kaava (6.9.1) koskee äärellistä kappaletta, kaavalla on nimittäin selvästi mieltä vain siinä erikoistapauksessa, että lämpötila on vakio koko kappaleessa. Sovellamme kaavaa (6.9.1) kuitenkin jatkossa differentiaaliseen ainealkioon, jolloin sen alueella lämpötilaa voidaan pitää tietyllä tarkkuudella vakiona, vaikka lämpötila muuttuisikin paikan suhteen itse kappaleessa. (Kenttäteorian kannalta toimitaan hieman virheellisesti, mutta edellä esitetty kaavan (6.9.1) käyttö on kuitenkin tavanomaista kaasumekaniikassa).

Merkitään kappaleen entropiaa massalla jaettuna eli ns. ominaisentropiaa (engl. specific entropy) tunnuksella s ($[s] = JK^{-1}kg^{-1}$). Se on siis myös tilasuure. Kappaleen entropia saadaan siten lausekkeena

$$S = \int s\,dm = \int_V \rho s\,dV\,. \qquad (6.9.2)$$

Samaten differentiaalisen ainealkion (massa m, tilavuus V; kuten kohdassa 4.2 haluamme välttää merkintöjen dm ja dV käyttöä) ent-

ropia $S = ms = \rho sV$ ja sen muutos

$$dS = m\,ds = \rho ds V\ , \tag{6.9.3}$$

koska m on vakio. Ainealkion ajassa dt saama differentiaalinen lämpö (tässä dS on pinta-alkio)

$$đW_Q = (-\int_S q_n dS)dt = (-\int_S \vec{n}\cdot\vec{q}dS)dt = (-\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{q}dV)dt$$

$$= (-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}\int_V dV)dt = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q}Vdt\ . \tag{6.9.4}$$

On sovellettu divergenssilausetta ja otettu huomioon, että suuretta $\vec{\nabla}\cdot\vec{q}$ voidaan pitää alkion alueella vakiona. Kaava (6.9.1) saa siis ainealkioon sovellettuna muodon

$$\rho ds V \geq -\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{q}Vdt}{T} \tag{6.9.5}$$

eli

$$T\rho ds \geq -\vec{\nabla}\cdot\vec{q}dt \tag{6.9.6}$$

eli

$$\boxed{T\rho\frac{Ds}{Dt} \geq -\vec{\nabla}\cdot\vec{q}\ .} \tag{6.9.7}$$

(On huomattava, että kyseessä ovat ainealkion prosessissa kokemat muutokset, joten dt:llä jakaminen tuottaa ainederivaatan.)

Kohdassa 5.6.2 johdettiin paikallinen energiayhtälö (5.6.26):

$$\boxed{\rho\frac{De}{Dt} = \overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q}\ .} \tag{6.9.8}$$

Sen ulkomuoto vaihtelee paljon, jos vielä käytetään joitakin yhteyksistä (ks. kaavat (5.6.12), (5.3.8), (5.3.9))

$$\overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d} = -pd_V + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} \tag{6.9.9}$$

eli

$$\{\sigma\}^T\{d\} = -p\{m\}^T\{d\} + \{\sigma^*\}^T\{d\} \tag{6.9.9'}$$

ja

$$d_V = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}(\frac{1}{\rho}) \ . \tag{6.9.10}$$

Saadaan siis esimerkiksi muoto

$$\boxed{\rho\frac{De}{Dt} = \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} \ .} \tag{6.9.11}$$

Ratkaistaan tästä termi $\vec{\nabla}\cdot\vec{q}$ ja sijoitetaan lauseke epäyhtälöön (6.9.7), jolloin se tulee olemaan

$$T\rho\frac{Ds}{Dt} - \rho\frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} \geq 0 \ . \tag{6.9.12}$$

Tästä seuraa, että mielivaltaisessa prosessissa

$$\boxed{\rho T\frac{Ds}{Dt} - \rho\frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = 0} \tag{6.9.13}$$

ja

$$\boxed{\overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} \geq 0 \ .} \tag{6.9.14}$$

Näiden tulosten johto on esimerkki tyypillisestä entropiakäsitteen yhteydestä harrastelusta loogisesta temppuilusta, jota selostetaan esimerkissä 6.9.1.

<u>Esimerkki 6.9.1</u> Entropian kasvun periaate.

Tarkastellaan kaavaa (6.9.12), jonka tulee päteä mielivaltaisessa prosessissa. Olkoon kyseessä yksinkertainen kokoonpuristuva aine (ks. kohta 3.4.5) ja otetaan vaikka ρ ja T riippumattomiksi tilamuuttujiksi. Tällöin siis $s = s(\rho,T)$, $e = e(\rho,T)$ ja lisäksi

$$\left.\begin{aligned} ds &= (\frac{\partial s}{\partial \rho})_T d\rho + (\frac{\partial s}{\partial T})_\rho dT \ , \\ de &= (\frac{\partial e}{\partial \rho})_T d\rho + (\frac{\partial e}{\partial T})_\rho dT \ . \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Valitaan ensin sellainen prosessi, että $\overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d}$ häviää. (Voidaan ottaa esimerkiksi isotrooppinen venymänopeustapaus $d_{xx} = d_{yy} = d_{zz} = d_V/3$ ja $d_{yz} = d_{zx} = d_{xy} = 0$, jolloin $\overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} = (\sigma_x^*+\sigma_y^*+\sigma_z^*)d_V/3 = 0$; ks. kaava (3.4.18). Tai otetaan äärettömän hidas prosessi, jolloin nesteen määritelmän perusteella $\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$.) Kaava (6.9.12) jää ensin muotoon

$$T\rho \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \geq 0 \ . \tag{b}$$

Otaksutaan nyt, että tietyillä valituilla arvoilla $d\rho = -\rho d_V dt$, dT kaavan (b) vasen puoli on suurempi kuin nolla ja siis epäyhtälö toteutuu. Mutta kertoimet $T\rho$, ρ, p/ρ ja kaavoissa (a) esiintyvät osittaisderivaatat ovat tilamuuttujia ja eivät täten riipu muutoksista $d\rho$ ja dT. Jos sitten valitaankin muutokset $-d\rho$ ja $-dT$, kaavan (b) vasen puoli vaihtaa siis merkkiään ja epäyhtälö ei toteudu. Täten ainoa mahdollisuus on, että kaavassa on voimassa yhtäsuuruusmerkki ja seurauksena saadaan yhtälö (6.9.13). Vaikka se siis syntyi tietyn valitun prosessin seurauksena, se on nyt voimassa mielivaltaiselle prosessille, koska yhtälö on pelkästään tilasuureita ja niiden muutoksia koskeva. Kun yleinen yhtälö (6.9.13) sijoitetaan epäyhtälöön (6.9.12), jäljelle jää mielivaltaista prosessia koskeva tulos (6.9.14). Se sanoo, että kitkavoimien teho $-\int\overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d}dV$ on negatiivinen tai korkeintaan nolla. (Vertaa kohdan 5.6.1 huomautus 2.) Tuntuu ehkä ihmeelliseltä, että yhdestä epäyhtälöstä (6.9.12) voidaan johtaa sekä yksi yhtälö että toinen epäyhtälö. Selitys on siinä, että epäyhtälön (6.9.12) tulee päteä ei vain yhdelle vaan mielivaltaiselle prosessille.

Jos yhtälöön (6.9.13) vielä sijoitetaan lausekkeet (a), saadaan tulos

$$\left[\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T - \rho\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T + \frac{p}{\rho}\right]\frac{D\rho}{Dt} +$$

$$\left[\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho - \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho\right]\frac{DT}{Dt} = 0 \ . \tag{c}$$

Koska ρ ja T valittiin riippumattomiksi tilamuuttujiksi, pätee siis

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T - \rho\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T + \frac{p}{\rho} = 0 \ . \tag{d}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho - \rho\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho = 0 \ . \tag{e}$$

Tämäntapaisia yhteyksiä esiintyy termodynamiikan kirjallisuudessa suunnaton määrä. Kaavoista (d) ja (e) voidaan taas synnyttää mm. muodot

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \frac{1}{\rho}}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial e}{\partial \frac{1}{\rho}}\right)_T + p\right] \ , \tag{f}$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_\rho = T \ . \tag{g}$$

Yhtälö (6.9.13) on tärkeä, entropian lausekkeen kokeelliseen tai analyyttiseen määrittämiseen sopiva yleinen yhteys. Se kulkee usein nimellä Gibbsin yhtälö (yksinkertaista kokoonpuristuvaa ainetta koskevana). Kirjoitamme sen vielä manipuloituna muotoon (kerrotaan yhtälö puolittain termillä $dt/(\rho T)$):

$$\boxed{ds = \frac{1}{T}\,de + \frac{p}{T}\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)} \tag{6.9.15}$$

eli

$$ds = \frac{1}{T}\,de - \frac{p}{\rho^2 T}\,d\rho\ . \tag{6.9.15'}$$

Tietyissä yhteyksissä on osoittautunut edulliseksi määritellä eräs uusi tilasuure, ns. ominaisentalpia (engl. specific entalpy) h ($[h] = \mathrm{Jkg}^{-1}$) kaavalla

$$\boxed{h = e + \frac{p}{\rho}\ .} \tag{6.9.16}$$

Differointiointi antaa

$$dh = de + \frac{1}{\rho}\,dp + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{6.9.17}$$

eli

$$dh = de + \frac{1}{\rho}\,dp - \frac{p}{\rho^2}\,d\rho\ . \tag{6.9.17'}$$

Ratkaisemalla de esimerkiksi yhtälöstä (6.9.17) ja sijoittamalla se yhtälöön (6.9.15) saadaan vastaavasti

$$\boxed{ds = \frac{1}{T}\,dh - \frac{1}{\rho T}\,dp\ .} \tag{6.9.18}$$

Huomautettakoon, että termodynamiikassa operoidaan usein tiheyden ρ sijasta ns. ominaistilavuuden (engl. specific volume) $V/m = 1/\rho$ avulla. Tämä selittää eräille edellä käsitellyille kaavoille valitun esitystavan.

Entropia on "käsinkoskettelemattomuudessaan" tunnetusti vaikea käsite. Sen syvälliseksi omaksumiseksi tarvitaan perusteellista termodynamiikkaan tutustumista. Kuitenkin entropiaa voidaan hyödyntää pitkälti hyväksymällä se vain määrittelemättömäksi suureeksi, jonka arvon muutoksia voidaan laskea: Yhdellä kilogrammalla vettä tietyssä tilassa on tietty määrä entropiaa.

Sisäenergia, entalpia ja lämpökapasiteetit. Kaavalla (4.2.44) määritelty ominaislämpökapasiteetti c esitettiin seuraavasti:

$$c = \frac{đW_Q}{mdT} . \tag{6.9.19}$$

Saamme c:lle eräät uudet tulkinnat käytämällä hyväksi johtamaamme energiayhtälön paikallista muotoa (vrt. kaava (6.9.11))

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} - pd_V + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} . \tag{6.9.20}$$

Tästä syntyy differentiaalista ainealkiota (massa m, tilavuus V) koskeva yhteys kertomalla yhtälö ensin puolittain termillä Vdt:

$$\rho deV = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q}Vdt - pd_VVdt + (\overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d})Vdt \tag{6.9.21'}$$

eli

$$mde = đW_Q - pdV + (\overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d})Vdt . \tag{6.9.21}$$

On sovellettu kaavaa (6.9.4) sekä yhtälöstä (5.3.11) syntyvää tulosta $dV = d_VVdt$. Yhtälö (6.9.21) - usein ilman dissipaatiotermiä - esiintyy yleisesti muodossa tai toisessa termodynamiikan kirjallisuudessa (vrt. myös kaavat (3.4.39') ja (3.4.40)).

Otetaan ensin vakiomuodonmuutosprosessi $\overleftrightarrow{d} = \overleftrightarrow{0}$; se sisältää tietenkin tällöin myös vakiotilavuusprosessin dV = 0 eli isokoorisen prosessin. Yhtälö (6.9.21) saa muodon

$$\begin{aligned} mde &= đW_Q \\ &= c_VmdT \end{aligned} \tag{6.9.22}$$

eli

$$de = c_V dT \ . \tag{6.9.23}$$

Täten

$$\boxed{c_V = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_V \ .} \tag{6.9.24}$$

Alaviitteen V sijasta voidaan käyttää myös viitettä ρ tai $1/\rho$.

Otetaan sitten isobaarinen prosessi $dp = 0$. Valitaan vielä tapaus, jossa kitka häviää; esimerkiksi hyvin hidas prosessi. Yhtälö (6.9.21) saa muodon

$$\begin{aligned} mde &= đW_Q - pdV \\ &= c_p mdT - pdV \end{aligned} \tag{6.9.25}$$

eli

$$\begin{aligned} de &= c_p dT - p\,\frac{dV}{m} = c_p dT - pd\left(\frac{V}{m}\right) \\ &= c_p dT - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \ . \end{aligned} \tag{6.9.26}$$

Ominaisentalpian differentiaali (6.9.17) on isobaarisessa tapauksessa

$$dh = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \ . \tag{6.9.27}$$

Ratkaistaan tästä de ja sijoitetaan lauseke yhtälöön (6.9.26):

$$dh = c_p dT \ . \tag{6.9.28}$$

Täten

$$\boxed{c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \ .} \tag{6.9.29}$$

Vaikka kaavat (6.9.24) ja (6.9.29) ovat syntyneet tiettyjä erityisiä prosesseja tarkkailemalla, kaavojen nyt määrittelemät

termit c_V ja c_p ovat tilasuureita, sillä tilasuureiden $e(T,\rho)$ ja $h(T,p)$ derivaatat ovat luollillisesti myös tilasuureita.

Ihannekaasu. Ihannekaasuun liittyviä kaavoja on esiintynyt edellä mm. kohdassa 5.2. Kerätään tärkeimmät yhteydet tähän ja esitetään vielä joitakin uusia.

Terminen eli kineettinen tilanyhtälö:

$$\boxed{p = R\rho T\ .} \tag{6.9.30}$$

Kaasuvakio

$$R = c_p - c_V\ . \tag{6.9.31}$$

Adiabaattivakion

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} \tag{6.9.32}$$

mukaanotto synnyttää lisäksi mm. kaavat

$$R = (\gamma-1)c_V \tag{6.9.33}$$

ja

$$R = \frac{\gamma-1}{\gamma}\, c_p\ . \tag{6.9.34}$$

Kirjallisuudessa esitetään usein seuraavat määritelmät. Kaasu on termisesti täydellistä (engl. thermally perfect), jos ominaissisäenergia ja ominaisentalpia riippuvat vain termodynaamisesta lämpötilasta eli $e = e(T)$, $h = h(T)$. Kaasu on kalorisesti täydellistä (engl. calorically perfect), jos ominaislämpökapasiteetit c_p ja c_V ovat vakioita. Otaksumme jatkossa, että kyseessä on sekä termisesti että kalorisesti täydellinen kaasu.

Tällöin kaavojen (6.9.24) ja (6.9.29) perusteella mielivaltaisessa prosessissa ensinnäkin

$$de = \frac{de}{dT}\, dT = c_V dT \tag{6.9.35}$$

ja

$$dh = \frac{dh}{dT}\,dT = c_p dT \ . \tag{6.9.36}$$

Integroimalla saadaan lisäksi

$$\boxed{e = c_V T \ ,} \tag{6.9.37}$$

ja

$$\boxed{h = c_p T \ ,} \tag{6.9.38}$$

jos asetetaan e(0) = 0, h(0) = 0. (Koska yleensä käsitellään vain e:n ja h:n muutoksia, näiden suureiden absoluuttisia arvoja ei tarvita ja siis referenssiarvot voidaan valita vapaasti.)

Ominaisentropiaa koskevat yleiset kaavat (6.9.15) ja (6.9.18) saavat termisesti ja kalorisesti täydellisellä ihannekaasulla kaavojen (6.9.30), (6.9.35) ja (6.9.36) avulla muodot

$$ds = \frac{c_V}{T}\,dT - \frac{R}{\rho}\,d\rho \tag{6.9.39}$$

ja

$$ds = \frac{c_p}{T}\,dT - \frac{R}{p}\,dp \ . \tag{6.9.40}$$

Nämä ovat ominaisentropian kokonaisdifferentiaalin lausekkeita. Täten s voidaan määrittää viivaintegraalina

$$s = s^o + \int_o \left(\frac{c_V}{T}\,dT - \frac{R}{\rho}\,d\rho\right) \tag{6.9.41}$$

tai

$$s = s^o + \int_o \left(\frac{c_p}{T}\,dT - \frac{R}{p}\,dp\right) \tag{6.9.42}$$

pitkin mielivaltaista reittiä vastaavasti T,ρ- tai T,p-tasossa.

Edellä merkintä o viittaa referenssipisteeseen ja s^o siinä vallitsevaan ominaisentropian arvoon. Kulkemalla referenssipisteestä ensin esimerkiksi suoraa ρ = vakio (p = vakio) ja sitten suoraa T = vakio pitkin saadaan helposti tulokset

$$\boxed{s(T,\rho) = c_V \ln \frac{T}{T^o} - R \ln \frac{\rho}{\rho^o} + s^o} \tag{6.9.43}$$

ja

$$\boxed{s(T,p) = c_p \ln \frac{T}{T^o} - R \ln \frac{p}{p^o} + s^o \, .} \tag{6.9.44}$$

Jatkossa osoitetaan, että Eulerin rajalla ainealkion kokema prosessi on teoriassa isentrooppinen eli alkion ominaisentropia s säilyy. Kun kaavoissa (6.9.43) ja (6.9.44) valitaan tapaus $s = s^o$, saadaan isentrooppisessa prosessissa pätevät yhteydet

$$\frac{T}{T^o} = \left(\frac{\rho}{\rho^o}\right)^{\frac{R}{c_V}} = \left(\frac{p}{p^o}\right)^{\frac{R}{c_p}} \, . \tag{6.9.45}$$

Kaavojen (6.9.33) ja (6.9.34) avulla vielä

$$\frac{T}{T^o} = \left(\frac{\rho}{\rho^o}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p}{p^o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \, , \tag{6.9.46}$$

josta edelleen esimerkiksi

$$\boxed{p = p^o \left(\frac{\rho}{\rho^o}\right)^{\gamma} \, .} \tag{6.9.47}$$

Kyseessä on siis barotrooppinen tapaus $p = p(\rho)$ ja vielä siis polytrooppisen lain (5.2.7) eli $p = \text{vakio} \cdot \rho^n$ erikoistapaus siten, että eksponentti $n = \gamma$. Jos äskeisissä kaavoissa sovelletaan lisäksi termistä tilanyhtälöä (6.9.30), saadaan lukuisa määrä toisiaan muistuttavia kaavoja, joita ei kuitenkaan katsota tarpeellisiksi esittää tässä.

6.9.3 Lisää energiayhtälöstä ja Bernoullin yhtälöstä

Energiayhtälö. Energiayhtälö esiintyy kirjallisuudessa kaasumekaniikan yhteydessä eri tilanteissa erinomaisen hämmentävän moninaisissa muodoissa. Yleensä tietystä kaavasta päästään toiseen jatkuvuusyhtälöä ja tulon derivointikaavoja soveltamalla. Yhtälöiden määrää lisää vielä se, että niissä voivat esiintyä ominaisentropian- ja entalpian lisäksi mm. suureet

$$\boxed{e_t = e + \frac{1}{2} v^2} \tag{6.9.48}$$

ja

$$\boxed{h_t = h + \frac{1}{2} v^2} = e_t + \frac{p}{\rho} . \tag{6.9.49}$$

Nämä kulkevat usein vastaavasti nimillä virtauksen ominaiskokonaisenergia (engl. specific total energy) ja kokonaisentalpia (engl. total entalpy). Jälkimmäinen nimitys ei ole kovin hyvä, koska sanonta kokonaisentalpia tuo mieleen koko valitulle kappaleella integroimalla saadun entalpian. Käsitellään nyt joitakin vaihtoehtoisia energiayhtälön muotoja.

Entalpia ilmestyy useisiin kaavoihin. Katsotaan esimerkiksi energiayhtälön (6.9.11) eli uudestaan yhtälön

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q}} \tag{6.9.50}$$

termiä $p/\rho \cdot D\rho/Dt$. Derivointi osoittaa, että kaava

$$\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{Dp}{Dt} \tag{6.9.51}$$

pitää paikkansa. Tämän lausekkeen sijoitus yhtälöön (6.9.50) antaa muodon

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} .} \tag{6.9.52}$$

Johdimme paikallisen energiayhtälön (6.9.8) lähtien liikkeelle yhtälöstä $E^{\bullet} = P_Q - P_{int}$ eli yhtälöstä

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e dV = -\int_S \vec{n}\cdot\vec{q}dS + \int_V \overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d}dV \ . \qquad (6.9.53)$$

Jos vasempaan puoleen sovelletaan Reynoldsin lauseen (3.3.88") sijasta muotoa (3.3.88') ($f \mathrel{\hat{=}} \rho e$), saadaan yhtälö

$$\int_V [\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho e)]dV = \int_V (-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}+\overleftrightarrow{\sigma}:\overleftrightarrow{d})dV \ . \qquad (6.9.54)$$

Paikallinen energiayhtälö on täten

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}e) = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \overleftrightarrow{\sigma}^*:\overleftrightarrow{d} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} \ .} \qquad (6.9.55)$$

Lähdetään sitten seuraavaksi liikkeelle suoraan energian taseen aksioomasta $E^{\bullet} + K^{\bullet} = P_{ext} + P_Q$ eli (ks. kaava (6.9.48))

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e_t dV = \int_V \rho\vec{b}\cdot\vec{v}dV + \int_S \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{v}dS - \int_S \vec{n}\cdot\vec{q}dS \ . \qquad (6.9.56)$$

Sovelletaan Reynoldsin lausetta (3.3.88") ($f \mathrel{\hat{=}} e_t$) ja Gaussin lausetta (L.2.9") ($\vec{f} \mathrel{\hat{=}} \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{v}$ ja $\vec{f} \mathrel{\hat{=}} \vec{q}$):

$$\int_V \rho \frac{De_t}{Dt} dV = \int_V [\rho\vec{b}\cdot\vec{v} + \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{q}]dV \ . \qquad (6.9.57)$$

Tästä syntyy paikallinen muoto ($\overleftrightarrow{\sigma} = -p\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\sigma}^*$)

$$\boxed{\rho \frac{De_t}{Dt} = \rho\vec{b}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}p) + \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\sigma}^*\cdot\vec{v}-\vec{q}) \ .} \qquad (6.9.58)$$

Tarkastellaan vielä termiä $\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}p)$. Saadaan

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}p) = \frac{\partial}{\partial x}(v_x p) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y p) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z p)$$

$$= p(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}) +$$

$$+ v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (6.9.59')$$

eli

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}p) = p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}p \ . \qquad (6.9.59)$$

Lisäksi

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}p = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \qquad (6.9.60)$$

ja

$$p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = -\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}(\frac{p}{\rho}) - \frac{Dp}{Dt} \ . \qquad (6.9.61)$$

On käytetty hyväksi ainederivaatan lauseketta, dilataationopeuden kaavaa (6.9.10) sekä kaavaa (6.9.51). Täten

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}p) = \rho\frac{D}{Dt}(\frac{p}{\rho}) - \frac{\partial p}{\partial t} \ . \qquad (6.9.62)$$

Yhtälö (6.9.58) saa siis muodon (ks. kaava (6.9.49))

$$\boxed{\rho\frac{Dh_t}{Dt} = \rho\vec{b}\cdot\vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\sigma}^*\cdot\vec{v}-\vec{q}) \ .} \qquad (6.9.63)$$

Lopuksi sovelletaankin yhtälöön (6.9.56) Reynoldsin lauseen (3.3.88") sijasta muotoa (3.3.88') ($f \hat{=} \rho e_t$). Saadaan

$$\int_V [\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho e_t)]dV$$

$$= \int_V [\rho\vec{b}\cdot\vec{v} + \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{q}]dV \ . \qquad (6.9.64)$$

Tästä syntyy paikallinen muoto

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}e_t) = \rho\vec{b}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}p) + \vec{\nabla}\cdot(\overleftrightarrow{\sigma}^*\cdot\vec{v}-\vec{q}) \ .} \qquad (6.9.65)$$

Ominaisentropian ja -entalpian sisältäviä, joskus tarpeellisia yhteyksiä saadaan mm. Gibbsin yhtälöistä (6.9.15) ja (6.9.18):

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T}\frac{De}{Dt} + \frac{p}{T}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) , \tag{6.9.66}$$

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T}\frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho T}\frac{Dp}{Dt} . \tag{6.9.67}$$

Jos kyseessä on homogeeninen neste, saadaan vastaavasti mm.

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{p}{T}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) , \tag{6.9.68}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{T}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\rho T}\frac{\partial p}{\partial x} . \tag{6.9.69}$$

Huomautus 1. Ihannekaasua koskeva energiayhtälö (5.6.37) esiintyy kirjallisuudessa usein vaihtoehtoisessa muodossa [6.14, s. 267]

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \rho r + \frac{Dp}{Dt} + \Phi . \tag{6.9.70}$$

Tähän päästään seuraavasti. Ensinnäkin termisesti täydellisellä kaasulla $de = c_V dT$ ja $dh = c_p dT$. Toisaalta ominaisentalpian määritelmästä (6.9.16) seuraa differentioimalla tulos $dh = de + d(p/\rho)$ eli ihannekaasulle

$$c_p dT = c_V dT + d\left(\frac{p}{\rho}\right) . \tag{6.9.71}$$

Tämä voidaan saattaa yhtälön (6.9.61) avulla muotoon

$$\rho c_V \frac{DT}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} - p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} , \tag{6.9.72}$$

jonka sijoitus kaavaan (5.6.37) tuottaa yhtälön (6.9.70).

Eulerin rajan otaksuma yksinkertaistaa useita edellä esitettyjä kaavoja huomattavasti, koska voidaan siis asettaa $\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$ ja $\vec{q} = \vec{0}$. Erityisesti syntyy seuraava tärkeä asetelma. Energiayhtälöstä (6.9.50) saatu yhteys

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \tag{6.9.73}$$

sijoitettuna Gibbsin yhtälöön (6.9.13) antaa tuloksen

$$\boxed{\frac{Ds}{Dt} = 0} \tag{6.9.74}$$

eli kitkattomassa, adiabaattisessa (jos säteilyä ei ole = lämpöäjohtamattomassa) virtauksessa nestealkion ominaisentropia säilyy arvoltaan vakiona. Pysyvässä virtauksessa s on siis vakio myös kullakin virtaviivalla. Kun yhtälö (6.9.74) pätee, sanotaan tavallisesti, että virtaus on isentrooppista. Usein voidaan otaksua lisäksi, että virtaus saapuu tutkittavaan alueeseen siten, että nestealkioilla on sama ominaisentropian arvo. Yhtälön (6.9.74) vallitessa ominaisentropialla on silloin koko alueessa ja koko ajan sama arvo. Sanotaan, että virtaus on tällöin homentrooppista (engl. homentropic, thoroughly isentropic). Äskeisten termien merkitys vaihtelee kylläkin hieman eri oppikirjoissa.

Yhtälöä (6.9.74) hyväksikäytetään laajalti kaasumekaniikassa. Se ei päde riittävällä tarkkuudella shokeissa, rajakerroksissa, vana-alueissa jne. Esimerkiksi shokin läpi kulkiessaan nestealkion s:n arvo saa tietyn hypyn, mutta shokin jälkeisessä virtauksessa voidaan yleensä jälleen soveltaa yhtälöä (6.9.74).

Bernoullin yhtälö. Kun otaksuttiin Eulerin raja, merkitsi se mm. kitkattomuutta: O(1). Seurauksena saatiin lisäksi isentrooppinen prosessi nestealkiolle. Jos kuten tavallista neste on vielä homogeenista, kyseessä on siis barotrooppinen homogeeninen tapaus: O(3). Lisäksi painefunktiolla Ψ on ihannekaasun tapauksessa lauseke (ks. kaavat (6.4.11) ja (6.9.47))

$$\Psi = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^o}{\rho^o} [(\frac{p}{p^o})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1]$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^o}{\rho^o} [(\frac{\rho}{\rho^o})^{\gamma-1} - 1] \ . \tag{6.9.75}$$

Tarkastellaan barotrooppiseen yhteyteen $p = p(\rho)$ liittyvää määritelmää

$$\boxed{a^2 = \frac{dp(\rho)}{d\rho} .} \tag{6.9.76}$$

Osoittautuu, että suure a on fysikaaliselta merkitykseltään paikallinen äänen nopeus. (Ks. kohta 6.9.5 sekä kaava (5.2.14) ja esimerkin 5.2.1 kaava (b).) Ihannekaasun isentrooppisessa prosessissa pätee yhteys (6.9.47) ja siis

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p^o}{\rho^o}\left(\frac{\rho}{\rho^o}\right)^{\gamma-1} . \tag{6.9.77}$$

Havaitaan, että lauseke (6.9.75) voidaan esittää myös muodossa

$$\Psi = \frac{1}{\gamma - 1}\,[a^2 - (a^o)^2] . \tag{6.9.78}$$

Suure a^o viittaa siis äänen nopeuteen referenssitilassa p^o, ρ^o; $(a^o)^2 = \gamma p^o/\rho^o$.

Kaasumekaniikassa jätetään tilavuusvoimat tavallisesti huomiotta eli $\vec{b} = \vec{0}$ ja niin haluttaessa voidaan sanoa, että kyseessä on pyörteetön voimakenttä: 0(2) ja $\Omega = 0$.

Tarkastelemme tässä lisäksi vain pysyvää pyörteetöntä virtausta: 0(4), 0(5). Otaksumien 0(1), 0(2) ja 0(3) vallitessa saadaan nimittäin kohdassa 6.5 esitetyistä syistä usein pyörteetön virtauskenttä. Bernoullin yhtälön muoto (6.4.29) on voimassa [0(1), 0(2), 0(3), 0(4), 0(5)]

$$\frac{1}{\gamma - 1}[a^2 - (a^o)^2] + \frac{1}{2}\,v^2 = \text{vakio} \tag{6.9.79}$$

koko alueessa. Olkoon virtausnopeus v^o pisteessä, jossa vallitsevat valitut vertailuarvot ρ^o, p^o. Usein ko. pisteeksi valitaan häiriintymättömässä alueessa, kaukana tutkittavasta kohteesta oleva piste. Vakio saa siis arvon $1/2\cdot(v^o)^2$ ja Bernoullin yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boxed{a^2 = (a^o)^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\,[(v^o)^2 - v^2]\ .} \qquad (6.9.80)$$

Tämä kaava antaa siis paikallisen äänen nopeuden heti, kun paikallinen virtausnopeus v on selvillä.

Huomautus 2. Kaasumekaniikan kirjallisuudessa esiintyy ehkä osittain historiallisena painolastina eräitä melko omituisia nimityksiä, joiden merkitykset saattavat vielä vaihdella eri lähteissä. Mainitaan näistä muutamia.

Staattinen paine (engl. static pressure). Tällä tarkoitetaan tavallisesti suuretta, jota olemme nimittäneet edellä pelkästään paineeksi ja jolle olemme käyttäneet tunnusta p. Siis mm. nestedynamiikan probleeman painetta nimitetään staattiseksi paineeksi! Sana staattinen on ilmeisesti tarpeeton ja vielä lisäksi harhaanjohtava. Jos paine ajateltaisiin mitatuksi anturilla, tämän täytyisi olla pieni, nopeasti reagoiva, nesteen mukana liikkuva osanen, joka mittaisi aina kussakin pisteessä kolmessa toisiaan vastaan kohtisuorassa suunnassa vaikuttavien normaalijännitysten arvot. Paineen arvo saataisiin tämän jälkeen kaavaa (3.4.17) soveltamalla. Jos anturi nimittäin asetetaan kiinteästi johonkin pisteeseen, virtausnopeus häviää anturin pinnalla eli anturi aiheuttaa häiriöitä virtauskenttään eikä siis mittaa todellista häiriötöntä tilannetta. (On laitteita, joilla staattinen paine voidaan mitata tietyllä tarkkuudella, vaikka anturi on kiinteä virtauksen suhteen. Ks. myös kohdan 6.10.1 tulos 1.)

Kineettinen paine (engl. kinetic pressure) määritellään suureena $\rho v^2/2$. Joskus tälle suureelle näytetään käytettävän myös nimitystä dynaaminen paine (engl. dynamic pressure). Dynaamisella paineella tarkoitetaan kuitenkin tavallisemmin kohdan 6.12 huomautuksessa 1 selostettua suuretta.

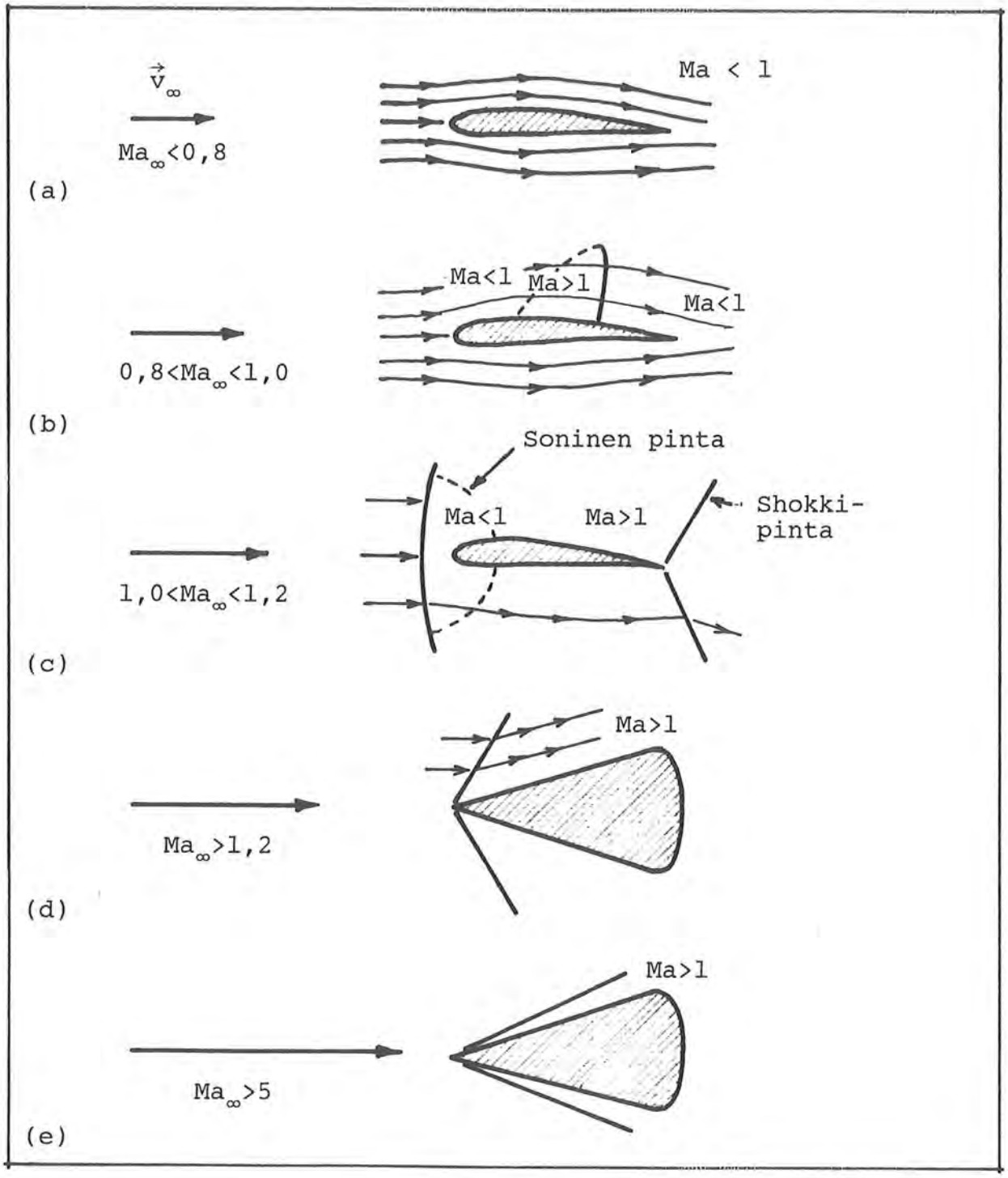
Staattinen lämpötila (engl. static temperature). Tämä on nimityksen staattinen paine vastine. Siis kyseessä on suure, jota olemme edellä nimittäneet pelkästään lämpötilaksi ja jolle olemme käyttäneet tunnusta T. Vastaavan lämpötila-anturin tulisi jälleet kulkea virtauksen mukana.

Kokonaispaine ja kokonaislämpötila (engl. total pressure, total temperature). Vallitkoon virtauskentässä tietyssä pistees-

sä nopeus $\vec{v}$, (staattinen) paine p ja (staattinen) lämpötila T. Tähän samaan pisteeseen assosioidaan kuviteltu paine, ns. kokonaispaine p_o ja kuviteltu lämpötila, ns. kokonaislämpötila T_o seuraavasti. Ajatellaan, että kyseessä oleva neste-alkio saatetaan isentrooppisessa prosessissa lepotilaan. Saadut (staattinen) paine ja (staattinen) lämpötila ovat suureet p_o ja T_o. Joskus kokonais-sanan sijasta näytetään käytettävän synonyymina patosanaa (engl. stagnation); joskus taas jälkimmäiseen termiin liitetään hieman eri sisältö.

6.9.4 Vallitsevat yhtälöt

Virtauksen kuvailua. Tarkastellaan lähteestä [6.17] mukaillen lainattua kuvaa 6.9.1, johon liittyvä selostava teksti on samoin



Kuva 6.9.1 Virtaustyyppejä.

pitkälti referointia kyseisestä lähteestä.

Kohdassa 5.1 on jo puhuttu kokoonpuristuvan virtauksen luokittelusta paikallisen Machin luvun $Ma = v/a$ arvon perusteella. Kuva 6.9.1 esittää tapauksia, joissa nesteen virtauksen otaksutaan olevan ns. tasaista yhdensuuntaisvirtausta (engl. uniform flow) kaukana tarkasteltavan kappaleen ylävirran puolella. Siellä vallitsevat nesteen tilasuureet varustetaan usein alaviitteellä ∞; siis esimerkiksi $\vec{v}_\infty$, p_∞, ρ_∞, T_∞. Vastaavasti puhutaan ns. vapaan virtauksen (engl. free-stream, far field) suureiden arvoista. Kuvan 6.9.1 esittämät eri tapaukset liittyvät vapaan virtauksen Machin luvun $Ma_\infty = v_\infty/a_\infty$ eri arvoalueisiin ja siitä seuraaviin lokaalisiin Machin luvun arvoihin.

Subsonisessa eli alisonisessa virtauksessa eli aliäänivirtauksessa (kuva (a)) $Ma < 1$ kaikkialla alueessa. Näin käy, jos Ma_∞ on riittävän pieni; esimerkiksi kuvan esittämän tyypillisen siipiprofiilin tapauksessa tulee olla karkeasti $Ma_\infty < 0{,}8$. Virtaviivat kulkevat sileästi ja tilasuureiden arvot muuttuvat samoin jatkuvalla tavalla. Vapaan virtauksen yhdensuuntaiset suorat virtaviivat alkavat kaartua kaukana kappaleesta; "virtaus saa siis tiedon" kappaleesta jo aikaisessa vaiheessa.

Transsonisessa virtauksessa (kuva (b) ja (c)) esiintyy sekä arvoja $Ma < 1$ että $Ma > 1$. Kuva (b) esittää tapausta, jossa Ma_∞ on edelleen pienempi kuin 1, mutta silti kyllin suuri tuottamaan profiilin yläpinnan ympäristöön supersoinisen alueen, ns. supersonisen taskun (engl. supersonic pocket). Tasku päättyy shokkipintaan.

Jos Ma_∞ tulee arvoltaan vähän ykköstä suuremmaksi (kuva (c)), äskeinen shokkipinta siirtyy profiilin jättöreunasta alkavaksi ja profiilin etupuolelle ilmestyy toinen shokkipinta, ns. keulashokki (engl. blow shock). Kyseessä on tasainen yhdensuuntaisvirtaus aina keulashokkiin asti; "virtaus tietää vasta myöhään" kappaleesta. Transoninen alue voi olla tyypillisesti luokkaa $0{,}8 < Ma_\infty < 1{,}2$.

Supersonisessa eli ylisonisessa virtauksessa eli yliäänivirtauksessa (kuva (d)) $Ma > 1$ kaikkialla alueessa. Kuvan esittämän kiilamaisen kappaleen kärjestä lähtevät shokkipinnat ovat suoria (engl. oblique shock front) ja virtaviivat saavat niiden kohdalla

äkillisen suunnanmuutoksen.

Hypersonisessa virtauksessa (kuva (e)) virtausnopeus on niin suuri ($Ma_\infty > (\approx 5)$), että kappaleiden pintojen läheisyyteen muodostuu hyvin korkea lämpötila, joka aiheuttaa kaasun dissosioitumista sekä ionisoitumista. Kaasun ominaisuuksien muuttuminen tulee ottaa huomioon vallitsevissa yhtälöissä.

Huomautus 1. Kuvan 6.9.1 yhteydessä esitetty teksti sisältää epätarkkuuksia. Todellisen kaasun nopeus häviää takertumisehdon perusteella kiinteiden kappaleiden pinnoilla, joten niillä Ma = 0. Täten esimerkiksi täysin supersonista virtausta ei ole olemassa. Täsmällisempää on siis puhua virtauskentän jakautumisesta subsonisiin ja supersonisiin alueisiin. Jakavia pintoja, joilla Ma = 1, nimitetään sonisiksi pinnoiksi (engl. sonic surface).

Shokit eli shokkipinnat eli shokkirintamat eli shokkiaallot (engl. shock, shock surface, shock front, shock wave) ovat kokoonpuristuvassa virtauksessa Eulerin rajalla virtausalueen epäjatkuvuuspintoja, joilla tietyt suureet kuten paine ja tiheys saavat arvoihinsa hyppäyksiä pinnan läpi kuljettaessa. Todellisessa kitkallisessa lämpöäjohtavassa virtauksessa shokeilla on tietty paksuus ja arvojen muutokset eivät tapahdu aivan hyppäyksellisesti. Shokin paksuus on kuitenkin yleensä äärimmäisen pieni (Kirjallisuudessa on esitetty tyypillisenä arvona luku neljä kertaa molekyylien keskimääräinen vapaa matka [6.18].), joten käytännössä ajatus epäjatkuvuuspinnasta on edelleen järkevä. Koska muutokset tapahtuvat hyvin lyhyellä matkalla, virtausnopeus - ja lämpötilagradientit saavat valtavan suuria arvoja. Kitkalla ja lämmönjohtavuudella tulee tällöin olemaan oleellinen merkitys. Shokeissa tapahtuu dissipaatiota eli virtauksen mekaanista energiaa muuttuu sisäenergiaksi. Voidaan sanoa, että shokit ovat mekaanisen energian nieluja. Tämä seikka on otettava oikein huomioon mm. shokkien numeerisessa mallituksessa.

Shokkipintoihin liittyvät hyppyehdot voidaan johtaa kohdassa 5.7.5 esitettyä tekniikkaa käyttäen. Syntyviä yhtälöitä nimitetään usein Rankine-Hugoniot hyppyehdoiksi [6.18, s. 62]. Niitä ei tulla käsittelemään tässä.

Shokkien syntymistä voidaan havainnollistaa seuraavan tulkin-

nan avulla [6.19, s. 129]: "Shokkeja eri ominaisuuksineen voidaan visualisoida analogian kautta käsittelemällä partikkelien liikettä kuten ajoneuvojen virtaa ajotiellä. Otaksutaan suurella nopeudella tapahtuva tasainen liikennevirta. Tällaisessa virtauksessa on olemassa "äänen vauhti", se on vauhti, jolla liikenteessä tapahtuvat pienet häiriöt etenevät. Jos ajoneuvojen vauhti ylittää tämän äänen vauhdin, shokki syntyy vauhtia nopeasti vähennettäessä esimerkiksi, kun ajaja näkee nopeusrajoitusmerkin. Seuraavissa autoissa olevat ajajat näkevät äkkiä edessään olevan auton vähentävän nopeutta. He eivät ehdi välittää varoitussignaalia takanaan oleville ajajille ennen omaa vauhdin hidastustaan. Syntyvä shokki katsoo taaksepäin. Tiheyden kasvu on ilmeinen; paineen kasvu on myös välittömästi edustettuna mallissamme, jos kuvittelemme autojen jonon erotetuksi toisistaan jousilla tai puskureilla, joiden jousivoimalaki on epälineaarinen ..."

Lähteitä [6.19] ja [6.20] voidaan suositella klassillisina kaasumekaniikan oppikirjoina. Edellinen on matemaattisesti suuntautunut. Jälkimmäinen on taas erinomainen insinöörimäisempi esitys. Lähde [6.21] on äskeisiä uudempi, myös suositeltava teos.

<u>Yhtälöiden perusmuotoja</u>. Vallitsevat kenttäyhtälöt esitetään kaasumekaniikan kirjallisuudessa nykyisin usein seuraavantyyppisessä standardimuodossa (otetaan kaavojen lyhentämiseksi tasotapaus)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\{U\} + \frac{\partial}{\partial x}\{F\}_x + \frac{\partial}{\partial y}\{F\}_y - \{S\} = \{0\}} \qquad (6.9.81)$$

sekä esimerkiksi

$$\boxed{\begin{aligned} p &= p(\rho,T) \ , \\ e &= e(\rho,T) \ . \end{aligned}} \qquad (6.9.82)$$

Käytettyjen merkintöjen sisältö on seuraava:

$$
\left.
\begin{aligned}
\underset{4\times 1}{\{U\}} &= \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho e_t \end{Bmatrix}, \\
\underset{4\times 1}{\{F\}_x} &= \begin{Bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \sigma_x^* \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x e_t + v_x p - v_x \sigma_x^* - v_y \tau_{xy} + q_x \end{Bmatrix}, \\
\underset{4\times 1}{\{F\}_y} &= \begin{Bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \sigma_y^* \\ \rho v_y e_t + v_y p - v_x \tau_{yx} - v_y \sigma_y^* + q_y \end{Bmatrix}, \\
\underset{4\times 1}{\{S\}} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho b_x \\ \rho b_y \\ \rho (b_x v_x + b_y v_y) \end{Bmatrix}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (6.9.83)
$$

Pikakirjoitusmuotoisen kenttäyhtälön (6.9.81) ensimmäinen komponenttiyhtälö on jatkuvuusyhtälö, toiset kaksi ovat liikeyhtälöitä ja viimeinen on energiayhtälö. Ne on kerätty tähän lähinnä kaavojen (5.3.3), (5.4.9) ja (5.4.10) sekä (6.9.65) mukaisissa asuissa.

Yhtälö (6.9.81) on vallitsevien yhtälöiden eräs säilymismuotoinen esitys; ks. kohdan 6.8.2 huomautus 1. Kaavat on lisäksi pyritty kirjoittamaan siten, että läheinen samankaltaisuus tyypillisen konvektio-diffuusioyhtälön (6.8.5) kanssa olisi nähtävissä. Diffuusiotermit tulevat mukaan esitykseen, jos deviaatiojännityskomponenttien ja lämpövuokomponenttien tavanomaiset konstitutiiviset yhteydet otetaan huomioon. Tulemme kuitenkin tässä jatkossa käsittelemään lähinnä tilannetta Eulerin rajalla, jolloin

asetetaan $\overleftrightarrow{\sigma}^* = \overleftrightarrow{0}$ ja $\vec{q} = \vec{0}$. Kaasumekaniikassa tehdään tavallisesti vielä otaksuma $\vec{b} = \vec{0}$, jolloin $\{S\} = \{0\}$. Näin päädytään kaasumekaniikan tavanomaisiin, säilymismuodossa oleviin ns. Eulerin yhtälöihin

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0 \ , \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) = 0 \ , \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_y + p) = 0 \ , \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x}[v_x(\rho e_t + p)] + \frac{\partial}{\partial y}[v_y(\rho e_t + p)] = 0
\end{aligned}} \qquad (6.9.84)$$

sekä esimerkiksi termisesti ja kalorisesti täydellistä ihannekaasua koskeviin konstitutiivisiin yhteyksiin

$$\boxed{\begin{aligned}
&p = R\rho T \ , \\
&\langle e \rangle = [e_t - \tfrac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)] = c_V T \ .
\end{aligned}} \qquad (6.9.85)$$

(Huomattakoon, että kaasumekaniikan yhteydessä sanonnalla Eulerin yhtälöt tarkoitetaan usein itse Eulerin liikeyhtälöiden — toinen ja kolmas yhtälö (6.9.84) — lisäksi koko vallitsevaa yhtälösysteemiä.) Esitetyissä kuudessa yhtälössä on vastaavasti kuusi tuntematonta ρ, v_x, v_y, p, e_t ja T. Yleensä lämpötila eliminoidaan heti yhtälöistä (6.9.85), jolloin ne korvautuvat yhdellä yhteydellä

$$\begin{aligned}
p &= R\rho\,\frac{e}{c_V} = \frac{c_p - c_V}{c_V}\,\rho e = (\gamma-1)\rho e \\
&= (\gamma-1)\rho[e_t - \tfrac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)] \ .
\end{aligned} \qquad (6.9.86)$$

Jos tämä taas sijoitetaan yhtälöihin (6.9.84), jäljelle jää enää neljää tuntematonta ρ, v_x, v_y, e_t koskeva formulaatio.

Yhtälöiden erityismuotoja. Tavanomaisin yksinkertaistus saadaan otaksumalla polytrooppinen homogeeninen tapaus ja normaalisti nimenomaan isentrooppinen tapaus. (Ks. kaava (6.9.74) ja siihen liittyvä teksti.) Tällöin voidaan soveltaa yleisen yhteyden $p = p(\rho,T)$ sijasta polytrooppista yhteyttä $p = p(\rho)$. Energiayhtälö voidaan jättää pois ja ratkaistaviksi jäävät kolme ensimmäistä yhtälöä (6.9.84) plus tilanyhtälö $p = p(\rho)$ tuntemattomineen ρ, v_x, v_y ja p. Paine voidaan vielä eliminoida seuraavasti. Ketjuderivointi antaa painegradientin komponenteiksi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} , \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} , \end{aligned}\right\} \tag{6.9.87}$$

jossa on käytetty kaavan (6.9.76) mukaista lyhennysmerkintää.

Huomautus 2. Homogeenisen nesteen otaksumaa tarvitaan vastaavista syistä, joita on selostettu kohdassa 6.4. Samoin huomataan, että yleinen yhteys $p = p(\rho,T)$ johtaisi mm. kaavaan

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \frac{\partial T}{\partial x} , \tag{6.9.88}$$

joten lämpötila jäisi mukaan formulaatioon.

Seuraavassa tarkastellaan erityisesti Eulerin rajalla vallitsevaa ihannekaasun stationaarista pyörteetöntä virtausta edelleen kaksidimensioisessa tapauksessa. Kolme ensimmäistä yhtälöä (6.9.84) ovat ei-säilymismuotoihin kirjoitettuina

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) &= 0 , \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 , \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{6.9.89}$$

Kun liikeyhtälöihin sijoitetaan esitykset (6.9.87), ratkaistaan

lausekkeet $\partial\rho/\partial x$ ja $\partial\rho/\partial y$ ja sijoitetaan ne jatkuvuusyhtälöön, päädytään lopuksi yhtälöön

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} + (a^2-v_y)^2\frac{\partial v_y}{\partial y} - v_x v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0 \ . \qquad (6.9.90)$$

Vielä ei ole käytetty hyväksi virtauksen pyörteettömyyttä. Sen perusteella voidaan siirtyä kohdassa 6.3 esitetyn nopeuspotentiaalin käyttöön, jolloin $v_x = \partial\phi/\partial x$ ja $v_y = \partial\phi/\partial y$. Yhtälö (6.9.90) saa muodon

$$\boxed{[a^2 - (\frac{\partial\phi}{\partial x})^2]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + [a^2 - (\frac{\partial\phi}{\partial y})^2]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = 0 \ .} \qquad (6.9.91)$$

Paikallinen äänen nopeus a on tässä vielä tuntematon paikasta riippuva suure. Esitettyjen otaksumien perusteella yhtälö (6.9.80) on voimassa ja saadaan yhteys

$$\boxed{a^2 = (a^o)^2 + \frac{\gamma-1}{2}(v^o)^2 - \frac{\gamma-1}{2}[(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial y})^2] \ .} \qquad (6.9.92)$$

Kun suureet a^o ja v^o ovat annetut (esimerkiksi vapaan virtauksen arvot a_∞ ja v_∞) ja jos tehtävä on täydennetty reunaehdoin, ratkaisu on löydettävissä yhtälöiden (6.9.91) ja (6.9.92) muodostaman asetelman avulla.

Nopeuspotentiaalia koskevan differentiaaliyhtälön (6.9.91) voidaan osoittaa olevan kussakin pisteessä elliptinen, parabolinen tai hyperbolinen aina sen mukaan, onko Ma < 1, = 1 vai > 1 [4.2, s. 355]. Reunaehtojen perusteellinen käsittely vaatisi karakteristikateoriaan paneutumista. Jos Ma < 1 kaikkialla eli siis subsonisessa virtauksessa kyseessä on elliptinen tehtävä ja reunaehdot tulee antaa koko tarkasteltavan tasoalueen reunalla. Tavallisin reunaehto on annettu normaalinopeuden v_n arvo eli siis Neumann-tyyppinen yhteys

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \bar{v}_n \qquad \text{s:llä.} \qquad (6.9.93)$$

Äskeinen nopeuspotentiaalia hyväksikäyttävä formulaatio voidaan yleistää periaatteessa helposti myös kolmidimensioiseen tapaukseen. Kahdessa dimensiossa voidaan soveltaa vaihtoehtoisesti kaavojen (6.3.22) tai (6.3.23) esittämää virtafunktiota ψ. Päädytään jälleen yhtälöiden (6.9.91) ja (6.9.92) esittämän tapaiseen formulaatioon.

6.9.5 Akustinen värähtely

Yleistä. Akustisella värähtelyllä tarkoitetaan tavallisesti lepotilassa olevaan nesteeseen synnytettyjen pienten häiriöiden kuten ääniaaltojen tarkastelua. Tähän asti olemme käsitelleet nestemekaniikan probleemeja aina Eulerin esitystavan avulla. Akustisen värähtelyn yhteydessä on kuitenkin joskus edullista käyttää Lagrangen esitystä, joten tätä mahdollisuutta tullaan myös selostamaan jatkossa lyhyesti.

Eulerin esitys. Suuruusluokkatarkastelut ja kokemus ovat osoittaneet, että akustista värähtelyä tarkasteltaessa nesteen liikettä voidaan pitää hyvällä tarkkuudella kitkattomana, lämpöäjohtamattomana pyörteettömänä virtauksena. Näin tehdään tässäkin.

Otaksutaan aluksi, että kyseessä on lepotila tilavuusvoimien $\vec{b}^o$ alaisena ja että tällöin nesteen paine on p^o ja tiheys ρ^o. Eulerin liikeyhtälöt (5.4.13) (tai liikeyhtälöt (6.9.84) täydennettyinä tilavuusvoimatermeillä) saavat tasapainomuodot (otetaan tasotapaus)

$$\left.\begin{aligned} b_x^o - \frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p^o}{\partial x} &= 0 \,, \\ b_y^o - \frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p^o}{\partial y} &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.9.94)$$

Nesteeseen aiheutetaan pieni häiriö, jonka johdosta nesteessä tapahtuu pieniä liikkeitä nopeudella $\vec{v}$ ja paineen ja tiheyden arvot heilahtelevat tasapainoarvojen p^o ja ρ^o ympäristössä; merkitään

$$p = p^o + p' \,, \qquad (6.9.95)$$

$$\rho = \rho^o + \rho' = \rho^o(1+\frac{\rho'}{\rho^o}) \,, \qquad (6.9.96)$$

jossa muutokset $|p'| << |p^o|$, $|\rho'| << |\rho^o|$. Eulerin liikeyhtälöt (5.4.13) ovat nyt (tilavuusvoiman intensiteetti ei muutu)

$$\left.\begin{aligned} b_x^o - \frac{1}{\rho^o(1+\frac{\rho'}{\rho^o})}\left(\frac{\partial p^o}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x}\right) &= a_x \,, \\ b_y^o - \frac{1}{\rho^o(1+\frac{\rho'}{\rho^o})}\left(\frac{\partial p^o}{\partial y} + \frac{\partial p'}{\partial y}\right) &= a_y \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.9.97)$$

Kun jätetään termi ρ'/ρ^o ykkösen rinnalla pois, otetaan huomioon yhtälöt (6.9.94) sekä tehdään approksimaatiot

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{\partial v_x}{\partial t} \,, \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{\partial v_y}{\partial t} \,, \end{aligned}\right\} \qquad (6.9.98)$$

saadaan liikeyhtälöt

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p'}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} \,, \\ -\frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p'}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} \,. \end{aligned}} \qquad (6.9.99)$$

Konvektiivisten kiihtyvyystermien poisjätön oikeutusta on selostettu mm. lähteessä [3.1, s. 441]. Osoittautuu, että näin voidaan tehdä, jos nesteen heilahtelun liikenopeudet ovat pieniä nesteessä kulkevan äänen nopeuteen a^o verrattuna.

Jatkuvuusyhtälö (6.9.84) on tasotapauksessa muotoa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \qquad (6.9.100)$$

eli lauseke (6.9.96) huomioonottaen

$$\cancel{\frac{\partial \rho^o}{\partial t}} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho^o}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho^o}{\partial y} + v_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho'}{\partial y} +$$

$$+ \rho^o(1+\frac{\rho'}{\rho^o})\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \,. \qquad (6.9.101)$$

Kun jätetään termi ρ'/ρ^o ykkösen rinnalla pois, otaksutaan ρ^o vakioksi tai vain hitaasti paikan suhteen muuttuvaksi sekä jätetään vielä termit $v_x\partial\rho'/\partial x$ ja $v_y\partial\rho'/\partial y$ pieninä pois [3.1, s. 439], saadaan lopuksi jatkuvuusyhtälö

$$\boxed{\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho^o\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \ .} \qquad (6.9.102)$$

Otaksuma kitkattomuudesta ja lämmönjohtamattomuudesta merkitsee samalla isentrooppisuutta. Isentrooppista tilanyhtälöä $p = p(\rho)$ approksimoidaan lineaarisesti: $dp = (dp/d\rho)^o d\rho$ eli likimain

$$p - p^o = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^o(\rho-\rho^o) \qquad (6.9.103)$$

eli vielä siis

$$\boxed{p' = (a^o)^2\rho' \ .} \qquad (6.9.104)$$

On käytetty kaavan (6.9.76) mukaista merkintää $(a^o)^2 = (dp/d\rho)^o$, jossa vielä $(dp/d\rho)^o$ tarkoittaa derivaatan $dp/d\rho$ arvoa tasapainotilassa.

Yhtälöt (6.9.99), (6.9.102) ja (6.9.104) esittävät <u>linearisoidun akustisen probleeman</u> neljää kenttäyhtälöä tasotapauksessa. Vastaavasti tuntemattomina esiintyvät suureet v_x, v_y, p' ja ρ'.

Yleensä pyritään formulaatioon, jossa muut suureet kuin paine tai tiheys ovat eliminoidut. Eliminoidaan ensin esimerkiksi ρ' sijoittamalla sen lauseke $\rho' = p'/(a^o)^2$ yhtälöön (6.9.102):

$$\frac{1}{(a^o)^2}\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho^o\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \ . \qquad (6.9.105)$$

Eliminoidaan sitten nopeudet derivoimalla ensin äskeinen yhtälö ajan suhteen:

$$\frac{1}{(a^o)^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho^o\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial t\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial t\partial y}\right) = 0 \qquad (6.9.106)$$

ja sijoittamalla tähän yhtälöistä (6.9.99) lasketut nopeuksien toiset osittaisderivaatat. Kun tiheyttä ρ^o pidetään paikan suhteen vakiona, saadaan lopuksi paineen muutosta p' koskeva kenttäyhtälö (suoritetaan tässä samalla ilmeinen yleistys kolmeen dimensioon)

$$\boxed{\nabla^2 p' - \frac{1}{(a^o)^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0} \qquad (6.9.107)$$

eli karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} - \frac{1}{(a^o)^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \ . \qquad (6.9.107')$$

Tämä on ns. (kolmidimensioinen) aaltoyhtälö (engl. wave equation). Jos eliminoidaankin suureet p' ja $\vec{v}$, päädytään lopuksi täsmälleen vastaavaan suuretta ρ' koskevaan aaltoyhtälöön. Pyörteettömyyden johdosta voidaan ottaa niin haluttaessa käyttöön myös nopeuspotentiaali ϕ. Osoittautuu, että sitäkin tulee koskemaan aaltoyhtälö.

Aaltoyhtälön (6.9.107) ns. d'Alembertin ratkaisua tarkastelemalla voidaan päätellä [3.1, s. 440], että suure a^o esittää "tietyn muotoisen" ratkaisun etenemisvauhtia paikan suhteen. Suureesta a^o käytetään nimityksiä signaalinopeus, akustinen nopeus, aaltonopeus, äänen nopeus (engl. sound velocity, speed). Tarkasti ottaen olisi oikeampaa puhua äänen nopeuden sijasta äänen vauhdista, vaikkakaan tämä käytäntö ei ole kovin hyvin levinnyt.

Ihannekaasulle äänen nopeus voidaan määrittää kaavan (6.9.77) avulla ja saadaan siis

$$(a^o)^2 = \gamma \frac{p^o}{\rho^o} \ . \qquad (6.9.108)$$

Reunaehtoina voidaan antaa paineen p arvo reunan osalla S_t eli kaava (6.9.95) huomioon ottaen

$$\boxed{p' = \bar{p}'} \qquad S_t\text{:llä.} \qquad (6.9.109)$$

Tämä reunaehto esiintyy esimerkiksi nesteen vapaalla pinnalla, jolla vaikuttaa vakio ilmanpaine, jolloin siis $\bar{p}' = 0$. Reunan osalla S_v on annettu reunan normaalin suuntainen nesteen nopeuskomponentti v_n ajan funktiona, joten myös kiihtyvyys normaalin suunnassa $\bar{a}_n \approx \partial\bar{v}_n/\partial t$ on tunnettu. Liikeyhtälöiden (6.9.99) vastine normaalin suunnalle on

$$-\frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p'}{\partial n} = \frac{\partial v_n}{\partial t}\,, \tag{6.9.110}$$

joten reunaehto on

$$\boxed{\frac{\partial p'}{\partial n} = -\rho^o\bar{a}_n} \qquad S_v\text{:llä.} \tag{6.9.111}$$

Tämä reunaehto esiintyy esimerkiksi kiinteän seinämän yhteydessä muodossa $\partial p'/\partial n = 0$. Lisäksi on annettava suuretta p' koskevat alkuehdot.

Kokoonpuristumattomalla nesteellä äänen nopeus on ääretön ja differentiaaliyhtälö (6.9.107) kutistuu Laplacen yhtälöksi

$$\boxed{\nabla^2 p' = 0} \tag{6.9.112}$$

eli

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0\,, \tag{6.9.112'}$$

jolloin kysymyksessä ei siis enää olekaan etenemistehtävä vaan epästationaarinen tasapainotehtävä.

Laplacen yhtälö (6.9.112) reunaehtoinen (6.9.109) ja (6.9.111) on kvasiharmonisen formulaation erikoistapaus ja numeerisen ratkaisun pohjana voidaan käyttää variaatioperiaatetta

$$\boxed{\delta\Pi = 0\,,} \tag{6.9.113}$$

jossa

$$\Pi(p') = \int_V \frac{1}{2}[(\frac{\partial p'}{\partial x})^2 + (\frac{\partial p'}{\partial y})^2 + (\frac{\partial p'}{\partial z})^2]dV +$$

$$+ \int_{S_v} \rho^o \bar{a}_n p' dS \ . \qquad (6.9.114)$$

Värähtelevää nestettä ympäröivät seinämät voivat liittyä samanaikaisesti analysoitavaan värähtelevään rakenteeseen; esimerkiksi laivan rungon värähtely vedessä tai vesiallasta rajoittavan padon liike maanjäristyksen yhteydessä. Nesteen paine toimii osana rakenteen kuormitusta ja toisaalta rakenteen seinämien liike vaikuttaa nesteen painejakautumaan. Syntyy yhdistetty nestemekaniikan ja kiinteän aineen mekaniikan tehtävä.

Lagrangen esitys. Kun nestepartikkelien siirtymät jäävät pieniksi — kuten on asian laita akustisessa värähtelyssä — on joskus edullista käyttää nesteenkin suhteen Lagrangen esitystä. Yhdistetyssä nestemekaniikan ja kiinteän aineen mekaniikan probleemassa voidaan tällöin esimerkiksi soveltaa suoraviivaisesti siirtymäformulaatiota (ks. kohta 4.8) käsitellen nestettä vain tarkasteltavan alueen eräänä osana. Tieto siitä, että alueen jollain osilla esiintyy nestettä, siirtyy lopullisiin yhtälöihin asiaankuuluvien konstitutiivisten yhteyksien välityksellä.

Merkitään Lagrangen koordinaatteja nyt jälleen tunnuksilla a, b ja c, jotta ero äskeisen Eulerin esityksen kanssa tulisi esille.

Otaksumme nesteen kimmoiseksi materiaaliksi. Tehtävänä on yksinkertaisesti määrittää yhteydessä (4.2.24) (ilman alkumuodonmuutoksia) eli yhteydessä

$$\{\sigma\} - \{\sigma^o\} = [D]\{\varepsilon\} \qquad (6.9.115)$$

tarvittavan matriisin [D] alkiot. Voimme kirjoittaa äskeisen yhtälön yhtä hyvin myös muodossa

$$\Delta\{\sigma\} = [D]\Delta\{\varepsilon\} \ , \qquad (6.9.116)$$

koska siirtymä $\{u\}$ ja siirtymän muutos $\Delta\{u\}$ sekä vastaavasti venymä $\{\varepsilon\}$ ja venymän muutos $\Delta\{\varepsilon\}$ ovat tässä valitun alkutilan perusteella sama asia.

Kaavasta (4.2.21) saadaan yhteys

$$\Delta p = -K\Delta\varepsilon_V \ , \tag{6.9.117}$$

jossa $K = 1/\kappa$ on tässä nesteen isentrooppinen puristuvuuskerroin eli tilavuuskimmokerroin.

Kun otaksutaan edelleen kitkaton värähtely, nesteen jännitystila säilyy koko ajan isotrooppisena. Täten

$$\Delta\{\sigma\} = -[\Delta p, \Delta p, \Delta p, 0, 0, 0]^T \tag{6.9.118}$$

eli esimerkissä 4.2.2 esiintyviä merkintöjä käyttäen

$$\Delta\{\sigma\} = -\{m\}\Delta p \ . \tag{6.9.119}$$

Lisäksi yleisesti

$$\Delta\varepsilon_V = \Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_b + \Delta\varepsilon_c = \{m\}^T\Delta\{\varepsilon\} \ . \tag{6.9.120}$$

Yhteyksien (6.9.117) ja (6.9.120) huomioonotto kaavassa (6.9.119) antaa tuloksen

$$\Delta\{\sigma\} = K\{m\}\{m\}^T\Delta\{\varepsilon\} \ . \tag{6.9.121}$$

Lausekkeita (6.9.116) ja (6.9.121) vertaamalla saadaan siis haluttu tulos

$$[D] = K\{m\}\{m\}^T = K \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$$

$$= K \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] . \tag{6.9.122}$$

Koska on otaksuttu kimmoinen materiaali, materiaalille voidaan esittää tarvittaessa muodonmuutosenergian tiheyden lauseke. Kaa-

vaa (4.10.7) soveltamalla saadaan ($\{\varepsilon\} \to \Delta\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon^o\} = \{0\}$)

$$U^\sigma = \frac{1}{2} K(\Delta\varepsilon_V)^2 + p^o \Delta\varepsilon_V \ . \tag{6.9.123}$$

Huomautus 1. Kiinteän aineen ja nesteen rajapintoja käsiteltäessä on varauduttava sallimaan kitkattoman nesteen mallin mukaisesti nesteen vapaa liukuminen pitkin seinämiä. Toisin sanoen voidaan vaatia vain läpitunkemattomuusehdon (4.7.32) toteutumista, vrt. myös kuva 4.7.11 (b).

6.10 Rajakerrosvirtaus

6.10.1 Virtaus seinämän läheisyydessä

Yleistä. Rajakerrosteoria (engl. boundary layer theory) koskee nestemekaniikan yleisten yhtälöiden seinämien läheisyydessä enemmän tai vähemmän hyvin päteviä, yksinkertaistettuja muotoja. Takertumisehto yhdessä jatkuvuusyhtälön kanssa rajoittaa virtauksen kulkua oleellisella tavalla ja syntyvää tietoa voidaan käyttää hyväksi järkevien rajakerrosyhtälöiden synnyttämisessä. Tarkastelemme tässä siten aluksi melko pitkään esivalmisteluna seinämistä johtuvia yhteyksiä vielä ilman mitään erityisiä otaksumia. Tuloksia voidaan hyödyntää muuallakin kuin rajakerrosteoriassa.

Olemme käsitelleet kiinteää seinämää jo kohdassa 5.7.3 ja kohdan 6.5 huomautuksessa 1. Jatkossa suoritamme johdot lähinnä tasotapauksessa. Esimerkiksi lähteessä [6.22] on perusteellisempi esitys.

Saatavia tärkeimpiä johtopäätöksiä tullaan korostamaan esittämällä ne numeroituina lauseina, ns. tuloksina. Tässä yhteydessä on syytä muistuttaa tiettyjen käyttämiemme termien merkityksistä. Todellisella nesteellä tarkoitetaan reunaehtojen suhteen nestettä, jonka otaksutaan toteuttavan tavanomaisen takertumisehdon (5.7.12). (Stokesin kitkalakia noudattavan nesteen edellytetään olevan ilman erillistä mainintaa todellinen neste.) Ideaalinesteellä tai kitkattomalla virtauksella tarkoitetaan taas tapausta, jossa nesteen otaksutaan toteuttavan pelkästään läpitunkemattomuusehdon eli vapaan liukumisen ehdon (5.7.17).

Todettakoon vielä, että jatkossa soveltamaamme Taylorin sarjakehitelmätekniikkaa on käytetty melko paljon nestemekaniikan yhteydessä etenkin virtauksen irtoamistapojen tarkasteluissa; ks. esimerkiksi [6.23], [6.24].

Tasovirtaus. Kirjaamme aluksi tasovirtauksen vallitsevia yhtälöitä. Olkoon xy-taso liiketasona.

Kokoonpuristuvan virtauksen jatkuvuusyhtälö (5.3.4) on
$(v_x \to u,\ v_y \to v)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\,\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\,\frac{\partial\rho}{\partial y} + \rho d_V = 0 \tag{6.10.1}$$

ja kokoonpuristumattomassa tapauksessa (5.3.7):

$$d_V = 0\ . \tag{6.10.2}$$

Edellä d_V on dilataationopeus:

$$d_V \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\ . \tag{6.10.3}$$

Ainoa nollasta eroava kulmanopeuskomponentti on

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\ . \tag{6.10.4}$$

Otaksumme nesteen noudattavan Stokesin kitkalakia (5.2.23), jolloin

$$\sigma_x = -p + \sigma_x^*\ ,\quad \sigma_y = -p + \sigma_y^*\ ,\quad \sigma_z = -p + \sigma_z^* \tag{6.10.5}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^* &= 2\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* d_V\ , \\ \sigma_y^* &= 2\mu\,\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda^* d_V\ , \\ \sigma_z^* &= \lambda^* d_V\ , \end{aligned}\right\} \tag{6.10.6}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\ .$$

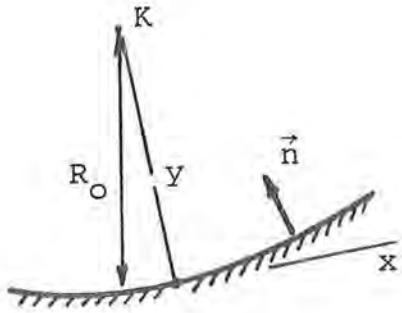
Cauchyn liikeyhtälöt (5.4.10) ovat

$$\left.\begin{aligned} \rho a_x &= \rho b_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\tau_{yx}}{\partial y}\ , \\ \rho a_y &= \rho b_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y^*}{\partial y}\ , \end{aligned}\right\} \tag{6.10.7}$$

joissa

$$\left.\begin{aligned}
\rho a_x &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) , \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) , \\
\rho a_y &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) , \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) .
\end{aligned}\right\} \qquad (6.10.8)$$

Kuva 6.10.1 esittää kiinteää seinämää tasotapauksessa. Asetetaan seinämän tiettyyn pisteeseen 0 paikallinen xy-koordinaatisto siten, että x-akseli on seinämän tangentin ja y-akseli seinämän normaalin suuntainen ja osoittaa nesteeseen päin. Tässä yhteydessä yksikkönormaali $\vec{n}$ on suunnattu poikkeuksellisesti samaten nesteeseen päin. Korostettakoon, että xy-koordinaatistoa pidetään seuraavissa tarkasteluissa koko ajan kiinteänä.



Kuva 6.10.1 Tasovirtaus ja seinämä.

Otaksutaan, että seinämän reunan muoto ja nesteen nopeusjakautuma ovat riittävän sileitä niin, että ne voidaan esittää pisteen 0 läheisyydessä Taylorin kehitelminä. Saadaan

$$\begin{aligned}
y_b &= (y_b)_o + \left(\frac{dy_b}{dx}\right)_o x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y_b}{dx^2}\right)_o x^2 + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y_b}{dx^2}\right)_o x^2 + \ldots = \frac{1}{2R_o}\,x^2 + \ldots
\end{aligned} \qquad (6.10.9)$$

$$\left.\begin{aligned}
u = u_o &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (6.10.10)$$

$$v = v_o + (\frac{\partial v}{\partial x})_o x + (\frac{\partial v}{\partial y})_o y + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})_o x^2 + \\ + (\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})_o xy + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})_o y^2 + \ldots$$

Viite o tarkoittaa suureen arvoa laskettuna pisteessä 0 ja viite b vastaavaa seinämällä. $1/R_o$ on seinämän kaarevuus pisteessä 0:

$$\frac{1}{R_o} = (\frac{d^2 y_b}{dx^2})_o \quad . \tag{6.10.11}$$

Se on positiivinen, jos kaarevuuskeskipiste K (kuva 6.10.1) on nesteen puolella. Kehitelmiin on otettu mukaan toisen kertaluvun termit. Suureet $(y_b)_o$ ja $(dy_b/dx)_o$ häviävät koordinaatiston aseman valinnan johdosta. Sijoittamalla esitys (6.10.9) lausekkeisiin (6.10.10) saadaan tulokset

$$\left.\begin{aligned} u_b &= u_o + (\frac{\partial u}{\partial x})_o x + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y})_o x^2 + \ldots \\ v_b &= v_o + (\frac{\partial v}{\partial x})_o x + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y})_o x^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.10.12}$$

Todellisen nesteen takertumisehto (5.7.12): $\vec{v} = \vec{w}$ on kiinteän seinämän tapauksessa $\vec{v} = \vec{0}$ eli tässä

$$\left.\begin{aligned} u_b &= 0 \ , \\ v_b &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.10.13}$$

Esitysten (6.10.12) ja (6.10.13) vertailu antaa "yleistetyt takertumisehdot"

$$\left.\begin{aligned} u_o &= 0 \ , \quad (\frac{\partial u}{\partial x})_o = 0 \ , \quad (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_o = -\frac{1}{R_o}(\frac{\partial u}{\partial y})_o \ , \ \ldots \\ v_o &= 0 \ , \quad (\frac{\partial v}{\partial x})_o = 0 \ , \quad (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})_0 = -\frac{1}{R_o}(\frac{\partial v}{\partial y})_o \ , \ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.10.14}$$

Ne on siis saatu asettamalla lausekkeiden (6.10.12) jokaisen x:n potenssin kerroin nollaksi. Korostettakoon, että tulokset (6.10.14) ovat eksakteja [6.22].

Takertumisehdon $(\partial u/\partial x)_o = 0$ perusteella dilataationopeus seinämällä

$$(d_V)_o = (\frac{\partial v}{\partial y})_o \tag{6.10.15}$$

ja jännityskomponenttien lausekkeet tulevat olemaan vastaavasti

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x)_o &= -p_o + \lambda_o^*(d_V)_o \,, \\ (\sigma_y)_o &= -p_o + (2\mu+\lambda^*)_o(d_V)_o \,, \\ (\sigma_z)_o &= -p_o + \lambda_o^*(d_V)_o \,, \\ (\tau_{yx})_o &= \mu_o(\frac{\partial u}{\partial y})_o = -2\mu_o(\omega_z)_o \,, \end{aligned}\right\} \tag{6.10.16}$$

jossa on sovellettu vielä takertumisehtoa $(\partial v/\partial x)_o = 0$.

Seuraavaksi käytetään lisäksi hyväksi jatkuvuusyhtälöä. Valitettavasti epästationaarisessa ja kokoonpuristuvassa tapauksessa ei tulla saamaan termin $\partial\rho/\partial t$ mukana olosta johtuen kovin käyttökelpoisia tuloksia, joten rajoitutaan jatkossa pysyvään kokoonpuristuvaan tai mielivaltaiseen kokoonpuristumattomaan virtaukseen.

Soveltamalla ehtoja $u_o = 0$, $v_o = 0$ jatkuvuusyhtälössä (6.10.1) pysyvässä tapauksessa tai vain esittämällä kokoonpuristumattomuusehto (6.10.2) origossa saadaan ehto

$$(d_V)_o = (\frac{\partial u}{\partial x})_o + (\frac{\partial v}{\partial y})_o = 0 \,. \tag{6.10.17}$$

Tämä tulos yleistyy kolmidimensioiseen tapukseen.

Yhtälön (6.10.17) voimassaoloedellytysten alaisina jännityskomponenttien (6.10.16) lausekkeet yksinkertaistuvat muotoihin

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_x)_o = -p_o \,, \ (\sigma_y)_o = -p_o \,, \ (\sigma_z)_o = -p_o \,, \\ &(\tau_{yx})_o = \mu_o(\frac{\partial u}{\partial y})_o = -2\mu_o(\omega_z)_o \,. \end{aligned}\right\} \tag{6.10.18}$$

Voidaan kirjata (pätee myös kolmessa dimensiossa) tulos 1:

> Pysyvässä kokoonpuristuvassa tai mielivaltaisessa kokoonpuristumattomassa Stokesin kitkalakia noudattavassa nesteessä kiinteällä seinämällä vallitseva normaalijännitys σ_n on täsmälleen yhtä suuri kuin paine miinusmerkillä varustettuna eli

$$\boxed{\sigma_n = -p \ .} \tag{6.10.19}$$

Toisin sanoen deviatorinen tai ns. viskoosi jännitysosuus σ_n^* häviää kokonaan. Tulos 1 ei ole muuta kuin toinen yhtälö (6.10.18) kirjoitettuna hieman uusin merkinnöin. Eräänä sovellutuksena mainittakoon seuraava esimerkki. Kappaleen pinnalla vallitseva paine pyritään usein mittaamaan kokeellisesti pintaan tehdyn pienen reiän ja siihen johdetun manometrin avulla. Tulos 1 osoittaa, että tiettyjen edellytysten alaisina mittauksen tuloksena saadaan tosiaankin paineen arvo eikä pelkästään vastaavan normaalijännityksen arvoa.

Yhtälöstä (6.10.17) syntyy takertumisehto $(\partial u/\partial x)_o = 0$ huomioonottamalla yhteys

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o = 0 \ . \tag{6.10.20}$$

Kun tämä sijoitetaan kaavojen (6.10.14) viimeiseen takertumisehtoon, saadaan edelleen

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_o = 0 \ . \tag{6.10.21}$$

Ottamalla huomioon kaikki tähän asti johdetut kinemaattiset yhteydet kehitelmät (6.10.10) saavat lopulliset muodot

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y - \frac{1}{2R_o}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \ldots \\ v &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.10.22}$$

Tarkastellaan nopeuskomponentteja (6.10.22) pisteen 0 läheisyydessä y-akselilla:

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{x=0} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y + \ldots \\ v\big|_{x=0} &= 0 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.23)$$

Vain termit ensimmäiseen kertalukuun asti otettu mukaan. Kun seinämää lähestytään, virtaussuunnan raja-arvo on siis seinämän suuntainen. Tämä intuitiivisesti uskottavalta tuntuva asetelma yleistyy myös kolmidimensioiseen tapaukseen. On saatu tulos 2:

Pysyvässä kokoonpuristuvassa tai mielivaltaisessa kokoonpuristumattomassa todellisen nesteen virtauksessa kiinteällä seinämällä olevan pisteen kautta kulkeva virtaviiva seuraa yleensä seinämää. (6.10.24)

Tässä siis täytyy ajatella, että tarkastelemme äärettömän lähellä seinämää olevaa virtausta, koska itse seinämällä virtaus häviää; kaikki seinämän pisteet ovat patopisteitä. Lauseessa (6.10.24) esiintyvä varaus "yleensä" viittaa seuraavaan. Poikkeuksellisesti derivaatta $(\partial u/\partial y)_o$ voi hävitä:

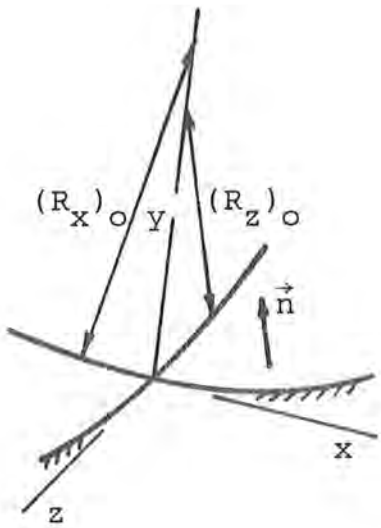
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o = 0 \ . \qquad (6.10.25)$$

Tällöin virtaussuunta pisteen 0 läheisyydessä määräytyy kehitelmien korkeamman kertaluvun termien perusteella. Ehto (6.10.25) liittyy läheisesti virtaukseen ns. irtoamiseen, josta lisää myöhemmin. On mielenkiintoista todeta, että myös tulos 2 vaatii siis kokoonpuristuvassa tapauksessa nimenomaan pysyvää virtausta, koska termin $\partial\rho/\partial t$ mukanaollessa johto ei onnistu.

Kolmidimensioinen virtaus. Kuva 6.10.2 esittää kuvan 6.10.1 kolmidimensioista vastinetta. Paikallisen xyz-koordinaatiston origo 0 on kiinteän seinämän pinnalla ja zx-taso yhtyy pinnan tangenttitasoon. y-akseli osoittaa nesteeseen päin. Käsittely tapahtuu vastaavasti kuin kahdessa dimensiossa; kaavat vain tulevat paljon pitemmiksi. Esimerkiksi kaavan (6.10.9) vasti-

neeksi saadaan

$$y_b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_z}\right)_o z^2 + \frac{1}{T_o} zx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_x}\right)_o x^2 + \dots , \qquad (6.10.26)$$



Kuva 6.10.2 Kolmidimensioinen virtaus ja seinämä.

jossa suureet

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_z}\right)_o &= \left(\frac{\partial^2 y_b}{\partial z^2}\right)_o , \\ \left(\frac{1}{R_x}\right)_o &= \left(\frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2}\right)_o , \\ \frac{1}{T_o} &= \left(\frac{\partial^2 y_b}{\partial z \partial x}\right)_o \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.27)$$

ovat vastaavasti pinnan kaarevuudet z- ja x-suunnissa sekä pinnan kierevyys.

Pelkkien yleistettyjen takertumisehtojen perusteella dilataationopeus seinämällä tulee olemaan edelleen kaavan (6.10.15) mukainen:

$$(d_V)_o = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o \qquad (6.10.28)$$

ja jännityskomponenttien lausekkeet tulevat olemaan

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x)_o &= -p_o + \lambda_o^*(d_V)_o , \\ (\sigma_y)_o &= -p_o + (2\mu+\lambda^*)_o(d_V)_o , \\ (\sigma_z)_o &= -p_o + \lambda_o^*(d_V)_o , \\ (\tau_{yz})_o &= \mu_o\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o = 2\mu_o(\omega_x)_o , \\ (\tau_{zx})_o &= 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.29)$$

$$(\tau_{yx})_o = \mu_o(\frac{\partial u}{\partial y})_o = -2\mu_o(\omega_z)_o \ . \Big|$$

Vastaavasti kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ komponenttien lausekkeet (3.3.74') saavat seinämällä muodot

$$(\omega_x)_o = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})_o \ , \quad (\omega_y)_o = 0 \ , \quad (\omega_z)_o = -\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y})_o \ . \qquad (6.10.30)$$

Nämä lausekkeet on otettu jo huomioon kaavojen (6.10.29) leikkausjännitysten vaihtoehtoisissa esitysmuodoissa. Kaavat (6.10.30) sisältävät siis tuloksen (6.5.9), jonka kirjaamme tässä uudelleen tuloksena 3:

Todellisen nesteen virtauksessa kulmanopeusvektori on kiinteän seinämän kohdalla seinämän tangenttitasossa eli

$$\boxed{\omega_n = 0 \ .} \qquad (6.10.31)$$

Jatkuvuusyhtälön hyväksikäyttö antaa jälleen pysyvässä kokoonpuristuvassa tai mielivaltaisessa kokoonpuristumattomassa virtauksessa tuloksen

$$(d_V)_o = (\frac{\partial u}{\partial x})_o + (\frac{\partial v}{\partial y})_o + (\frac{\partial w}{\partial z})_o = 0 \ . \qquad (6.10.32)$$

Jännityskomponenttien lausekkeet yksinkertaistuvat tällöin muotoihin

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_x)_o = -p_o \ , \quad (\sigma_y)_o = -p_o \ , \quad (\sigma_z)_o = -p_o \ , \\ &(\tau_{yz})_o = \mu_o(\frac{\partial w}{\partial y})_o = 2\mu_o(\omega_x)_o \ , \\ &(\tau_{zx})_o = 0 \\ &(\tau_{yx})_o = \mu_o(\frac{\partial u}{\partial y})_o = -2\mu_o(\omega_z)_o \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.33)$$

Kaavojen (6.10.22) vastineiksi saadaan lopuksi

$$\left.\begin{aligned}
u &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_z}\right)_o \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o z^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_x}\right)_o \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o x^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_o y^2 - \frac{1}{T_o}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o zx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)_o yz + \\
v &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right)_o yz + \ldots \\
w &= \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_z}\right)_o \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o z^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_x}\right)_o \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o x^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_o y^2 - \frac{1}{T_o}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o zx + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right)_o yz +
\end{aligned}\right\} \qquad (6.10.34)$$

ja samoin kaavojen (6.10.23) sijasta nyt

$$\left.\begin{aligned}
u\Big|_{\substack{z=0\\x=0}} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y + \ldots \\
v\Big|_{\substack{z=0\\x=0}} &= 0 + \ldots \\
w\Big|_{\substack{z=0\\x=0}} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o y + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (6.10.35)$$

Täten virtaviivat seuraavat reunaa paitsi, jos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o = 0 \ , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o = 0 \ , \qquad (6.10.36)$$

jolloin on tutkittava korkeamman kertaluvun termejä asian selvittämiseksi.

<u>Kitkaton virtaus</u>. Katsomme vielä, mitä yhteyksiä saadaan kiinteän seinämän yhteydessä, jos virtaus otaksutaan kitkattomaksi. Takertumisehdon $\vec{v} = \vec{0}$ sijasta on enää käytettävissä vapaan liukumisen ehto $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ eli tasovirtauksessa

$$n_x u_b + n_y v_b = 0 \ . \qquad (6.10.37)$$

Analyyttisen geometrian perusteella

$$\vec{n} = \frac{-\frac{dy_b}{dx}\vec{i} + \vec{j}}{[(\frac{dy_b}{dx})^2 + 1]^{1/2}} \quad . \tag{6.10.38}$$

Sarjakehitelmien käyttö johtaa lopulta melko ilmeisiin esityksiin [6.22]

$$\left.\begin{aligned} n_x &= -\frac{1}{R_o}x + \ldots \\ n_y &= 1 + \ldots \, , \end{aligned}\right\} \tag{6.10.39}$$

kun termit ensimmäiseen kertalukuun asti otetaan mukaan. Sijoittamalla lausekkeet (6.10.39) ja (6.10.12) kaavaan (6.10.37) saadaan yhtälö

$$(-\frac{1}{R_o}x + \ldots)[u_o + (\frac{\partial u}{\partial x})_o x + \ldots] +$$

$$+ (1+\ldots)[v_o + (\frac{\partial v}{\partial x})_o x + \ldots] = 0 \tag{6.10.40}$$

eli

$$v_o + [-\frac{1}{R_o}u_o + (\frac{\partial v}{\partial x})_o]x + \ldots = 0 \; . \tag{6.10.41}$$

Täten vapaan liukumisen yleistetyt ehdot ovat

$$v_o = 0 \; , \quad (\frac{\partial v}{\partial x})_o = \frac{1}{R_o}u_o \; , \; \ldots \tag{6.10.42}$$

ja alkuperäiset kehitelmät (6.10.10) saavat nyt muodot

$$\left.\begin{aligned} u &= u_o + (\frac{\partial u}{\partial x})_o x + (\frac{\partial u}{\partial y})_o y + \ldots \\ v &= \frac{1}{R_o}u_o x + (\frac{\partial v}{\partial y})_o y + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.10.43}$$

Yhtälöiden (6.10.23) vastineet ovat siis

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{x=0} &= u_o + \dots \\ v\big|_{x=0} &= 0 + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.44)$$

Nämä yhtälöt toistavat sen tutun tiedon, että ideaalineste liukuu pitkin seinämää eli vielä virtaviivat seuraavat yleensä kiinteää seinämää. Mahdollisen poikkeuksen tästä muodostavat nyt patopisteet, joissa myös $u_o = 0$ ja joissa on tutkittava kehitelmien korkeamman asteen termejä. Yhtälöiden johdossa ei kuitenkaan tarvittu mitään otaksumaa pysyvästä virtauksesta kokoonpuristuvassa tapauksessa; vrt. tulos 2.

Tarkastellaan vielä, mitä seuraa, kun virtaus otaksutaan lisäksi pyörteettömäksi kuten on usein tavallista kitkattoman nesteen mallia käytettäessä (ks. kohdat 6.3 ja 6.5). Tasotapauksessa pyörteettömyysehdoista (6.3.1) jää jäljelle viimeinen:

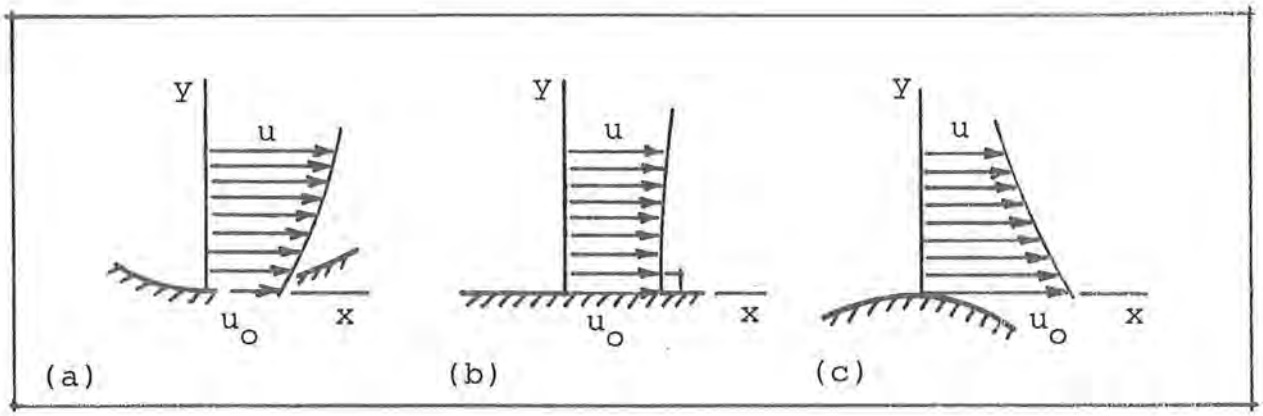
$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ . \qquad (6.10.45)$$

Jälkimmäinen yleistetty liukumisehto (6.10.42) saadaan tällöin muotoon joka voidaan ilmaista tässä <u>tuloksena 4</u>:

Ideaalinesteen pyörteettömässä kaksidimensioisessa virtauksessa kiinteällä seinämällä on voimassa yhteys

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o = \frac{1}{R_o}\, u_o \ .} \qquad (6.10.46)$$

Tämän kaavan sisältö ymmärretään parhaiten tarkastelemalla kuvaa 6.10.3. Kun seinämän suuntainen nopeuskomponentti u_o ajatellaan annetuksi, normaaliderivaatan $(\partial u/\partial y)_o$ suuruus ja merkki määräytyvät kaarevuuden $1/R_o$ suuruuden ja merkin perusteella. Kun seinämä on nesteen puolelta katsottuna kovera (kupera), seinämän suuntaisen nopeuskomponentin itseisarvo pienenee (suurenee) seinämän lähellä seinämää lähestyttäessä. Jos seinämä on paikallisesti suora eli $1/R_o = 0$, normaaliderivaatta häviää



Kuva 6.10.3 Virtauksen nopeusjakautuman luonne seinämän normaalilla, kun seinämä on (a) kovera, (b) suora, (c) kupera.

(kuva (b)). Kuvan (c) perusteella ymmärretään, että kuperat, pienen kaarevuussäteen omaavat seinämän kohdat ovat paikkoja, joissa virtausvauhti pyrkii kasvamaan suureksi. Bernoullin yhtälön perusteella paine tulee tällöin pieneksi ja on vaaraa mm. kavitaation syntymisestä.

Kaavan (6.10.46) vastineiksi kolmidimensioisessa tapauksessa saadaan [6.22]

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o &= \left(\frac{1}{R_z}\right)_o w_o + \frac{1}{T_o} u_o \,, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o &= \left(\frac{1}{R_x}\right)_o u_o + \frac{1}{T_o} w_o \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.47)$$

Jos z- ja x-akselien suunnat valitaan yhtymään seinämän pinnan pääkaarevuussuuntiin, $1/T_o = 0$ ja lausekkeet yksinkertaistuvat.

Kun tarkastelemme tasotapauksessa seinämällä olevan patopisteen ympäristöä — siis $u_o = 0$ — ja otamme huomioon tuloksen (6.10.46), lausekkeet (6.10.43) antavat virtaviivojen differentiaaliyhtälöksi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o y}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o x} \qquad (6.10.48)$$

pisteen 0 läheisyydessä. Jos otaksutaan lisäksi pysyvä kokoon-

puristuva tai mielivaltainen kokoonpuristumaton virtaus, yhtälöt (6.10.1) ja (6.10.2) antavat — koska $u_o = 0$, $v_o = 0$ — yhteyden $(\partial u/\partial x)_o + (\partial v/\partial y)_o = 0$. Tämän perusteella saadaan

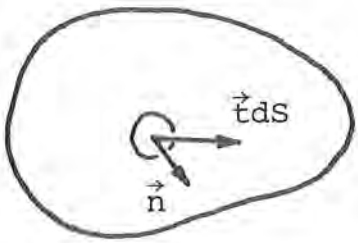
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\frac{\partial u}{\partial x})_o y}{(\frac{\partial u}{\partial x})_o x} = -\frac{y}{x}, \qquad (6.10.49)$$

jonka ratkaisu on muotoa $xy = C$, jossa C on integroimisvakio. Ratkaisusta voidaan päätellä tulos 5:

Ideaalinesteen pysyvässä kokoonpuristuvassa tai mielivaltaisessa kokoonpuristumattomassa pyörteettömässä kaksidimensioisessa virtauksessa kiinteällä seinämällä olevasta patopisteestä lähtevä (tai siihen saapuva) virtaviiva on kohtisuorassa seinämää vastaan.	(6.10.50)

Kohdattuaan seinämän tämä virtaviiva hajaantuu kahdeksi seinämää pitkin eri suuntiin kulkevaksi virtaviivaksi. Tulosta 5 voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi ideaalinesteen mallilla suoritettujen numeeristen laskelmien tarkkuuden testaamisessa.

Kappaleeseen vaikuttavat nestevoimat. Tässä yhteydessä on sopivaa tarkastella tiettyyn nesteessä olevaan kappaleeseen nesteestä käsin vaikuttavia pintavoimia eli ns. nestevoimia.



Kuva 6.10.4 Kappale, yksikkönormaalivektori ja pintavoima-alkio.

Kuvan 6.10.4 merkinnöin — tässä pidetään normaalivektorin $\vec{n}$ suuntaa edelleen poikkeuksellisesti nesteeseen päin suunnattuna — saadaan kaavan (3.4.7) mukaisesti ensinnäkin

$$\vec{F} = \int_S \vec{t}dS = \int_S \vec{\sigma}dS + \int_S \vec{\tau}dS. \qquad (6.10.51)$$

Tämä kaava pätee tietenkin olipa valittu kappale mikä hyvänsä, vaikkapa esimerkiksi jokin itse nesteen osa. Jos kuitenkin tarkastellaan erityisesti jotain varsinaista kiinteästä aineesta olevaa kappaletta — kuten lentokone, laiva — saadaan yksi-

tyiskohtaisempia lausekkeita. Otaksutaan, että kappaleen seinämiä voidaan pitää jäykkinä, että takertumisehto on voimassa ja että neste noudattaa Stokesin kitkalakia. Kappaleen pintaan vaikuttavan traktion lausekkeen voidaan osoittaa olevan tällöin [6.6, s. 241]

$$\boxed{\vec{t} = [-p + (2\mu+\lambda^*)d_V]\vec{n} + 2\mu\vec{\omega}\times\vec{n}\ .} \qquad (6.10.52)$$

Toisin sanoen traktion normaalikomponentti

$$\vec{\sigma} \equiv \sigma_n\vec{n} = [-p + (2\mu+\lambda^*)d_V]\vec{n} \qquad (6.10.53)$$

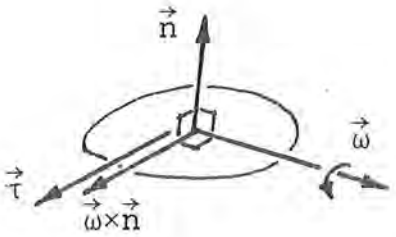
eli normaalijännitys

$$\sigma_n = -p + (2\mu+\lambda^*)d_V \qquad (6.10.54)$$

ja traktion tangenttikomponentti eli leikkausjännitysvektori

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{\omega}\times\vec{n}\ . \qquad (6.10.55)$$

Kuvan 6.10.5 merkintöjen avulla ja ristitulon merkityksen muistaen havaitaan, että vektori $2\mu\vec{\omega}\times\vec{n}$ on tosiaan tangenttitasossa. Kohdan 6.5 huomautuksen 1 terminologiaa käyttäen voimme vielä sanoa, että leikkausjännitys vaikuttaa nesteen "vierimissuunnassa".



Kuva 6.10.5 Leikkausjännitys.

Tarkastelemalla kaavoissa (6.10.29) esitettyjä komponenttien σ_y, τ_{yz} ja τ_{yx} lausekkeita havaitaan, että kyseessä on itse asiassa juuri esitysmuoto (6.10.52), jossa vielä voidaan asettaa $d_V = \partial v/\partial y$. Leikkausjännitysten suhteen väite nähdään oikeaksi seuraavasti. Ensinnäkin seinämällä $\vec{\omega} = \omega_z\vec{k} + \omega_x\vec{i}$ ja $\vec{n} = \vec{j}$. Täten

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{\omega}\times\vec{n} = 2\mu\omega_x\vec{k} - 2\mu\omega_z\vec{i}$$

$$= \mu \frac{\partial w}{\partial y} \vec{k} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \vec{i}$$

$$= \tau_{yz}\vec{k} + \tau_{yx}\vec{i} \ . \qquad (6.10.56)$$

Viite o on jätetty tässä yhteydessä mukavuussyistä pois kaavoista.

Jos erityisesti kyseessä on pysyvä kokoonpuristuva tai mielivaltainen kokoonpuristumaton virtaus, $d_V = 0$ ja kaava (6.10.52) yksinkertaistuu muotoon

$$\boxed{\vec{t} = -p\vec{n} + 2\mu\vec{\omega}\times\vec{n} \ .} \qquad (6.10.57)$$

Kaavat (6.10.33) ovat jälleen sopusoinnussa tämän lausekkeen kanssa.

Kappaleen kokema voima D tietyn yksikkövektorin $\vec{e}$ suunnassa saadaan seuraavasti:

$$D = \vec{F}\cdot\vec{e}$$

$$= \int_S \vec{\sigma}\cdot\vec{e}dS + \int_S \vec{\tau}\cdot\vec{e}dS \ . \qquad (6.10.58)$$

Etenkin jos virtauksella on tietty vallitseva suunta ja kun vektori $\vec{e}$ pannaan yhtymään tähän suuntaan, käytössä on seuraava terminologia. Kaavan (6.10.58) oikealla puolella esiintyvää ensimmäistä osuutta nimitetään <u>painevastukseksi</u> tai muotovastukseksi (engl. pressure drag, form drag) ja jälkimmäistä <u>kitkavastukseksi</u> tai pintakitkaksi (engl. viscous drag, skin drag). Tulos 1 eli kaava (6.10.19) osoittaa, että painevastus voidaan tosiaan usein laskea pelkän paineen avulla. Pyörrevektorin tärkeä asema nestemekaniikassa tulee jälleen esille: Pintakitka riippuu suoraan pyörteisyyden arvosta kappaleen pinnalla.

<u>Huomautus 1.</u> Edellä johdetuissa tuloksissa käytettyjen termien pysyvä virtaus ja kiinteä seinämä suhteen voidaan todeta tarkennuksina seuraavaa. Pysyvä virtaus tarkoittaa nimenomaan stationaarisuutta seinämään kiinnitetyn koordinaatiston suhteen. Tämän koordinaatiston ei tarvitse olla inertiaalikehys, vaan se voi liikkua mielivaltaisella tavalla, koska johdoissa ei ole

vielä käytetty lainkaan hyväksi liikeyhtälöitä. Vastaavasti ymmärretään, että termi kiinteä seinämä voidaan usein korvata tarvittaessa termillä jäykkä — siis muotoaan muuttamaton — seinämä.

— — —

6.10.2 Rajakerrosyhtälöt

Yleistä. Rajakerrosteoria sovellutuksineen on laaja aihepiiri, josta on olemassa omia oppikirjojaan kuten [6.14], [6.25]. Teorian alkuunpanija L. Prandtl on modernin nestemekaniikan isä ja syntykirjoitus on vuodelta 1904. Ennen Prandtlia nestemekaniikka oli jakautunut kahteen toisistaan erillään olevaan päähaaraan: ideaalinesteen mallilla operoivaan pitkälle matematisoituun ns. klassilliseen hydromekaniikkaan sekä empiirispohjaiseen hydrauliikkaan. Edellisellä ei ollut insinöörin kannalta paljonkaan käyttöä, koska se antoi usein järjettömiä tuloksia: Esimerkiksi kappaleen kokema vastus on nolla. Jälkimmäinen taas oli liikaa pelkkää kokeellisten kertoimien valinnan tiedettä ilman yhtenäistä taustalla olevaa teoriaa. Rajakerrosteorian mukaantulo alkoi yhdistää näitä kahta erillistä aluetta. Prandtlin panosta rajakerrosteorian kehittäjänä on pidetty fysiikan Nobel-palkinnon arvoisena suorituksena, vaikkei tätä huomionosoitusta hänelle koskaan myönnettykään [6.26, s. 517].

Rajakerrosapproksimaatiot yksinkertaistavat Navier-Stokesin yhtälöitä matemaattisessa suhteessa oleellisesti säilyttäen kuitenkin fysikaalisesti merkittävät termit mukana. Yhtälöillä on tärkeä käytännön merkitys, koska kitkan ja lämmönsiirron käsittely vaatii luonnollisestikin yksityiskohtaisen tiedon virtauksen luonteesta seinämien läheisyydessä. Numeeristen laskentamenetelmien kehittyminen on kylläkin hieman vähentänyt erillisten rajakerrosyhtälöiden käytön tarvetta.

Edellä on jo muutamissa kohdin hiukan kosketeltu rajakerroskäsittettä. Rajakerrosapproksimaatiot pätevät parhaiten, kun rajakerroksen paksuus δ on pieni tutkittavan alueen tyypillisiin mittoihin verrattuna. Paksuuden määrittelyyn liittyy tiettyä epämääräisyyttä. Rajakerros on seinämän läheinen virtausalue, jossa nopeusgradientilla on suuri arvo seinämän normaalin suunnassa; toisin sanoen seinämän suuntainen nopeuskomponentti muuttuu voimakkaasti (alkaen arvostaan nolla) seinämän normaalin suuntaan kuljettaessa (vrt. kuva 4.7.9). Usein sovitaan, että paikallinen rajakerroksen paksuus on se etäisyys pinnan normaalin suunnassa, jossa seinämän suuntainen nopeus on saavuttanut esimerkiksi arvon

99 % vastaavasta ideaalinesteen mallin antamasta nopeudesta.

Rajakerrosyhtälöiden synnyttämisessä käytetään kirjallisuudessa yleensä apuna ns. suuruusluokka-analyysiä (engl. order of magnitude analysis); lähteessä [6.27] on hyvä suppea esitys ko. aihepiiristä. Vallitsevat yleiset yhtälöt muunnetaan ensin dimensioanalyysin avulla dimensiottomiin muotoihin. Tämän jälkeen suoritetaan yhtälöiden eri termien suuruuksien arviointeja. Tilanteesta riippuen osa termeistä voidaan joskus jättää pieninä muiden rinnalla pois ja saada yhtälöiden yksinkertaistettuja versioita. Analyysi vaatii kohtuullisen uskottavasti suoritettuna melko raskaan ja pitkällisen käsittelyn. Emme siten toista tälläistä tarkastelua, mutta pyrimme kuitenkin motivoimaan valintoja kohdassa 6.10.1 esitettyjä sarjakehitelmiä apuna käyttäen.

Liikeyhtälöt. Suoritetaan käsittely pelkästään tasotapauksessa. Tarkastellaan aluksi jälleen kuvan 6.10.1 mukaista asetelmaa. Kirjoitetaan liikeyhtälöt (6.10.7) pysyvässä virtauksessa ilman tilavuusvoimatermejä:

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,, \\ \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.59)$$

Kun liikutaan y-akselilla, virtaus on ilmeisesti lähes seinämän suuntaista ja siis $v \ll u$. Pääajatus on lisäksi, että suureiden arvot muuttuvat yleensä voimakkaammin seinämän normaalin kuin sen tangentin suunnassa:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} \ll \frac{\partial(\ )}{\partial y}\,. \qquad (6.10.60)$$

Nämä intuitiiviset arviot eivät ole kuitenkaan täysin riittäviä.

Tarkastellaan ensin kiihtyvyystermejä. Kehitelmien (6.10.22) käyttö antaa lopuksi tulokset [6.22]

$$u\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_o y^2 + \ldots \qquad (6.10.61)$$

$$v \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \ldots$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_o y^2 + \ldots \qquad (6.10.62)$$

$$u \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_o y^2 + \ldots$$

$$= -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_o y^2 + \ldots$$

$$= -\frac{1}{R_o}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o^2 y^2 + \ldots \qquad (6.10.63)$$

$$v \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0} = 0 + \ldots \qquad (6.10.64)$$

kun termit toiseen kertalukuun asti on säilytetty mukana. Huomattakoon, että kokoonpuristumattomuusehdosta (6.10.2) saadaan derivoimalla x:n ja y:n suhteen vastaavasti kaksi lisäyhtälöä

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \,, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \,, \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.65)$$

joita on myös sovellettu edellä. Termien $u\,\partial u/\partial x$ ja $v\,\partial u/\partial y$ havaitaan olevan samaa suuruusluokkaa. Termi $u\,\partial v/\partial x$ on edellisiin verrattuna pieni, mikäli reuna on suora ($1/R_o = 0$). Voidaan otaksua, että näin on myös silloin, kun kaarevuus $1/R_o$ on kohtuullinen. Tässä tapauksessa liikeyhtälöt saadaan ensin muotoihin

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \,, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.66)$$

Voidaan todeta, että jälkimmäinen yhtälö syntyisi myös kirjoittamalla toinen liikeyhtälö (6.10.59) pisteessä 0. Viskooseja jännityksiä koskevat termit saadaan muotoihin

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x^*}{\partial x} &= 2\mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\,2\mu\,\frac{1}{R_o}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o + \ldots \\
\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} &= \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) = \mu\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o + \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o\right] + \ldots \\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} &= \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \mu\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o + \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o\right] + \ldots \\
\frac{\partial\sigma_y^*}{\partial y} &= 2\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_o + \ldots = -2\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (6.10.67)$$

On lähdetty yhtälöistä (6.10.6) ja otaksuttu μ paikan suhteen vakioksi. Lisäksi on käytetty hyväksi jälkimmäistä yhtälöä (6.10.65). Jos reuna on suora, $\partial\sigma_x^*/\partial x \approx 0$. Otaksutaan, että näin on myös reunan ollessa lievästi kaareva. Jotta muiden termien suhteen päästäisiin eteenpäin, otaksutaan nyt yhteyden (6.10.60) hengessä, että kaikki termit, joissa esiintyy derivaatta x:n suhteen ovat pieniä termiin $\partial/\partial y\cdot\partial u/\partial y$ verrattuna; toisin sanoen otetaan $\partial\tau_{xy}/\partial x \approx 0$, $\partial\sigma_y^*/\partial y \approx 0$. Liikeyhtälöt saavat siis muodot,

$$\boxed{\begin{aligned}
&\rho\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\,, \\
&\frac{\partial p}{\partial y} = \mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\,.
\end{aligned}} \quad (6.10.68)$$

jossa

$$\boxed{\tau_{yx} = \mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\,.} \quad (6.10.69)$$

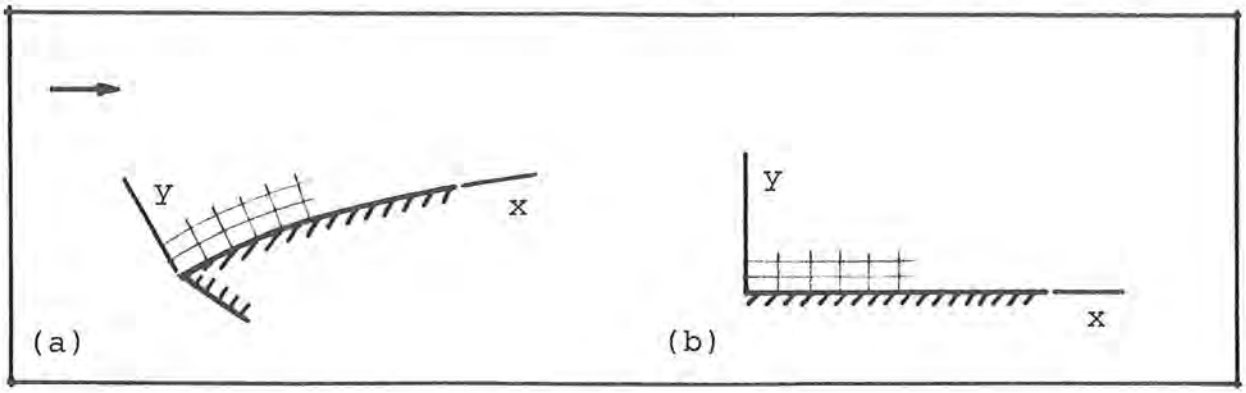
Nämä ovat stationaarisen kokoonpuristumattoman kaksidimensioisen

rajakerrosteorian liikeyhtälöt. Ne on vielä täydennettävä kokoonpuristumattomuusyhtälöllä (6.10.2):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ .} \qquad (6.10.70)$$

Leikkausjännityksen τ_{yx} lausekkeen (6.10.69) muoto — siis termin $\partial v/\partial x$ puuttuminen — saa lisäuskottavuutta kaavoissa (6.10.14) esiintyvästä tuloksesta $(\partial v/\partial x)_o = 0$.

Yhtälöiden syntyä perusteltiin kuvaan 6.10.1 liittyvän kiinteän xy-koordinaatiston avulla. Jos seinämä on suora, yhtälöt pätevät muuallakin kuin valitun origon välittömässä ympäristössä. Yleisemmin kaarevan seinämän yhteydessä rajakerrosteoriassa käytetyt ns. rajakerroskoordinaatit valitaan kuitenkin tasotapauksessa periaatteessa kuvan 6.10.6 (a) esittämään tyyliin. x-koor-



Kuva 6.10.6 (a) Käyräviivainen ja (b) suoraviivainen koordinaatisto.

dinaatti tarkoittaa seinämää pitkin mitattua kaarenpituutta ja y-koordinaatti viittaa kohtisuoraan etäisyyteen seinämän pinnasta. Kyseessä on siis käyräviivainen suorakulmainen koordinaatisto. Voidaan osoittaa, että kun rajakerroksen paksuus on oleellisesti pienempi kuin seinämän paikallinen kaarevuussäde, yhtälöt (6.10.68)...(6.10.70) pätevät riittävällä tarkkuudella sellaisinaan myös esitetyssä käyräviivaisessa koordinaatistossa (u ja v viittaavat nopeuskomponentteihin paikallisen x- ja y-akselin suunnissa). Matemaattiselta kannalta tarkastelu voidaan yhtä hyvin ajatella tapahtuvaksi loppujen lopuksi jälleen kuvan 6.10.6 (b) esittämässä suoraviivaisessa koordinaatistossa.

Rajakerrosyhtälöitä sovelletaan normaalisti seuraavasti.

Rajakerroksen ulkopuolella virtaus otaksutaan tunnetuksi ja lasketuksi kohtuullisen helposti kitkattomana ideaalinesteen vallitsevien yhtälöiden avulla. Varustetaan näin saadut suureet alaviitteellä e; esimerkiksi u_e, v_e, p_e. (Merkintä e liittyy sanontaan rajakerroksen ulkopuolinen (engl. external) virtaus.) Koska rajakerros ajatellaan hyvin ohueksi, kitkattoman virtauksen reunaehdot — vapaa liukuminen — asetetaan ainakin ensimmäisessä approksimaatiossa suoraan seinämän pinnalla. Täten suureet u_e, v_e ja p_e ovat määritellyt itse asiassa myös tulevan rajakerroksen sisällä.

Jälkimmäisen liikeyhtälön (6.10.68) mukaan paine on rajakerroksessa vakio pinnan normaalin suunnassa eli paine ei riipu y-koordinaatista: $p = p(x)$. Toisaalta paineen arvon tulee yhtyä rajakerroksen reunalla $y = \delta$ asymptoottisesti arvoon $p_e(x,\delta) \approx p_e(x,0)$. Täten

$$p(x) \approx p_e(x,0) \equiv p_e(x) \tag{6.10.71}$$

ja ensimmäisessä liikeyhtälössä oleva painetermi

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{dp_e}{dx} \tag{6.10.72}$$

tunnetaan. Tämä termi voidaan esittää niin haluttaessa myös kitkattoman virtauksen x-akselin suuntaisen liikeyhtälön (otetaan lisäksi epästationaarinen tapaus; huom. $v_e = 0$)

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho\left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x}\right) \tag{6.10.73}$$

perusteella myös nopeuskentän avulla.

Tavanomainen rajakerrosformulaatio saa nyt muodon

$$\boxed{\begin{aligned} & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \ , \\ & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ . \end{aligned}} \tag{6.10.74}$$

Kyseessä ovat siis x-suuntainen liikeyhtälö ja kokoonpuristumat-

tomuusyhtälö: kaksi kenttäyhtälöä vastaten kahta tuntematonta $u(x,y)$ ja $v(x,y)$. Kitkatermi kirjoitetaan usein kauniimpaan muotoon $\nu\, \partial^2 u/\partial y^2$, mutta tässä on haluttu pitää mukana se mahdollisuus, että viskositeetti μ ei olekaan paikan suhteen vakio. Tavallisesti asetetaan seuraavat, kuvan 6.10.6 (b) geometriaan assosioidut reunaehdot:

$$u(x,0) = 0 \ , \quad v(x,0) = 0 \tag{6.10.75}$$

$$u(x,\infty) = u_e(x,\delta) \approx u_e(x,0) \ , \tag{6.10.76}$$

$$u(x_o,y) = u_o(y) \ . \tag{6.10.77}$$

Yhtälöt (6.10.75) esittävät takertumisehdon seinämän pinnalla. Yhtälö (6.10.76) vaatii, että nopeuskomponentin u arvo yhtyy asymptoottisesti rajakerroksen ulkopuolisen virtauksen vastaavaan arvoon. (Itse asiassa ∞ on tässä käytännössä hyvin pieni mitta.) Yhtälö (6.10.77) ilmaisee, että valitulla sisäänvirtausreunalla $x = x_o$ on esitettävä komponentin u nopeusjakautuma $u_o(y)$.

Vaikka kenttäyhtälöt (6.10.75) ovat edelleen liikeyhtälön osalta epälineaariset, huomattavia helpotuksia Navier-Stokesin yhtälöihin nähden on saavutettu. Ensinnäkin yksi tuntematon — paine p — on kadonnut. Toiseksi yhtälöissä esiintyy vain muuttujaa u koskeva toinen paikkaderivaatta ja sekin pinnan normaalin suunnassa otettuna. Navier-Stokesin yhtälöiden yhteydessä reunaehtoja tulee antaa koko tutkittavan alueen reunalla; kyseessä on ns. elliptinen reuna-arvotehtävä (ks. kohdan 4.7.4 huomautus 1). Sen sijaan rajakerrosyhtälöt (6.10.74) esittävät ns. parabolista etenemistehtävää, jossa x-akseli on aika-tyyppinen marssimissuunta. Tehtävän numeerinen ratkaiseminen on siis verrattain edullista, koska se voidaan suorittaa askeleittain arvosta $x = x_o$ eteenpäin edeten. Ratkaisu voidaan viedä periaatteessa niin pitkälle kuin seinämän pintaa riittää. Kuitenkin virtauksen irtoamiskohdan jälkeen rajakerrosyhtälöiden synnyttämisessä käytetyt otaksumat eivät ole lainkaan voimassa, joten ratkaisulla ei ole enää fysikaalista merkitystä.

Virtauksen <u>irtoamisella</u> (engl. flow separation) tarkoitetaan, että virtaviivat kappaleen pinnan läheisyydessä lakkaavat kul-

kemasta lähes pinnan suunnassa. Ns. virtauksen irtoamispiste (engl. point of separation) määritellään kaksidimensioisessa virtauksessa yleensä juuri pisteenä, jossa ehto (6.10.25) toteutuu. Kaavan (6.10.69) perusteella tämän havaitaan merkitsevän myös seinämäleikkausjännityksen häviämistä. Virtauksen mahdollisimman myöhään tapahtuvalla irtoamisella voidaan vähentää oleellisesti painevastusta.

Epästationaarisessa tapauksessa liikeyhtälön (6.10.74) vasen puoli on täydennettävä termillä $\partial u/\partial t$ ja yhtälösysteemi on varustettava alkuehdoilla [6.14, s. 130]. Reunaehdot voivat riippua tällöin luonnollisesti myös ajasta.

Turbulenttisessa kokoonpuristumattomassa virtauksessa voidaan soveltaa edelleen yhtälöitä (6.10.74) keskiarvosuureita koskevina suorittamalla lisäksi sijoitus [6.14, s. 563] (ks. merkintöjen suhteen kohta 6.6)

$$\tau_{yx} \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial x} := \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{v'u'}$$

$$= (\mu + \mu^t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad (6.10.78)$$

Kirjallisuudessa on esitetty yksityiskohtaisia ohjeita pyörreviskositeetin μ^t mallittamiseksi rajakerrosvirtauksessa.

Energiayhtälö. Tarkastellaan edelleen stationaarista (mekaanisesti) kokoonpuristumatonta tasotapausta. Vallitseva yleinen energiayhtälö on tällöin esimerkiksi kaavan (5.6.36) perusteella muotoa

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) +$$

$$+ \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] , \qquad (6.10.79)$$

kun säteilyn osuus jätetään pois. Suuruusluokka-analyysin jälkeen tämä yksinkertaistuu tavanomaiseksi rajakerrosvirtauksen energiayhtälöksi [6.14, s. 292]

$$\boxed{\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 .} \qquad (6.10.80)$$

Kuvan 6.10.6 (b) geometriaan liittyvät reunaehdot ovat

$$T(x,0) = T_w(x) \ , \tag{6.10.81}$$

$$T(x,\infty) = T_e(x,\delta_T) \ , \tag{6.10.82}$$

$$T(x_o,y) = T_o(y) \ . \tag{6.10.83}$$

Yhtälöt (6.10.81) ja (6.10.82) ilmaisevat vastaavasti, että nesteen lämpötilan tulee yhtyä seinämän kohdalla sen lämpötilaan T_w ja termisen rajakerroksen (engl. thermal boundary layer) reunalla $y = \delta_T$ asymptoottisesti ulkopuolisessa virtauksessa vallitsevaan lämpötilan arvoon. Adiabaattiseksi otaksutun seinämän tapauksessa ehto (6.10.81) tulee korvata ehdolla $\partial T/\partial x(x,0) = 0$. Yhtälön (6.10.83) mukaan valitulla sisäänvirtausreunalla $x = x_o$ on esitettävä lämpötilan jakautuma $T_o(y)$.

Rajakerrosteorian energiayhtälö reunaehtoineen esittää jälleen x-suunnassa etenemistehtävää. Kun nopeuskomponentit u ja v on ajateltu määritetyiksi, kyseessä on lämpötilan T suhteen nyt vain lineaarinen probleema, joka seikka helpottaa tietenkin ratkaisun löytämistä.

Huomautus 1. Mekaanisesti kokoonpuristumattomassa tapauksessa liikeyhtälön (6.10.74) vasen puoli tulee täydentää ainakin vapaan konvektion yhteydessä ns. nostetermillä (ks. yhtälö (6.12.14)) $g_x\gamma_p(T-T^o)$, jossa g_x on putoamiskiihtyvyyden komponentti paikallisen x-akselin suunnassa, γ_p on nesteen isobaarinen tilavuuden lämpötilakerroin ja T^o valittu referenssilämpötila. Vapaassa konvektiossa otaksutaan tavallisesti vielä, että $p_e = p_d \approx 0$. Jos nostetermi on mukana liikeyhtälössä, syntyy nopeuskentän ja lämpötilakentän määrittämisten välinen kytkentä. Jos nostetermi puuttuu, nopeuskenttä voidaan määrittää ensin erikseen yhtälöistä (6.10.74), jonka jälkeen lämpötila saadaan ratkaistua pelkästään yhtälön (6.10.80) avulla.

— — —

Epästationaarisessa tapauksessa energiayhtälön (6.10.80) vasen puoli on täydennettävä termillä $\rho c_p \partial T/\partial t$ ja lämpötilan jakautuma alueessa on esitettävä alkuehtona.

Dissipaation osuus voidaan jättää usein pienenä terminä pois.

Turbulenttisessa kokoonpuristumattomassa virtauksessa voidaan soveltaa edelleen yhtälöä (6.10.80) keskiarvosuureita koskevana suorittamalla lisäksi sijoitukset [6.14, s. 706] (ks. merkintöjen suhteen kohta 6.6)

$$q_y \equiv -k\frac{\partial T}{\partial y} := -k\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \rho c_p \overline{v'T'}$$

$$= -(k+k^t)\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\,, \qquad (6.10.84)$$

$$\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} \equiv \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 := \left(\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{v'u'}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$= (\mu+\mu^t)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 . \qquad (6.10.85)$$

Kirjallisuudessa on esitetty ohjeita pyörrejohtavuuden k^t mallittamiseksi.

Loppuhuomautuksia. Rajakerrosvirtaus-tyyppisiä yhtälöitä sovelletaan muissakin yhteyksissä kuin seinämien läheisyydessä. Lähteessä [6.25] käytetään nimitystä leikkauskerrosyhtälöt (engl. thin-shear-layer equations). Leikkauskerroksella tarkoitetaan tällöin aluetta, jossa virtauksella on selvä pääsuunta, jota vastaan kohtisuorassa suunnassa virtausnopeus muuttuu arvoltaan paikan suhteen voimakkaasti. Esimerkkejä ovat seinämävirtausten lisäksi mm. suihkut (engl. jet) ja vanat (engl. wake). Ideana on jatkuvasti, että täysin yleisiä virtausmekaniikan yhtälöitä yksinkertaistetaan sopivin otaksumin helpommin ratkaistaviin muotoihin. Lähteessä [6.28] taas käytetään nimitystä parabolisoidut Navier-Stokesin yhtälöt (engl. parabolized Navier-Stokes equations) ja esitetään eräitä tavanomaisia rajakerrosyhtälöitä yleisimpiä formulaatioita.

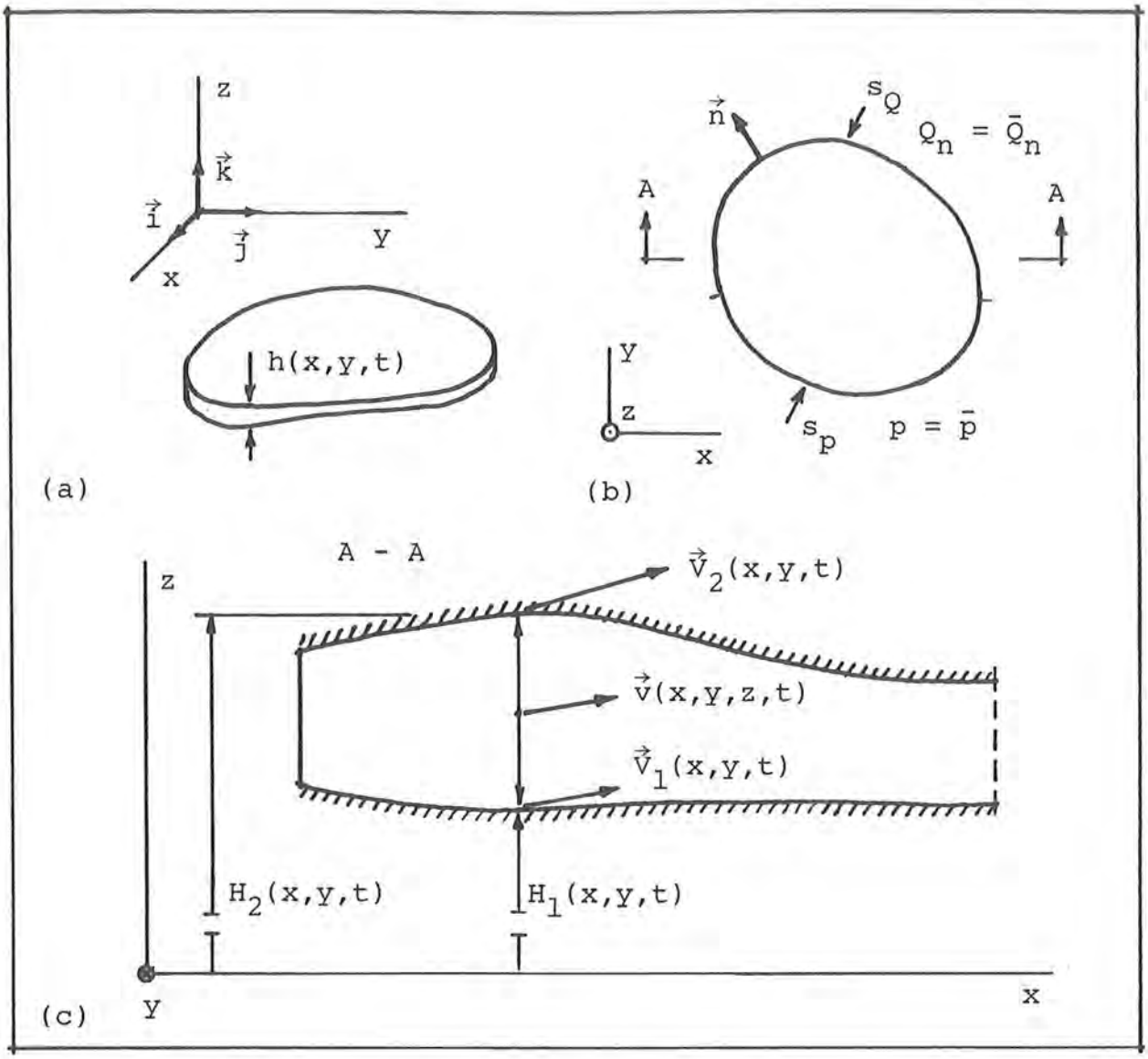
On selvää, että tässä esityksessä on voitu vain hieman raapia rajakerrosteorian laajaa pintaa. Lähde [6.14] on tunnustettu alan klassikko.

6.11 Voiteluvirtaus

Yleistä. Kohdassa 5.1 mainittiin lyhyesti voiteluprobleemeista. Ne edustavat erästä osa-aluetta tribologiasta (engl. tribology), joka on kirjaimellisesti käännettynä "hankauksen tiede"; tarkemmin oppi kitkasta, kulumisesta ja voitelusta. Voitelussa esiintyvien nestekalvojen paksuus on yleensä hyvin pieni, esimerkiksi luokkaa yksi tuhannesosa laakerin tyypillisistä mitoista. Kitkavoimat nesteessä tulevat tällöin hitausvoimiin nähden suuriksi ja virtaus säilyy tavallisesti laminaarisena. Lisäksi vallitsevia yhtälöitä voidaan yksinkertaistaa tehtävän geometriasta johtuen paljon voimakkaammin kuin esimerkiksi rajakerrosvirtauksessa. Todettakoon, että voiteluteoriaa ei sovelleta pelkästään tekniikassa, vaan myös esimerkiksi biomekaniikassa ja lääketieteessä mm. nivelten toiminnan analysoinnissa.

On erotettavissa kaksi päätapausta: hydrostaattinen ja hydrodynaaminen voitelu. Hydrostaattisessa voitelussa laakeri vaatii ulkoisen painelähteen, joka ylläpitää seinämien välistä etäisyyseroa estäen kosketuksen ja vähentäen täten ratkaisevasti kitkaa ja kulumista. Hydrodynaamisessa voitelussa saavutetaan sama tulos seinämien suhteellisen liikkeen ja nestekalvon paksuuden sopivan kiilamaisuuden ansiosta ilman erillistä painelähdettä. Jos voiteluaine on kaasua, termit aerostaattinen ja aerodynaaminen voitelu ovat osuvampia. Esimerkkinä aerodynaamisesta voitelusta mainittakoon massamuisteina käytettyjen kovalevyjen ja niiden lukupäiden välinen rajapinta. Voitelukalvon paksuus on vain luokkaa jokunen μm. Kuitenkaan kosketusta ei saa missään tapauksessa syntyä. Jatkossa johdettavaa Reynoldsin yhtälöä voidaan soveltaa sekä staattisessa että dynaamisessa voitelussa.

Kuva 6.11.1 esittää valittuja merkintöjä, jotka ovat osittain samoja kuin levyn lämmönjohtumisessa, ks. kuva 6.1.17. Nestekalvon paksuus on esitetty suuresti liioiteltuna. Otaksutaan aluksi, että kalvo on likimain xy-tason suuntainen. Nestettä rajoittavat kaksi kiinteästä aineesta olevaa seinämää; alapinta ja yläpinta, joihin viitataan vastaavasti tunnuksilla 1 ja 2.



Kuva 6.11.1 (a) Koordinaatisto. (b) Nestekalvo z-akselin suunnasta katsottuna. (c) Kalvon poikkileikkaus.

Nesteen nopeuden esitysmuoto olkoon

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \tag{6.11.1}$$

ja vastaavasti seinämien nopeuksien esitykset olkoot

$$\vec{V}_i = U_i\vec{i} + V_i\vec{j} + W_i\vec{k}\ , \quad i = 1,2. \tag{6.11.2}$$

Nestemekaniikan kaksidimensioisiin teorioihin päästään yleensä integroimalla vallitsevia kolmidimensioisia yhtälöitä geomet-

rian paksuussuunnassa ja operoimalla sitten tiettyjen keskimääräisten suureiden avulla. Tästä menettelystä annetaan näytteitä seuraavassa sekä myös kohdassa 6.12.

Jatkuvuusyhtälö. Otamme aluksi lähtökohdaksi jatkuvuusyhtälön kokoonpuristumattoman muodon

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ . \tag{6.11.3}$$

Tämä on normaali otaksuma, jos voiteluaine on varsinaista nestettä ja jos laakerin kuormitukset ovat kohtuullisia.

Integroidaan kokoonpuristumattomuusyhtälö (6.11.3) puolittain kalvon paksuuden h yli:

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}\, dz + \int \frac{\partial v}{\partial y}\, dz + w_2 - w_1 = 0 \ . \tag{6.11.4}$$

Pelkkä merkintä $\int(\quad)dz$ viittaa tässä ja jatkossa seuraavaan (vrt. kaava (6.1.186)):

$$\int f dz = \int_{H_1(x,y,t)}^{H_2(x,y,t)} f(x,y,z,t)dz \ . \tag{6.11.5}$$

Leibnitzin säännön (L.2.14) perusteella

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\int u dz &= \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dz + u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} - u_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} \ , \\ \frac{\partial}{\partial y}\int v dz &= \int \frac{\partial v}{\partial y}\, dz + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} - v_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{6.11.6}$$

ja siis

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dz &= \frac{\partial}{\partial x}\int u dz - u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} \ , \\ \int \frac{\partial v}{\partial y}\, dz &= \frac{\partial}{\partial y}\int v dz - v_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.11.7}$$

Määritellään vielä kalvon paksuuden suhteen keskimääräiset nopeuskomponentit

$$\left.\begin{aligned} \langle u\rangle &= \frac{1}{h}\int u\,dz\ , \\ \langle v\rangle &= \frac{1}{h}\int v\,dz \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.8)$$

sekä suureet

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \int u\,dz = h\langle u\rangle\ , \\ Q_y &= \int v\,dz = h\langle v\rangle\ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.9)$$

Jälkimmäiset esittävät tilavuusvirtoja y- ja x-akselin suuntaisia pituuksia kohti ($[Q] = m^2s^{-1}$). Huomattakoon, etteivät suureet (6.11.8) ja (6.11.9) riipu enää koordinaatista z; ne voivat olla korkeintaan riippumattomien muuttujien x, y ja t funktioita. Yhtälö (6.11.4) saa lausekkeiden (6.11.7) ja (6.11.9) avulla nyt muodon

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - u_2\frac{\partial H_2}{\partial x} + u_1\frac{\partial H_1}{\partial x} - v_2\frac{\partial H_2}{\partial y} + v_1\frac{\partial H_1}{\partial y} + \\ + w_2 - w_1 = 0\ . \qquad (6.11.10)$$

Joudumme lisäksi käyttämään hyväksi pintojen kinematiikkaa. Seinämät 1 ja 2 ovat ainepintoja, joiden yhtälöt ovat

$$F_i \equiv z - H_i(x,y,t) = 0\ , \quad i = 1,2\ . \qquad (6.11.11)$$

Ainepintoja koskevan kinemaattisen kaavan (6.7.18) perusteella siis (vrt. myös esimerkki 6.7.1)

$$\frac{DF_i}{Dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial t} - U_i\frac{\partial H_i}{\partial x} - V_i\frac{\partial H_i}{\partial y} + W_i = 0\ , \quad i = 1,2 \qquad (6.11.12)$$

eli

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = -U_i \frac{\partial H_i}{\partial x} - V_i \frac{\partial H_i}{\partial y} + W_i \ , \quad i = 1,2 \ . \tag{6.11.13}$$

Kalvon paksuuden $h = H_2 - H_1$ lokaaliseksi muutosnopeudeksi saadaan täten

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(H_2 - H_1) = \frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial t}$$

$$= -U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} - V_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} + V_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} + W_2 - W_1 \ . \tag{6.11.14}$$

Takertumisehdon perusteella tässä vielä

$$\left.\begin{aligned} U_i &= u_i \ , \\ V_i &= v_i \ , \\ W_i &= w_i \ , \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2 \ . \tag{6.11.15}$$

Ottamalla huomioon kaavat (6.11.14) ja (6.11.15) yhtälö (6.11.10) tulee vihdoin muotoon

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \ ,} \tag{6.11.16}$$

joka on voiteluvirtauksen kaksidimensioinen jatkuvuusyhtälö kokoonpuristumattomassa tapauksessa.

<u>Liikeyhtälöt</u>. Tavallisesti voiteluaineen otaksutaan olevan isotrooppista Newtonin nestettä. Lähtökohtana ovat siis liikeyhtälöt

$$\left.\begin{aligned} \rho b_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho a_x \ , \\ \rho b_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho a_y \ , \\ \rho b_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} &= \rho a_z \ , \end{aligned}\right\} \tag{6.11.17}$$

joihin on vielä ajateltava sijoitetuiksi Stokesin kitkalain mukaiset yhteydet (5.2.26).

Esimerkiksi lähteessä [6.29] on suoritettu liikeyhtälöiden eri termejä koskeva suuruusluokka-analyysi. Se antaa lähinnä seuraavia — rajakerrosteoriatyyppisiä — tuloksia. Hitaus- ja tilavuusvoimatermit ovat kitkavoimiin verrattuina pieniä. Nopeuskomponenttien u ja v x- ja y-suuntaiset derivaatat ovat z-suuntaisiin derivaattoihin verrattuina pieniä. Nopeuskomponentti w ja sen derivaatat ovat tiettyihin termeihin verrattuna pieniä. Tällöin liikeyhtälöt kutistuvat muotoihin

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[\mu(\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial z})] = \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial u}{\partial z}) \ , \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[\mu(\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} + \frac{\partial v}{\partial z})] = \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial v}{\partial z}) \ , \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \ .
\end{aligned}\right\} \qquad (6.11.18)$$

Viimeinen liikeyhtälö (6.11.18) sanoo, että paine ei riipu z-koordinaatista; ts.

$$p = p(x,y,t) \ . \qquad (6.11.19)$$

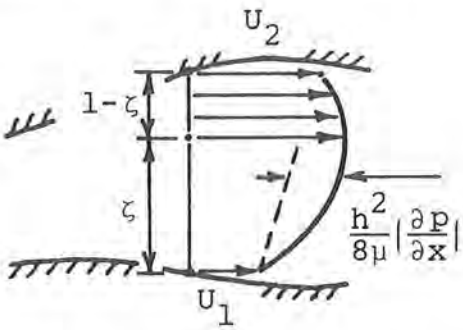
Kun ajatellaan x, y ja t kiinnitetyiksi, ensimmäinen ja toinen liikeyhtälö (6.11.18) ovat tavallisia toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä u:n ja v:n suhteen ja z on riippumaton muuttuja. Jos vielä otaksutaan μ vakioksi z-suunnassa, yhtälöt ovat vakiokertoimisia. (Jos voiteluaine on katsottava ei-Newtonin nesteeksi, otaksuma μ ei riipu z:sta ei ole välttämättä enää kovin realistinen. Ei-Newtonin nesteellä viskositeetin arvo riippuu nimittäin deformaationopeudesta, joka taas vaihtelee tässä z-suunnassa. Samoin käy myös Newtonin nesteellä, jos lämpötilan arvo vaihtelee huomattavasti z-suunnassa.) Reunaehtoina esiintyvät annetut arvot $u = U_1$, $u = U_2$, $v = V_1$, $v = V_2$ kalvon ala- ja yläpinnoilla. Standardikeinoin saadaan ratkaisut, jotka ovat toista astetta z:n suhteen:

$$\left.\begin{aligned} u &= U_1 + \zeta(U_2-U_1) - \zeta(1-\zeta)\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \\ v &= V_1 + \zeta(V_2-V_1) - \zeta(1-\zeta)\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.20)$$

Lausekkeissa on käytetty dimensiottomia apumuuttujia ($0 < \zeta < 1$)

$$\zeta = \frac{z - H_1}{h}\,, \quad 1 - \zeta = \frac{H_2 - z}{h}\,. \qquad (6.11.21)$$

Ensimmäistä kaavaa (6.11.20) on havainnollistettu kuvassa 6.11.2. Seinämien vaakanopeudet U_1 ja U_2 ilman painegradienttia synnyttävät lineaarisen nopeusjakautuman; vrt. myös esimerkin 5.2.2 kuva (a). Painegradientti $\partial p/\partial x$ synnyttää parabolisen jakautuman, jonka maksimiarvo on kalvon keskikohdalla. Todettakoon, että kuvan esittämään nopeusjakautumaan liittyvä tapaus kulkee kirjallisuudessa usein nimellä Couette-virtaus [6.14, s. 84].



Kuva 6.11.2 Nopeuskomponentin u jakautuma.

Tilavuusvirrat (6.11.9) saadaan integroimalla lausekkeista

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \int u\,dz = h\int_0^1 u\,d\zeta \\ Q_y &= \int v\,dz = h\int_0^1 v\,d\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.22)$$

ja päädytään kaavoihin

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= hU - \frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \\ Q_y &= hV - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\,. \end{aligned}} \qquad (6.11.23)$$

Ne ovat voiteluprobleeman kaksidimensioiset liikeyhtälöt. On käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\left.\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}(U_1+U_2) \ , \\ V &= \tfrac{1}{2}(V_1+V_2) \ , \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.24)$$

jotka esittävät siis pelkästään seinämien liikkeen johdosta syntyviä nesteen keskimääräisiä vaakanopeuksia.

Reynoldsin yhtälö. Lausekkeiden (6.11.23) sijoitus jatkuvuusyhtälöön (6.11.16) tuottaa voiteluvirtauksen tärkeimmän kaavan

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + S = 0 \ ,} \qquad (6.11.25)$$

jossa lähdetermi

$$S = -\frac{\partial}{\partial x}(hU) - \frac{\partial}{\partial y}(hV) - \frac{\partial h}{\partial t} \ . \qquad (6.11.26)$$

Kaava (6.11.25) kulkee kehittäjänsä mukaan Reynoldsin differentiaaliyhtälön nimellä (O. Reynolds, v. 1886). Kyseessä on sama henkilö, jonka mukaan puhutaan Reynoldsin kuljetuslauseesta sekä turbulenttisen virtauksen Reynoldsin liikeyhtälöistä.

Jos seinämien liike on annettu, myös lähdetermi S on annettu ja paineen jakautuma voidaan määrittää Reynoldsin yhtälön avulla kunhan se on vielä varustettu sopivilla reunaehdoilla. Tavallisimmat ehdot ovat annettu paineen arvo eli

$$\boxed{p = \bar{p}} \qquad s_p\text{:llä} \qquad (6.11.27)$$

ja annettu tilavuusvirta reunan pituutta kohti

$$\boxed{Q_n = \bar{Q}_n} \qquad s_Q\text{:lla} \ . \qquad (6.11.28)$$

Tässä reunan osat s_p ja s_Q muodostavat yhdessä xy-tasossa olevan tarkasteltavan alueen A reunan s (kuva 6.11.1 (b)). Ottamalla

huomioon lausekkeet (6.11.23) ehto (6.11.28) saa paineen avulla lausutun muodon

$$-n_x \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - n_y \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = \bar{Q}_n^* , \qquad (6.11.29)$$

jossa annettu termi

$$\bar{Q}_n^* = \bar{Q}_n - n_x hU - n_y hV \qquad (6.11.30)$$

ja jonka yhteydessä on käytetty hyväksi riippuvuutta (ks. huomautus 1)

$$Q_n = n_x Q_x + n_y Q_y . \qquad (6.11.31)$$

Ehto (6.11.27) esiintyy esimerkiksi niillä kalvon reunan osilla, jotka ovat yhteydessä ulkoilman kanssa. Tällöin $\bar{p}$ = ulkoilman paine.

Huomautus 1. Melko ilmeiseltä tuntuva kaava (6.11.31) johdetaan tarkemmin seuraavasti. Ulkoinen yksikkönormaalivektori alueen reunalla on $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j}$. Täten virtausnopeuden normaalikomponentti $v_n = \vec{n}\cdot\vec{v} = n_x u + n_y v$ ja saadaan

$$Q_n \equiv \int v_n dz = \int n_x u dz + \int n_y v dz$$

$$= n_x \int u dz + n_y \int v dz = n_x Q_x + n_y Q_y . \qquad (6.11.32)$$

Huomautus 2. On syytä todeta, että esitetty Reynoldsin yhtälöön liittyvä formulaatio on kullakin ajan hetkellä ilman alkuarvoja oleva puhdas reuna-arvotehtävä ja silti ratkaisu p(x,y,t) voi riippua ajasta, jos esimerkiksi lähdetermi tai reunaehdot ovat ajan funktioita. Selitys tähän käyttäytymiseen on luonnollisestikin siinä, että Reynoldsin yhtälössä ei esiinny perustuntemattoman p aikaderivaattoja.

Differentiaaliyhtälö (6.11.25) on jälleen kvasiharmonisen yhtälön erikoistapaus ja reunaehdot (6.11.27) ja (6.11.28) ovat

vastaavasti standardimuodossa. Täten Reynoldsin yhtälön yhteydessä on käytettävissä variaatioperiaate

$$\boxed{\delta\Pi = 0 \ ,} \tag{6.11.33}$$

jossa funktionaali (ks. lauseke (6.8.68))

$$\Pi(p) = \frac{1}{2}\int_A [\frac{h^3}{12\mu}(\frac{\partial p}{\partial x})^2 + \frac{h^3}{12\mu}(\frac{\partial p}{\partial y})^2]dA +$$

$$-\int_A SpdA + \int_{s_Q} \bar{Q}_n^* pds \ . \tag{6.11.34}$$

Luvallisen argumenttifunktion p tulee toteuttaa oleellinen reunaehto $p = \bar{p}$ reunan osalla s_p.

Voidaan lisäksi todeta, että kaavan (6.11.30) antama suure Q_n^* esittää selvästikin pelkästään painegradientin johdosta syntyvää tilavuusvirtaa reunan pituutta kohti.

Funktionaali (6.11.34) esiintyy usein hieman toisessa muodossa, joka syntyy osittaisintegroimalla integraalissa $-\int SpdA$ esiintyvät kaksi termiä:

$$\left.\begin{aligned} \int_A \frac{\partial}{\partial x}(hU)pdA &= \int_s n_x hUpds - \int_A hU\frac{\partial p}{\partial x}dA \ , \\ \int_A \frac{\partial}{\partial y}(hV)pdA &= \int_s n_y hVpds - \int_A hV\frac{\partial p}{\partial y}dA \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.11.35}$$

Funktionaalin nähdään olevan nyt

$$\Pi(p) = \frac{1}{2}\int_A [\frac{h^3}{12\mu}(\frac{\partial p}{\partial x})^2 + \frac{h^3}{12\mu}(\frac{\partial p}{\partial y})^2]dA +$$

$$-\int_A (hU\frac{\partial p}{\partial x} + hV\frac{\partial p}{\partial y})dA + \int_A \frac{\partial h}{\partial t}pdA + \int_{s_Q} \bar{Q}_n pds \ . \tag{6.11.36}$$

Huomautus 3. Lausekkeeseen (6.11.36) tulisi tarkemmin ottaen lisätä periaatteessa osuus

$$\int_{s_p} (n_x hU + n_y hV) p ds \ . \qquad (6.11.37)$$

Koska kuitenkin reunalla s_p voidaan asettaa $p \to \bar{p}$, osuus (6.11.37) on funktionaalin kannalta vakio, joten se voidaan jättää yksinkertaisuuden vuoksi pois: Stationaarisuusehtojen kirjoittaminen tai variaation otto hävittää joka tapauksessa selvästikin vakiot.

Kokoonpuristuvuus ja huokoiset seinämät. Täydennämme äskeistä esitystä otsikossa mainituilla osuuksilla. Jos voiteluaineena on kaasu — kuten ilma — sen kokoonpuristuvuus on otettava usein huomioon. Lähtemällä liikkeelle kokoonpuristumattomuusehdon (6.11.3) sijasta täydellisestä jatkuvuusyhtälöstä

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \ , \qquad (6.11.38)$$

tekemällä kaavan (6.11.19) kanssa sopusoinnussa oleva otaksuma $\rho = \rho(x,y,t)$ ja suorittamalla z-akselin suuntaiseen integroimiseen liittyvät manipulaatiot vastaavaan tapaan kuin edellä päädytään lopuksi yhtälöön

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho Q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q_y) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = 0 \ . \qquad (6.11.39)$$

Jos tässä otetaan ρ vakioksi, saadaan jälleen yhtälö (6.11.16).

Tietyissä tapauksissa laakeripinnat voivat olla tarkoituksella huokoisia ja voi tapahtua suotovirtausta. Kaavat (6.11.13) pätevät luonnollisesti edelleen seinämien suhteen. Seinämien ja nesteen nopeuksien välille on kuitenkin asetettava kaavojen (6.11.15) sijasta yhteydet

$$\left.\begin{aligned} U_i &\approx u_i \ , \\ V_i &\approx v_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2 \qquad (6.11.40)$$

ja (ks. kaava (5.7.18))

$$\left.\begin{aligned} W_1 &\approx w_1 - q_1^s \,, \\ W_2 &\approx w_2 + q_2^s \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.41)$$

Termit q_1^s ja q_2^s ovat ala- ja yläpinnan läpi kalvoon saapuvien tilavuusvirtojen tiheyksiä. Saadaan

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(H_2 - H_1) = \frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial t}$$

$$= -u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} +$$

$$+ w_2 - w_1 + q^s \,, \qquad (6.11.42)$$

jossa

$$q^s = q_1^s + q_2^s \qquad (6.11.43)$$

on yhteinen kalvoon saapuvan virran tiheys. Tämän tuloksen huomioonotto muuttaa jatkuvuusyhtälön muotoon

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\rho Q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q_y) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) - \rho q^s = 0} \qquad (6.11.44)$$

ja kokoonpuristumattomassa tapauksessa saadaan vastaavasti

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} - q^s = 0 \,. \qquad (6.11.45)$$

Kokoonpuristuvuus ja huokoisuus eivät muuta yhtälöitä (6.11.18) eivätkä nopeuskomponentteja U_i, u_i ja V_i, v_i koskevia yhteyksiä ainakaan oleellisesti (vrt. kaavat (6.11.15 ja (6.11.40)). Täten lausekkeet (6.11.23) ovat edelleen voimassa ja Reynoldsin täydennetyksi differentiaaliyhtälöksi saadaan kaavaa (6.11.44) perustana pitäen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + S = 0 \,,} \qquad (6.11.46)$$

jossa

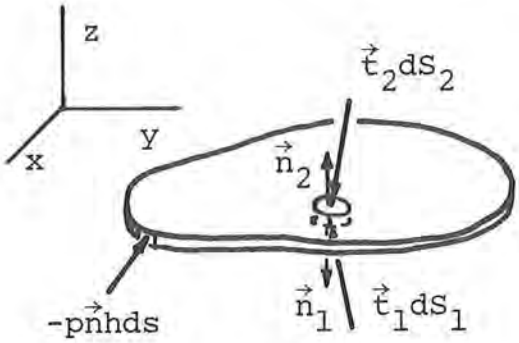
$$S = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho h U) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho h V) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \rho q^s \ . \qquad (6.11.47)$$

Koska ρ on nyt muuttuja, Reynoldsin yhtälön lisäksi on otettava huomioon kaasun konstitutiivinen yhteys. Jos kyseessä on ihannekaasu, vallitsee yhteys $p = R\rho T$ eli

$$\rho = \frac{1}{RT}\, p \ . \qquad (6.11.48)$$

Kaasuvoitelussa voidaan otaksua usein isoterminen virtaus, jolloin energiayhtälöä ei tarvitse vielä kytkeä mukaan. Lausekkeen (6.11.48) sijoitus yhtälöön (6.11.46) tuottaa nyt paineen p suhteen epälineaarisen formulaation ja ratkaisu täytyy etsiä käytännössä iteratiivisesti.

Kantovoima ja kitka. Tarkastellaan kuvan 6.11.3 esittämin merkinnöin nestekalvon ala- ja yläpintoihin vaikuttavia voimia. Kuten on ollut esillä jo lämmönjohtumisen yhteydessä (kaava (6.1.189)), analyyttisen geometrian perusteella ensinnäkin ($dA = dxdy$)



Kuva 6.11.3 Pintavoimat.

$$dS_i = [1 + (\frac{\partial H_i}{\partial x})^2 + (\frac{\partial H_i}{\partial y})^2]^{1/2} dA \ , \quad i = 1,2 \ . \qquad (6.11.49)$$

Lisäksi yhtälön (6.7.6) ja esimerkin 6.7.1 kaavojen (f) ja (g) avulla saadaan pintojen 1 ja 2 ulkoisten yksikkönormaalien lausekkeiksi

$$\vec{n}_i = (\mp \frac{\partial H_i}{\partial x}\vec{i} \mp \frac{\partial H_i}{\partial y}\vec{j} \pm \vec{k})\frac{dA}{dS_i} \ , \quad i = 1,2 \ , \qquad (6.11.50)$$

jossa alemmat (ylemmät) etumerkit viittaavat arvoon $i = 1$ ($i = 2$).

Tavanomaiset suuruusluokka-analyysin perusteella saadut voitelunesteessä vallitsevat jännityskomponenttien likimääräiset lausekkeet ovat

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p(x,y,t) \ , \\
&\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu \frac{U_2 - U_1}{h} - \frac{h}{2}(1-2\zeta)\frac{\partial p}{\partial x} \ , \\
&\tau_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \mu \frac{V_2 - V_1}{h} - \frac{h}{2}(1-2\zeta)\frac{\partial p}{\partial y} \ , \\
&\tau_{xy} = 0 \ .
\end{aligned}\right\} \qquad (6.11.51)$$

Leikkausjännitysten τ_{zx} ja τ_{zy} arvot $\tau_{zx}^{(i)}$ ja $\tau_{zy}^{(i)}$ kalvon ala- ja yläpinnoilla saadaan luonnollisestikin sijoittamalla $i = 1 \Rightarrow \zeta = 0$, $i = 2 \Rightarrow \zeta = 1$.

Traktioiden lausekkeet syntyvät soveltamalla kaavoja (5.4.24). Täten

$$\vec{t}_i = [(\pm \frac{\partial H_i}{\partial x} p \pm \tau_{zx}^{(i)})\vec{i} + (\pm \frac{\partial H_i}{\partial y} p \pm \tau_{zy}^{(i)})\vec{j} +$$

$$+ (\mp \frac{\partial H_i}{\partial x} \tau_{zx}^{(i)} \mp \frac{\partial H_i}{\partial y} \tau_{yz}^{(i)} \mp p)\vec{k}]\frac{dA}{dS_i} \ , \ i = 1,2 \ . \qquad (6.11.52)$$

Huomattakoon, että painetta p ei tarvitse varustaa viitteellä i, koska paineen otaksutaan olevan riippumaton koordinaatista z eli muuttujasta ζ.

Nestekalvon ala- tai yläpinnoilla sijaitseviin laakeripintoihin vaikuttavat kokonaisvoimat tai momentit on helppo määrittää kaavojen (6.11.52) perusteella. Esimerkiksi yläpinnalla olevaan laakeripintaan vaikuttava resultantti (ks. kaava (3.4.11))

$$\vec{F}_2 = -\int_{S_2} \vec{t}_2 dS_2 = -\int_A \vec{t}_2 \frac{dS_2}{dA} dA \qquad (6.11.53)$$

eli komponentein

$$\left.\begin{aligned}
F_x^{(2)} &= -\int_A \left(\frac{\partial H_2}{\partial x}\, p + \tau_{zx}^{(2)}\right) dA \\
&= -\int_A \left(\frac{\partial H_2}{\partial x}\, p + \mu\, \frac{U_1 - U_1}{h} + \frac{h}{2}\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) dA\ , \\
F_y^{(2)} &= -\int_A \left(\frac{\partial H_2}{\partial y}\, p + \tau_{zy}^{(2)}\right) dA \\
&= -\int_A \left(\frac{\partial H_2}{\partial y}\, p + \mu\, \frac{v_2 - V_1}{h} + \frac{h}{2}\,\frac{\partial p}{\partial y}\right) dA\ , \\
F_z^{(2)} &= \int_A \left(\frac{\partial H_i}{\partial x}\, \tau_{zx}^{(2)} + \frac{\partial H_2}{\partial y}\, \tau_{zy}^{(2)} + p\right) dA \\
&\approx \int_A p\, dA\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (6.11.54)$$

Suureet $F_x^{(2)}$ ja $F_y^{(2)}$ kuvaavat tässä ns. kitkavoimia ja $F_z^{(2)}$ on ns. kantovoima. Viimeksimainitun laskemisessa jätetään tavallisesti — kuten edelläkin on tehty — leikkausjännitysten osuudet pieninä termeinä kokonaan pois.

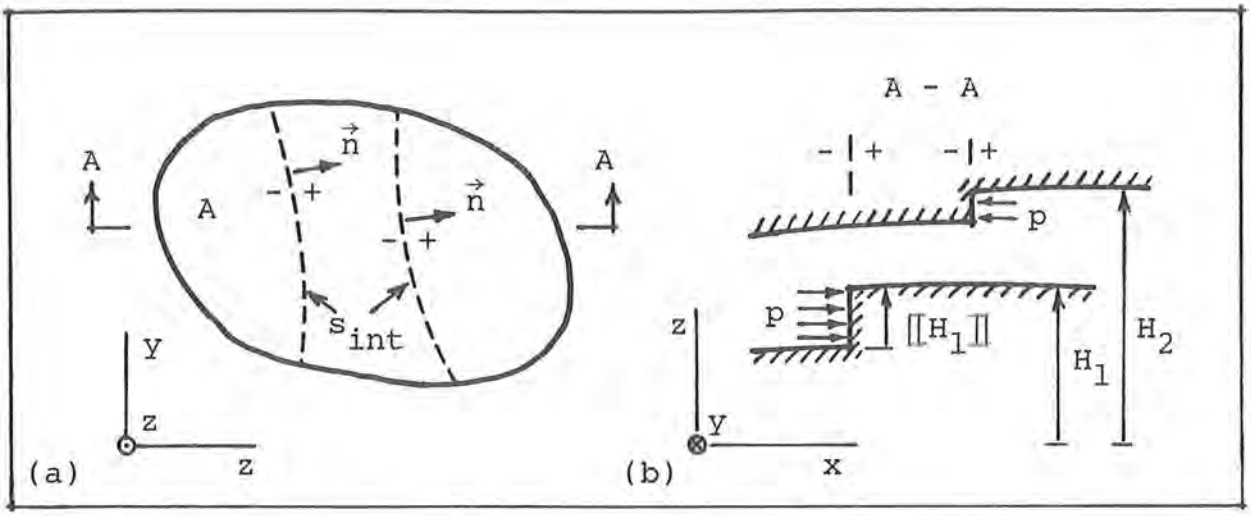
Vastaavasti esimerkiksi kalvon yläpintaan vaikuttavien pintavoimien teho saadaan laskettua tarvittaessa kehittämällä lausekettа

$$P_2 = \int_{S_2} \vec{t}_2 \cdot \vec{V}_2 dS_2 = \int_A \vec{t}_2\, \frac{dS_2}{dA} \cdot \vec{V}_2 dA \qquad (6.11.55)$$

eteenpäin.

<u>Voitelukalvon paksuuden epäjatkuvuuskohdat</u>. Laakeripinnoissa voi esiintyä kuvan 6.11.4 esittämään tapaan tiettyjä geometrian epäjatkuvuuskohtia, joissa derivaatat $\partial H_i/\partial x$, $\partial H_i/\partial y$, $\partial h/\partial x$ ja $\partial h/\partial y$ eivät ole olemassa ja joissa siis Reynoldsin yhtälökään ei tarkasti ottaen päde.

Käytetään samantapaisia merkintöjä kuin kohdassa 6.8.3. Varustetaan epäjatkuvuusviivat miinus- ja pluspuolilla. Tietyn



Kuva 6.11.4 (a) Pintojen epäjatkuvuusviivoja. (b) Kalvon poikkileikkaus.

suureen f arvon saamaa hyppäystä merkitään jälleen seuraavasti: $[\![f]\!] = f^+ - f^-$. Paineen p voidaan ilmeisesti otaksua olevan edelleen jatkuva eli $[\![p]\!] = 0$. Sen sijaan tilavuusvirta epäjatkuvuusviivan pituutta kohti Q_n ei ole yleensä jatkuva ja pieni — esimerkiksi kuvaa 6.11.4 (b) hyväksikäyttävä — tarkastelu osoittaa, että vallitseva yhteys on muotoa

$$[\![Q_n]\!] = [\![h]\!](n_x U + n_y V) \ . \tag{6.11.56}$$

Tämän fysikaalinen merkitys on ilmeinen: Seinämien liikkeestä johtuva keskimääräinen normaalinopeus $n_x U + n_y V$ kuljettaa mukanaan h-kertaisen tilavuusvirran; jos paksuudessa h on hyppäys, on sitä myös tilavuusvirrassa.

Epäjatkuvuusviivat otetaan huomioon funktionaalissa (6.11.36) yksinkertaisesti lisäämällä siihen osuus

$$-\int_{s_{int}} [\![h]\!](n_x U + n_y V) p ds \ . \tag{6.11.57}$$

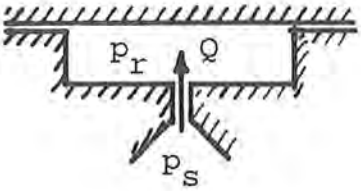
Tämä voidaan todeta suorittamalla kaavojen (6.11.35) esittämät osittaisintegroinnit paloittain ottaen osa-alueiksi epäjatkuvuusviivojen rajoittamat alueet.

Laakeripinnoissa esiintyvät hypyt aiheuttavat samoin muutoksia

laakeripintoihin vaikuttavien voimien lausekkeissa. Esimerkiksi kaavojen (6.11.54) esittämään kahteen ensimmäiseen voimakomponenttiin saadaan kuvaa 6.11.4 tarkastelemalla vastaavasti lisäykset

$$\left.\begin{aligned} &-\int_{s_{int}} n_x p [\![H_2]\!] ds \ , \\ &-\int_{s_{int}} n_y p [\![H_2]\!] ds \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.58)$$

Painetaskut. Otsikossa esiintyvällä termillä painetasku (engl. pressure pocket, recess) tarkoitetaan kuvan 6.11.5 esittämän tapaista voitelunesteen täyttämää tilaa, jonka paksuus h_r on oleellisesti suurempi kuin varsinaisen voitelukalvon. Paineen voidaan otaksua olevan käytännössä paikan suhteen vakio painetaskun alueella ja paine-erot syntyvät vasta voitelukalvossa. Tämä ymmärretään paitsi intuitiivisesti myös tarkastelemalla Reynoldsin yhtälön termin h^3 suuruusluokkaa voitelukalvon ja taskun alueilla. Painetaskuja käytetään mm. hydrostaattisissa laakereissa kantovoiman arvon lisäämiseksi.



Kuva 6.11.5 Painetaskun poikkileikkaus.

Painetaskuun painelähteen johdosta saapuva tilavuusvirta Q ($[Q] = m^3s^{-1}$) esitetään tavallisesti muodossa

$$Q = \alpha(p_s - p_r) \qquad (6.11.59)$$

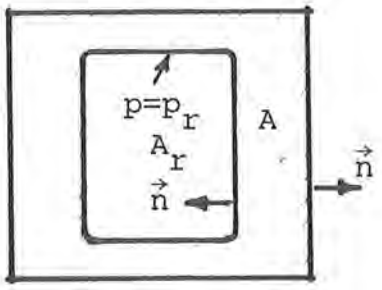
tai

$$Q = \beta(p_s - p_r)^{1/2} \ , \qquad (6.11.60)$$

joissa p_s on painelähteen annettu paineen arvo, p_r on painetaskussa vallitseva etukäteen tuntematon paineen vakioarvo. Kertoimet α ja β riippuvat voitelunesteen sekä painetaskuun yhtyvän tiehyen ominaisuuksista. Lineaarinen yhteys (6.11.59) liit-

tyy ns. kapillaarirajoittimeen (engl. capillary restrictor, compensator) ja epälineaarinen yhteys ns. aukkorajoittimeen (engl. orifice restrictor, compensator). Edellisessä tapauksessa tiehye on niin ohut kapillaariputki, että virtaus pysyy laminaarisena, jolloin tilavuusvirta on suoraan verrannollinen paine-eroon. Jälkimmäisessä tapauksessa virtaus tapahtuu turbulenttisesti levyssä olevan aukon läpi.

Tarkastellaan painetaskun vaikutusta vallitseviin yhtälöihin otaksuen lineaarisen yhteyden (6.11.59) olevan aluksi voimassa.



Kuva 6.11.6 Painetaskun reunaehto.

Eräs mahdollisuus on jättää painetaskun alue A_r pois Reynoldsin yhtälön ratkaisualueesta A (kuva 6.11.6). Painetaskun reunalla esiintyy silloin reunaehto $p = p_r$, jossa p_r on vielä tuntematon vakio. Sen lopullinen arvo tulee määrittää ehdosta: Kaavan (6.11.59) antaman tilavuusvirran tulee olla yhtä suuri kuin (stationaarinen, kokoonpuristumaton tapaus) Reynoldsin yhtälön ratkaisusta syntyvä kokonaisvirta taskun reunojen kautta alueeseen.

Toinen suoraviivaisempi tapa on sisällyttää myös tasku ratkaisualueen osaksi. Näin voidaan tehdä muodollisesti, sillä Reynoldsin yhtälö antaa paineelle kohtuullisella tarkkuudella taskun alueella vakioarvon, kun $h_r >> h$, vaikka itse yhtälön johdossa tehdyt otaksumat eivät olisikaan tarkkaan ottaen enää voimassa. Voidaan myös otaksua, että taskun alueella esiintyy vaikkapa tasaisesti jakautunut suotovirtauksen tilavuusvirran tiheys

$$q^s = \frac{Q}{A_r} = \frac{\alpha}{A_r}(p_s - p) \ , \qquad (6.11.61)$$

jossa A_r on nyt taskun pinta-ala. On merkitty $p_r \to p$.

Reynoldsin yhtälön (6.11.25) vasen puoli tulee siis vain täydentää (ks. yhtälö (6.11.45) termillä

$$\frac{\alpha}{A_r}(p_s - p) \qquad (6.11.62)$$

alueessa A_r. Ei ole myöskään vaikea osoittaa, että vastaava lisäys funktionaaliin (6.11.36) on

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{A_r}\int_{A_r}(p_s-p)^2 dA \ . \qquad (6.11.63)$$

Epälineaarisen yhteyden (6.11.60) tapauksessa joudutaan iteratiiviseen käsittelyyn. Eräs mahdollisuus on käyttää muodollisesti edelleen kaavaa $Q = \alpha(p_s-p)$ ja päivittää kerrointa $\alpha = \beta(p_s-p)^{-1/2}$.

Viskositeetti. Olemme käsitelleet voiteluvirtausta — sekä muitakin virtauksia — tähän asti lähinnä ajatellen nesteen viskositeetin annetuksi vakioksi. Kuitenkin virtauksessa tapahtuva kitka eli dissipaatio voi muuttaa nesteen lämpötilaa huomattavastikin alkuperäisestä arvostaan. Viskositeetin arvo taas riippuu ainakin varsinaisilla nesteillä kuten öljyillä yleensä melko voimakkaasti lämpötilasta. Täsmällisempi tarkastelu vaatii siis nesteen viskositeettia koskevia kohtuullisen realistisia konstitutiivisia yhteyksiä. Näitä on esitetty useimmissa nestemekaniikan oppikirjoissa.

Esimerkiksi lähteessä [6.29, s. 27] on annettu varsinaisia nesteitä koskevan yhteyden $\mu = \mu(T,p)$ approksimaatio

$$\mu = \mu^o e^{c(T-T^o)} e^{d(p-p^o)} \ , \qquad (6.11.64)$$

jossa c ja d ovat vakioita ja μ^o, T^o ja p^o ovat samaan referenssitilaan liittyviä arvoja. Kertoimen c tulee olla negatiivinen, koska varsinaisilla nesteillä viskositeetti pienenee — päinvastoin kuin kaasuilla — lämpötilan noustessa. Pienten muutosten yhteydessä voidaan soveltaa kaavan (6.11.64) linearisoitua muotoa

$$\mu = \mu^o[1 + c(T-T^o) + d(p-p^o)] \ . \qquad (6.11.65)$$

Yleensä todetaan, että varsinaisen nesteen viskositeetti riippuu vain lievästi paineesta. Voitelussa voi kuitenkin esiintyä poikkeuksellisesti niin valtavia paikallisia paineita

$\approx 10^9$ Pa — esimerkiksi hammaspyörien välissä kosketuksissa — että viskositeetin arvo saattaa nousta tämän johdosta jopa satakertaiseksi yhden ilmakehän $\approx 10^5$ Pa paineessa vallitsevaan arvoon verrattuna [6.30, s. 86]. Samalla voiteluaineen käyttäytyminen muuttuu ei-Newtonilaiseksi.

Kaasujen viskositeetti on melko tunteeton paineen ja lämpötilan muutosten suhteen. Virtaus voidaan lisäksi otaksua kaasuvoitelussa yleensä isotermiseksi [6.29, s. 23].

Kaasumekaniikassa suurten lämpötilanmuutosten yhteydessä paljon käytetty yhteys on ns. Sutherlandin kaava [6.14, s. 328]

$$\mu = \mu^o \left(\frac{T}{T^o}\right)^{3/2} \frac{T^o + S_1}{T + S_1} . \qquad (6.11.66)$$

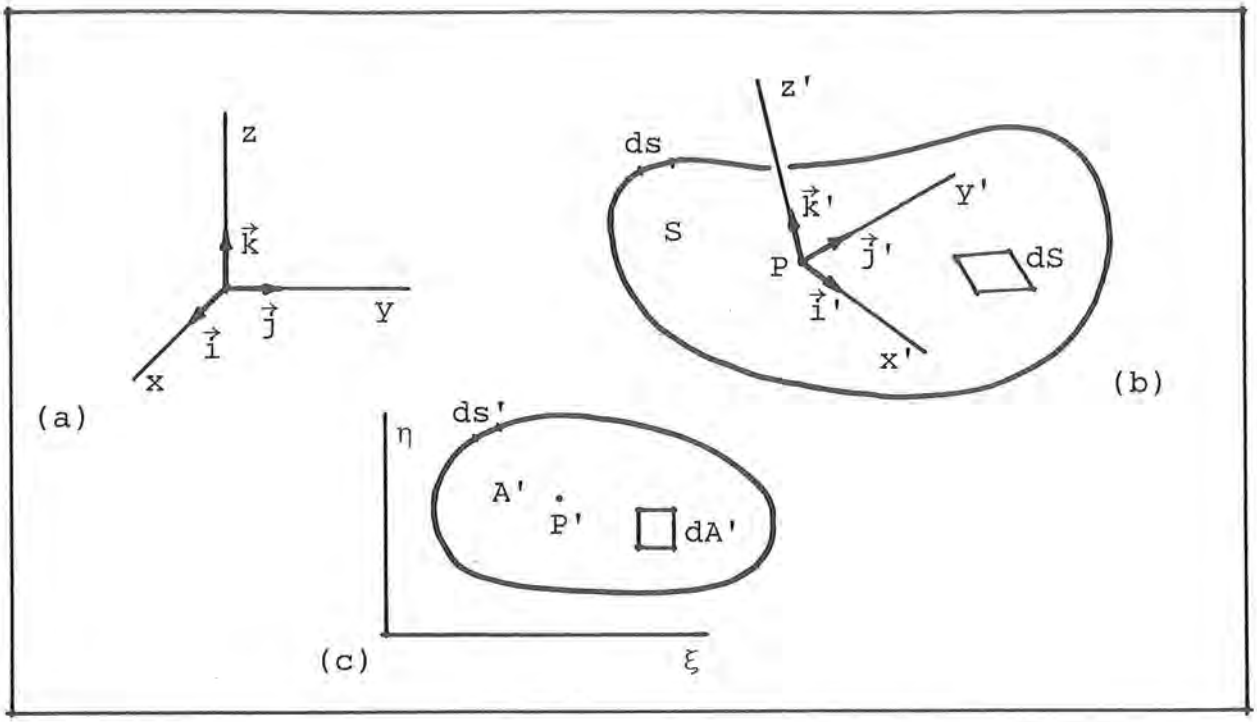
S_1 on vakio, jonka arvo esimerkiksi ilmalle on 110 K.

<u>Kaarevat voitelukalvot</u>. Käytännössä esiintyvät voitelupinnat eivät ole yleensä suinkaan tasomaisia kuten edellä on tähän asti otaksuttu. Ajatellaan vastaesimerkkinä vaikka pyörivän akselin laakerointia. Johdetut yhtälöt pätevät kuitenkin sellaisinaan myös kaarevan voitelukalvon kunkin pisteen pienessä ympäristössä, kun referenssitaso valitaan yhtymään kalvon referenssipinnan tangenttitasoon ko. pisteessä. (Edellytyksenä on kuitenkin, että referenssipinnan kaarevuussäde pysyy kohtuullisen suurena kalvon paksuuteen verrattuna [6.29, s. 42].) Tilanne on täysin analoginen kohdan 6.1.12 huomautuksessa 3 esitetyn asetelman kanssa. Viedään tarkastelu nyt kuitenkin jo hieman pitemmälle.

Käytetään kuvan 6.11.7 esittämiä merkintöjä. Nestekalvon referenssipinta S on kalvoa suurinpiirtein seuraava pinta (vrt. pintarakenteen referenssipinta ja kuva 6.1.2 (a).) Jos jompi kumpi laakeripinnoista on ilman hyppäyksiä, esimerkiksi tämä pinta (tietyllä hetkellä, jos pinnat liikkuvat) voidan valita referenssipinnaksi. (Jos voitelupinta on mutkikkaan muotoinen, kyseessä voi olla käytännössä vain hydrostaattinen voitelutapaus.)

Referenssipinta kuvataan parametrimuodossa

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi,\eta) \qquad (6.11.67)$$



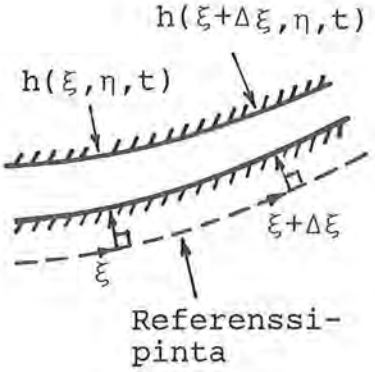
Kuva 6.11.7 (a) Globaalinen xyz-koordinaatisto. (b) Kaareva voitelukalvo ja lokaalinen x'y'z'-koordinaatisto. (c) ξη-pintaparametrikoordinaatisto.

eli

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta) \ , \\ y &= y(\xi,\eta) \ , \\ z &= z(\xi,\eta) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.67')$$

jossa ξ ja η ovat valitut riippumattomat muuttujat eli pintaparametrit. Kaikkien riippuvien muuttujien kuten esimerkiksi kalvon paksuuden ajatellaan olevan esitysmuodossa $h = h(\xi,\eta,t)$ (ks. kuva 6.11.8) jne. Voiteluprobleeman ratkaisu muuntuu matemaattisessa mielessä funktioiden $p = p(\xi,\eta,t)$ jne. määrittämiseen kuvan 6.11.7 (c) tasoalueessa A'.

Vallitsevat yhtälötkin tulee siis esittää periaatteessa muuttujien ξ ja η avulla. Kuvassa 6.11.7 (b) tiettyyn referenssipinnan pisteeseen P on asetettu paikallinen suorakulmainen x'y'z'-koordinaatisto siten, että sen z'-akseli on kohtisuorassa



Kuva 6.11.8 Kalvon poikkileikkaus η = vakio kalvon kaarevuus liioiteltuna.

referenssipintaa vastaan. Akseleiden x' ja y' suuntautuneisuus voi olla mikä hyvänsä. Voidaan vaikka vaatia, että x'-akseli on kohtisuorassa y-akselia vastaan. Esimerkiksi funktionaaliin (6.11.36) täytyy tehdä aluksi muutokset $\partial p/\partial x \to \partial p/\partial x'$ $\partial p/\partial y \to \partial p/\partial y'$, $dA \to dS$. Lisäksi ds viittaa nyt alueen S reunan s viivaalkioon.

Tarkastellaan esimerkkinä paineen paikallisten derivaattojen $\partial p/\partial x'(\xi,\eta,t)$ ja $\partial p/\partial y'(\xi,\eta,t)$ laskemista. Kun piste P ajatellaan kiinnitetyksi seuraavan tarkastelun aikana, on olemassa yhteydet

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'(\xi,\eta) \ , \\ y' &= y'(\xi,\eta) \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.11.68}$$

Ketjuderivointi antaa

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial p}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \xi} \ , \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \frac{\partial p}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \tag{6.11.69'}$$

eli

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial p}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J']^T \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y'} \end{Bmatrix} \ , \tag{6.11.69}$$

jossa

$$[J'] \equiv \left[\frac{\partial(x',y')}{\partial(\xi,\eta)}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x'}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y'}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{6.11.70}$$

on kuvaukseen (6.11.68) ns. Jacobin matriisi. (Jacobin matriisi

määritellään kirjallisuudessa hyvin usein matriisin (6.11.70) transpoosina.) Kun lausekkeet $p(\xi,\eta,t)$ ja (6.11.70) ajatellaan tunnetuiksi, paineen lokaaliset derivaatat saadaan ratkaistua ($[J]^{-T} \equiv ([J]^T)^{-1}$):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x'} \\ \frac{\partial p}{\partial y'} \end{Bmatrix} = [J']^{-T} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{Bmatrix} . \tag{6.11.71}$$

Periaatteessa tämän kaavan esittämä operaatio tulisi tehdä pinnan S jokaisessa pisteessä. Käytännössä — elementtimenetelmää sovellettaessa — integroinnit suoritetaan numeerisesti ja operaatiota tarvitaan vain jokaisessa integrointipisteessä. Lopuksi sovelletaan matemaattisessa kirjallisuudessa esitettyjä muunnoskaavoja

$$\left.\begin{aligned} \int_S (\quad) dS &= \int_{A'} (\quad) M_A dA' , \\ \int_S (\quad) ds &= \int_{s'} (\quad) M_s ds' , \end{aligned}\right\} \tag{6.11.72}$$

joilla integroinnit palautetaan parametrialueen A' ja sen reunan s' yli otetuiksi. "Muunnoskertoimien" $M_A(\xi,\eta)$ ja $M_s(s')$ sekä yksikkövektoreiden $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ ja $\vec{k}'$ yksityiskohtaisia lausekkeita ei johdeta tässä yhteydessä. Näitä yksikkövektoreita tarvitaan mm. laakeripintoihin vaikuttavia voimia ja momentteja laskettaessa. Esimerkiksi ensimmäinen lauseke (6.11.54) saa muodon

$$\begin{aligned} F_x^{(2)} = &-\int_S \vec{i}'\cdot\vec{i}\left(\frac{\partial H_2}{\partial x'} p + \mu \frac{U_2' - U_1'}{h} + \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x'}\right) dS + \\ &- \int_S \vec{j}'\cdot\vec{i}\left(\frac{\partial H_2}{\partial y'} p + \mu \frac{V_2' - V_1'}{h} + \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial y'}\right) dS + \\ &+ \int_S \vec{k}'\cdot\vec{i} p dS . \end{aligned} \tag{6.11.73}$$

On otaksuttu, että z'-akseli on suunnattu pinnasta 1 pintaan 2 päin.

Jos kalvo on ns. yhteen suuntaan kaareva tai täsmällisemmin ns. levittyvä pinta, se voidaan "rullata" matemaattista käsittelyä varten suoraan tasoksi. Pintaparametreja voidaan merkitä vanhaan tapaan esimerkiksi tunnuksilla x ja y ja voidaan soveltaa välittömästi aikaisemmin tasomaisille kalvoille johdettuja yhtälöitä. (Laakeripintoihin vaikuttavia voimia laskettaessa kalvon todellinen suuntautuneisuus tulee tietenkin ottaa erikseen huomioon.) Kuva 6.11.6 voisi esimerkiksi esittää vaikka sylinteripintaista kalvoa tasoon levitettynä. Reunat AD ja BC voisivat tarkoittaa silloin kalvon (sylinterin akselin suuntaisia) aukileikkausviivoja. Nämä reunat eivät olisi tällöin reunoja fysikaalisessa mielessä. Esimerkiksi paineen suhteen tulisi vain esittää jaksollisuusehto: Paineella on sama arvo vastinpisteissä.

Loppuhuomautuksia. Mainittakoon kolme tärkeää voiteluun liittyvää aihetta, jotka on jätetty käsittelemättä tässä esityksessä: energiayhtälö, kimmohydrodynaaminen voitelu ja kavitaatio.

Energiayhtälön merkitys voitelun yhteydessä kävi ilmi edellä jo kohdassa viskositeetti. Täten lämpötilaerojen ollessa oleellisia vallitseviin yhtälöihin on kytkettävä mukaan myös energiayhtälö. Sen termien suhteen voidaan jälleen suorittaa suuruusluokka-analyysiä. Lähteen [6.29, s. 34] mukaan esimerkiksi dissipaatiofunktiossa (5.6.16) tarvitsee ottaa mukaan vain osuus

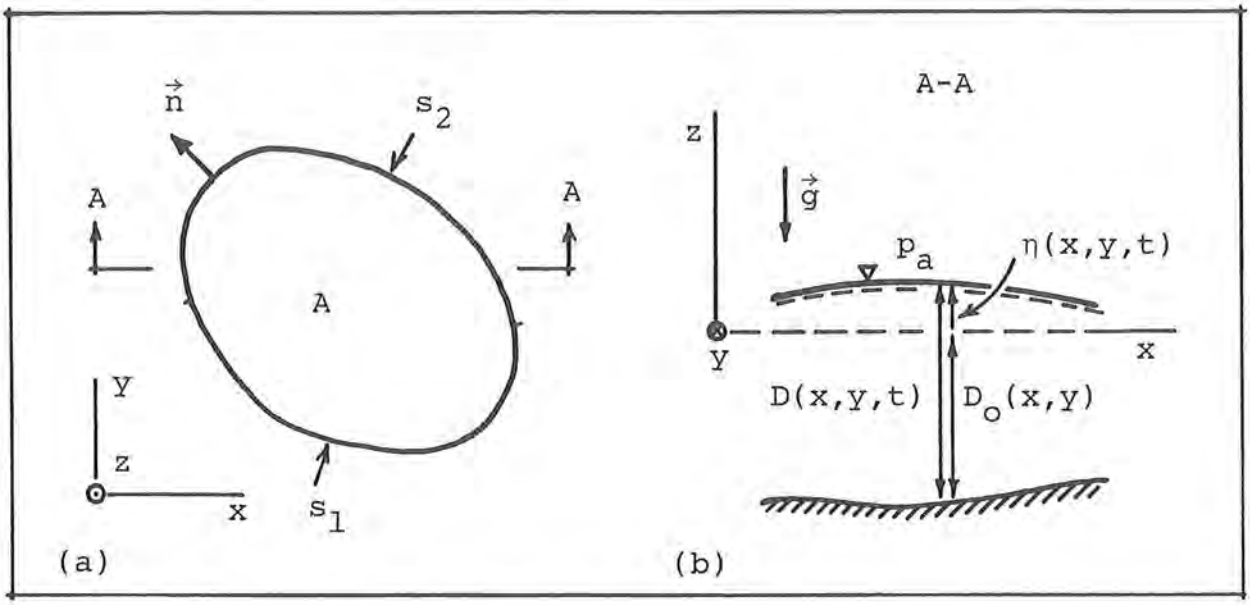
$$\Phi \approx \mu[(\frac{\partial u}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v}{\partial z})^2] \ . \qquad (6.11.74)$$

Kimmohydrodynaamisessa eli ns. elastohydrodynaamisessa voitelussa (engl. elastohydrodynamic lubrication) otetaan huomioon laakeripintojen muodonmuutokset laakereihin vaikuttavien voimien — mm. voitelunesteen paineen — johdosta. Olemme käsitelleet edellä Reynoldsin yhtälössä esiintyviä tiettyjä termejä kuten h, $\partial h/\partial t$, U ja V annettuina suureina. Jos laakeripinnat liikkuvat annetulla tavalla jäykkinä kappaleina, näin onkin asian laita. Kimmohydrodynaamisessa tapauksessa näin ei enää ole ja laskentamalli tulee täydentää laakerirakenteiden mukaanotolla. Syntyy yhdistetty nestemekaniikan ja kiinteän aineen mekaniikan probleema.

Kavitaatiota voi syntyä nestevoitelun yhteydessä paineen arvon laskettua riittävän alas. Kavitoituneella alueella Reynoldsin yhtälö ei luonnollisestikaan enää päde. Alueen reunan asemasta on pidettävä kirjaa ja käsittely tulee hankalaksi.

6.12 Matalan veden virtaus

Yleistä. Matalan tai ns. laakean veden virtauksella (engl. shallow water flow) tarkoitetaan nesteen virtausta altaassa, jonka vaakasuuntaiset mitat ovat huomattavasti tyypillistä syvyysmittaa suuremmat. Järvivirtaus on tavallisin esimerkki. Käytetään kuvassa 6.12.1 esitettyjä merkintöjä. (Jatkossa esiintyvien Coriolisvoi-



Kuva 6.12.1 (a) Allas ylhäältä katsottuna. (b) Poikkileikkaus.

man lausekkeiden voimassaolo edellyttää, että x-akseli on suunnattu itäänpäin.) Asetelma muistuttaa voiteluongelmaa geometriansa suhteen, mutta vaikeuttavana erona on mm., että nesteen yläpinnan eli ns. vapaan pinnan asemaa ei tunneta etukäteen. Lisäksi virtaus ei ole yleensä laminaarista eikä mitään kuvan 6.11.2 esittämän tapaista yksinkertaista nopeusjakautumaa voida esittää. Tavallisena pyrkimyksenä on jälleen probleeman yksinkertaistaminen paikan suhteen kaksidimensioiseksi. (Jos esimerkiksi pohjan muoto on hyvin voimakkaasti vaihteleva eli alue ei ole tasomainen, kaksidimensioinen malli voi kuitenkin olla epärealistinen.)

Vesikerroksen paksuutta eli kokonaissyvyyttä (engl. depth) merkitään nyt tunnuksen h sijasta tunnuksella $D(x,y,t)$ ja pohjan syvyyttä valitusta referenssitasosta alaspäin mitattuna tunnuksella $D_o(x,y)$. Funktio $\eta(x,y,t)$ kuvaa vastaavasti vapaan pinnan

muotoa ja siis

$$D(x,y,t) = \eta(x,y,t) + D_o(x,y) \tag{6.12.1}$$

(Suure D_o voi riippua joskus myös ajasta: sedimentaatio, maanjäristys. Jätämme tämän mahdollisuuden kuitenkin seuraavassa pois.) Voiteluvirtauksessa esiintyneet z-suuntaiset integroimisrajat H_1 ja H_2 muuttuvat tässä arvoiksi $-D_o$ ja η. Vastaavasti pelkkä merkintä $\int(\ )dz$ viittaa nyt seuraavaan:

$$\int f dz = \int_{-D_o(x,y)}^{\eta(x,y,t)} f(x,y,z,t)dz \ . \tag{6.12.2}$$

Lisäksi korvaamme ala- ja yläpintoihin viittaavat indeksit 1 ja 2 tässä yhteydessä tavanomaisemmilla merkinnöillä b ja s (engl. bottom, free surface).

Matalan veden virtauksessa on usein tapana esittää tietyt suureet muodossa

$$f(x,y,z,t) = \langle f\rangle(x,y,t) + f^{\wedge}(x,y,z,t) \ , \tag{6.12.3}$$

jossa

$$\langle f\rangle = \frac{1}{D}\int f dz \ . \tag{6.12.4}$$

Suure $\langle f\rangle$ on syvyyssuuntainen keskimääräinen arvo (vrt. kaavat (6.11.8)) ja $f^{\wedge}$ on poikkeama siitä. (Tässä käytetyt merkinnät eivät ole kovin tavanomaisia. Usein kaavan (6.12.3) sijasta kirjoitetaan $f = F + f'$.) Huomataan esityksen (6.12.3) tietty samankaltaisuus turbulenttisen virtauksen ns. Reynoldsin hajotelman (6.6.5) kanssa. Määritelmien (6.12.3) ja (6.12.4) perusteella saadaan lisäksi mm. tulokset (vrt. taulukko 6.6.1)

$$\left.\begin{aligned} &\langle f^{\wedge}\rangle = 0 \ , \\ &\langle f_1 f_2\rangle = \langle f_1\rangle\langle f_2\rangle + \langle f_1^{\wedge} f_2^{\wedge}\rangle \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.12.5}$$

Boussinesq-approksimaatio. Ennen jatkamista on sopivaa käsitellä otsikon mukaista aihetta, vaikkakaan ko. approksimaation sovellutusalue ei suinkaan rajoitu pelkästään matalan veden virtauksen yhteyteen.

Boussinesq-approksimaatiota sovelletaan tyypillisesti lievästi kokoonpuristuvassa virtauksessa yksinkertaistamaan vallitsevia yhtälöitä. Esimerkkinä mainittakoon kohdassa 5.2 selostettu vapaa konvektiovirtaus, jossa nestealkioiden pienetkin tiheyden muutokset lämpötilan muutosten johdosta tulee ottaa tietyllä tavalla huomioon realististen tulosten saavuttamiseksi.

Boussinesq-approksimaation sisältö vaihtelee hieman eri lähteissä. Tavallisimmin sillä tarkoitetaan lähinnä seuraavaa:

Nestealkion tiheys otaksutaan vakioksi kaikkialla vallitsevissa yhtälöissä paitsi liikeyhtälöiden tilavuusvoimatermissä. (6.12.6)

Approksimaation oikeutusalueen suhteen viitataan lähteeseen [6.31], jossa on lisäksi yksityiskohtainen matalan veden virtausta koskeva esitys.

Jatkuvuusyhtälö yksinkertaistuu siis Boussinesq-approksimaation yhteydessä aina kokoonpuristumattomuusehdoksi

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0\ .} \tag{6.12.7}$$

Tarkastellaan seuraavaksi liikeyhtälöitä ensin täsmällisessä muodossa

$$\rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^* = \rho\vec{a} \tag{6.12.8}$$

otaksuen siis tilavuusvoimatermin kertyvän tässä ensin ainoastaan painovoimasta. Valitaan nesteen tiheydelle referenssiarvo ρ^o (vakio paikan ja ajan suhteen). Se vastaa ko. nesteen tiheyttä tehtävän kannalta sopivasti valitussa keskimääräisessä referenssipaineessa p^o ja referenssilämpötilassa T^o vallitsevan tilanyhtälön $\rho = \rho(p,T)$ mukaisesti. Boussinesq-approksimaation yhteydessä käytetään tavallisesti mekaanisesti kokoonpuristumattoman nesteen mallia. Tiheydelle voidaan kirjoittaa tällöin kaavan

(5.2.9') mukainen esitys

$$\rho \approx \rho^{o} - \gamma_p \rho^{o} \Delta T \ , \tag{6.12.9}$$

jossa γ_p on nesteen isobaarinen tilavuuden lämpötilakerroin ja $\Delta T = T - T^{o}$.

Boussinesq-approksimaation

$$\rho \vec{a} \approx \rho^{o} \vec{a} \tag{6.12.10}$$

käyttö yhtälössä (6.12.8) antaa ensinnäkin muodon

$$\boxed{\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}^{*} = \rho^{o} \vec{a} \ .} \tag{6.12.11}$$

Jos lisäksi sovelletaan esitystä (6.12.9), saadaan toinen tavanomainen muoto

$$\rho^{o} \vec{g} - \gamma_p \rho^{o} \Delta T \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}^{*} = \rho^{o} \vec{a} \ . \tag{6.12.12}$$

Osuutta $-\gamma_p \rho^{o} \Delta T \vec{g}$ nimitetään <u>nostetermiksi</u> (engl. buoyancy term) ja sillä on siis olellinen merkitys virtauksen aiheuttajana vapaassa konvektiovirtauksessa.

<u>Huomautus 1</u>. Yhtälön (6.12.12) ulkoasua muutetaan alan kirjallisuudessa usein seuraavaan tapaan. Määritellään tiheyttä ρ^{o} vastaava hydrostaattinen painejakautuma $p_s(x,y,z)$ yhtälön

$$\rho^{o} \vec{g} - \vec{\nabla} p_s = \vec{0} \tag{6.12.13}$$

ratkaisuna. Kyseessä on nestestatiikan tehtävä, joka antaa tutun, painovoiman suunnassa lineaarisesti kasvavan paineen jakautuman. Paineen p_s arvo on kiinnitettävä yhdessä pisteessä. Ratkaisuna on paine, joka saataisiin yhtälön (6.12.11) perusteella, jos neste olisi levossa (=> $\vec{a} = \vec{0}$, $\overleftrightarrow{\sigma}^{*} = \overleftrightarrow{0}$) ja jos $\rho = \rho^{o}$. Vähennetään yhtälö (6.12.13) puolittain yhtälöstä (6.12.12):

$$-\gamma_p \rho^{o} \Delta T \vec{g} - \vec{\nabla} p_d + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}^{*} = \rho^{o} \vec{a} \ , \tag{6.12.14}$$

jossa

$$p_d = p - p_s \ . \tag{6.12.15}$$

Painetta p_d nimitetään kirjallisuudessa aika usein dynaamiseksi paineeksi (engl. dynamical pressure); ks. myös kohdan 6.9.3 huomautus 2.

Mekaanisesti kokoonpuristumattoman virtauksen energiayhtälö on esitetty kaavana (5.6.36). Boussinesq-approksimaatiossa otaksutaan tavallisesti, että dissipaation osuus on muihin termeihin nähden pieni. Jos vielä jätetään säteilyn osuus pois, saadaan energiayhtälön muoto

$$\boxed{\rho^o c_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) \ .} \tag{6.12.16}$$

<u>Jatkuvuusyhtälö</u>. Nestealkioiden kokemat paineen muutokset ovat matalan veden virtauksessa verrattain pieniä ja yleensä voidaan käyttää joko kokoonpuristumattoman tai ainakin mekaanisesti kokoonpuristumattoman nesteen mallia. Boussinesq-approksimaation mukaisesti otetaan siten lähtökohdaksi kokoonpuristumattomuusehto (6.12.7) eli ($v_x \to u$, $v_y \to v$, $v_z \to w$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ . \tag{6.12.17}$$

Kuten kohdassa 6.11 toimitaan tässäkin suureiden

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \int u dz = D\langle u\rangle \ , \\ Q_y &= \int v dz = D\langle v\rangle \end{aligned}\right\} \tag{6.12.18}$$

avulla. Kokoonpuristumattomuusehdon z-suuntaiseen integroimiseen liittyvä manipulointi on suoritettu samoin jo kohdassa 6.11. Yhtälö (6.11.16) kirjoitetaan tässä vain muotoon ($h \to D$)

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle) = 0 \ .} \tag{6.12.19}$$

Lisäksi on käytetty hyväksi kaavasta (6.12.1) seuraavaa yhteyttä

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \ . \qquad (6.12.20)$$

Yhtälön (6.12.19) johdossa on otaksuttu, että pohja ja vapaa pinta ovat koko ajan ainepintoja. Esimerkki 6.7.1 sisältää tähän liittyviä yksityiskohtaisempia kaavoja. Suotovirtauksen sekä sateen tai haihtumisen vaikutus tulee ottaa tarvittaessa huomioon täydentämällä kaavoja samaan tapaan kuin mitä esitettiin huokoisten seinämien suhteen voiteluvirtauksessa.

<u>Liikeyhtälöt</u>. Otetaan lähtökohdaksi Boussinesq-approksimaation mukainen liikeyhtälö (6.12.11)

$$\rho\vec{g} + \rho^{o}\vec{b}^{C} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^{*} = \rho^{o}\vec{a} \qquad (6.12.21)$$

täydennettynä nyt Coriolisvoimatermillä

$$\rho\vec{b}^{C} \approx \rho^{o}\vec{b}^{C} \ . \qquad (6.12.22)$$

(Coriolisvoiman osuus on korjaustermin luonteinen ja voidaan asettaa $\rho \approx \rho^{o}$.) Laajojen vesistöalueiden käsittelyssä Coriolisvoiman vaikutus on otettava nimittäin huomioon. Esimerkin 2.3.9 kaavan (h) perusteella

$$\vec{b}^{C} = -2\omega[(\cos\lambda\cdot w-\sin\lambda\cdot v)\vec{i} + \sin\lambda\cdot u\vec{j} - \cos\lambda\cdot u\vec{k}] \ , \qquad (6.12.23)$$

jossa ω on maan kulmanopeuden itseisarvo ja λ on leveysaste. Suuruusluokka-analyysin perusteella otetaan tavallisesti approksimaatio

$$\vec{b}^{C} \approx 2\omega\sin\lambda\cdot v\vec{i} - 2\omega\sin\lambda\cdot u\vec{j}$$

$$= fv\vec{i} - fu\vec{j} \ , \qquad (6.12.24)$$

jossa lyhennysmerkinnälle

$$f = 2\omega\sin\lambda \qquad (6.12.25)$$

käytetään usein nimitystä Coriolisparametri tai Corioliskerroin

(engl. Coriolis parameter). Kuvan 6.12.1 koordinaatiston suuntauksen perusteella vielä $\vec{g} = -g\vec{k}$. Liikeyhtälön (6.12.21) hieman järjestelemällä saadut komponenttimuodot ovat

$$\left.\begin{aligned} a_x + \frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho^o}(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^*)_x - fv &= 0 \,, \\ a_y + \frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho^o}(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^*)_y + fu &= 0 \,, \\ a_z + \frac{1}{\rho^o}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho^o}(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^*)_z + \frac{\rho}{\rho^o}g &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.12.26)$$

Tarkastellaan ensin viimeistä, pystysuuntaista liikeyhtälöä. Matalan veden virtauksen yhteydessä tavanomainen, oleellisen yksinkertaistuksen tuottava otaksuma on seuraava:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pystysuuntainen kiihtyvyys- ja kitkatermi} \\ \text{ovat pieniä painovoima- ja painetermien} \\ \text{rinnalla.}\end{array}\right\} \qquad (6.12.27)$$

Lisäksi teemme tässä likimääräistyksen $\rho \approx \langle\rho\rangle$, jolloin jäljelle jää "hydrostaattinen yhtälö"

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\langle\rho\rangle g \,. \qquad (6.12.28)$$

Koska $\langle\rho\rangle$ ei riipu koordinaatista z, tämä yhtälö on helppo ratkaista. Reunaehtona esiintyy annettu ilmanpaine p_a vapaalla pinnalla $z = \eta$. Kun pintajännityksen vaikutus jätetään tavallisesti vähäisenä pois, $p_s = p_a$ ja saadaan siis tulos

$$p = \langle\rho\rangle g(\eta - z) + p_a \,. \qquad (6.12.29)$$

Laajahkojen alueiden yhteydessä voi olla tarpeen ottaa huomioon, että $p_a = p_a(x,y,t)$. Pienissä alueissa riittää otaksua, että $p_a = p_a(t)$.

Huomautus 2. Tärkeä tulos (6.12.29) merkitsee, että paine voidaan eliminoida vaakasuuntaisista liikeyhtälöistä (6.12.26). Saadaan esimerkiksi lauseke

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \langle\rho\rangle g \frac{\partial \eta}{\partial x} - g(\eta - z)\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x} + \frac{\partial p_a}{\partial x} . \qquad (6.12.30)$$

Painegradientin komponentti (6.12.30) on oleellinen virtausta x-suunnassa "ajava voima". Sen nähdään kertyvän vapaan pinnan kaltevuuden sekä keskimääräisen tiheyden ja ilmanpaineen paikkariippuvuuksien johdosta. Eliminointia ei suoriteta kuitenkaan jatkossa suoraan lausekkeen (6.12.30) ja sen y-suuntaisen vastineen avulla, vaan kehittämällä ensin liikeyhtälöiden z-suunnassa integroidut muodot.

— — —

Ensimmäisestä ja toisesta liikeyhtälöstä (6.12.26) synnytetään kaksidimensioiset versiot suorittamalla jälleen integrointi z-suunnassa. Käsittely käydään läpi vain x-suuntaiselle yhtälölle, jonka jälkeen y-suuntaista yhtälöä koskeva lopputulos saadaan analogian perusteella.

Tarkastellaan siis yhtälöä

$$\int a_x dz + \frac{1}{\rho_o}\int \frac{\partial p}{\partial x} dz - \frac{1}{\rho_o}\int (\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^*)_x dz - f\int v dz = 0 . \qquad (6.12.31)$$

Jokainen sen neljästä integraalista käsitellään seuraavassa erikseen. Manipulaatiot tehdään samaan malliin kuin kohdassa 6.11. Ne perustuvat lähinnä Leibnitzin sääntöjen (L.2.14) käyttöön sekä ainepintojen kinematiikkaan. Kirjataan tähän vielä näytteeksi jälkimmäisistä kaavat (esimerkki 6.7.1, kaavat (d) ja (k))

$$\left.\begin{aligned} &- \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} + w_s = 0 , \\ &- u_b \frac{\partial D_o}{\partial x} - v_b \frac{\partial D_o}{\partial y} - w_b = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.12.32)$$

sekä vastaavat ulkoisten yksikkönormaalien lausekkeet (vrt. kaavat (6.11.50))

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_s &= (- \frac{\partial \eta}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\vec{j} + \vec{k})\frac{dA}{dS_s} , \\ \vec{n}_b &= (- \frac{\partial D_o}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial D_o}{\partial y}\vec{j} - \vec{k})\frac{dA}{dS_b} . \end{aligned}\right\} \qquad (6.12.33)$$

Kiihtyvyystermi

$$\int a_x dz = \int \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int \frac{\partial}{\partial x}(uu)dz + \int \frac{\partial}{\partial y}(vu)dz + \int \frac{\partial}{\partial z}(wu)dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int udz - u_s \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_b \cancel{\frac{\partial D_o}{\partial t}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \int uudz - (uu)_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - (uu)_b \frac{\partial D_o}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \int vudz - (vu)_s \frac{\partial \eta}{\partial y} - (vu)_b \frac{\partial D_o}{\partial y} +$$

$$+ (wu)_s - (wu)_b$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int udz + \frac{\partial}{\partial x} \int uudz + \frac{\partial}{\partial y} \int vudz +$$

$$+ u_s(\cancel{- \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_s \frac{\partial \eta}{\partial y}} + w_s) +$$

$$+ u_b(\cancel{-u_b \frac{\partial D_o}{\partial x} - v_b \frac{\partial D_o}{\partial y}} - w_b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (D\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle uu\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle vu\rangle)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(D\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle\langle u\rangle) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\hat{\ }u\hat{\ }\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\hat{\ }u\hat{\ }\rangle) \ . \qquad (6.12.34)$$

Johdossa on lähdetty liikkeelle kiihtyvyyskomponentin a_x divergenssityyppisestä (ks. kohdan 6.8.1 huomautus 2) esitysmuodosta

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) \ . \qquad (6.12.35)$$

Se saadaan tavanomaisesta lausekkeesta (3.3.64') käyttämällä

apuna kokoonpuristumattomuusehtoa (6.12.17). Lopuksi on käytetty hajotelmia

$$u = \langle u\rangle + u^{\wedge} , \qquad v = \langle v\rangle + v^{\wedge} \tag{6.12.36}$$

ja sovellettu kaavoja (6.12.5).

Painetermi

$$\int \frac{\partial p}{\partial x}\, dz = \frac{\partial}{\partial x}\int p dz - p_a \frac{\partial \eta}{\partial x} - p_b \frac{\partial D_o}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int [\langle\rho\rangle g(\eta - z) + p_a] dz - p_a \frac{\partial \eta}{\partial x} - p_b \frac{\partial D_o}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\, [\langle\rho\rangle g\eta D - \frac{1}{2}\langle\rho\rangle g(\eta^2 - D_o^2) + p_a D] +$$

$$- p_a \frac{\partial \eta}{\partial x} - (\langle\rho\rangle gD + p_a)\frac{\partial D_o}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\, [\frac{1}{2}\langle\rho\rangle gD^2 + p_a D] - p_a(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial D_o}{\partial x}) - \langle\rho\rangle gD \frac{\partial D_o}{\partial x}$$

$$= \langle\rho\rangle gD(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial D_o}{\partial x}) + \frac{1}{2} gD^2 \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x} + D \frac{\partial p_a}{\partial x} + p_a \frac{\partial D}{\partial x} +$$

$$- p_a \frac{\partial D}{\partial x} - \langle\rho\rangle gD \frac{\partial D_o}{\partial x}$$

$$= \langle\rho\rangle gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} gD^2 \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x} + D \frac{\partial p_a}{\partial x} \tag{6.12.37}$$

Manipulaatioissa on käytetty hyväksi mm. yhteyksiä (6.12.29) ja (6.12.1), joista saadaan lisäksi riippuvuudet

$$\left.\begin{aligned} p_b &= \langle\rho\rangle gD + p_a , \\ \eta &= D - D_o , \\ \eta^2 - D_o^2 &= D^2 - 2D_o D . \end{aligned}\right\} \tag{6.12.38}$$

Lausekkeissa (6.12.37) ja (6.12.30) nähdään esiintyvän analogiset termit.

Kitkatermi

$$\int (\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}^*)_x dz = \int \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} dz + \int \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz + \int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int \sigma_x^* dz - (\sigma_x^*)_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - (\sigma_x^*)_b \frac{\partial D_o}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \int \tau_{yx} dz - (\tau_{yx})_s \frac{\partial \eta}{\partial y} - (\tau_{yx})_b \frac{\partial D_o}{\partial y} +$$

$$+ (\tau_{zx})_s - (\tau_{zx})_b$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(D\langle\sigma_x^*\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle\tau_{yx}\rangle) +$$

$$- (\sigma_x^*)_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - (\tau_{yx})_s \frac{\partial \eta}{\partial y} + (\tau_{zx})_s +$$

$$- (\sigma_x^*)_b \frac{\partial D_o}{\partial x} - (\tau_{yx})_b \frac{\partial D_o}{\partial x} - (\tau_{zx})_b$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(D\langle\sigma_x^*\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle\tau_{yx}\rangle) +$$

$$+ (t_s^*)_x \frac{dS_s}{dA} + (t_b^*)_x \frac{dS_b}{dA} . \qquad (6.12.39)$$

Tämän tuloksen fysikaalinen merkitys on melko ilmeinen. Suureet $(t_s^*)_x$ ja $(t_b^*)_x$ ovat deviatorisiin jännityksiin liittyvät x-suuntaiset traktiot pinnalla ja pohjassa. Usein puhutaan vain lyhyesti pinta- ja pohjakitkasta. On sovellettu mm. kaavoja (5.4.27) ja (6.12.33).

Lopuksi Coriolistermi

$$f\int v dz = fD\langle v\rangle . \qquad (6.12.40)$$

Ottamalla huomioon kaikki edellä kehitellyt lausekkeet liikeyhtälöt saavat muodot

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(D\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle\langle u\rangle) + \\ &\qquad + \frac{\langle g\rangle}{\rho^o} gD \frac{\partial \eta}{\partial x} - S_x = 0 , \\ &\frac{\partial}{\partial t}(D\langle v\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle\langle v\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle\langle v\rangle) + \\ &\qquad + \frac{\langle \rho\rangle}{\rho^o} gD \frac{\partial \eta}{\partial y} - S_y = 0 , \end{aligned}} \tag{6.12.41}$$

joissa

$$\left.\begin{aligned} S_x = {} & \frac{(t_s^*)_x}{\rho^o} \frac{dS_s}{sA} + \frac{(t_b^*)_x}{\rho^o} \frac{dS_b}{dA} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}[D(\frac{1}{\rho^o} \langle\sigma_x^*\rangle - \langle u\hat{\ }u\hat{\ }\rangle)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}[D(\frac{1}{\rho^o} \langle\tau_{yx}\rangle - D\langle v\hat{\ }u\hat{\ }\rangle)] + \\ & - \frac{1}{2} \frac{gD^2}{\rho^o} \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x} - \frac{D}{\rho^o} \frac{\partial p_a}{\partial x} + fD\langle v\rangle , \\ S_y = {} & \frac{(t_s^*)_y}{\rho^o} \frac{dS_s}{dA} + \frac{(t_b^*)_y}{\rho^o} \frac{dS_b}{dA} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}[D(\frac{1}{\rho^o} \langle\tau_{xy}\rangle - \langle u\hat{\ }v\hat{\ }\rangle)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}[D(\frac{1}{\rho^o} \langle\sigma_y^*\rangle - \langle v\hat{\ }v\hat{\ }\rangle)] + \\ & - \frac{1}{2} \frac{gD^2}{\rho^o} \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y} - \frac{D}{\rho^o} \frac{\partial p_a}{\partial y} - fD\langle u\rangle . \end{aligned}\right\} \tag{6.12.42}$$

Liikeyhtälöt (6.12.41) on kirjoitettu tässä kätkemällä osa "pahannäköistä" lausekkeista lähdetermeihin S_x ja S_y. Valinta on suoritettu lähinnä siten, että niissä esiintyvät ainakin hankalasti mallitettavat osuudet (kolme ensimmäistä riviä).

Huomautus 3. Liikeyhtälöiden (6.12.41) divergenssi- eli säilymismuotoiset kiihtyvyystermit voidaan esittää jatkuvuusyhtälöä (6.12.19) apuna käyttäen vaihtoehtoisesti myös ei-säilymismuodossa:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(D\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle\langle u\rangle) = \\
&\quad D\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\right) = D\,\frac{D_{xy}\langle u\rangle}{Dt}\,, \\
&\frac{\partial}{\partial t}(D\langle v\rangle + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle\langle v\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle\langle v\rangle) = \\
&\quad D\left(\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}\right) = D\,\frac{D_{xy}\langle v\rangle}{Dt}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.12.43)$$

Tässä sovelletut ainederivaattamerkinnät täytyy tulkita seuraavasti:

$$\frac{D_{xy}}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial}{\partial y}\,. \qquad (6.12.44)$$

Liikeyhtälöt (6.12.41) ovat vielä periaatteessa täsmälliset (aikaisemmin esitettyjen otaksumien alaisina). Kuitenkin eteenpäin pääsemiseksi on otettava käyttöön puoliempiirisiä konstitutiivisia yhteyksiä. Turbulenttista virtausta käsitellään tavallisesti pyörreviskositeettien (ks. kohta 6.6) avulla. Lisäksi suureiden $u^{\wedge}$ ja $v^{\wedge}$ jakautumien suhteen tulee tehdä tiettyjä otaksumia. Esimerkiksi lähteissä [6.31] ja [6.32] on kosketeltu näitä seikkoja.

Esitetään nyt joitakin tavanomaisia mallituksia ja yksinkertaistuksia. Ensinnäkin koska käsitellään laakeita vesialueita,

$$\frac{dS_s}{dA} \approx 1 \ , \quad \frac{dS_b}{dA} \approx 1 \ . \tag{6.12.45}$$

Lisäksi voidaan asettaa

$$\langle\rho\rangle \approx \rho^o \tag{6.12.46}$$

paitsi ei derivaatoissa $\partial\langle\rho\rangle/\partial x$ ja $\partial\langle\rho\rangle/\partial y$, jos halutaan ottaa huomioon tiheyserojen synnyttämä virtaus.

Pintakitkan mallitukseen käytetään usein esitystä (ks. myös kohta 5.7.2)

$$\left.\begin{aligned} (t_s^*)_x &= \rho_a C_w u_w (u_w^2+v_w^2)^{1/2} \ , \\ (t_s^*)_y &= \rho_a C_w v_w (u_w^2+v_w^2)^{1/2} \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.12.47}$$

Näissä u_w ja v_w ovat tuulen (engl. wind) nopeuskomponentit, ρ_a on ilman tiheys ja C_w on dimensioton kerroin, jonka arvo riippuu mm. tuulen vauhdista.

Pohjakitkan mallitus tapahtuu klassillisesti kaavoilla (ks. myös kohdan 5.7.2 huomautus 3)

$$\left.\begin{aligned} (t_b^*)_x &= -\frac{\rho^o g\langle u\rangle(\langle u\rangle^2+\langle v\rangle^2)^{1/2}}{C^2} \ , \\ (t_b^*)_y &= -\frac{\rho^o g\langle v\rangle(\langle u\rangle^2+\langle v\rangle^2)^{1/2}}{C^2} \ , \end{aligned}\right\} \tag{6.12.48}$$

joissa C ($[C] = m^{1/2}s^{-1}$) on ns. Chezy-kerroin.

Jos nesteen pinnalla on jääpeite, myös pintakitkaa voidaan käsitellä kaavojen (6.12.48) avulla.

Lähdetermien S_x ja S_y lausekkeiden (6.12.42) toisien ja kolmansien rivien esittämät osuudet ovat kaikkein ongelmallisimmat. Voidaan esimerkiksi tehdä otaksumat [6.31, s. 23], [6.32, s. 268]

$$t_{xx} \equiv \frac{1}{\rho^o}\langle\sigma_x^*\rangle - \langle u'u'\rangle = \frac{1}{\rho^o}\,\varepsilon 2\,\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} \ ,$$

$$\left.\begin{aligned}
t_{yx} &\equiv \frac{1}{\rho^o}\langle\tau_{yx}\rangle - \langle v^\wedge u^\wedge\rangle = \frac{1}{\rho^o}\,\varepsilon\left(\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x} + \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\right) , \\
t_{xy} &\equiv \frac{1}{\rho^o}\langle\tau_{xy}\rangle - \langle u^\wedge v^\wedge\rangle = \frac{1}{\rho^o}\,\varepsilon\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} + \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x}\right) , \\
t_{yy} &\equiv \frac{1}{\rho^o}\langle\sigma^*_y\rangle - \langle v^\wedge v^\wedge\rangle = \frac{1}{\rho^o}\,\varepsilon 2\,\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y} ,
\end{aligned}\right\} \qquad (6.12.49)$$

joissa paljon tietämättömyyttä on kätketty eräänlaiseen yleistettyyn pyörreviskositeettiin ε ($[\varepsilon]$ = Pas). Sen arvo otetaan usein empiirisperäiseksi vakioksi. (Tässä ei ole haluttu käyttää kohdassa 6.6 esiintynyttä pyörreviskositeetin tunnusta μ^t, koska kyseessä ovat hieman eri asioihin liittyvät mallitukset.)

On otettu lisäksi käyttöön lyhennysmerkinnät t_{xx}, $t_{yx} = t_{xy}$ ja t_{yy}. Liikeyhtälöissä (6.12.41) tullaan soveltamaan jatkossa approksimaatioita

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x}(Dt_{xx}) - \frac{\partial}{\partial y}(Dt_{yx}) &\approx -D\left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y}\right) , \\
-\frac{\partial}{\partial x}(Dt_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(Dt_{yy}) &\approx -D\left(\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y}\right) .
\end{aligned}\right\} \qquad (6.12.50)$$

Toisin sanoen syvyyden D muuttumista paikan suhteen ei oteta tässä yhteydessä huomioon. Tämä on hyväksyttävää, koska pyörreviskositeettikäsitteeseen liittyy jo sinänsä virhelähteitä. (Approksimaatioiden (6.12.50) tarkoituksena on saada D derivointimerkkien ulkopuolelle, jonka jälkeen yhtälöitä voidaan sieventää jakamalla ne D:llä.) Suureet t_{xx}, $t_{yx} = t_{xy}$ ja t_{yy} liittyvät diffuusiolu nteisiin termeihin ja ne tuottavat lopuksi toista kertalukua olevia nopeuksien paikkaderivaattoja liikeyhtälöihin. Täten vastaavissa heikoissa muodoissa pyritään osittaisintegroimaan diffuusiotermit (ks. kohta 6.8.3). Tämä taas on tarvittaessa mukavinta suorittaa ennen konstitutiivisten yhteyksien (6.12.49) sijoitusta käyttäen vielä pelkkiä tunnuksia t_{xx}, t_{yx} jne. Äskeinen selittänee syyt ko. merkintöjen käytölle. Lisäksi meille jää jatkossa mahdollisuus esittää kaavojen (6.12.49) sijasta ehkä joitakin realistisempia mallituksia.

Lopuksi jos tiheyden konstitutiivisen yhteyden otaksutaan olevan muotoa (6.12.9), seuraa tästä integroimalla syvyyssuunnassa tulos

$$\langle\rho\rangle \approx \rho^{o} - \gamma_p \rho^{o}(\langle T\rangle - T^{o}) \ . \tag{6.12.51}$$

Täten lähdetermien osuudet

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x} &\approx -\gamma_p \rho^{o} \frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x} \ , \\ \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y} &\approx -\gamma_p \rho^{o} \frac{\partial\langle T\rangle}{\partial y} \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.12.52}$$

ja syntyy kytkentä lämpötilakentän kanssa.

Jos kyseessä on seos — kuten murtovesi — tiheys riippuu myös konsentraatioista ja esityksiin (6.12.52) tulee mukaan lisätermejä.

Ottamalla huomioon approksimaatiot (6.12.50), (6.12.46) ja (6.12.45) ja esitysmuodot (6.12.43) sekä jakamalla liikeyhtälöt (6.12.41) puolittain syvyydellä D saadaan yksinkertaistettu esitys

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} + \\ &+ g\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} - B_x = 0 \ , \\ &\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y} + \\ &+ g\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} - B_y = 0 \ , \end{aligned}} \tag{6.12.53}$$

joissa

$$B_x = \frac{(t_s^*)_x}{\rho^{o} D} + \frac{(t_b^*)_x}{\rho^{o} D} +$$

$$- \frac{1}{2} \frac{gD}{\rho^o} \frac{\partial \langle\rho\rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho^o} \frac{\partial p_a}{\partial x} + f\langle v\rangle \, ,$$

$$B_y = \frac{(t_s^*)_y}{\rho^o D} + \frac{(t_b^*)_y}{\rho^o D} +$$

$$- \frac{1}{2} \frac{gD}{\rho^o} \frac{\partial \langle\rho\rangle}{\partial y} - \frac{1}{\rho^o} \frac{\partial p_a}{\partial y} - f\langle u\rangle \, . \qquad (6.12.54)$$

<u>Energiayhtälö</u>. Otetaan tässä lähtökohdaksi kaavan (6.12.16) esittämä energiayhtälö kirjoitettuna seuraavasti

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) + \frac{\partial}{\partial z}(wT) +$$

$$+ \frac{1}{\rho^o c_p}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) = 0 \, . \qquad (6.12.55)$$

Ainederivaatta DT/Dt on esitetty divergenssimuodossa käyttäen apuna kokoonpuristumattomuusehtoa (6.12.17). Lisäksi termi $\vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T)$ on kirjoitettu alkuperäisessä asussaan $-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}$ käyttämättä vielä hyväksi Fourierin lakia.

Yhtälön (6.12.55) integrointi z-suunnassa tuottaa lopuksi muodon

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(D\langle T\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle\langle T\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle\langle T\rangle) - S = 0 \, .} \qquad (6.12.56)$$

jossa

$$S = - \frac{q_n^{(s)}}{\rho^o c_p} \frac{dS_s}{dA} - \frac{q_n^{(b)}}{\rho^o c_p} \frac{dS_b}{dA} +$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(\frac{1}{\rho^o c_p}\langle q_x\rangle + \langle u\hat{}T\hat{}\rangle\right)\right] +$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\left[D\left(\frac{1}{\rho^o c_p}\langle q_y\rangle + \langle v\hat{}T\hat{}\rangle\right)\right] \, . \qquad (6.12.57)$$

Lämpötilan T sisältävät termit on manipuloitu täsmälleen kaavan (6.12.34) esittämällä tavalla ($u \to T$). Termin $\vec{\nabla}\cdot\vec{q}$ käsittely voidaan suorittaa vastaavaan tapaan hyödyntäen lisäksi yhtälöitä (6.12.33). (Kohdassa 6.1.12 hieman eri tekniikalla synnytetty yhtälö (6.1.197) sisältää jo approksimaatiot $dS_1/dA \approx 1$, $dS_2/dA \approx 1$.) Lisäksi on käytetty hajotelmaa

$$T = \langle T\rangle + T^{\wedge} \ . \tag{6.12.58}$$

Lähdetermiin (6.12.57) on kätketty jälleen hankalasti mallitettavat osuudet.

Huomautus 4. Tämä on huomautuksen 3 analoginen vastine energiayhtälöön sovellettuna. Jatkuvuusyhtälön (6.12.19) perusteella

$$\frac{\partial}{\partial t}(D\langle t\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle\langle T\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle v\rangle\langle T\rangle) =$$

$$D\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial y}\right) = D\,\frac{D_{xy}\langle T\rangle}{Dt} \ . \tag{6.12.59}$$

— — —

Energiayhtälön (6.12.56) jatkokäsittely vaatii samantapaisia mallituksia ja yksinkertaistuksia, joita esitettiin liikeyhtälöiden yhteydessä.

Ensinnäkin voidaan soveltaa approksimaatioita (6.12.45).

Lämpövirran tiheydelle pinnalla ja pohjassa esitetään tavallisesti lausekkeet

$$q_n^{(s)} = h(T_s - T_a) \tag{6.12.60}$$

ja

$$q_n^{(b)} = 0 \ . \tag{6.12.61}$$

T_a on ilman lämpötila ja h on vastaava lämmönsiirtymiskerroin (ks. kohta 4.7.3). Hajotelmaa (6.12.58) käytettäessä $T_s = \langle T\rangle + T_s^{\wedge}$ ja jos ei ole arviota suureen $T^{\wedge}$ jakautumasta, on otettava $T_s \approx \langle T\rangle$.

Kaavojen (6.12.49) vastineiksi tulee tässä esitys [6.31, s. 25], [6.32, s. 230]

$$\left.\begin{aligned} h_x &\equiv \frac{1}{\rho^o c_p} \langle q_x \rangle + \langle u^\wedge T^\wedge \rangle = - \frac{\beta}{\rho^o c_p} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} , \\ h_y &\equiv \frac{1}{\rho^o c_p} \langle q_y \rangle + \langle v^\wedge T^\wedge \rangle = - \frac{\beta}{\rho^o c_p} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} . \end{aligned}\right\} \qquad (6.12.62)$$

Suure β ($[\beta] = \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$) on eräänlainen yleistetty pyörrejohtavuus (ks. kohta 6.6).

Lyhennysmerkintöjen h_x ja h_y tarkoitus on vastaava kuin edellä merkintöjen t_{xx}, $t_{yx} = t_{xy}$ ja t_{yy}. Kaavojen (6.12.50) vastine on

$$\frac{\partial}{\partial x}(Dh_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Dh_y) \approx D\left(\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y}\right) . \qquad (6.12.63)$$

Ottamalla huomioon approksimaatiot (6.12.63) ja (6.12.45) ja esitysmuoto (6.12.59) sekä jakamalla energiayhtälö (6.12.56) puolittain syvyydellä D saadaan yksinkertaistettu esitys

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} + \\ &\qquad + \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} - Q = 0 , \end{aligned}} \qquad (6.12.64)$$

jossa

$$Q = - \frac{q_n^{(s)}}{\rho^o c_p D} - \frac{q_n^{(b)}}{\rho^o c_p D} . \qquad (6.12.65)$$

<u>Reunaehdot</u>. Edellä esitetyt keskiarvomuotoiset jatkuvuusyhtälö, kaksidimensioiset liikeyhtälöt ja energiayhtälö muodostavat neljä kenttäyhtälöä vastaten neljää tuntematonta D (tai η, koska $D = \eta + D_o$), $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$ ja $\langle T \rangle$. Riippuviksi muuttujiksi valitaan

suureiden $\langle u \rangle$ ja $\langle v \rangle$ sijasta usein $D\langle u \rangle$ ja $D\langle v \rangle$. Tästä on mm. se etu, että jatkuvuusyhtälöstä (6.12.19) tulee lineaarinen. Jos kytkentä energiayhtälön kanssa voidaan poistaa, puhtaasti mekaanisessa probleemassa on jäljellä enää kolme tuntematonta.

Reunaehdoilla tarkoitetaan tässä kuvan 6.12.1 (b) esittämällä altaan reunalla s annettavia tietoja. (Altaan ylä- ja alapinnoilla vallitsevat ehdot on rakennettu jo mukaan kehitettyihin kaksidimensioisiin kenttäyhtälöihin.) Kuvassa 6.12.1 (b) reuna s on jaettu kahteen osaan s_1 ja s_2. Ne tulee käsittää tarvittaessa jatkossa mekaanisten ja termisten reunaehtojen suhteen eri alueiksi.

Tavallisimmat kirjallisuudessa esitetyt mekaaniset reunaehdot ovat

$$\langle u_n \rangle = \langle \bar{u}_n \rangle \qquad s_1\text{:llä} \tag{6.12.66}$$

ja

$$\eta = \bar{\eta} \qquad s_2\text{:lla} \; . \tag{6.12.67}$$

Suure

$$\langle u_n \rangle = n_x \langle u \rangle + n_y \langle v \rangle \tag{6.12.68}$$

tarkoittaa reunan s ulkoisen normaalin suuntaista keskimääräistä nopeuskomponenttia. Maarajalla s_1 asetetaan tavallisesti $\langle u_n \rangle = 0$. Kun reuna s_1 rajoittuu esimerkiksi jokeen, $\langle \bar{u}_n \rangle \neq 0$. Avoimeen vesialueeseen rajoittuvalla reunalla käytetään usein ehtoa (6.12.67). Korkeusasema $\bar{\eta}(s,t)$ tiedetään tällöin lähinnä mittaushavaintojen perusteella.

Käytettävissä olevien mekaanisten reunaehtojen tyyppi riippuu myös siitä, ovatko pyörreviskositeettiin ε liittyvät termit mukana ($\varepsilon \neq 0$) formulaatiossa vai eivät ($\varepsilon = 0$). Kyseessä on vastaavantapainen asetelma kuin Navier-Stokesin ja Eulerin liikeyhtälöiden reunaehdoissa: Kun diffuusiomainen osuus poistetaan mallista, differentiaaliyhtälöiden kertaluku alenee yhdellä ja käytettävissä olevien reunaehtojen lukumäärä alenee samoin. Ehtoja (6.12.66) ja (6.12.67) voidaan pitää diffuusiottomaan malliin ($\varepsilon = 0$) sopivina. Tapaukseen $\varepsilon \neq 0$ liittyviä reunaehtoja

on selostettu mm. lähteessä [6.31, s. 29]. Käsittelyä mutkistaa vielä se seikka, että vaikka asetettaisiinkin $\varepsilon = 0$, kitkaa jää jäljelle tavallisesti edelleen pohjan osalta. Täten analogia Navier-Stokesin ja Eulerin yhtälöiden suhteen ei ole täysin osuva.

Termiset reunaehdot voidaan esittää mm. seuraavasti:

$$\langle T\rangle = \langle\bar{T}\rangle \qquad s_1\text{:llä} \tag{6.12.69}$$

ja

$$h_n = \bar{h}_n \qquad s_2\text{:lla} \; . \tag{6.12.70}$$

Suure

$$h_n = n_x h_x + n_y h_y \tag{6.12.71}$$

palautuu termien $\langle u'T'\rangle$ ja $\langle v'T'\rangle$ hävitessä tutumman näköiseksi olioksi $\langle q_n\rangle/(\rho^o c_p)$, jossa

$$\langle q_n\rangle = n_x\langle q_x\rangle + n_y\langle q_y\rangle \; . \tag{6.12.72}$$

Kohdassa 5.7.4 on jo mainittu eräästä matalan veden virtaukseen liittyvästä erikoisuudesta: Kun altaan reunat ovat kaltevia, tutkittavan tasoalueen reunan asema riippuu nesteen pinnan asemasta. Tämän seikan huomioonotto komplisoi myös reunaehtoja.

Epästationaarinen probleema täytyy luonnollisesti täydentää lopuksi asiaankuuluvin alkuehdoin.

<u>Eräs analogia</u>. Matalan veden virtauksella ja kaksidimensioisella kokoonpuristuvalla virtauksella on tiettyjä analogisia piirteitä. Tarkastellaan matalan veden virtauksen jatkuvuusyhtälöä (6.12.19) ja liikeyhtälöitä (6.12.53) kirjoitettuina muotoihin

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(D\langle u\rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(D\langle u\rangle) = 0 \; , \\
&\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} + \frac{gD}{D}\frac{\partial D}{\partial x} = 0 \; , \\
&\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y} + \frac{gD}{D}\frac{\partial D}{\partial y} = 0 \; .
\end{aligned}\right\} \tag{6.12.73}$$

Jatkuvuusyhtälössä on otettu huomioon kaava (6.12.20). Liikeyhtälöissä on tehty seuraavat otaksumat: Virtaus on kitkatonta ($\sigma_x^* = \tau_{xy} = \sigma_y^* = 0$, $(t_s^*)_x = (t_s^*)_y = (t_b^*)_x = (t_b^*)_y = 0$), nopeuskomponentit ovat syvyyssuunnassa vakioita ($\hat{u} = 0$, $\hat{v} = 0$), altaan pohja on vaakasuora taso (D_o = vakio => $\partial D/\partial x = \partial\eta/\partial x$, $\partial D/\partial y = \partial\eta/\partial y$), $\langle\rho\rangle$ ja p_a ovat vakioita sekä $f = 0$.

Kitkattoman kokoonpuristuvan polytrooppisen kaksidimensioisen kaasuvirtauksen jatkuvuusyhtälö ja liikeyhtälöt voidaan kirjoittaa muotoihin

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \,, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a^2}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 \,, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a^2}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial y} = 0 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (6.12.74)$$

Nämä saadaan esimerkiksi kolmesta ensimmäisestä kaavasta (6.9.84) ($v_x \to u$, $v_y \to v$) modifioimalla liikeyhtälöt derivointien ja jatkuvuusyhtälön avulla ei-säilymismuotoihin sekä ottamalla huomioon kaavat (6.9.87).

Yhtälöiden (6.12.73) ja (6.12.74) vertailu osoittaa, että vallitsee analogia

$$\langle u\rangle \mathrel{\hat{=}} u,\ \langle v\rangle \mathrel{\hat{=}} v,\ D \mathrel{\hat{=}} \rho,\ gD \mathrel{\hat{=}} a^2 \,. \qquad (6.12.75)$$

Täydellinen analogia vaatii, että kertoimen a^2/ρ tulisi olla vakio, koska myös kerroin $gD/D = g$ on vakio. Kun otaksutaan, että kyseessä on ihannekaasun isentrooppinen virtaus, kaava (6.9.77) antaa tuloksen

$$\frac{a^2}{\rho} = \frac{\gamma}{\rho}\,\frac{p^o}{\rho^o}\left(\frac{\rho}{\rho^o}\right)^{\gamma-1} = \frac{\gamma p^o}{(\rho^o)^\gamma}\,\rho^{\gamma-2} \,. \qquad (6.12.76)$$

Tämä on vakio vain valinnalla $\gamma = 2$. Todellisilla kaasuilla ei ole näin korkeaa adiabaattivakion arvoa; suurin arvo on 5/3.

Vaikkei analogia ole siis käytännössä aivan täydellinen, allasmallin avulla saadaan kuitenkin köyhän miehen keino demonstroida kvalitatiivisesti kaasumekaniikan joitakin ilmiöitä. Vii-

meisen yhteyden (6.12.75) perusteella on ilmeistä, että pienet häiriöt etenevät matalan veden virtauksessa nesteen suhteen nopeudella

$$c = \sqrt{gD} \ . \qquad (6.12.77)$$

Esimerkiksi kun D = 1 cm, $c = (9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2} \cdot 0{,}01\ \mathrm{m})^{1/2} \approx 0{,}3$ m/s. Täten häiriöiden kulkua pystytään seuraamaan paljaalla silmällä.

Kaasumekaniikan Machin luvun Ma = v/a vastineena matalan veden virtauksessa on ns. Frouden luku (engl. Froude number)

$$\mathrm{Fr} = \frac{\langle v \rangle}{c} = \frac{\langle v \rangle}{\sqrt{gD}} \ , \qquad (6.12.78)$$

jossa $\langle v \rangle$ tarkoittaa tässä syvyyden suhteen keskimääräistä virtausnopeutta. (Frouden luku määritellään nestemekaniikassa yleisemmin kaavalla $\mathrm{Fr} = v/\sqrt{gL}$, jossa v on karakteristinen virtausnopeus ja L karakteristinen pituus.) Hydrauliikassa käytetään virtausalueista Fr < 1 ja Fr > 1 vastaavasti nimityksiä alikriittinen virtaus tai verkasvirtaus (engl. tranquil, subcritical flow) ja ylikriittinen virtaus tai kiitovirtaus (engl. rapid, supercritical flow). Kaasumekaniikan shokin vastineena esiintyy ns. hydraulinen hyppy eli nestekynnys (engl. hydraulic jump). Lähde [6.21] sisältää lisää tähän liittyvää materiaalia sekä mm. mielenkiintoisen liikennevirtaa nestekontinuumina käsittelevän osuuden.

Esitetyn analogian perusteella on ymmärrettävää, että kaasumekaniikassa ja matalan veden virtauksessa voidaan soveltaa hyvin samantapaisia numeerisia ratkaisumenetelmiä.

6.13 Seosten virtaus

Yleistä. Nesteseosten (engl. mixture) käsittely on tarpeen useissa sovellutuksissa: kemialliset prosessit kuten palaminen, epäpuhtauksien leviäminen, murtovedet jne.

Seoksessa esiintyy kahden tai useamman lajisia (engl. species) hiukkasia, esimerkiksi eri kemiallisten yhdisteiden molekyylejä. Termin laji sijasta puhutaan usein myös seoksen komponenteista (engl. component).

Nesteseos tottelee tietenkin edelleen kaikkia aikaisemmin selostettuja yleisiä kontinuumimekaniikan aksioomia. Uusina tuntemattomina esiintyvät kuitenkin nyt komponenttien konsentraatiot. Tarvittavat lisäyhtälöt saadaan eri komponentteja koskevista jatkuvuusyhtälöistä. Oleellinen ongelma on konstitutiivisten yhteyksien monimutkaistuminen: konsentraatiot ovat tilamuuttujina periaatteessa mukana kaikissa riippuvuuksissa. Lähteessä [3.5] on klassillinen hyvä esitys seosvirtauksesta. Lähde [6.33] on vastaava uudempi, palamisilmiöihin keskittyvä teos.

Eräitä käsitteitä. Tarkastelemme tässä lähinnä kaksikomponenttiseosta (engl. two-component system, binary system). Laajennus monikomponenttiseoksiin (engl. multicomponent system) on tämän jälkeen verrattain helppoa. Komponentteihin viitataan indekseillä A ja B.

Määritellään komponenttien tiheydet ρ ($[\rho] = \mathrm{kgm}^{-3}$) tai tarkemmin ns. massakonsentraatiot (engl. mass concentration)

$$\left.\begin{aligned} \rho_A &= \frac{m_A}{V}, \\ \rho_B &= \frac{m_B}{V} \end{aligned}\right\} \qquad (6.13.1)$$

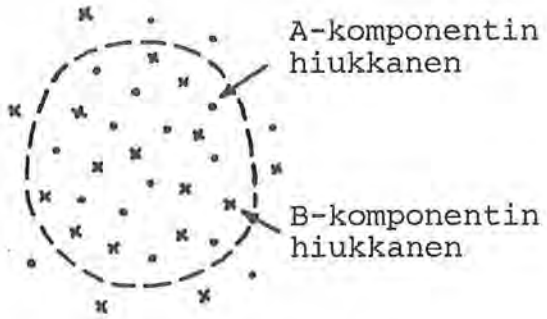
sekä itse seoksen eli nesteen tiheys

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_A + m_B}{V} = \frac{m_A}{V} + \frac{m_B}{V} \qquad (6.13.2)$$

eli

$$\boxed{\rho = \rho_A + \rho_B \, .} \qquad (6.3.13)$$

Toisin sanoen seoksen tiheys on yhtä suuri kuin sen komponenttien tiheyksien summa. Tämä tulos pätee olipa komponenttien lukumäärä mikä hyvänsä. Edellä m_A ja m_B ovat pienen tilavuuden V omaavan nestealkion (kuva 6.13.1) A- ja B-lajisista hiukkasista muodostuvat massat. Tilavuuden V tulee olla pieni mutta ei liian pieni, jotta saavutetaan kontinuumiteoria; vrt. kaavaan (3.4.1) liittyvä teksti.



Kuva 6.13.1 Nestealkio

Määritellään lisäksi komponenttien ns. massaosuudet Y (engl. mass fraction) eli ns. suhteelliset tiheydet ([Y] = -):

$$Y_A = \frac{m_A}{m} = \frac{m_A/V}{m/V} = \frac{\rho_A}{\rho},$$

$$Y_B = \frac{m_B}{m} = \frac{m_B/V}{m/V} = \frac{\rho_A}{\rho} \, . \qquad (6.13.4)$$

Massaosuudelle käytetään alan kirjallisuudessa monasti tunnusta m tai ω, joita on kuitenkin haluttu välttää tässä. Todettakoon vielä, että yleissanalla konsentraatio (engl. concentration) tai pitoisuus tarkoitetaan tilanteesta riippuen usein joko tiheyttä, massaosuutta tai myös molaarista konsentraatiota (engl. molar concentration) tai mooliosuutta (engl. mole fraction). Näitä kahta jälkimmäistä käsitettä ei oteta käyttöön tässä esityksessä.

Kaavojen (6.13.3) ja (6.13.4) perusteella havaitaan, että

$$\boxed{Y_A + Y_B = 1} \qquad (6.13.5)$$

eli seoksen komponenttien massaosuuksien summa on yksi. Tämä tulos pätee olipa komponenttien lukumäärä mikä hyvänsä.

Seoksen yhteydessä herää kysymys, miten sen eri komponenttien virtausnopeudet määritellään. Tässä siis nopeudella tarkoite-

taan — kuten aina kontinuumimallin yhteydessä — jotakin makroskooppista keskimääräistä nopeutta eikä suinkaan erillisten hiukkasten nopeuksia. Luonnollisin tapa on ottaa kunkin komponentin nopeudeksi periaatteessa alkion sisältämien ko. komponenttihiukkasten massakeskiön nopeus $\vec{v}_A$ tai $\vec{v}_B$. Tällöin alkion sisältämien komponenttiosuuksien liikemäärät

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}_A &= m_A\vec{v}_A = \rho_A\vec{v}_A V \,, \\ \vec{p}_B &= m_B\vec{v}_B = \rho_B\vec{v}_b V \end{aligned}\right\} \qquad (6.13.6)$$

tulevat oikein lasketuiksi yllä olevia kaavoja käyttäen; ks. kaava (2.3.38). Vastaavasti alkion kokonaisliikemäärä

$$\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = (\rho_A\vec{v}_A+\rho_B\vec{v}_B)V \,. \qquad (6.13.7)$$

Kun merkitään nesteen eli seoksen nopeutta (engl. mass average velocity, bulk velocity) tunnuksella $\vec{v}$ ja asetetaan

$$\vec{p} = m\vec{v} = \rho\vec{v}V \,, \qquad (6.13.8)$$

saadaan yhtälöitä (6.13.7) ja (6.13.8) vertaamalla lauseke

$$\vec{v} = \frac{\rho_A\vec{v}_A + \rho_B\vec{v}_B}{\rho} \,. \qquad (6.13.9)$$

Kaavat (6.13.3) huomioonottaen syntyy vaihtoehtoinen esitys

$$\boxed{\vec{v} = Y_A\vec{v}_A + Y_B\vec{v}_B} \qquad (6.13.10)$$

eli nesteen nopeus on komponenttien nopeuksien massaosuuksilla painotettu keskiarvo. Tämä tulos pätee olipa komponenttien lukumäärä mikä hyvänsä.

Kaavan (6.13.9) tai (6.13.10) antama suure on sama nopeus, jota olemme aina edellä käsitelleet yksikomponenttisen nesteen yhteydessä. Se on myös nopeus, joka saadaan kokeellisesti mitattua Pitot-putken avulla [3.5, s. 497]. Muunkinlaisia nesteseoksen nopeuden määritelmiä esiintyy.

Huomautus 1. Yhteenvetona äskeisistä nopeuksia koskevista tarkasteluista voimme todeta seuraavaa. Seosten yhteydessä tulee tavallaan ajatella, että jokainen komponentti muodostaa oman kontinuuminsa. Nämä liikkuvat sitten tarkasteltavassa alueessa kukin omalla tavallaan ollen vuorovaikutuksessa keskenään. Lisäksi tavanomainen itse seoksen käyttäytymistä kuvaava kontinuumi on edelleen käytettävissä. Jos valitsemme tietyllä hetkellä tietyn kappaleen eli kontinuumimekaniikan mielessä suljetun systeemin, hetken päästä meillä onkin n+1 eri asemissa sijaitsevaa kappaletta: seoskappale, komponentin 1 määrittämä kappale, komponentin 2 määrittämä kappale jne. Kunkin kappaleen reunan liike määräytyy periaatteessa kuvan 3.4.5 esittämällä tavalla, jossa reuna-alkion aseman määrittämiseen käytetään vastaavasti seoksen hiukkasia, komponentin 1 hiukkasia, komponentin 2 hiukkasia jne.

— — —

Diffuusio. Diffuusio tarkoittaa tietyn komponentin liikettä itse seoksen suhteen ja täten ns. diffuusionopeudet (engl. diffusion velocity) on syytä määritellä suhteellisina nopeuksina $\vec{v}_A - \vec{v}$ ja $\vec{v}_B - \vec{v}$. Määritellään lisäksi komponenttien ns. massavuovektorit nopeuden $\vec{v}$ suhteen (engl. mass flux vector) eli ns. diffuusiovuovektorit (engl. diffusion flux) $\vec{j}$ ($[\vec{j}] = \mathrm{kgm^{-2}s^{-1}}$) kaavoilla

$$\left.\begin{aligned} \vec{j}_A &= \rho_A(\vec{v}_A-\vec{v}) = Y_A\rho(\vec{v}_A-\vec{v}) \ , \\ \vec{j}_B &= \rho_B(\vec{v}_B-\vec{v}) = Y_B\rho(\vec{v}_B-\vec{v}) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.13.11)$$

Ne kuvaavat nesteen mukana nopeudella $\vec{v}$ liikkuvan havaitsijan mittaamia komponenttien liikemääriä tilavuutta kohti.

Käytetään lisäksi merkintöjä

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_A &= \rho_A\vec{v}_A = Y_A\rho\vec{v}_A \ , \\ \vec{n}_B &= \rho_B\vec{v}_B = Y_B\rho\vec{v}_B \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.3.12)$$

Suureet $\vec{n}$ ovat komponenttien (absoluuttisia) massavuovektoreita ($[\vec{n}] = \mathrm{kgm^{-2}s^{-1}}$). Ne kuvaavat kiinteässä koordinaatistossa ole-

van havaitsijan mittaamia komponenttien liikemääriä tilavuutta kohti.

Kaavoista (6.13.11) ja (6.13.12) voidaan helposti päätellä tulokset

$$\boxed{\vec{j}_A + \vec{j}_B = \vec{0}} \tag{6.13.13}$$

ja

$$\boxed{\vec{n}_A + \vec{n}_B = \rho\vec{v}\ ,} \tag{6.13.14}$$

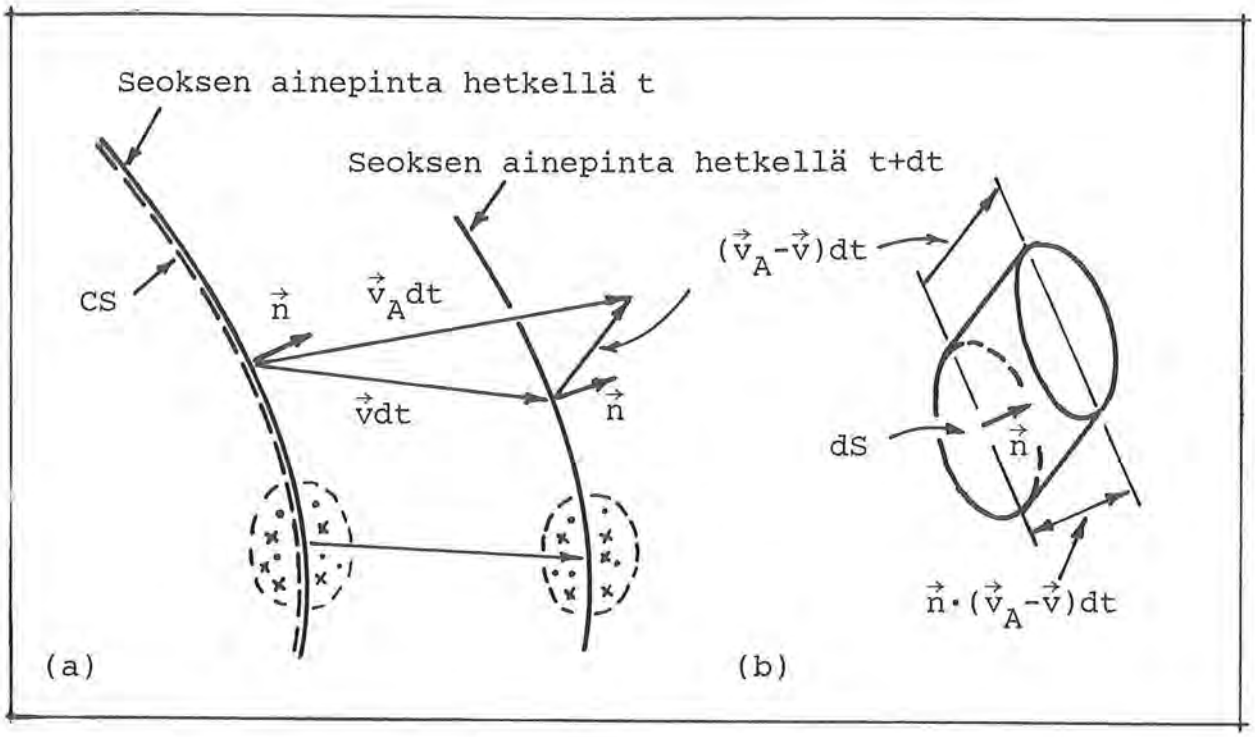
jotka yleistyvät jälleen ilmeisellä tavalla monikomponenttiseoksille. Yhtälö (6.3.13) on intuitiivisesti ilmeinen: Koska diffuusio tapahtuu keskimääräisen nopeuden $\vec{v}$ suhteen, eri komponenttien osuuksien tulee kumota toisensa. Yhtälön (6.3.14) suure $\rho\vec{v}$ on kaavan (6.13.8) perusteella virtauksen kokonaismassavuovektori; siis liikemäärä tilavuutta kohti. Emme kuitenkaan käytä sille tässä merkintää $\vec{n}$, jottei tapahtuisi sekaannusta pinnan ulkoisen normaalin tavanomaisen tunnuksen kanssa.

Voidaan kirjoittaa lisäksi mm:

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_A &= \rho_A\vec{v}_A = \rho_A\vec{v} + \rho_A(\vec{v}_A-\vec{v}) \\ &= \rho_A\vec{v} + \vec{j}_A \\ &= Y_A\rho\vec{v} + \vec{j}_A \end{aligned}\right\} \tag{6.13.15}$$

ja vastaavasti suureelle $\vec{n}_B$.

Pyritään havainnollistamaan suureiden $\vec{j}_A$ ja $\vec{n}_A$ merkityksiä kuvan 6.13.2 avulla. Kuvassa (a) on esitetty seoksen tietty ainepinta kahdella lähekkäisellä ajan hetkellä t ja t+dt. Ainepinta on asetettu yhtymään hetkellä t valitun kiinteän kontrollialueen reunapintaan CS. Myös komponentteihin A ja B voitaisiin ajatella liitetyiksi omat ainepintansa (ks. huomautus 1). Komponentin A ainepinta kulkisi hetkellä t+dt vektorin $\vec{v}_A dt$ kärjen kautta. Kuva (b) esittää seoksen ainepinnan mukana liikkuvan havaitsijan A-komponentin liikkeestä pinnan läpi saamaa tu-



Kuva 6.13.2 (a) Seoksen ainepinnan liike.(b) Komponentin A virtaus ainepinnan suhteen.

losta (vrt. kuvaan 3.3.13 liittyvä esitys). Ajassa dt pinta-alkion läpi virrannut komponentti A muodostaa vinopohjaisen sylinterin, jonka pohjan pinta-ala on dS ja korkeus $\vec{n}\cdot(\vec{v}_A-\vec{v})dt$, jossa $\vec{n}$ on pinnan ulkoinen yksikkönormaalivektori. Täten sylinterin tilavuus $dV = \vec{n}\cdot(\vec{v}_A-\vec{v})dtdS$ ja sen sisältämä komponentin A massa $dm_A = \rho_A dV = \vec{n}\cdot\rho_A(\vec{v}_A-\vec{v})dtdS$. Jakamalla tämä kuluneella ajalla dt ja pinta-alalla dS saadaan komponentin A massavirran tiheys (yksikkö $kgm^{-2}s^{-1}$) seoksen ainepinnan läpi alueesta ulos

$$\vec{n}\cdot\rho_A(\vec{v}_A-\vec{v}) = \vec{n}\cdot\vec{j}_A \ . \qquad (6.13.16)$$

Tämän perusteella komponentin A (netto)-massavirta (yksikkö kgs^{-1}) seoksen ainepinnan läpi alueesta ulos on

$$\int_{S(t)} \vec{n}\cdot\vec{j}_A dS \ . \qquad (6.13.7)$$

Vastaavalla tavalla kuin edellä voidaan osoittaa seuraavaa. Termi

$$\vec{n}\cdot\rho_A\vec{v}_A = \vec{n}\cdot\vec{n}_A \qquad (6.13.18)$$

esittää komponentin A massavirran tiheyttä kiinteän pinnan läpi alueesta ulos. Samoin integraali

$$\int_{CS} \vec{n}\cdot\vec{n}_A dS \qquad (6.3.19)$$

esittää komponentin A (netto)massavirtaa kiinteän pinnan läpi alueesta ulos.

Muodoltaan yksinkertaiset lausekkeet (6.13.16) ja (6.13.18) ovat hyödylliset: Muodostamalla massavuovektorin ja ulkoisen yksikkönormaalivektorin pistetulo saadaan vastaava massavirran tiheys. Samanlainen yhteys pätee myös esimerkiksi lämpövuovektorin ja lämpövirran tiheyden välillä; ks. kaava (5.6.40).

Jatkuvuusyhtälöt. Kullekin komponentille on voimassa massan säilymisen periaate tai täsmällisemmin sanottuna komponentin massan taseen periaate, kun otetaan huomioon komponentin mahdollinen massan tuotto aikaa ja tilavuutta kohti ($[r] = kgm^{-3}s^{-1}$) (engl. time rate of component production per unit volume) kemiallisen reaktion tai esimerkiksi jonkin biologisen ilmiön johdosta.

Suoritetaan johto tässä kiinteään kontrollialueeseen liittyvällä tasetarkastelulla. (Asetelma on sen verran eksoottinen, että aikaisemmin johdettuja Reynoldsin kuljetuslauseen eri versioita on hieman vaikea soveltaa suoraan, koska kuljetusnopeuden oikea valinta (v?, v_A? jne.) voi tuottaa liikaa päänvaivaa.)

Alueessa CV tietyllä hetkellä olevan komponentin A kokonaismassan arvo

$$m_A(t) = \int_{CV} \rho_A dV \ . \qquad (6.13.20)$$

Se voi muuttua kahdesta syystä: Alueessa kehittyy komponenttia A ja alueesta poistuu sen reunojen läpi komponenttia A. Saadaan taseyhtälö

[Alueessa olevan A-komponentin kokonaismassan muutosnopeus]	$\frac{d}{dt} m_A(t) = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho_A dV$ $= \int_{CV} \frac{\partial \rho_A}{\partial t} dV$	(6.13.21)
"	"	
[A-komponentin kokonaistuotto alueessa]	$\int_{CV} r_A dV$	(6.13.22)
-	-	
[A-komponentin nettomassavirta alueesta ulos]	$\int_{CS} \vec{n} \cdot \vec{n}_A dS$	(6.13.23)

eli

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho_A}{\partial t} dV = \int_{CV} r_A dV - \int_{CS} \vec{n} \cdot \vec{n}_A dS \ . \qquad (6.13.24)$$

Olemme käyttäneet hyväksi kaavaa (6.3.19). Integraalin $\int_{CV} \rho_A(\vec{r},t)dV$ derivointi parametrin t suhteen saadaan suorittaa kaavan (6.13.21) esittämällä tavalla, koska integroimisalueen rajat ovat tässä kiinteät. Gaussin lauseen perusteella

$$\int_{CS} \vec{n} \cdot \vec{n}_A dS = \int_{CV} \vec{\nabla} \cdot \vec{n}_A dV \qquad (6.13.25)$$

ja yhtälö (6.13.24) saa muodon (asetetaan vielä CV → V)

$$\int_V \frac{\partial \rho_A}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{n}_A dV - \int_V r_A dV = 0 \ . \qquad (6.13.26)$$

Koska tämän globaalin yhtälön tulee olla voimassa valittiinpa alue V miten hyvänsä, saadaan edelleen lokaalinen yhtälö

$$\boxed{\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{n}_A - r_A = 0} \qquad (6.13.27)$$

eli karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \frac{\partial (n_A)_x}{\partial x} + \frac{\partial (n_A)_y}{\partial y} + \frac{\partial (n_A)_z}{\partial z} - r_A = 0 \ . \qquad (6.13.27')$$

Tämä on ns. komponentin A jatkuvuusyhtälö (engl. equation of continuity for component A).

Jatkoa silmälläpitäen edellistä käyttökelpoisempi muoto syntyy soveltamalla lausekkeita (6.13.3) ja (6.13.12):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_A) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}Y_A+\vec{j}_A) - r_A = 0 \ .} \qquad (6.13.28)$$

Kyseessä on jälleen tyypillinen konvektio - diffuusioyhtälö etenkin, kun otetaan vielä huomioon kohta esitettävä diffuusiovuovektorin konstitutiivinen riippuvuus. Komponentille B saadaan luonnollisesti vastaavat kaavat; esimerkiksi

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{n}_B - r_B = 0 \ . \qquad (6.13.29)$$

Huomattakoon lisäksi, että myös kemiallisiin reaktioihin nähden pätee massan säilymisen periaate: lähtöaineiden massa on yhtä suuri kuin reaktiotuotteiden massa. Sama asia pienellä aikavälillä tarkasteltuna ja jaettuna kuluneella ajalla ja tilavuudella antaa yhtälön

$$\boxed{r_A + r_B = 0} \qquad (6.13.30)$$

eli komponenttien massan tuottojen summa on nolla. Tämä tulos pätee olipa komponenttien lukumäärä mikä hyvänsä.

Lasketaan yhtälöt (6.13.27) ja (6.13.29) puolittain yhteen:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{n}_A + \vec{\nabla}\cdot\vec{n}_B - r_A - r_B = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_A+\rho_B) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{n}_A+\vec{n}_B) = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \ . \qquad (6.13.31)$$

On sovellettu kaavoja (6.13.3), (6.13.30) ja (6.13.14). Yhtälö (6.13.31) on kuten pitääkin itse seosta koskeva tavanomainen jatkuvuusyhtälö.

Huomattakoon siis, että vaikka kaksikomponenttiseokselle saadaan kolme jatkuvuusyhtälöä, niistä vain kaksi ovat riippumattomia. Vastaavasti n-komponenttiselle seokselle (n > 1) saadaan n+1 jatkuvuusyhtälöä, joista n ovat riippumattomia.

Todettakoon vielä, että jatkuvuusyhtälö (6.13.28) voidaan manipuloida myös esimerkiksi muotoon (vrt. kaava (6.8.7))

$$\boxed{\rho \frac{DY_A}{Dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_A - r_A = 0 \ .} \qquad (6.13.32)$$

<u>Fickin diffuusiolaki</u>. Diffuusioon liittyvä konstitutiivinen yhteys esitetään tavallisimmin muodossa (ks. huomautus 2)

$$\boxed{\vec{j}_A = -\rho D_{AB}\vec{\nabla}Y_A} \qquad (6.13.33)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} (j_A)_x &= -\rho D_{AB}\frac{\partial Y_A}{\partial x} \ , \\ (j_A)_y &= -\rho D_{AB}\frac{\partial Y_A}{\partial y} \ , \\ (j_A)_z &= -\rho D_{AB}\frac{\partial Y_A}{\partial z} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.13.33')$$

Tämä on ns. <u>Fickin laki</u> tai täsmällisemmin ns. Fickin ensimmäinen diffuusiolaki (engl. Fick's first law of diffusion). Kerroin D_{AB} ($[D] = m^2s^{-1}$) on ns. molekylaarinen diffuusiokerroin eli <u>diffusiivisuus</u> (engl. diffusivity) ko. kaksikomponenttiseokselle. Diffuusivisuuden D_{AB} arvo riippuu komponenttien A ja B konsentraatioista, lämpötilasta ja paineesta.

Komponentin B suhteen voidaan kirjoittaa vastaavasti yhteys

$$\vec{j}_B = -\rho D_{BA}\vec{\nabla}Y_B \ , \qquad (6.13.34)$$

jossa $D_{BA} = D_{AB}$. Lausekkeiden (6.13.33) ja (6.13.34) perusteella ja ottaen yhteys (6.13.5) huomioon havaitaan, että yhtälö (6.13.13) tosiaan toteutuu.

Huomautus 2. Fickin laki muistuttaa luonteeltaan mm. Fourierin isotrooppista lämmönjohtumislakia (5.2.40). On huomattava, että kyseessä on jälleen tietty approksimatiivinen konstitutiivinen yhteys. Fickin lain sanotaan kuvaavan ns. tavallista diffuusiota (engl. ordinary diffusion). Mutta diffuusiota voi syntyä myös painegradientin johdosta (painediffuusio), tilavuusvoimien johdosta (voimadiffuusio, engl. forced diffusion) ja lämpötilagradientin johdosta (terminen diffuusio) [3.5, s. 567].

Diffuusiovektori $\vec{j}_A$ voidaan eliminoida jatkuvuusyhtälöstä (6.13.28) Fickin lain (6.13.33) avulla:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_A) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}Y_A - \rho D_{AB}\vec{\nabla}Y_A) - r_A = 0 \ .} \qquad (6.13.35)$$

Jos taas lähdetään muodosta (6.13.32), saadaan vastaavasti yhtälö

$$\rho\,\frac{DY_A}{Dt} - \vec{\nabla}\cdot(\rho D_{AB}\vec{\nabla}Y_A) - r_A = 0 \ . \qquad (6.13.36)$$

Kirjallisuudessa esiintyy suuri joukko näiden yhtälöiden erityismuotoja. Esimerkiksi jos otaksutaan vakiotiheysneste ja että diffusiivisuus on vakio paikan ja ajan suhteen saadaan yhtälö

$$\frac{DY_A}{Dt} = D_{AB}\nabla^2 Y_A + \frac{r_A}{\rho} \qquad (6.13.37)$$

eli

$$\frac{\partial Y_A}{\partial t} + v_x\frac{\partial Y_A}{\partial x} + v_y\frac{\partial Y_A}{\partial y} + v_z\frac{\partial Y_A}{\partial z} =$$

$$= D_{AB}\left(\frac{\partial^2 Y_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_A}{\partial z^2}\right) + \frac{r_A}{\rho} \ . \qquad (6.13.37')$$

Tätä yhtälömuotoa käytetään usein laimeiden (engl. dilute) seosten yhteydessä [3.5, s. 557].

Jos virtausnopeus $\vec{v}$ ja tuotto r_A häviävät, yhtälö (6.13.37) yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{\partial Y_A}{\partial t} = D_{AB}\nabla^2 Y_A \tag{6.13.38}$$

jota nimitetään usein pelkästään diffuusioyhtälöksi tai toisinaan myös Fickin toiseksi diffuusiolaiksi. Tätä yhtälöä sovelletaan tavallisesti kiinteän aineen suhteen tapahtuvassa diffuusiossa. Diffuusioyhtälön nähdään olevan samaa tyyppiä kuin Fourierin lämmönjohtumisyhtälö (4.6.26), jota seikkaa voidaan käyttää hyväksi analyyttisiä ratkaisuja etsittäessä.

Jatkuvuusyhtälöissä esiintyvät tuottotermit r tulee myös esittää tiettyjen kemian tuntemusta vaativien konstitutiivisten yhteyksien avulla. Edelleen konsentraatioille tulee antaa asiaankuuluvat reuna- ja alkuehdot.

Todetaan vielä lyhyesti jotain komponenttien jatkuvuusyhtälöiden saamista keskiarvomuodoista turbulenttisessa virtauksessa. Esimerkiksi massaosuudelle Y_A kirjoitetaan tuttuun tapaan ensin hajotelma $Y_A = \bar{Y}_A + Y_A'$. Käsittelyn suhteen voidaan viitata pitkälti kohdan 6.6 yhtälöön (6.6.29), joka on täysin samaa tyyppiä kuin yhtälö (6.13.32). Kun tiheys ρ otaksutaan paikan ja ajan suhteen vakioksi, yhtälön (6.13.32) keskiarvomuodoksi tulee

$$\rho\frac{\bar{D}\bar{Y}_A}{Dt} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{j}_A+\vec{j}_A^{\,t}) - \bar{r}_A = 0 \ , \tag{6.13.39}$$

jossa suuretta

$$\vec{j}_A^{\,t} = \rho\overline{\vec{v}'Y_A'} \tag{6.13.40}$$

voidaan nimittää turbulenttiseksi diffuusiovuovektoriksi. Edelleen voidaan yrittää muodollisesti Fickin lain mukaista esitystä

$$\vec{j}_A^{\,t} = -\rho D_{AB}^t\vec{\nabla}\bar{Y}_A \ , \tag{6.13.41}$$

jossa D^t_{AB} on ns. turbulenttinen diffusiivisuus tai pyörrediffusiivisuus.

Loppuhuomautuksia. Seosten virtaukset muodostavat erittäin mutkikkaan — ja tärkeän — aihepiirin, johon on voitu paneutua edellä luonnollisestikin vain alkuesittelymielessä. Perusteellisempi tutustuminen vaatii erityisesti kemiallisen termodynamiikan ja reaktiokinetiikan tuntemusta.

Teemme tässä lopuksi muutamia liikeyhtälöitä ja energiayhtälöä koskevia kommentteja.

Cauchyn liikeyhtälöstä todettakoon, että ainoa periaatteellinen muutos yksikomponenttiseokselle saadun tavanomaisen muodon — kuten (6.4.1) — suhteen liittyy tilavuusvoimatermiin. Esimerkiksi kaksikomponenttiseoksella tulee asettaa yleisessä tapauksessa

$$\rho\vec{b} := \rho_A\vec{b}_A + \rho_B\vec{b}_B \ . \qquad (6.13.42)$$

Tällä otetaan huomioon se mahdollisuus, että kenttävoiman intensiteetillä massaa kohti laskettuna ($\vec{b}_A$ ja $\vec{b}_B$) voi olla eri arvot eri komponenteille. Jos esimerkiksi komponentin A hiukkaset ovat sähköisesti varautuneita — vaikkapa ioneita — ja komponentin B hiukkaset eivät ja virtaus tapahtuu sähkökentässä, $\vec{b}_A \neq \vec{b}_B$. Tällaisissa tapauksissa voi juuri tulla kyseeseen huomautuksessa 2 mainittu voimadiffuusio. Jos $\vec{b}_A = \vec{b}_B = \vec{b}$ kuten vaikka vain pelkän painovoiman vaikuttaessa, jolloin $\vec{b} = \vec{g}$, päädytään takaisin tavanomaiseen lausekkeeseen $\rho_A\vec{b} + \rho_B\vec{b} = (\rho_A+\rho_B)\vec{b} = \rho\vec{b}$.

Energiayhtälön vaatimat muutokset ovat seuraavia. Esimerkiksi ulkoisten voimien tehon lausekkeessa (5.6.3) tulee tehdä kaksikomponenttiseoksen yhteydessä yleisessä tapauksessa muutos

$$\rho\vec{b}\cdot\vec{v} := \rho_A\vec{b}_A\cdot\vec{v}_A + \rho_B\vec{b}_B\cdot\vec{v}_B \ , \qquad (6.13.43)$$

joka on ymmärrettävissä edellisen kappaleen perusteella. Taas esimerkiksi yhtälön (5.6.26) oikea puoli tulee täydentää osuudella

$$\rho_A\vec{b}_A\cdot(\vec{v}_A-\vec{v}) + \rho_B\vec{b}_B\cdot(\vec{v}_B-\vec{v}) = \vec{b}_A\cdot\vec{j}_A + \vec{b}_B\cdot\vec{j}_B \ . \qquad (6.13.44)$$

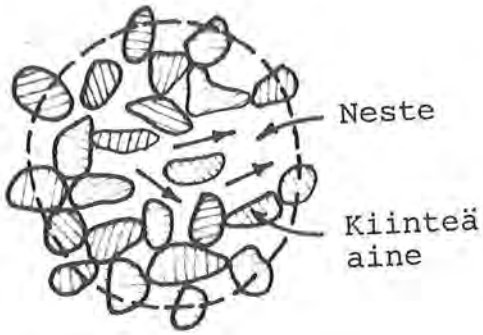
Lämpövuovektorille $\vec{q}$ esitettiin kaavassa (3.4.36) muodostumistapa $\vec{q} = \vec{q}^c + \vec{q}^r$. Monikomponenttiseoksella termi $\vec{q}^c$ on täydennettävä yleisessä tapauksessa lämpötilagradientista (Fourierin laki) johtuvan osuuden lisäksi mm. diffuusiosta riippuvalla osuudella (engl. interdiffusion) [3.5, s. 566]. Tämä ymmärretään kvalitatiivisella tasolla seuraavasti. Eri komponenteilla voi olla niiden massoja kohti mitattuina eri määrät sisäistä energiaa. Diffuusio voi täten aiheuttaa energian nettovirtausta seoksen ainepintojen läpi.

6.14 Suotovirtaus

6.14.1 Puhdas suotovirtaus

Yleistä. Varsinaisen nesteen tai kaasun virtausta huokoisen kiinteän aineen läpi nimitetään yleensä suotovirtaukseksi (engl. seepage flow). Tavallisin esimerkki on veden virtaus maaperässä.

Tarkastelemalla pientä tilavuuden V omaavaa alkiota (kuva 6.14.1) ymmärretään, että virtauksen yksityiskohtainen selvittely vaatisi Navier-Stokesin yhtälöiden ratkaisua geometrisesti hyvin monimutkaisessa alueessa, joka muodostuu kiinteän aineen rajapintojen rajaamasta avaruuden osasta. On täysin selvää, ettei tälläiseen lähestymistapaan ole käytännössä mitään mahdollisuuksia, vaan on siirryttävä jonkinlaisten keskimääräisten suureiden käsittelyyn. Toisin sanoen otetaan jälleen käyttöön kontinuumumalli, mutta eri tasolla kuin aikaisemmin, jolloin molekyyleistä muodostuva diskreetti systeemi korvattiin jatkuvalla mallilla. Jos tyypillinen alkio sisältää huomattavan määrän huokosia, mutta on kuitenkin tehtävän kokonaisalueen mittoihin verrattuna hyvin pieni — ns. "fysikaalinen piste" — voidaan siirtyä uudella, karkeammalla tasolla jälleen kontinuumiteorian käyttöön. Tulemme puhumaan jatkossa vastaavasti huokos- tai maakontinuumista. Jos tehtävänä olisi sen sijaan virtauksen määrittäminen muutaman kivilohkareen ohitse, kontinuumimalli äsken esitetyssä mielessä ei olisi tietenkään enää järkevä.



Kuva 6.14.1 Tilavuusalkio.

Jatkossa keskitytään suotovirtaukseen maaperä- eli lyhyemmin maamekaniikan (engl. soil mechanics) yhteydessä otaksuen virtaavan nesteen olevan vettä. Syntyviä yhtälöitä voidaan kuitenkin soveltaa muissakin tilanteissa.

Suotovirtauksen selvittäminen on tärkeää useissa tehtävissä: Kuinka paljon tietty maapato vuotaa?, miten tietyn öljyesiintymän

pumppaus onnistuu parhaiten? jne. Huokosveden paineen jakautuminen on lisäksi tunnettava maarakenteiden murtumis- ja painuma-analyysien yhteydessä.

Teos [6.34] sisältää perusteellisen klassillisen esityksen suotovirtauksesta.

Eräitä käsitteitä. Käytettävien nimitysten suhteen pyritään noudattamaan mahdollisuuksien mukaan lähdettä [6.35] sekä erityisesti sen suotovirtausta koskevaa lukua [6.36].

Maaperä voidaan ajatella kohdan 6.13 terminologian mukaisesti seokseksi, jonka otaksutaan yleisesti muodostuvan kolmesta komponentista: kiinteä maa-aines, huokosissa oleva vesi sekä ilma. Tarkastellaan tässä jatkossa kuitenkin vain täysin vedellä kyllästettyä maata (engl. fully saturated soil), jolloin kyseessä on siis kaksikomponenttiseos.

Olkoon pienen maanäytteen kokonaistilavuus V, sen sisältämän maa-aineksen (engl. soil) tilavuus V_s, huokosten (engl. void) tilavuus V_v ja veden (engl. water) tilavuus V_w. (Merkinnällisistä mukavuussyistä tässä ei taaskaan käytetä periaatteessa oikeampia tunnuksia ΔV, ΔV_s jne.) Maan huokoisuus (engl. porosity) n ([n] = -) määritellään kaavalla

$$n = \frac{V_v}{V} . \tag{6.14.1}$$

Koska $V = V_s + V_v$ eli $1 = V_s/V + V_v/V$, saadaan myös yhteys

$$1 - n = \frac{V_s}{V} . \tag{6.14.2}$$

Täysin vedellä kyllästetyssä maassa $V_w = V_v$ ja erikoistapauksena siis

$$\frac{V_w}{V} = n . \tag{6.14.3}$$

Olkoon maanäytteen sisältämän maa-aineksen massa m_s ja veden massa m_w. Maamekaniikassa tarkoitetaan maa-aineksen ja veden tiheyksillä $\rho^{(s)}$ ja $\rho^{(w)}$ tavallisesti seuraavaa:

$$\rho^{(s)} = \frac{m_s}{V_s} , \tag{6.14.4}$$

$$\rho^{(w)} = \frac{m_w}{V_w} . \tag{6.14.5}$$

Toisin sanoen kyseessä ovat maa-ainekselle käytetyn terminologian mukaan ns. "kiintotiheydet". Seoksilla taas tavanomaiset tiheyden määritelmät liittyvät "irtotiheyksiin" (vrt. kaavat (6.13.1)):

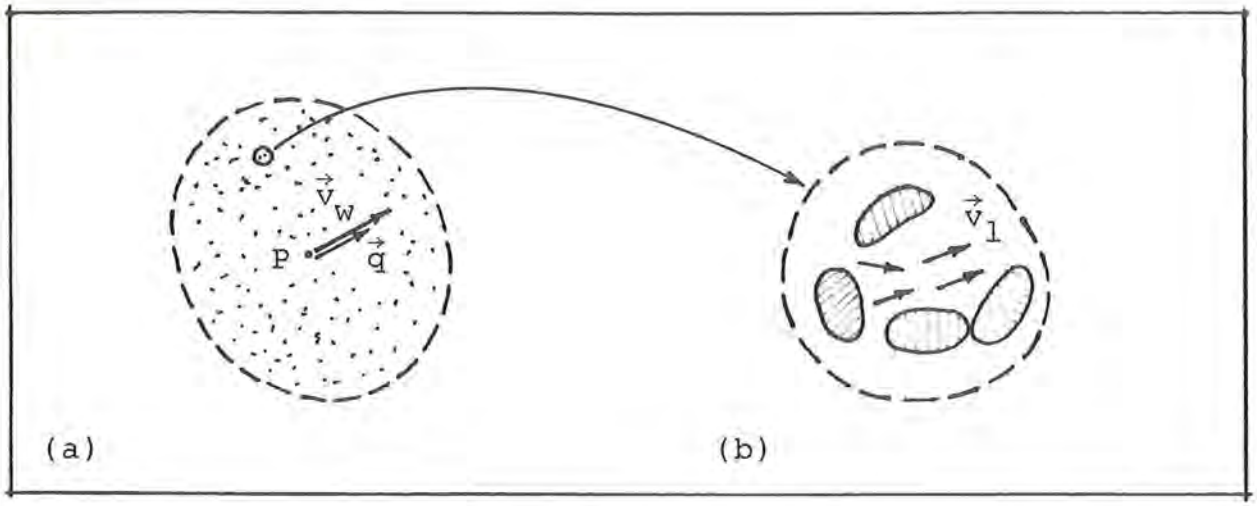
$$\rho_s = \frac{m_s}{V} = \frac{m_s/V_s}{V/V_s} = (1-n)\rho^{(s)} , \tag{6.14.6}$$

$$\rho_w = \frac{m_w}{V} = \frac{m_w/V_w}{V/V_w} = n\rho^{(w)} \tag{6.14.7}$$

Valitsemamme yläindeksein varustetut tiheyden tunnukset eivät ole yleisessä käytössä. Ne ovat tässä kuitenkin ainakin tilapäisesti tarpeen, koska pyrimme hyödyntämään joitakin kohdassa 6.13 valmiiksi johdettuja kaavoja.

Huomautus 1. Suotovirtauksen kannalta huokoisuus määritellään ns. tehokkaana huokoisuutena (engl. effective porosity), jolloin tilavuuteen $V_v = V_w$ lasketaan mukaan vain toistensa kanssa käytännössä virtausyhteydessä olevat huokosalueet. Jatkossa tunnus n viittaa juuri tehokkaaseen huokoisuuteen.

Tarkastellaan tämän jälkeen huokosnesteen nopeuskäsitteitä kuvaa 6.14.2 apuna käyttäen. Kussakin erillisessä huokosessa vallitsee monimutkainen kiemurteleva nesteen lokaalinen nopeusjakautuma $\vec{v}_l(\vec{r},t)$, jossa lokaalisella nopeudella tarkoitetaan tuttua yksikomponenttinesteen yhteydessä käsiteltyä suuretta. Tämä makroskooppinen nopeus ajateltiin määritellyksi kussakin pisteessä periaatteessa pistettä ympäröivän hyvin pienen tilavuuden sisällä olevan suuren molekyylijoukon massakeskiön nopeutena. Tarkastellaan nyt huokoskontinuumia vastaavaan tapaan ja määritellään tietyssä pisteessä P (kuva (a)) huokosnesteen keskimääräinen nopeus eli ns. suotonopeus (engl. effective velocity, true velocity) $\vec{v}_w$ periaatteessa kaavalla (vrt. esimerkin 3.4.1 kaava (a))



Kuva 6.14.2 (a) Suureet $\vec{v}_w$ ja $\vec{q}$. (b) Virtaus yksittäisessä huokosessa.

$$\vec{v}_w = \frac{\int_{V_w} \rho^{(w)} \vec{v}_1 dV}{\int_{V_w} \rho^{(w)} dV} = \frac{\vec{p}_w}{m_w} , \qquad (6.14.8)$$

jossa V_w on pistettä P ympäröivän pienen, riittävän suuren määrän huokosia sisältävän alueen huokosveden tilavuus. Huomattakoon, että suotonopeus $\vec{v}_w$ tulee määriteltyä myös esimerkiksi pisteissä, jotka ovat maa-aineksen sisällä ja joissa siis nestettä ei virtaa ollenkaan. Kaavoja (6.14.8) ja (6.13.6) vertaamalla havaitaan, että suotonopeus on nimenomaan tyypillisen seoskomponentin nopeusmääritelmän mukainen suure.

Määritellään edelleen nopeus $\vec{q}$ kaavalla

$$\boxed{\vec{q} = n\vec{v}_w .} \qquad (6.14.9)$$

Suure $\vec{q}$ on ns. virtaamanopeus (engl. discharge velocity, superficial velocity, specific discharge, specific flux vector).

Suotovirtauksen yhteydessä toimitaan yleensä virtaamanopeuden avulla ja tähän ovat perusteina selvät käytännön syyt. Ajatellaan asian havainnollistamiseksi huokoskontinuumiin tietyllä hetkellä tietty pinta ja pinnan kohtaamat nesteosaset identifioiduik-

si väriaineella. Aikavälinä dt tämä katkonainen värjätty pinta etenee keskimäärin matkan $\vec{v}_w dt$. Toistamalla jälleen kuvan 3.3.13 yhteydessä esitetyn tapainen tarkastelu havaitaan, että saadaan vinopohjaisia sylintereitä, joiden tilavuudet $dV = (\vec{n}\cdot\vec{v}_w)dtdS$. Mutta nämä sylinterit sisältävät kaavan (6.14.3) perusteella huokosnestettä vain tilavuusosuuden ndV. Täten huokosnesteen tilavuusvirran tiheyden eli ns. virtaamatiheyden q_n arvoksi saadaan $n(\vec{n}\cdot\vec{v}_w)$ eli $\vec{n}\cdot n\vec{v}_w$ eli vielä

$$\boxed{q_n = \vec{n}\cdot\vec{q}} \qquad (6.14.10)$$

tai matriisimerkinnöin

$$q_n = \{n\}^T\{q\} \ . \qquad (6.14.10')$$

Käytännössä ollaan yleensä kiinnostuneita tiettyjen pintojen läpi tapahtuvista tilavuusvirroista eli virtaamista (engl. discharge) $\int q_n dS$ (yksikkö m^3s^{-1}). Myös koejärjestelyin pystytään normaalisti mittaamaan helpoiten juuri tiettyyn pieneen pintaosaseen liittyvä virtaama ja siis virtaamatiheys. Jos tämä toistetaan periaatteessa samassa pisteessä kolmessa eri suunnassa, saadaan lisäksi selville vektori $\vec{q}$.

Huomautus 2. Käytämme virtaamanopeudelle samaa tunnusta kuin edellä lämpövuovektorille. Tämä ei aiheuttane tässä yhteydessä sekaannusta. On mielenkiintoista suorittaa kaavojen (6.4.10) ja (5.6.40) merkitysten vertailua.

— — —

Jatkuvuusyhtälö. Emme johda jatkuvuusyhtälöä enää yksityiskohtaisesti uudelleen vaan sovellamme suoraan kaavaa (6.13.27). Nestekomponenttia koskeva jatkuvuusyhtälö on siis (otetaan $r_w = 0$)

$$\frac{\partial\rho_w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho_w\vec{v}_w) = 0 \qquad (6.14.11)$$

eli kaavojen (6.14.7) ja (6.14.9) perusteella

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(n\rho^{(w)}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}) = 0 \ .} \qquad (6.14.12)$$

Usein voidaan otaksua, että maa-aines eli sen rakenteellista toimintaa korostettaessa ns. raerunko (engl. soil skeleton) ei liiku eikä siis muuta muotoaan, jolloin $\partial n/\partial t = 0$. Jos lisäksi otaksutaan vakiotiheysneste ($\partial\rho^{(w)}/\partial t = 0$, $\vec{\nabla}\rho^{(w)} = \vec{0}$), päädytään puhtaan suotovirtauksen tavanomaiseen jatkuvuusyhtälöön

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = 0} \qquad (6.14.13)$$

eli

$$\{\nabla\}^T\{q\} = 0 \qquad (6.14.13')$$

eli

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \qquad (6.14.13'')$$

Kyseessä on siis virtaamanopeuden suhteen lähteetön eli kokoonpuristumaton virtaus.

Darcyn laki. Kussakin huokosessa neste liikkuu luonnollisestikin paikallista liikeyhtälöä — kuten yhtälö (6.4.1) — noudattaen. Huokoskontinuumille sopiva keskimääräinen yhtälö saadaan teoriassa ottamalla tyyppiä $\int (\quad) dV/V$ olevat keskiarvot yhtälön (6.4.1) eri termeistä. Kyseessä on siis samantapainen operaatio kuin turbulenttisen virtauksen aikakeskiarvojen ottamisessa; nyt vain käsitellään keskiarvoa paikan suhteen. Tätä ajattelua on selostettu mm. lähteessä [6.37, s. 92]. Lopputuloksena syntyy puoliempiirinen yhteys, ns. Darcyn laki (engl. law of Darcy) (H. Darcy v. 1856)

$$\boxed{\vec{q} = -\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}p_w - \rho^{(w)}\vec{b}_w)} \qquad (6.14.14)$$

eli matriisimerkinnöin

$$\{q\} = -[k](\{\nabla\}p_w - \rho^{(w)}\{b_w\}) \ . \qquad (6.14.14')$$

Näissä kaavoissa p_w on huokosnesteessä vallitseva paine, ns. huokospaine (engl. pore pressure) tai pitemmin sanottuna huokosnesteen paine. Nimitämme suuretta $\overleftrightarrow{k}$ ($[k]$) tässä läpäisevyystensoriksi (-matriisiksi) ($[\overleftrightarrow{k}] = \mathrm{Pa}^{-1}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$). Huomautettakoon kuitenkin heti, että vastaavilla englanninkielisillä termeillä "hydraulic conductivity" tai "coefficient of permeability" tarkoitetaan usein kuitenkin yksikön ms^{-1} omaavia suureita. Darcyn lakiin liittyvät esitysmuodot ja nimitykset vaihtelevat nimittäin melkoisesti alan kirjallisuudessa. Suureet $\overleftrightarrow{k}$ ja $[k]$ ovat symmetrisiä samaan tapaan kuin oli asian laita Fourierin lämmönjohtumislain (4.2.55) lämmönjohtavuustensorin (-matriisin) tapauksessa.

Usein suure $\overleftrightarrow{k}$ esitetään muodossa

$$\overleftrightarrow{k} = \frac{\overleftrightarrow{\kappa}}{\mu} \ , \qquad (6.14.15)$$

jossa $\overleftrightarrow{\kappa}$ on ko. huokoisen aineen ns. permeabiliteettitensori (engl. (intrinsic) permeability tensor) ($[\overleftrightarrow{\kappa}] = \mathrm{m}^2$) ja μ on huokosnesteen dynaaminen viskositeetti ($[\mu] = \mathrm{Pas}$). Permeabiliteetin arvon otaksutaan riippuvan vain itse huokoisen kontinuumin ominaisuuksista, kuten huokosten kokojakautumasta jne.

Tavallisesti tilavuusvoimat aiheutuvat käytännössä painovoimasta, jolloin siis

$$\vec{b}_w = \vec{g} \qquad (6.14.16)$$

eli

$$\{b_w\} = \{g\} \ . \qquad (6.14.16')$$

Jos vielä huokosneste otaksutaan vakiotiheysnesteeksi, kaava (6.14.14) voidaan esittää myös muodossa

$$\vec{q} = -\rho^{(w)} g \overleftrightarrow{k} \cdot \vec{\nabla}\Phi \ , \qquad (6.14.17)$$

jossa suure

$$\Phi = \frac{p_w}{\rho^{(w)} g} + h \qquad (6.14.18)$$

on nimeltään ns. hydraulinen korkeus eli hydraulinen potentiaali eli pietsometrinen korkeus (engl. hydraulic head, hydraulic potential, pietsometric head) ($[\Phi] = m$). Lausekkeen (6.14.18) termien merkitys ymmärretään kuvan 6.4.2 perusteella; ks. lisäksi kaava (6.4.7). Kaava (6.14.17) kirjoitetaan monasti myös muotoon

$$\vec{q} = -\overleftrightarrow{K}\cdot\vec{\nabla}\Phi \ , \qquad (6.14.19)$$

ja myös suuretta $\overleftrightarrow{K} = \rho^{(w)} g \overleftrightarrow{k}$ nimitetään läpäisevyys- tai johtavuustensoriksi. Lisähämmennystä saattaa aiheutua vielä siitä, että usein myös paineen dimension omaavia suureita nimitetään englanninkielisessä kirjallisuudessa termillä "head".

Isotrooppisessa tapauksessa $\overleftrightarrow{k} = k\overleftrightarrow{I}$, $\overleftrightarrow{\kappa} = \kappa\overleftrightarrow{I}$ tai $\overleftrightarrow{K} = K\overleftrightarrow{I}$ ja esimerkiksi kaavojen (6.14.14) ja (6.14.19) sijasta saadaan esitykset

$$\vec{q} = -k(\vec{\nabla}p_w - \rho^{(w)}\vec{b}_w) \qquad (6.14.20)$$

ja

$$\vec{q} = -K\nabla\Phi \ . \qquad (6.14.21)$$

Jos edelleen otetaan paikan suhteen homogeeninen tapaus, kaava (6.4.21) saadaan muotoon

$$\vec{q} = -\vec{\nabla}(K\Phi) \ . \qquad (6.14.22)$$

Suuretta $K\Phi$ tai $-K\Phi$ voidaan tällöin pitää esityksen (6.3.3) mukaisesti virtaamanopeuden $\vec{q}$ nopeuspotentiaalina ja kyseessä on siis pyörteetön virtaus. Yhtälön (6.14.13) mukaan virtaus on myös lähteetön. Kaavan (6.3.6) perusteella päädytään siis suuretta Φ koskevaan tuttuun Laplacen differentiaaliyhtälöön.

Äskeinen selittänee, miksi etenkin vanhempi kirjallisuus näyttää pitävän juuri hydraulista korkeutta Φ mielellään perustuntemattomana. Hydraulista korkeutta ei voida kuitenkaan määritellä, jos huokosneste on esimerkiksi seos tai jos voimakenttä ei satu olemaan jostain syystä pyörteetön. Yleisyyden saavuttamiseksi

otamme tämän vuoksi Darcyn lain käyttöön muodossa (6.14.14) pitäen huokospainetta p_w perustuntemattomana. Tämä valinta ei tee elämää vaikeammaksi numeerisia menetelmiä sovellettaessa, vaikka yhtälöt hieman pitenevätkin. Lisäksi huokospaine omaa suureena enemmän suoraa fysikaalista merkitystä kuin hydraulinen korkeus.

Darcyn lineaarista muotoa oleva laki voidaan osittain motivoida liikeyhtälöiden (6.4.1) keskiarvomuotona, kun kyseessä on hidas eli ryömivä virtaus, jolloin epälineaariset hitausvoimatermit häviävät. Jos huokosneste lisäksi otaksutaan Newtonin nesteeksi, lopullisen yhteyden voidaan odottaa olevan lineaarinen. Joka tapauksessa Darcyn laki on käsiteltävä vain erääksi konstitutiiviseksi yhteydeksi, jota ei tule soveltaa oman pätemisalueensa ulkopuolella. Esimerkiksi lähde [6.34] sisältää tähän liittyviä ohjeita. Kun esimerkiksi virtauksen Reynoldsin luku (karakteristinen pituus liittyy huokosten kokoon) ylittää tietyn arvon, virtaamanopeuden ja huokospaineen gradientin riippuvuus toisistaan lakkaa olemasta lineaarinen. Tämä on ymmärrettävää, koska hitausvoimilla alkaa tällöin olla merkitystä.

Lopulliset yhtälöt. Vallitsevaksi formulaatioksi valitaan tavallisesti esitys, jossa virtaamanopeus $\vec{q}$ on eliminoitu ja huokospaine $p_w(x,y,z,t)$ esiintyy perustuntemattomana. Toisin sanoen Darcyn lain mukainen virtaamanopeuden lauseke (6.14.14) sijoitetaan jatkuvuusyhtälöön (6.14.13). Käytetään heti matriisimerkintöjä, jolloin saadaan kenttäyhtälö

$$\boxed{\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}p_w) + S = 0 \ ,} \qquad (6.14.23)$$

jossa lähdetermi (vrt. kaava (6.11.25))

$$S = -\{\nabla\}^T([k]\rho^{(w)}\{b_w\}) \ . \qquad (6.14.24)$$

Nimitämme saatua kenttäyhtälöä fysikaalisen merkityksensä perusteella tässä suotovirtausyhtälöksi. Havaitaan, että kyseessä on jälleen kvasiharmoninen differentiaaliyhtälö.

Reunaehdot voivat esiintyä lähinnä seuraavissa muodoissa:

Annettu huokosnesteen paine

$$\boxed{p_w = \bar{p}_w} \qquad S_p\text{:llä} \; . \tag{6.14.25}$$

Annettu virtaamatiheys

$$\boxed{q_n = \bar{q}_n} \qquad S_q\text{:lla} \; . \tag{6.14.26}$$

Vapaa huokosnesteen pinta

$$\boxed{p_w = p_a} \qquad S_f\text{:llä} \tag{6.14.27}$$

ja lisäksi pinnan asema on määritettävä osana ratkaisua. Suure p_a tarkoittaa annettua ilmanpaineen arvoa. Osat S_p, S_q ja S_f muodostavat yhdessä koko tarkasteltavan alueen reunan. Annetun virtaamatiheyden reunaehto on huokospaineen avulla lausuttuna (vrt. kaava (6.11.28))

$$-\{n\}^T[k]\{\nabla\}p_w = \bar{q}_n^* \; , \tag{6.14.28}$$

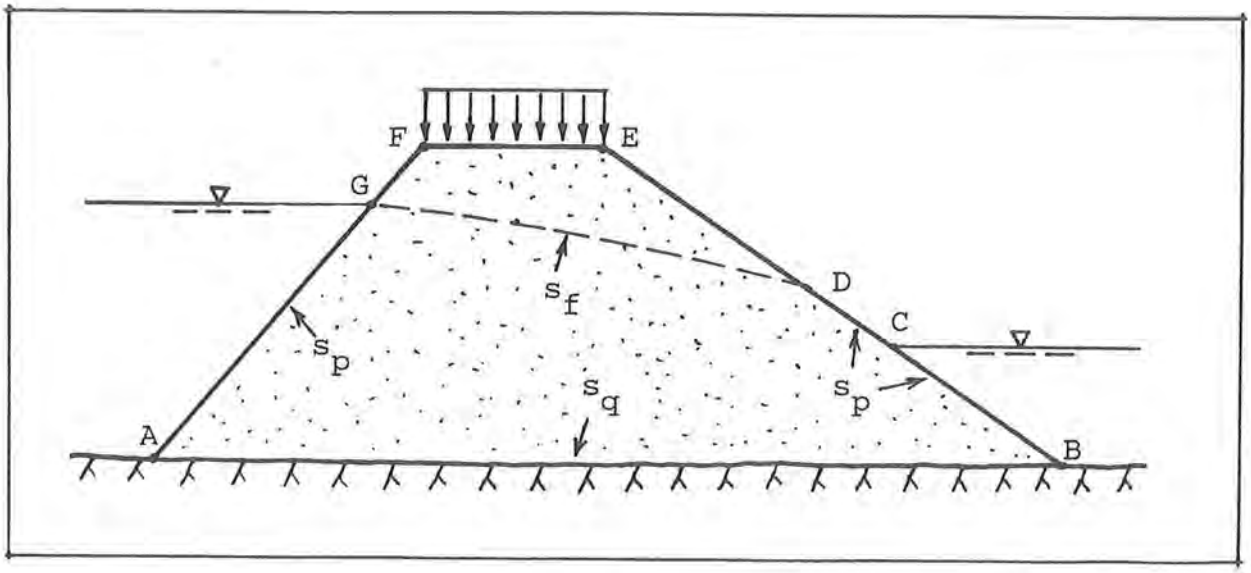
jossa annettu termi

$$\bar{q}_n^* = \bar{q}_n - \{n\}^T[k]\rho^{(w)}\{b_w\} \; . \tag{6.14.29}$$

Kuva 6.14.3 toimii reunaehtojen demonstraatioesimerkkinä. Tarkasteltavan tasoalueen ABCDEFGA reuna AB otaksutaan läpäisemättömäksi — siis $q_n = 0$ — joten kyseessä on reunatyyppi s_q. Osat BC ja GA rajoittuvat veteen ja niillä tunnetaan siten vallitseva paine. Osa DG on vapaa huokosveden pinta, jonka tarkka asema on etukäteen tuntematon. Osalla CD virtaus purkautuu ulkoilmaan, joten paine on jälleen annettu.

Jos tehtävässä ei esiinny vapaata huokosnesteen pintaa, numeerisen ratkaisun pohjana voidaan taas käyttää kvasiharmoniseen yhtälöön standardireunaehtoineen liittyvää variaatioperiaatetta

$$\boxed{\delta\Pi = 0 \; ,} \tag{6.14.30}$$



Kuva 6.14.3 Suotovirtaus maapadossa.

jossa funktionaali (ks. lauseke (6.8.68))

$$\Pi(p_w) = \frac{1}{2}\int_V (\{\nabla\}p_w)^T[k](\{\nabla\}p_w)dV +$$

$$- \int_V Sp_w dV + \int_{S_q} \bar{q}_n^* p_w dS \ . \qquad (6.14.31)$$

Luvallisen argumenttifunktion p_w tulee toteuttaa oleellinen reunaehto $p_w = \bar{p}_w$ reunan osalla S_p.

Aivan kuten voiteluvirtauksen yhteydessä oli esillä, funktionaalin lähdetermin sisältävä osuus on usein mukavampaa esittää osittaisintegrointia soveltamalla saadussa muodossa. Näin toimien syntyy vaihtoehtoinen lauseke (vrt. kohdan 6.11 huomautus 3)

$$\Pi(p_w) = \frac{1}{2}\int_V (\{\nabla\}p_w)^T[k](\{\nabla\}p_w)dV +$$

$$- \int_V (\{\nabla\}p_w)^T[k]\rho^{(w)}\{b_w\}dV +$$

$$+ \int_{S_q} \bar{q}_n p_w dS \ . \qquad (6.14.31)$$

Vapaan huokosnesteen pinnan kinemaattinen reunaehto merkitsee, että pinnan siirtymänopeuden w_n pinnan normaalin suunnassa (ks. kohta 6.7) tulee olla yhtä suuri kuin suotonopeuskentästä reunalla lasketun normaalikomponentin $(\vec{v}_w)_n = q_n/n$. Jos vapaaseen pintaan esimerkiksi saapuu ylhäältä käsin ns. vajovettä, reunaehto on täydennettävä yhtälön (6.7.13) esittämässä hengessä. Stationaarisessa tapauksessa pinnan siirtymänopeuden tulee hävitä.

Vapaan pinnan kinemaattisesta reunaehdosta tulee huokospaineen avulla lausuttuna erittäin komplisoitu. Jos ja kuten tavallista ratkaisua yritetään löytää iteratiivisesti, vapaata pintaa voidaan kuitenkin pitää yksinkertaisesti reunan osana S_q, jonka asema (stationaarisessa tapauksessa) tai liike (epästationaarisessa tapauksessa) tulee sovittaa sellaiseksi, että reunalla $p_w = p_a$.

Esimerkkinä epästationaarisesta probleemasta voisi olla kuvaan 6.14.3 liittyen vaikkapa tapaus, jossa yläveden pintaa laskettaisiin alaspäin tietyllä nopeudella tietty määrä.

Huomautus 3. Tässä esitetty suotovirtausformulaatio on epästationaarisessakin tapauksessa jälleen — ks. kohdan 6.11 huomautus — kullakin ajan hetkellä puhdas reuna-arvotehtävä.

— — —

6.14.2 Konsolidaatio

Yleistä. Edellä esitetyissä tarkasteluissa maaperän mahdollinen liike suotovirtauksen yhteydessä on jätetty täysin huomiotta ja tässä mielessä on puhuttu puhtaasta suotovirtauksesta. Kun raerungon liike otetaan huomioon, syntyy yleisessä tapauksessa yhdistetty kiinteän aineen (raerunko) ja neste- (huokosneste) mekaniikan tehtävä. Termillä konsolidaatio (engl. consolidation) tarkoitetaan maamekaniikassa juuri maaperän hitaita ajan mukana tapahtuvia liikkeitä, jotka johtuvat pääasiassa huokosveden paineen uudelleenjakautumisesta tietyn kuormitusmuutoksen johdosta.

Jännitykset esitetään maamekaniikassa yleensä "Terzaghin hajotelmana"

$$\boxed{\overleftrightarrow{\sigma} = \overleftrightarrow{\sigma}' - p_w \overleftrightarrow{I}} \tag{6.14.33}$$

eli matriisimerkinnöin

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} - \{p_w\} = \{\sigma'\} - \{m\}p_w \tag{6.14.33'}$$

eli komponenteittain

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma'_x - p_w , & \tau_{yz} &= \tau'_{yz} , \\ \sigma_y &= \sigma'_y - p_w , & \tau_{zx} &= \tau'_{zx} , \\ \sigma_z &= \sigma'_z - p_w , & \tau_{xy} &= \tau'_{xy} . \end{aligned}\right\} \tag{6.14.33''}$$

Esitys muistuttaa esimerkiksi kaavojen (4.2.42) ja (4.2.43) ilmaisemaa jännitysten jakoa deviaatio-osaan ja paineosaan. Erona on, että tässä p_w ei ole yhtä kuin paine $p = -(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$. (Olemme esittäneet äskeiset kaavat kontinuumimekaniikan tavanomaisia merkkisääntöjä noudattaen. Maamekaniikassa käytetään kuitenkin jännityksille $\overleftrightarrow{\sigma}$ ja $\overleftrightarrow{\sigma}'$ hyvin usein merkkisääntöjä, joissa puristava normaalijännitys otetaan positiiviseksi. Tämä siksi, että maaperä on maan oman painon johdosta valmiiksi puristetussa tilassa ja halutaan siis välttää negatiivisten lukujen käyttöä.)

Jännitystä $\overleftrightarrow{\sigma}'$ nimitetään tehokkaaksi jännitykseksi (engl. effective stress). Hajotelman (6.14.33) tärkeys perustuu ns. Terzaghin tehokkaan jännityksen periaatteeseen (engl. Terzaghi's principle of effective stress): Raerungon kokemat muodonmuutokset riippuvat vain tehokkaasta jännityksestä $\overleftrightarrow{\sigma}'$ eivätkä kokonaisjännityksestä $\overleftrightarrow{\sigma}$.

Terzaghin periaate on approksimaatio, jonka on havaittu olevan useimmiten hyvässä sopusoinnussa todellisuuden kanssa. Tehokas jännitys kuvaa keskimääräisessä mielessä rakeiden välityksellä siirtyviä kosketusvoimia. On muistettava jälleen, että maamekaniikassa jännityksen $\vec{t} = \Delta\vec{F}/\Delta S$ mielekäs määrittely vaatii, että ΔS on pieni, muttei liian pieni.

Koska raerungon siirtymistä $\vec{u} \equiv \vec{u}_s$ ollaan kiinnostuneita — esimerkiksi tietyn rakenteen perustukset lepäävät juuri raerungon varassa ja saavat siten myös vastaavat siirtymät — raerungolle tullaan lopuksi käyttämään Lagrangen esitystä eli $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}^{\,o},t)$. Tarvittavia yhtälöitä johdettaessa käytetään kuitenkin myös raerungolle aluksi Eulerin esitystä ja operoidaan raerungon nopeuden $\vec{v}_s(\vec{r},t)$ avulla.

Virtaamanopeus $\vec{q}$ määriteltiin edellä kiinteän koordinaatiston eli oikeastaan paikoillaan pysyvän raerungon suhteen. Kun raerunko liikkuu, Darcyn laissa täytyy toimia ns. suhteellisen virtaamanopeuden $\vec{q}_r$ avulla, joka on määritelty yhteyden

$$\boxed{\vec{q} = n\vec{v}_s + \vec{q}_r} \tag{6.14.34}$$

eli

$$\{q\} = n\{v_s\} + \{q_r\} \tag{6.14.34'}$$

avulla. Tämä yhteys — joka muistuttaa esimerkiksi kaavan (6.13.15) esitystä — sanoo, että virtaamanopeus kiinteän koordinaatiston suhteen muodostuu raerungon liikkeen johdosta kertyvästä osuudesta $n\vec{v}_s$ plus virtaamanopeudesta $\vec{q}_r$ itse raerungon suhteen. Kerroin n syntyy siitä, että pienessä raerungon mukana liikkuvassa tilavuudessa V on nestettä tilavuus nV (ks. kaava (6.14.3)).

Darcyn laki lausutaan nyt muodossa

$$\boxed{\vec{q}_r = -\overleftrightarrow{k}\cdot(\vec{\nabla}p_w-\rho^{(w)}\vec{b}_w)} \tag{6.14.35}$$

eli

$$\{q_r\} = -[k](\{\nabla\}p_w-\rho^{(w)}\{b_w\}) \ . \tag{6.14.35'}$$

<u>Jatkuvuusyhtälö</u>. Nestekomponentin jatkuvuusyhtälö (6.14.12) pätee edelleen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\rho^{(w)}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}) = 0 \ . \tag{6.14.36}$$

Sijoittamalla tähän esitys (6.14.34) saadaan muoto

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\rho^{(w)}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}_r) + \vec{\nabla}\cdot(n\rho^{(w)}\vec{v}_s) = 0 \ . \tag{6.14.37}$$

Tämän kehittäminen säännön [3.2, s. 43]

$$\vec{\nabla}\cdot(u\vec{v}) = \vec{\nabla}u\cdot\vec{v} + u\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{6.14.38}$$

mukaan antaa ensin

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}_r) + \frac{\partial}{\partial t}(n\rho^{(w)}) + \vec{v}_s\cdot\vec{\nabla}(n\rho^{(w)}) + n\rho^{(w)}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s = 0 \tag{6.14.39}$$

eli

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}_r) + \frac{D^{(s)}}{Dt}(n\rho^{(w)}) + n\rho^{(w)}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s = 0 \ . \tag{6.14.40}$$

On käytetty lyhennysmerkintää

$$\frac{D^{(s)}(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\vec{\nabla}(\quad) \ . \tag{6.14.41}$$

Kyseessä on siis aineellisen aikaderivaatan lausekkeen (3.3.61)

sovellutus koskemaan raerungon mukana liikkuvan havaitsijan mittaamaa muutosnopeutta (vrt. myös esimerkin 3.3.2 kaava (c)). Koska seoksilla esiintyy useita nopeuskäsitteitä, joudutaan siis joskus käyttämään kaavan (6.14.40) tapaisia merkintöjä, jotka eivät ole kuitenkaan mitenkään vakiintuneita.

Kehitetään vielä yhtälössä (6.14.40) esiintyvä ainederivaatan lauseke tulon derivoimissäännön perusteella, jolloin nestekomponentin jatkuvuusyhtälöksi saadaan vihdoin

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}_r) + n\,\frac{D^{(s)}\rho^{(w)}}{Dt} + \rho^{(w)}\,\frac{D^{(s)}n}{Dt} + n\rho^{(w)}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s = 0\ .} \tag{6.14.42}$$

Maa-aineskomponentin jatkuvuusyhtälö on kaavan (6.13.27) tai (6.13.29) mukaisesti

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho_s\vec{v}_s) = 0 \tag{6.14.43}$$

eli yhteyden (6.14.6) perusteella

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-n)\rho^{(s)}] + \vec{\nabla}\cdot[(1-n)\rho^{(s)}\vec{v}_s] = 0\ . \tag{6.14.44}$$

Tämän käsittely kaavan (6.14.38) avulla antaa ensin muodon

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-n)\rho^{(s)}] + \vec{v}_s\cdot\vec{\nabla}[(1-n)\rho^{(s)}] + (1-n)\rho^{(s)}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s = 0 \tag{6.14.45}$$

eli

$$\frac{D^{(s)}}{Dt}[(1-n)\rho^{(s)}] + (1-n)\rho^{(s)}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s = 0\ . \tag{6.14.46}$$

Kehittämällä ainederivaatan lauseke vielä tulon derivoimissäännön perusteella saadaan lopuksi raerungon jatkuvuusyhtälö

$$\boxed{(1-n)\frac{D^{(s)}\rho^{(s)}}{Dt} - \rho^{(s)}\,\frac{D^{(s)}n}{Dt} + (1-n)\rho^{(s)}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s = 0\ .} \tag{6.14.47}$$

Koska tulemme käsittelemään raerunkoa lopuksi siirtymien avul-

la, emme tarvitse tätä jatkuvuusyhtälöä suoranaisesti. Sitä voidaan kuitenkin hyödyntää derivaatan $D^{(s)}n/Dt$ eliminoinnissa huokosnesteen jatkuvuusyhtälöstä (6.14.42). Yhtälöstä (6.14.47) saadaan lauseke

$$\frac{D^{(s)}n}{Dt} = (1-n)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s + \frac{1}{\rho^{(s)}}\frac{D^{(s)}\rho^{(s)}}{Dt}) \ . \qquad (6.14.48)$$

Sen sijoitus yhtälöön (6.14.42) antaa vielä eksaktin huokosnesteen jatkuvuusyhtälön

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}_r) + n\frac{D^{(s)}\rho^{(w)}}{Dt} + \rho^{(w)}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s + (1-n)\frac{\rho^{(w)}}{\rho^{(s)}}\frac{D^{(s)}\rho^{(s)}}{Dt} = 0.} \qquad (6.14.49)$$

Tätä yhtälöä yksinkertaistetaan käytännössä tietyin askelin. Olemme edenneet tähän asti soveltaen pelkästään Eulerin esitystä operoiden raerungon suhteen sen nopeuskentän $\vec{v}_s(\vec{r},t)$ avulla. Kun otetaan käyttöön raerungon siirtymä $\vec{u}(\vec{r}^o,t)$, asiat mutkistuvat yleisessä tapauksessa huomattavasti, koska $\vec{r} = \vec{r}^o + \vec{u}$. Tavanomaisissa tilanteissa otaksutaan kuitenkin pienten siirtymien teoria — raerungon, ei sen sijaan nesteen suhteen —, jolloin $\vec{r} \approx \vec{r}^o$. Kun koordinaateille käytetään jatkossa yksiä tunnuksia x,y ja z, ne tulee nyt ajatella nesteen kannalta edelleen Eulerin koordinaateiksi, mutta raerungon kannalta Lagrangen koordinaateiksi. Täysin uskottava käsittely tulee raskaaksi. Esimerkiksi pelkkä merkintä $\partial(\ )/\partial t$ ei sano vielä kaikkea. Raerungon suureelle kyseessä on ainederivaatta, huokosnesteen suureelle lokaalinen derivaatta. Täsmällinen esitys vaatisi aina lisäksi mainitsemaan, mitä pidetään riippumattomina muuttujina. Koetetaan silti suorittaa tarvittavat askeleet kohtuullisen perusteellisesti.

Kohdan 4.3 huomautuksen ja kohdan 5.3 huomautuksen 2 perusteella dilataationopeus

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_s \approx \dot{\varepsilon}_V = \frac{D^{(s)}\varepsilon_V}{Dt} = \frac{\partial\varepsilon_V}{\partial t} \ , \qquad (6.14.50)$$

jossa dilataatio

$$\varepsilon_V = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \ . \qquad (6.14.51)$$

Nesteen tiheyden raerungon suhteen lasketun ainederivaatan lausekkeessa voidaan konvektiivinen osuus $\vec{v}_s\cdot\vec{\nabla}\rho^{(w)}$ jättää pienenä pois:

$$\frac{D^{(s)}\rho^{(w)}}{Dt} \approx \frac{\partial\rho^{(w)}}{\partial t} \ . \qquad (6.14.52)$$

Hyvin usein otaksutaan edelleen, että maa-aineksen erilliset rakeet eivät muuta sanottavasti tilavuuttaan raerungon liikkuessa eli toisin sanoen

$$\frac{D^{(s)}\rho^{(s)}}{Dt} \approx 0 \ . \qquad (6.14.53)$$

Tulokseen (6.14.52) osittain liittyen otaksutaan usein lisäksi, että $\rho^{(w)}$ muuttuu vain lievästi paikan suhteen: $\vec{\nabla}\rho^{(w)} \approx \vec{0}$, jolloin yhtälön (6.14.38) perusteella

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho^{(w)}\vec{q}_r) \approx \rho^{(w)}\vec{\nabla}\cdot\vec{q}_r \ . \qquad (6.14.54)$$

Huokosnesteen jatkuvuusyhtälö saa nämä yksinkertaistukset huomioon ottaen vielä puhtaasti kinemaattisen muodon

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{q}_r + \frac{n}{\rho^{(w)}}\frac{\partial\rho^{(w)}}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon_V}{\partial t} = 0 \ .} \qquad (6.14.55)$$

Vakiotiheysnesteellä $\partial\rho^{(w)}/\partial t = 0$. Jos lisäksi siirtymät eivät riipu enää ajasta, $\partial\varepsilon_V/\partial t = 0$, $\vec{q}_r \to \vec{q}$ ja päädytään tavanomaiseen puhtaan suotovirtauksen yhtälöön (6.14.13).

<u>Raerungon tasapainoyhtälö</u>. Maakontinuumin liikeyhtälö - tai oikeastaan tasapainoyhtälö, koska hitausvoimia ei oteta tässä huomioon - on pienten siirtymien teoriassa esimerkiksi yhtälömuotoa (4.4.5''') käyttäen

$$\{f\} + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma\} = \{0\} \ , \tag{6.14.56}$$

jossa (vrt. kaava (6.13.42))

$$\{f\} = \rho_s\{b_s\} + \rho_w\{b_w\} \ . \tag{6.14.57}$$

Tavallisimmin tilavuusvoimat johtuvat painovoimasta, jolloin

$$\{f\} = \rho\{g\} \ , \tag{6.14.58}$$

jossa $\rho = \rho_s + \rho_w$.

Terzaghin hajotelman (6.14.33') sijoitus yhtälöön (6.14.56) antaa muodon

$$\boxed{[{}_f\partial_\sigma]\{\sigma'\} - \{\nabla\}p_w + \{f\} = \{0\} \ ,} \tag{6.14.59}$$

jota voidaan nimittää vaikkapa raerungon tasapainoyhtälöksi. Tämä nimitys on kylläkin hieman harhaanjohtava, koska kyseessä on tarkasti ottaen raerungon ja huokosnesteen muodostaman seoksen tasapainoyhtälö. Äskeinen terminologia sallittaneen kuitenkin, koska tasapainoyhtälössä esiintyvät nimenomaan raerungon kokemat tehokkaat jännitykset. Havaitaan, että huokospaineen miinusmerkkinen gradientti toimii tehokkaiden jännitysten kannalta eräänlaisena lisäkuormitusterminä. Huokospaineen jakautuman tunteminen on täten ymmärrettävästi oleellisen tärkeää.

<u>Lopulliset yhtälöt</u>. Kenttäyhtälöiden lähtökohtina olkoot huokosnesteen jatkuvuusyhtälö (6.14.55) ja raerungon tasapainoyhtälöt (6.14.59); yhteensä siis neljä kappaletta. Tuntemattomia suureita on vielä liikaa ja systeemiä onkin täydennettävä konstitutiivisilla yhteyksillä. Pyritään formulaatioon, jossa perustuntemattomiksi jäävät huokospaine p_w ja raerungon siirtymä $\{u\}$.

Jatkuvuusyhtälössä esiintyy termi $\partial\rho^{(w)}/\partial t$. Kaavan (4.2.3) perusteella voidaan otaksua konstitutiivinen yhteys $d\rho^{(w)} = \rho^{(w)}\kappa_w dp_w$, jossa κ_w on nesteen kokoonpuristuvuus, joka riippuu prosessista. Normaalisti kyseessä lienee isoterminen tapaus; vrt. myös kaavat (5.2.11) ja (5.2.12). Täten

$$\frac{\partial \rho^{(w)}}{\partial t} = \rho^{(w)} \kappa_w \frac{\partial p_w}{\partial t} , \tag{6.14.60}$$

jos neste voidaan otaksua homogeeniseksi. Kirjataan näin syntyvä jatkuvuusyhtälö vielä tähän matriisimerkintöjä käyttäen:

$$\boxed{\{\nabla\}^T\{q_r\} + n\kappa_w \frac{\partial p_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\}^T\{u\} = 0 .} \tag{6.14.61}$$

Vakiotiheysnesteen otaksuman yhteydessä termi $n\kappa_w \partial p_w/\partial t$ jää pois.

Seuraava tavanomainen konstitutiivinen yhteys on jo esillä ollut Darcyn laki (6.14.35) suhteellista virtaamanopeutta koskevana.

Raerungon jännitys-venymäyhteydet ovat tunnetusti hyvin komplisoituja, visko- ja plastisuusteorian käsitteistön käyttöä vaativia riippuvuuksia. Tässä esityksessä rajoitutaan melko epärealistiseen lineaarisesti kimmoisen raerungon malliin, jolloin kaava (4.2.24) antaa yhteyden (alkuvenymän on otaksuttu häviävän)

$$\{\sigma'\} = [D']\{\varepsilon\} + \{\sigma_o'\} , \tag{6.14.62}$$

jossa $[D']$ on raerunkokontinuumin jännitys-venymämatriisi ja $\{\varepsilon\} = [{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}$.

Jatkuvuusyhtälö ja raerungon tasapainoyhtälö ovat nyt kaikki edellä esitetyt yhteydet huomioonottaen

$$\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}p_w) - n\kappa_w \frac{\partial p_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\}^T\{u\} + S = 0 , \tag{6.4.63}$$

$$[{}_f\partial_\sigma]([D'][{}_\varepsilon\partial_u]\{u\}) - \{\nabla\}p_w + \{S\} = \{0\} , \tag{6.4.64}$$

joissa lähdetermit

$$S = -\{\nabla\}^T([k]\rho^{(w)}\{b_w\}) , \tag{6.14.65}$$

$$\{S\} = \{f\} + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma_o'\} . \tag{6.14.66}$$

Nämä yhtälöt esittävät suureiden p_w ja $\{u\}$ välistä kytkettyä probleemaa.

Suotovirtauksen suhteen reunaehdot ovat samat kuin kohdassa 6.14.1, kun vain $\vec{q} \to \vec{q}_r$. Konsolidaation suhteen esiintyvät tavanomaiset annettua siirtymää ja annettua traktiota koskevat ehdot reunan osilla S_u ja S_t, jotka yhdessä muodostavat koko reunan. Huomattakoon, että traktiot liittyvät nimenomaan kokonaisjännitykseen eivätkä tehokkaaseen jännitykseen. Kuvan 6.14.3 esimerkkitapauksessa osa AB voisi olla lähinnä tyyppiä s_u, jolla $\{u\} = \{\bar{u}\} \approx \{0\}$. Loppuosa reunaa olisi tyyppiä s_t. Esimerkiksi osalla GA kyseessä olisi pintaa vastaan kohtisuoraan vaikuttava traktio, jonka itseisarvo olisi vallitsevan vedenpaineen mukainen.

Korostettakoon, että kuvan 6.14.3 maapato on tässä esimerkkinä vain demonstraatiomielessä. Konsolidaation huomioonotto on käytännössä tärkeää savimaisissa kerrostumissa, jollaisia maapadot eivät yleensä ole.

Huomautus 1. Vallitsevat yhtälöt yksinkertaistuvat yleensä, jos operoidaan muutosten $\Delta p_w = p_w - p_w^o$, $\Delta\{u\} = \{u\} - \{u^o\}$ jne. avulla.

Otaksutaan, että ennen konsolidaation aiheuttavaa kuormituslisäystä vallitsee stationaarinen tila, jota pidetään referenssieli alkutilana, joihin kuuluviin muuttujien arvoihin viitataan merkinnöillä $(\ )^o$. Yhtälöt (6.14.63) ja (6.14.64) ovat tällöin seuraavaa muotoa

$$\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}p_w^o) - \{\nabla\}^T([k]\rho^{(w)}\{b_w\}) = 0 \ , \qquad (6.14.67)$$

$$[{}_f\partial_\sigma]([D'][{}_\varepsilon\partial_u]\{{}_\varepsilon\partial_u\}\{u^o\}) - \{\nabla\}p_w^o + \{f^o\} + \\ + [{}_f\partial_\sigma]\{\sigma_o'\} = \{0\} \ . \qquad (6.14.68)$$

(Nämä yhtälöt voidaan tulkita yhtä hyvin aikaisemman konsolidaatiotehtävän lopputuloksena, kun riippuvuus ajasta on hävinnyt. Havaitaan, että suureiden p_w^o ja $\{u^o\}$ välistä kytkentää ei esiinny. Ensimmäinen yhtälö on tavanomainen puhdas suotovirtausyhtälö, josta p_w^o voidaan ratkaista reunaehdot huomioon ottaen. Ratkaisu sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön, jonka avulla voidaan sitten

määrittää $\{u^o\}$.)

Konsolidaation aiheuttava kuormitusmuutos liittyy tavallisesti pintavoimiin ja tilavuusvoimat — kuten painovoima — pysyvät muuttumattomina eli $\{f\} = \{f^o\}$ ja $\{b_w\} = \{b_w^o\}$. Kun tämä otetaan huomioon ja yhtälöt (6.14.67) ja (6.14.68) vähennetään vastaavasti puolittain yhtälöistä (6.14.63) ja (6.14.64) saadaan muodot

$$\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}\Delta p_w) - n\kappa_w \frac{\partial \Delta p_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\}^T\Delta\{u\} = 0 \ , \qquad (6.14.69)$$

$$[{}_f\partial_\sigma]([D'][{}_\varepsilon\partial_u]\Delta\{u\} - \{\nabla\}\Delta p_w = \{0\} \ . \qquad (6.14.70)$$

(Huom. $\partial\Delta p_w/\partial t = \partial p_w/\partial t - \partial p_w^o/\partial t = \partial p_w/\partial t$.) Lähdetermien havaitaan kadonneen. Reunaehtojen suhteen tulee tehdä vastaava vähennysoperaatio.

— — —

Alkuehdot. Konsolidaatiotehtävän alkuasetelma vaatii lisäkommentteja. Tarkastellaan edelleen kuvan 6.14.3 esimerkkitapausta. Otaksutaan, että alueessa vallitsee aluksi tunnettu stationaarinen tila $\{u^o(x,y)\}$, $p_w^o(x,y)$, $\{\sigma_o'(x,y)\}$. (Siirtymiä ei vielä esiinny, jos tämä alkutila otetaan referenssitilaksi, jonka suhteen siirtymiä aletaan mitata.)

Hetkellä $t = 0$ reunan osalla EF alkaa vaikuttaa äkillisesti vaikkapa kuvassa esitetty pystysuora kuormitus. Ennen varsinaisen konsolidaatiotehtävän käsittelyn aloittamista on ensin ratkaistava uusi alkuarvotila $\{u(x,y,0^+)\}$, $p_w(x,y,0^+)$, $\{\sigma'(x,y,0^+)\}$. (Merkinnällä 0^+ tarkoitetaan tässä hetkeä, jolloin aika on saanut arvoon nolla verrattuna "pienen" lisäyksen.) Selitys tähän on seuraava. Välittömästi äkillisen, normaalisti kuitenkin kvasistaattisesti vaikuttavaksi ajatellun kuormituslisäyksen jälkeen raerungon suhteen ei ole vielä ehtinyt tapahtua suotovirtausta eli raerunko ja huokosneste ovat siirtyneet yhdessä uuteen asemaan kuten pelkästään kiinteän aineen mallin mukainen kontinuumi. Puhutaan suljetun tilan käyttäytymisestä (engl. undrained condition). Kyseessä voidaan ajatella olevan ns. komposiittimateriaali (engl. composite material), jonka komponentit ovat raerunko ja huokosneste. (Termi komposiittimateriaali on tavallisesti kylläkin käytössä lähinnä tiettyjen teollisesti synnytettyjen materiaalien yhteydessä.)

Sana äkillinen tai nopea kuormitusmuutos tarkoittaa konsolidaation yhteydessä ymmärrettävästi muutosta, jonka ajallinen kesto on lyhyehkö verrattuna itse konsolidaatiotapahtumaan, jonka käytännöllinen pituus voi olla tavanomaisissa tapauksissa useita vuosia, jopa vuosikymmeniä. Tässä yhteydessä voidaan viitata analogiamielessä kuvaan 4.2.2. Äkillinen kuormituslisäys aiheuttaa alkusiirtymän, jonka suuruutta kontrolloi jousivakion k_1 arvo.

Koska vallitseva fysiikka on sisäänrakennettu yhtälöihin (6.14.63) ja (6.14.64) sekä vastaaviin reunaehtoihin, uusi alkutila tulisi ilmeisesti saada vaihtoehtoisesti suoraan vain osana näiden yhtälöiden matemaattista ratkaisua hetkellä $t = 0^+$, jos kuormituksen ajallinen riippuvuus kuvattaisiin esimerkiksi askelfunktiolla. Käsittelemme tässä kuitenkin uuden alkutilan määrittämistä tavallaan fysikaalisemmin erillisenä reuna-arvotehtävänä.

Operoidaan huomautuksen 1 mukaisesti suureiden muutosten avulla. Kyseessä olevan edelleen kimmoiseksi otaksutun materiaalin konstitutiiviseen yhteyteen

$$\Delta\{\sigma\} = [D]\Delta\{\varepsilon\} \tag{6.14.71}$$

liittyvän jännitys-venymämatriisin [D] lauseke saadaan seuraavasti. (Huokosnesteen osalta käsittely muistuttaa läheisesti kohdassa 6.9.5 akustisen värähtelyn yhteydessä suoritettua tarkastelua.) Ensinnäkin Terzaghin hajotelman johdosta

$$\Delta\{\sigma\} = \Delta\{\sigma'\} - \{m\}\Delta p_w \ . \tag{6.14.72}$$

Lisäksi raerungolle

$$\Delta\{\sigma'\} = [D']\Delta\{\varepsilon\} \ . \tag{6.14.73}$$

Tarkastelemalla vielä pienen maa-alkion tilavuuden muutoksia saadaan yhteys (ks. esimerkki 6.14.1)

$$\Delta p_w = -\frac{1}{n\kappa_w}\{m\}^T\Delta\{\varepsilon\} \ , \tag{6.14.74}$$

jos rakeiden kokoonpuristuvuus jätetään ottamatta huomioon. Äskeiset tulokset yhdistämällä syntyy siis lauseke

$$[D] = [D'] + \frac{1}{n\kappa_w}\{m\}\{m\}^T , \tag{6.14.75}$$

jossa

$$\{m\}\{m\}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] . \tag{6.14.76}$$

Jos myös maarakeiden kokoonpuristuvuus otetaan huomioon (ks. esimerkki 6.14.1), lauseke (6.14.75) muuttuu muotoon

$$[D] = [D'] + \frac{1}{n\kappa_w + (1-n)\kappa_s}\{m\}\{m\}^T . \tag{6.14.77}$$

Uusi alkutila voidaan määrittää nyt tavanomaiseen tapaan esimerkiksi siirtymäformulaatiota käyttäen. Komposiittimateriaali on huokosnesteestä johtuen kuitenkin miltei kokoonpuristumatonta. Suljetun tilan laskelmissa käytetäänkin usein vieläpä täysin kokoonpuristumattoman aineen mallia; ks. myös s. 4.2.10...4.2.11. Miltei kokoonpuristumattomuus tai täysi kokoonpuristumattomuus aiheuttavat siirtymäformulaation yhteydessä tiettyjä ongelmia, joita kuvataan numeerisia menetelmiä esittävissä lähteissä; ks. myös kohdan 5.9 huomautus 3.

Esimerkki 6.14.1 Kokoonpuristuvuus. Johdetaan kaavan (6.14.74) mukainen yhteys.

Täysin huokosnesteen kyllästämässä maassa saadaan kaavojen (6.14.1)... (6.14.3) mukaisia merkintöjä käyttäen yhteydet

$$V = V_w + V_s \tag{a}$$

ja

$$\frac{dV}{V} = \frac{dV_w}{V} + \frac{dV_s}{V} = n\frac{dV_w}{V_w} + (1-n)\frac{dV_s}{V_s} . \tag{b}$$

Huokosnesteelle pätee kaavan (4.2.3) johdosta tulos

$$\frac{dV_w}{V_w} = -\kappa_w dp_w \ . \qquad \text{(c)}$$

Jos otaksutaan, että raerungon rakeet "uivat" huokosnesteessä, kukin rae kokee huokospaineen muutoksen ilmeisestikin suunnilleen vastaavana omana paineen muutoksena: $dp_s = dp_w$. (Näin on ainakin täsmälleen silloin, kun rakeet ovat isotrooppisesti kimmoisia.) Täten

$$\frac{dV_s}{V_s} = -\kappa_s dp_w \ , \qquad \text{(d)}$$

jossa κ_s on itse raemateriaalin kokoonpuristuvuus.
Kaava (b) saadaan lausekkeiden (c) ja (d) johdosta muotoon

$$\frac{dV}{V} = -[n\kappa_w + (1-n)\kappa_s]dp_w \ . \qquad \text{(e)}$$

Suhteellinen tilavuudenmuutos dV/V on matriisimerkinnöin $\{m\}^T d\{\varepsilon\}$. On siis saatu yhteys

$$dp_w = -\frac{1}{n\kappa_w + (1-n)\kappa_s}\{m\}^T d\{\varepsilon\} \ . \qquad \text{(f)}$$

Jos rakeiden kokoonpuristuvuus jätetään ottamatta huomioon:

$$dp_w = -\frac{1}{n\kappa_w}\{m\}^T d\{\varepsilon\} \ . \qquad \text{(g)}$$

Tämä on kaava (6.14.74), kun vielä asetetaan $d \to \Delta$.

Loppuhuomautuksia. Yhtälöiden (6.14.63) ja (6.14.64) esittämä kytketty suotovirtaus- ja konsolidaatioprobleema poikkeaa tyypiltään esimerkiksi akustisen värähtelyn ja ympäröivän rakenteen värähtelyn ongelmasta siinä, että vuorovaikutus nesteen ja kiinteän aineen välillä ei tapahdukaan tiettyjen pintojen välityksellä vaan koko tarkasteltavassa alueessa.

Kytkentä vaikeuttaa luonnollisesti tehtävän ratkaisua. Kytkentä yritetäänkin usein poistaa tekemällä tiettyjä yksinkertaistavia otaksumia. Voidaan yrittää edetä seuraavasti.

Kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä (6.14.33") saadaan puolittain yhteenlaskemalla yhteys

$$p = p' + p_w \ , \qquad (6.14.78)$$

jossa siis

$$\left.\begin{aligned} p &\equiv -\tfrac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \ , \\ p' &\equiv -\tfrac{1}{3}(\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z') \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6.14.79)$$

Usein otaksutaan, että kokonaisjännitykset $\overleftrightarrow{\sigma}$ voidaan laskea kimmoteorian perusteella (sopivin materiaalivakioin) kullakin hetkellä. Tällöin siis tunnetaan kokonaispaine $\bar{p}(x,y,z,t)$ ja yhtälöstä (6.14.78) saadaan lisäksi derivoimalla muoto

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial p_w}{\partial t} \ . \qquad (6.14.80)$$

(Jos kuormitus on ajan suhteen vakio, $\partial\bar{p}/\partial t = 0$.) Jos raerungon otaksutaan toimivan kimmoisesti, kaava (4.2.3) antaa konstitutiivisen yhteyden

$$dp' = -\frac{1}{\kappa_r}\, d\varepsilon_V \ , \qquad (6.14.81)$$

Jossa κ_r on raerungon kokoonpuristuvuus. (Käytetään tunnusta κ_r eikä κ_s, koska jälkimmäinen merkintä voisi viitata paremminkin itse rakeiden kokoonpuristuvuuteen, joka on jätetty tässä tarkastelussa huomioon ottamatta: $\kappa_s = 0$. Ks. myös esimerkki 6.14.1.)

Täten

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa_r}\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa_r}\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\}^T\{u\} \ . \qquad (6.14.82)$$

Yhtälöiden (6.14.82) ja (6.14.80) perusteella

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\}^T\{u\} = \kappa_r\left(\frac{\partial p_w}{\partial t} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}\right) \ . \qquad (6.14.83)$$

Yhtälöstä (6.14.63) saadaan nyt eliminoitua siirtymät:

$$\boxed{\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}p_w) - (n\kappa_w+\kappa_r)\frac{\partial p_w}{\partial t} + S = 0 \ ,} \qquad (6.14.84)$$

$$S = -\{\nabla\}^T([k]\rho^{(w)}\{b_w\}) + \kappa_r \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} . \qquad (6.14.85)$$

Tätä suotovirtausyhtälöä voidaan pitää yhtälön (6.14.23) tarkennusyrityksenä, siten että huokosnesteen kokoonpuristuvuus ja erityisesti raerungon muodonmuutosten vaikutus on pyritty ottamaan jollain tarkkuudella huomioon. Yhtälö (6.14.84) on tyypiltään ajasta riippuva puhdas diffuusioyhtälö.

Jos erityisesti kyseessä on vakiokuormitus ajan suhteen ja [k], $\rho^{(w)}$, $\{b_w\}$ ovat vakioita paikan suhteen sekä jos [k] on isotrooppinen, päädytään yksinkertaisimmillaan olevaan muotoon, ns. Terzaghin konsolidaatioyhtälöön [6.35, s. 87]

$$D\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial p_w}{\partial t} . \qquad (6.14.86)$$

Suure

$$D = \frac{k}{n\kappa_w + \kappa_r} \qquad (6.14.87)$$

on nimeltään konsolidaatiokerroin (engl. coefficient of consolidation) ($[D] = m^2 s^{-1}$).

Suotovirtauksen yhteydessä voidaan geometrialtaan sopivissa alueissa kehitellä jälleen kaksidimensioisia teorioita [6.36] samaan tapaan kuin esimerkiksi voiteluvirtauksessa.

Olemme käsitelleet edellä vain yksikomponenttisen huokosnesteen virtausta. Huokosneste voi olla tietenkin myös seos, jolloin komponenttien diffuusio tulee ottaa huomioon. Sovellutuksena voisi olla esimerkiksi epäpuhtauksien leviäminen pohjavedessä.

Tietyissä tapauksissa vallitsevat yhtälöt tulee täydentää energiayhtälöllä. Esimerkkinä mainittakoon pohjavesialueiden käyttö lämmön varastointiin [6.38].

KIRJALLISUUTTA

2.1 Synge, J.L., Griffith, B.A., Principles of Mechanics. 3. laitos. McGraw-Hill 1959, 552 s.

2.2 Hamel, G., Theoretische Mechanik. Springer 1967, 796 s.

2.3 Gyllenberg, M., Isomäki, H., Salonen, E-M., On the law of the parallelogram of forces. IJMEE. Vol. 12, No. 2, 1984, s. 115...118.

2.4 Ziegler, H., Mechanics. Vol. II. Addison-Wesley 1965, 206 s.

2.5 Lanczos, C., The Variational Principles of Mechanics. 4. laitos. University of Toronto Press 1974, 418 s.

2.6 Ziegler, H. An Introduction to Thermomechanics. 2. korjattu laitos. North-Holland 1983, 355 s.

3.1 Malvern, L.E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice Hall 1969, 713 s.

3.2 Väisälä, K., Vektorianalyysi. Werner Söderström 1954, 159 s.

3.3 Väisälä, K., Matematiikka III. Teknillinen korkeakoulu, moniste n:o 11, 1960, 63 s.

3.4 Prager, W., Introduction to Mechanics of Continua. Ginn 1961, 230 s.

3.5 Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., Transport Phenomena. Wiley 1960, 780 s.

3.6 Fysiikan suurenimet kansainvälisen standardin ISO 31 mukaan. SFS 3655 Suomen Standardisoimislautakunta 1976, 59 s.

3.7 Streeter, V.L., Fluid Mechanics. 5. laitos. McGraw-Hill 1971, 751 s.

3.8 Green, A.E., An Introduction to Continuum Mechanics. Mathematical Institute, Oxford 1969, 47 s.

3.9 Salonen, E-M., Dynamiikka. 2. korjattu painos. Otakustantamo 1986, 458 s.

3.10 Reynolds, W.C., Perkins, H.C., Engineering Thermodynamics, McGraw-Hill 1977, 609 s.

4.1 Hughes, J.R., Liu, W.K., Zimmermann, T.K., Lagrangian-Eulerian formulation for incompressible viscous flows. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 29, 1981, s. 329...349.

4.2 Crandall, S.H., Engineering Analysis. McGraw-Hill 1956, 417 s.

4.3 Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method. 3. laitos. McGraw-Hill 1977, 787 s.

4.4 Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 3. laitos. Pergamon Press 1982, 630 s.

4.5 Courant, R., Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, Volume II. Interscience 1966, 830 s.

4.6 Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi. I toisen painoksen muuttamaton lisäpainos. II toinen, uudistettu ja tarkistettu painos. Werner Söderström 1969, 1970, 1010 s.

4.7 Incropera, F.P., DeWitt, P.D., Fundamentals of Heat Transfer. Wiley 1981, 820 s.

4.8 Rohsenow, W.M., Choi, H., Heat, Mass, and Momentum Transfer. Prentice-Hall 1961, 537 s.

5.1 Zemanski, M.W., Heat and Thermodynamics. 4. laitos. McGraw-Hill 1957, 484 s.

5.2 Irons, B., Shrive, N., Finite Element Primer. Ellis Horwood 1983, 157 s.

5.3 Pflüger, A., Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. uudistettu painos. Springer 1964, 472 s.

5.4 Eringen, A.C., Mechanics of Continua. Wiley 1967, 502 s.

6.1 Mikkola, M., Levyjen, laattojen ja kuorien teoriaa. 3. korjattu painos. Otapaino 1980, 150 s.

6.2 Wlassow, W.S., Dünnwandige elastische Stäbe. 2. täydennetty painos. VEB Verlag für Bauwesen. Band I 1964, 294 s. Band II. 1965, 264 s.

6.3 Novozhilov, V.V., Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. Graylock Press 1953, 233 s.

6.4 Shames, I.H., Mechanics of Fluids. 2. laitos. MacGraw-Hill 1982, 692 s.

6.5 Tokaty, G.A., A History & Philosophy of Fluidmechanics. Foulis 1971, 241 s.

6.6 Serrin, J. Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics. 263 s. Encyclopedia of Physics. Volume VIII/1, Fluid Dynamics I. Springer 1959.

6.7 Batchelor, G.K., An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press 1967, 615 s.

6.8 Ashley, H., Landahl, M., Aerodynamics of Wings and Bodies. Dover 1965, 279 s.

6.9 Prandtl, L., Tietjens, O.G., Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. Dover 1957, 270 s.

6.10 Lu, P.-C., Fluid Mechanics. The Iowa State University Press 1979, 468 s.

6.11 Launder, B.E., Spalding, D.B., Mathematical Models of Turbulence. Academic Press 1972, 169 s.

6.12 Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics. Uudistettu painos. Hermosa Publishers 1976, 446 s.

6.13 Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill 1980, 197 s.

6.14 Schlichting, J., Boundary-Layer Theory. 7. laitos. McGraw-Hill 1979, 817 s.

6.15 Lanczos, C., Linear Differential Operators. Van Nostrand 1960, 564 s.

6.16 Hughes, T.J.R., Brooks, A., A theoretical framework for Petrov-Galerkin Methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure. Finite Element in Fluids-Volume 4. Wiley 1982, s. 47...65.

6.17 Anderson, J.D., Jr., Modern Compressible Flow With Historical Perspective. McGraw-Hill 1982, 466 s.

6.18 Moulden, T.H., Fundamentals of Transonic Flow. Wiley 1984, 332 s.

6.19 Courant, R., Friedrichs, K.O., Supersonic Flow and Shock Waves. Springer 1976, 464 s.

6.20 Liepmann, H.W., Roshko, A., Elements of Gasdynamics. Wiley 1957, 439 s.

6.21 Thompson, P.A., Compressible-Fluid Dynamics. McGraw Hill 1972, 665 s.

6.22 Lindroos, M., Salonen, E-M., Flow near a rigid wall. Helsingin teknillinen korkeakoulu, Tietotekniikan osasto, Mekaniikan laboratorioraportti. Valmisteilla.

6.23 Oswatitsch, K., Die Ablösungsbedingung von Grenzschichten. Grenzschichtforschung. Springer 1985, s. 357...367.

6.24 Perry, A.E., Chong, M.S., A series-expansion study of the Navier-Stokes equations with applications to three-dimensional separation patterns. J. Fluid Mech. Vol. 173, 1986, s. 207...223.

6.25 Cebeci, T., Bradshaw, P., Momentum Transfer in Boundary Layers. McGraw-Hill 1977, 391 s.

6.26 Anderson, J.D., Jr., Fundamentals of Aerodynamics. McGraw-Hill 1984, 563 s.

6.27 Denn, M.M., Process Fluid Mechanics. Prentice-Hall 1980, 383 s.

6.28 Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. McGraw-Hill 1984, 599 s.

6.29 Gross, W.A., Gas Film Lubrication. Wiley 1962, 432 s.

6.30 Halling, J., Introduction to Tribology. Wykeham 1976, 157 s.

6.31 Räsänen, S., Elementtimenetelmän käyttö matalan veden virtauksen analysoinnissa. Diplomityö. Teknillinen korkeakoulu 1981, 97 s.

6.32 Pinder, G.F., Gray, W.G., Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology. Academic Press 1977, 295 s.

6.33 Kuo, K.K., Principles of Combustion Wiley 1986, 810 s.

6.34 Bear, J., Zaslavsky, D., Irmay, S., Physical Principles of Water Percolation and Seepage. UNESCO 1968, 465 s.

6.35 RIL 157·I Geomekaniikka I, Suomen Rakennusinsinöörien liitto r.y. 1985., 479 s.

6.36 Aalto, J., Veden virtaus maassa. Lähteen [6.35] luku 11, 69 s.

6.37 Le Méhauté, B., An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves. Springer 1976, 315 s.

6.38 Kangas, M., Pohjavesivaraston simulointimallin kehittäminen. Teknillinen korkeakoulu. Teknillisen fysiikan laitos. Raportti TKK-F-B103 1987, 117 s.

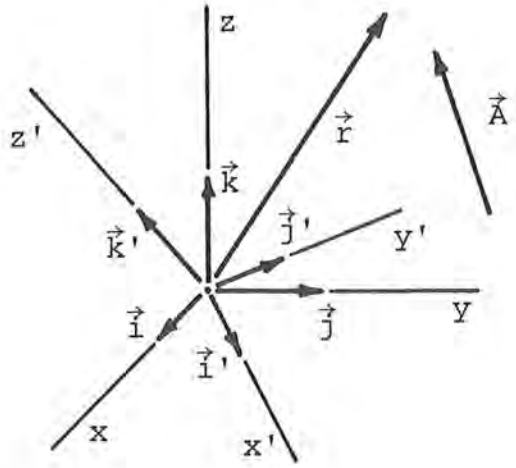
L.1 Tsai, S.W., Hahn, H.T., Introduction to Composite Materials. Technomic Publishing 1980, 455 s.

L.1 Koordinaatiston kierto

Mm. kuvien 4.7.4 ja 5.7.3 yhteydessä on selostettu tarvetta siirtyä joskus paikallisen kierretyn karteesisen suorakulmaisen koordinaatiston käyttöön. Tässä liitteen osassa on esitetty joitakin kahdessa eri koordinaatistossa mitattujen suureiden välisiä yhteyksiä. Kaavat kirjoitetaan käyttäen koordinaattien tunnuksina kirjaimia x, y ja z, mutta nämä voidaan luonnollisestikin tarvittaessa korvata esimerkiksi kirjaimilla a, b ja c, jos halutaan vaikka korostaa, että kyseessä on Lagrangen esitys.

L.1.1 Vektorit

Kuvan L.1.1 esittämillä karteesisilla suorakulmaisilla xyz- ja x'y'z'-koordinaatistoilla on yhteinen origo, mutta koordinaatistojen akselien suunnat eroavat toisistaan. Useimmat jatkossa esitettävät tulokset ovat kuitenkin voimassa, vaikka koordinaatistojen origot eivät yhtyisikään.



Kuva L.1.1 Kaksi koordinaatistoa.

Mielivaltaisen vektorin $\vec{A}$ esitys eri kannoissa on

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \\ &= A_{x'}\vec{i}' + A_{y'}\vec{j}' + \\ &\quad + A_{z'}\vec{k}' \ . \end{aligned}\right\} \qquad (L.1.1)$$

Saadaan mm. yhteydet

$$\left.\begin{aligned} A_{x'} &= \vec{i}'\cdot(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}) \\ &= \vec{i}'\cdot\vec{i}A_x + \vec{i}'\cdot\vec{j}A_y + \vec{i}'\cdot\vec{k}A_z \ , \\ A_{y'} &= \vec{j}'\cdot(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}) \\ &= \vec{j}'\cdot\vec{i}A_x + \vec{j}'\cdot\vec{j}A_y + \vec{j}'\cdot\vec{k}A_z \ , \end{aligned}\right\} \qquad (L.1.2)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{z'} &= \vec{k}'\cdot(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}) \\ &= \vec{k}'\cdot\vec{i}A_x + \vec{k}'\cdot\vec{j}A_y + \vec{k}'\cdot\vec{k}A_z \end{aligned}\right|$$

eli

$$\left.\begin{aligned} A_{x'} &= l_{x'x}A_x + l_{x'y}A_y + l_{x'z}A_z \,, \\ A_{y'} &= l_{y'x}A_x + l_{y'y}A_y + l_{y'z}A_z \,, \\ A_{z'} &= l_{z'x}A_x + l_{z'y}A_y + l_{z'z}A_z \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.3')}$$

Matriisimerkintöjä käyttäen

$$\{A'\} = [L]\{A\} \,, \qquad \text{(L.1.3)}$$

jossa

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} , \qquad \{A'\} = \begin{Bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{Bmatrix} \qquad \text{(L.1.4)}$$

ja muunnosmatriisi

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \\ l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} \\ l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} \end{bmatrix} . \qquad \text{(L.1.5)}$$

Muunnosmatriisin alkiot ovat akselien välisten kulmien kosineja:

$$\left.\begin{aligned} l_{x'x} &= \cos(x',x) = \vec{i}'\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{i}' = l_{xx'} \,, \\ l_{x'y} &= \cos(x',y) = \vec{i}'\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i}' = l_{yx'} \,, \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.6)}$$

Ei ole vaikeaa osoittaa, että kaavojen (L.1.3') ja (L.1.3) käänteiset vastineet ovat

$$\left.\begin{aligned} A_x &= l_{xx'}A_{x'} + l_{xy'}A_{y'} + l_{xz'}A_{z'} \,, \\ A_y &= l_{yx'}A_{x'} + l_{yy'}A_{y'} + l_{yz'}A_{z'} \,, \\ A_z &= l_{zx'}A_{x'} + l_{zy'}A_{y'} + l_{zz'}A_{z'} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.7')}$$

ja

$$\{A\} = [L]^T\{A'\} \,. \qquad \text{(L.1.7)}$$

Sijoittamalla lauseke (L.1.3) kaavaan (L.1.7) tai kääntäen saadaan tulokset

$$\left.\begin{aligned} \{A\} &= [L]^T[L]\{A\} \,, \\ \{A'\} &= [L][L]^T\{A'\} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.8)}$$

eli

$$[L]^T[L] = [L][L]^T = [I] \,. \qquad \text{(L.1.9)}$$

Täten muunnosmatriisi [L] on ns. ortogonaalinen eli sen transpoosi on myös sen käänteismatriisi: $[L]^T = [L]^{-1}$.

Huomautus 1. Muunnosmatriisi esiintyy kirjallisuudessa usein tässä määritellyn matriisin transpoosina. (Jos yhteyden (L.1.7) muunnosmatriisi esitetään ilman transponointimerkkiä, transponointi ilmestyykin yhteyteen (L.1.3).) Voidaan kirjoittaa vielä

$$[L]^T = \begin{bmatrix} l_{xx'} & l_{xy'} & l_{xz'} \\ l_{yx'} & l_{yy'} & l_{yz'} \\ l_{zx'} & l_{zy'} & l_{zz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{y'x} & l_{z'x} \\ l_{x'y} & l_{y'y} & l_{z'y} \\ l_{x'z} & l_{y'z} & l_{z'z} \end{bmatrix} \,. \qquad \text{(L.1.10)}$$

Pilkullisten indeksien sijoitus ensimmäisiksi tai toisiksi on tässä lähinnä esteettinen kysymys, koska väärinkäsityksen mahdollisuutta ei syntyne. Jos sen sijaan siirrytään käyttämään tyyppiä l_{ij} olevia merkintöjä — kuten on tapana tensorianalyysissä — on oleellista lyödä lukkoon merkintöjen täsmällinen sisältö. Tavallisesti tämä tehdään esittämällä joko taulukko

	x_1	x_2	x_3
x_1'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x_2'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x_3'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

(L.1.11)

tai taulukko

	x_1'	x_2'	x_3'
x_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x_3	l_{31}	l_{32}	l_{33}

(L.1.12)

jotka ovat matriiseiksi käsitettyinä jälleen toistensa transpooseja. Esimerkiksi lähteessä [3.2, s. 138] käytetään taulukon (L.1.11) määrittelemää indeksointitapaa. Tässä on toimittu muunnosmatriisin (L.1.5) valinnan johdosta siis myöskin taulukon (L.1.11) hengessä.

— — —

Merkitsemällä

$$\{\vec{e}\} = \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{e}'\} = \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix} \tag{L.1.13}$$

kantavektoreille saadaan kaavojen (L.1.3) ja (L.1.7) kanssa analogiset yhteydet

$$\left.\begin{aligned} \{\vec{e}'\} &= [L]\{\vec{e}\} , \\ \{\vec{e}\} &= [L]^T\{\vec{e}'\} . \end{aligned}\right\} \tag{L.1.14}$$

Niiden paikkansapitävyys voidaan todeta kehittämällä ne auki ja tarkastelemalla syntyvien yhtälöiden sisältöä: $\vec{i}' = l_{x'x}\vec{i} + l_{x'y}\vec{j} + l_{x'z}\vec{k}$, mikä on oikein jne.

Kuvassa L.1.1 esitetylle paikkavektorille

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ &= x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.15)}$$

saadaan kaavojen (L.1.3') ja (L.1.7') sovellutuksina suoraan esitykset

$$\left.\begin{aligned}x' &= l_{x'x}x + l_{x'y}y + l_{x'z}z\ , \\ y' &= l_{y'x}x + l_{y'y}y + l_{y'z}z \\ z' &= l_{z'x}x + l_{z'y}y + l_{z'z}z\end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.16)}$$

ja

$$\left.\begin{aligned}x &= l_{xx'}x' + l_{xy'}y' + l_{xz'}z'\ , \\ y &= l_{yx'}x' + l_{yy'}y' + l_{yz'}z'\ , \\ z &= l_{zx'}x' + l_{zy'}y' + l_{zz'}z'\ .\end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.17)}$$

(Pilkullisten ja pilkuttomien indeksien paikkoja on jälleen siirrelty ulkonäkösyistä.

Kun tarkastellaan tiettyä funktiota $f(x,y,z)(f(x',y',z'))$, sen osittaisderivaatat muuttujien x', y' ja z' (x,y ja z) suhteen saadaan tarvittaessa soveltamalla kaavoja (L.1.17) ja (L.1.16). Todetaan tämä kaavojen lyhentämiseksi vain tasotapauksessa (xy- ja $x'y'$-taso). Ketjuderivoimalla saadaan

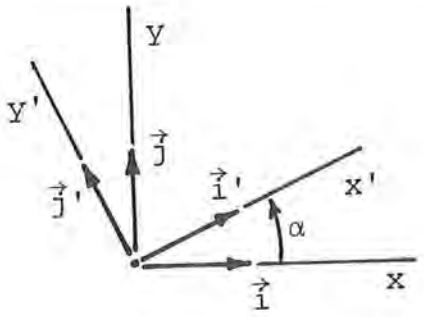
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\ )}{\partial x'} &= \frac{\partial(\ )}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} \\ &= l_{x'x}\frac{\partial(\ )}{\partial x} + l_{x'y}\frac{\partial(\ )}{\partial y}\ , \\ \frac{\partial(\ )}{\partial y'} &= \frac{\partial(\ )}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} \\ &= l_{y'x}\frac{\partial(\ )}{\partial x} + l_{y'y}\frac{\partial(\ )}{\partial y}\ ,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.18)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(\ )}{\partial x} &= \frac{\partial(\ )}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} \\
&= l_{xx'}\frac{\partial(\ )}{\partial x'} + l_{xy'}\frac{\partial(\ )}{\partial y'}\ , \\
\frac{\partial(\ )}{\partial y} &= \frac{\partial(\ )}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial(\ )}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} \\
&= l_{yx'}\frac{\partial(\ )}{\partial x'} + l_{yy'}\frac{\partial(\ )}{\partial y'}\ .
\end{aligned}\right|$$

Kaavat (L.1.16) ja (L.1.17) ovat voimassa koordinaatistojen origoiden yhteydessä. Ei ole kuitenkaan vaikea todeta, että derivointikaavat (L.1.18) pätevät, vaikkei näin olisikaan. Kaavojen yleistys kolmeen dimensioon on ilmeinen. Voidaan samoin kirjoittaa esitykset

$$\left.\begin{aligned}
\{\nabla'\} &= [L]\{\nabla\}\ , \\
\{\nabla\} &= [L]^T\{\nabla'\}\ .
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.19)}$$

Tasotapauksessa kaavoja voidaan yksinkertaistaa hieman merkinnällisesti kirjoittamalla (kuva L.1.2)



$$[L] = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} \\ l_{y'x} & l_{y'y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\ , \qquad \text{(L.1.20)}$$

jossa $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$.

Kuva L.1.2 Tasotapaus.

L.1.2 Tensorit

Olkoon yleisesti toisen kertaluvun tensorin eli dyadin $\overleftrightarrow{A}$ matriisivastine karteesisessa suorakulmaisessa xyz-koordinaatistossa

$$[A] \equiv \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \tag{L.1.21}$$

ja vastaavasti kierretyssä x'y'z'-koordinaatistossa

$$[A'] \equiv \begin{bmatrix} A_{x'x'} & A_{x'y'} & A_{x'z'} \\ A_{y'x'} & A_{y'y'} & A_{y'z'} \\ A_{z'x'} & A_{z'y'} & A_{z'z'} \end{bmatrix} . \tag{L.1.22}$$

Esimerkiksi lähteessä [3.2, s. 139] esitettyjen kaavojen perusteella voidaan osoittaa melko helposti, että

$$\left.\begin{aligned} [A'] &= [L][A][L]^T , \\ [A] &= [L]^T[A'][L] , \end{aligned}\right\} \tag{L.1.23}$$

joissa muunnosmatriisi [L] on kaavan (L.1.5) mukainen. (Jos tensorin komponentit riippuvat paikasta, matriisien [A] ja [A'] alkiot tulee luonnollisestikin laskea samassa avaruuden pisteessä. Kaavat ovat voimassa, vaikka koordinaatistojen origot eivät yhtyisikään.)

Esimerkiksi ensimmäisestä kaavasta (L.1.23) saadaan suorittamalla kertomiset tulokset

$$\left.\begin{aligned} A_{x'x'} = {} & l_{x'x}l_{x'x}A_{xx} + l_{x'x}l_{x'y}A_{xy} + l_{x'x}l_{x'z}A_{xz} + \\ & + l_{x'y}l_{x'x}A_{yx} + l_{x'y}l_{x'y}A_{yy} + l_{x'y}l_{x'z}A_{yz} + \\ & + l_{x'z}l_{x'x}A_{zx} + l_{x'z}l_{x'y}A_{zy} + l_{x'z}l_{x'z}A_{zz} , \end{aligned}\right\} \tag{L.1.24}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{x'y'} &= l_{x'x}l_{y'x}A_{xx} + l_{x'x}l_{y'y}A_{xy} + l_{x'x}l_{y'z}A_{xz} + \\
&+ l_{x'y}l_{y'x}A_{yx} + l_{x'y}l_{y'y}A_{yy} + l_{x'y}l_{y'z}A_{yz} + \\
&+ l_{x'z}l_{y'x}A_{zx} + l_{x'z}l_{y'y}A_{zy} + l_{x'z}l_{y'z}A_{zz} , \\
&\ldots
\end{aligned}
\right|
$$

Kuten havaitaan, komponenttien laskeminen on työtä, jonka antaa hyvin mielellään tietokoneen tehtäväksi. Jos tensori on symmetrinen eli kun $A_{yx} = A_{xy}$, $A_{zy} = A_{yz}$ ja $A_{xz} = A_{zx}$, myös muunnetut komponentit toteuttavat vastaavat yhteydet $A_{y'x'} = A_{x'y'}$ jne.

Tasotapauksessa kaavat lyhenevät melkoisesti. Dyadin $\overleftrightarrow{A}$ matriisivastineet ovat

$$
[A] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \tag{L.1.25}
$$

ja

$$
[A'] = \begin{bmatrix} A_{x'x'} & A_{x'y'} \\ A_{y'x'} & A_{y'y'} \end{bmatrix} \tag{L.1.26}
$$

ja kaavat (L.1.24) saavat merkintöjä (L.1.20) käyttäen muodot

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{x'x'} &= ccA_{xx} + csA_{xy} + \\
&\quad + csA_{yx} + ssA_{yy} , \\
A_{x'y'} &= - csA_{xx} + ccA_{xy} + \\
&\quad - ssA_{yx} + csA_{yy} , \\
A_{y'x'} &= - csA_{xx} - ssA_{xy} + \\
&\quad + ccA_{yx} + csA_{yy} , \\
A_{y'y'} &= ssA_{xx} - csA_{xy} + \\
&\quad - csA_{yx} + ccA_{yy} .
\end{aligned}
\right\} \tag{L.1.27}
$$

Symmetrisen dyadin tapauksessa saadaan erityisesti tulokset

$$\left.\begin{aligned} A_{x'x'} &= c^2A_{xx} + s^2A_{yy} + 2csA_{xy} \,, \\ A_{y'y'} &= s^2A_{xx} + c^2A_{yy} - 2csA_{xy} \,, \\ A_{x'y'} &= -csA_{xx} + csA_{yy} + (c^2-s^2)A_{xy} \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.1.28)}$$

Kaavoja (L.1.23) voidaan soveltaa tarvittaessa mm. venymämatriisin (3.3.39) (a → x jne.)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} , \qquad \text{(L.1.29)}$$

deformaationopeusmatriisin (3.3.67)

$$[d] = \begin{bmatrix} d_x & \frac{1}{2}g_{xy} & \frac{1}{2}g_{xz} \\ \frac{1}{2}g_{yx} & d_y & \frac{1}{2}g_{yz} \\ \frac{1}{2}g_{zx} & \frac{1}{2}g_{zy} & d_z \end{bmatrix} , \qquad \text{(L.1.30)}$$

jännitysmatriisin

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \text{(L.1.31)}$$

ja lämmönjohtavuusmatriisin

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \qquad \text{(L.1.32)}$$

suhteen. Nämä ovat vieläpä kaikki symmetrisiä.

Jo kohdan 4.2 huomautuksessa 2 on kuitenkin todettu, että elementtimenetelmän yhteydessä on syytä esittää tietyt tensorit 3×3 matriisivastineiden sijasta (symmetrisessä tapauksessa) 6×1 matriiseinä eli ns. vektoreina. Näitä ovat mm. venymä

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]^T \tag{L.1.33}$$

ja jännitys

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}]^T \ . \tag{L.1.34}$$

Vastaavasti kierretyssä koordinaatistossa

$$\{\varepsilon'\} = [\varepsilon_{x'} \quad \varepsilon_{y'} \quad \varepsilon_{z'} \quad \gamma_{y'z'} \quad \gamma_{z'x'} \quad \gamma_{x'y'}]^T \tag{L.1.35}$$

ja

$$\{\sigma'\} = [\sigma_{x'} \quad \sigma_{y'} \quad \sigma_{z'} \quad \tau_{y'z'} \quad \tau_{z'x'} \quad \tau_{x'y'}]^T \ . \tag{L.1.36}$$

ja tehtävänä on muodostaa tarvittavat muunnoskaavat.

Tarkastelemalla kaavoja (L.1.23) sovellettuina matriiseihin $[\varepsilon]$ ja $[\sigma]$ voidaan todeta, että saadaan mm. yhteydet

$$\{\varepsilon'\} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon\} \tag{L.1.37}$$

ja

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma]\{\sigma\} \ . \tag{L.1.38}$$

Muunnosmatriisien alkiot ovat selvästikin neliöllisiä suuntakosinien suhteen. $[T_\varepsilon]$ ja $[T_\sigma]$ eivät ole kuitenkaan identtisiä, koska liukumat γ eivät ole tensorikomponentteja; vrt. kaava (L.1.29). Näiden matriisien välille voidaan johtaa tiettyjä yhteyksiä ilman että vielä kirjoitettaisiin näkyviin alkioiden yksityiskohtaisia lausekkeita. Tämä perustuu seuraavaan. Termi $\{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}$ (kaava (4.6.6)) esittää ainealkioon vaikuttavien sisäisten voimien negatiivista differentiaalista työtä alkion tilavuutta kohti. Tämän lausekkeen arvon tulee olla fysikaalisen merkityksensä vuoksi koordinaatiston valinnasta riippumaton eli saadaan yhtälö

$$\{\sigma'\}^T d\{\varepsilon'\} = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} \ . \tag{L.1.39}$$

Ensinnäkin esityksen (L.1.37) käyttö tuottaa yhteyden

$$\{\sigma'\}^T [T_\varepsilon] d\{\varepsilon\} = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} \ . \tag{L.1.40}$$

Koska vektori $d\{\varepsilon\}$ voi olla edellisessä mikä hyvänsä, tulee olla $\{\sigma\}^T = \{\sigma'\}^T [T_\varepsilon]$ eli transponoimalla

$$\{\sigma\} = [T_\varepsilon]^T \{\sigma'\} \ . \tag{L.1.41}$$

Kun tähän taas sijoitetaan esitys (L.1.38), saadaan tulos

$$[T_\varepsilon]^T [T_\sigma] = [I] = [T_\sigma]^T [T_\varepsilon] \ . \tag{L.1.42}$$

Täten vielä

$$[T_\sigma]^{-1} = [T_\varepsilon]^T \tag{L.1.43}$$

ja

$$[T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^T \ . \tag{L.1.44}$$

Tässä tapauksessa siis muunnosmatriisit eivät ole ortogonaalisia; vrt. kaavat (L.1.9).

Todettakoon, että deformaationopeusvektorille $\{d\}$ pätee samaten muunnos

$$\{d'\} = [T_d]\{d\} \ , \tag{L.1.45}$$

jossa

$$[T_d] = [T_\varepsilon] \ . \tag{L.1.46}$$

Esitetään muunnosmatriisien $[T_\varepsilon]$ ja $[T_\sigma]$ yksityiskohtaiset lausekkeet tässä vain tasotapauksessa, jolloin

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} , \qquad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} . \tag{L.1.47}$$

Kaavojen (L.1.28) avulla saadaan

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} \tag{L.1.48}$$

ja

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} . \tag{L.1.49}$$

Ei ole vaikeaa todeta, että yhtälöt (L.1.42) ovat tosiaan voimassa.

Kimmoisen materiaalin konstitutiivisia yhteyksiä kuvaava jännitys-venymätensori on neljättä kertalukua. Tässä esityksessä riippuvuus esitettiin kuitenkin matriisimerkinnöin muodossa (4.2.10):

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{L.1.50}$$

tai kierretyssä koordinaatistossa

$$\{\sigma'\} = [D']\{\varepsilon'\} , \tag{L.1.51}$$

jossa [D'] on vielä tuntematon. Sijoittamalla yhtälöön (L.1.50) käänteiset esitykset (L.1.37) ja (L.1.38) saadaan ensin

$$[T_\sigma]^{-1}\{\sigma'\} = [D][T_\varepsilon]^{-1}\{\varepsilon'\} . \tag{L.1.52}$$

Kertomalla tämä puolittain vasemmalta matriisilla $[T_\sigma]$ syntyy yhtälö ($[T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^T$)

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma][D][T_\sigma]^T\{\varepsilon\} \tag{L.1.53}$$

eli etsitty muunnoskaava on

$$[D'] = [T_\sigma][D][T_\sigma]^T . \tag{L.1.54}$$

Tällä yhteydellä on paljon käyttöä ansiotrooppisten materiaalien kuten komposiittimateriaalien [L.1] yhteydessä tai ehkä paremminkin käänteisellä kaavalla

$$[D] = [T_\varepsilon]^T[D'][T_\varepsilon] \ , \tag{L.1.55}$$

joka voidaan johtaa vastaavasti kuin (L.1.54). Anisotrooppisilla materiaaleilla on nimittäin usein selvät erikoissuunnat, joihin liittyvä [D']-matriisi on yksinkertaisimmillaan ja tunnetaan. Kaava (L.1.55) antaa tällöin rakennetta käsiteltävässä globaalisessa koordinaatistossa tarvittavan [D]-matriisin. Kaavojen (L.1.54) ja (L.1.55) soveltamisen yhteydessä on oltava äärimmäisen tarkkana sovittujen merkkisääntöjen noudattamisessa. Ne ja muutkin käytetyt merkinnät vaihtelevat valitettavasti melkoisesti alan kirjallisuudessa.

Esimerkki L.1.1 Venymä ja jännitys. Johdetaan venymää ja jännitystä koskevia muunnoskaavoja tasotapauksessa erikseen käyttämättä hyväksi tietoa suureiden tensoriluonteesta.

Kaavojen (3.3.36) mukaisesti ($a \to x$, $b \to y$, $u_a \to u$, $u_b \to v$)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \ , \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \ , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \ , \\ \varepsilon_{y'} &= \frac{\partial v'}{\partial y'} \ , \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \ . \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Tarkastellaan komponenttia $\varepsilon_{x'}$. Ensimmäisen kaavan (L.1.18) perusteella (käytetään lisäksi merkintöjä (L.1.20))

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = c\,\frac{\partial u'}{\partial x} + s\,\frac{\partial u'}{\partial y} \ . \tag{c}$$

Toisaalta ensimmäisen kaavan (L.1.3') mukaan

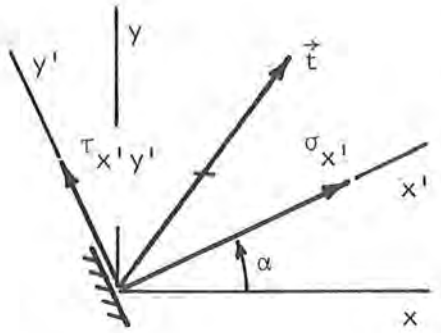
$$u' = cu + sv \tag{d}$$

ja siis

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= c\,\frac{\partial}{\partial x}(cu+sv) + s\,\frac{\partial}{\partial y}(cu+sv)\\ &= c^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + cs\,\frac{\partial v}{\partial x} + sc\,\frac{\partial u}{\partial y} + s^2\,\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= c^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + s^2\,\frac{\partial v}{\partial y} + cs\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= c^2\varepsilon_x + s^2\varepsilon_y + cs\gamma_{xy}\ .\end{aligned} \tag{e}$$

Tämän nähdään vastaavan matriisin (L.1.48) ensimmäisen rivin antamaa tulosta. Venymäkomponentteja $\varepsilon_{y'}$ ja $\gamma_{x'y'}$ koskevat yhteydet saadaan johdettua samalla tavalla kuin kaava (e).

Venymien käsittelyssä riitti siis pelkkä kinematiikka plus matemaattinen manipulaatio. Jännitysten tarkastelussa käytetään hyväksi traktio-jännitysyhteyttä. Kuvan (a) pinta-alkion ulkoisen normaalin suunta yhtyy x'-akselin suuntaan. Kaavojen (3.4.13) perusteella vastaava traktio



(a)

$$\begin{aligned}\vec{t} &= (n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx})\vec{i} + (n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y)\vec{j}\\ &= (c\sigma_x + s\tau_{xy})\vec{i} + (c\tau_{xy} + s\sigma_y)\vec{j}\ .\end{aligned} \tag{f}$$

Esitetään tämä $\vec{i}'\vec{j}'$-kannassa. Toisen kaavan (L.1.14) mukaan

$$\left.\begin{aligned}\vec{i} &= c\vec{i}' - s\vec{j}'\ ,\\ \vec{j} &= s\vec{i}' + c\vec{j}'\ .\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

Näiden sijoitus lausekkeeseen (f) antaa

$$\begin{aligned}\vec{t} = {} & [c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2cs\tau_{xy}]\vec{i}' +\\ & + [-cs\sigma_x + cs\sigma_y + (c^2-s^2)\tau_{xy}]\vec{j}'\ .\end{aligned} \tag{h}$$

Toisaalta kuvan (a) perusteella

$$\vec{t} = \sigma_{x'}\vec{i} + \tau_{x'y'}\vec{j}\ , \tag{i}$$

joten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x'} &= c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + cs\tau_{xy} \,, \\ \tau_{x'y'} &= -cs\sigma_x + cs\sigma_y + (c^2-s^2)\tau_{xy} \,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(j)}$$

Näiden nähdään vastaavan matriisin (L.1.49) ensimmäisen ja kolmannen rivin antamia tuloksia. Komponentin $\sigma_{y'}$ lauseke voidaan johtaa samaan tapaan antamalla kuvan (a) pinta-alkion ulkoisen normaalin sunnan yhtyä y'-akselin suuntaan.

L.2 Matematiikkaa

Tähän on kerätty eräitä usein tarvittavia matematiikan kaavoja.

L.2.1 Lineaarimuoto ja neliömuoto

Matriiseille voidaan kehitellä monimutkaisia matriisien keskinäisiä derivaattakäsitteitä ja operoida niillä. Tässä esityksessä määritellään vain skalaarin derivaatta pystyvektorin suhteen. Jos 1×1 matriisi eli skalaari f on muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funktio, niin ensinnäkin tavanomaisen riippuvuuden esityksen $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sijasta voidaan kirjoittaa lyhyemmin $f = f(\{x\})$. Merkinnällä $\partial f/\partial\{x\}$ tarkoitetaan nyt n×1 pystyvektoria, jonka alkiot ovat $\partial f/\partial x_i$ eli

$$\frac{f(\{x\})}{\partial\{x\}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{Bmatrix} . \qquad \text{(L.2.1)}$$

Esimerkiksi funktion f stationaarisuusehdot $\partial f/\partial x_1 = 0$, $\partial f/\partial x_2 = 0$ jne. voidaan tällöin esittää lyhyesti muodossa

$$\frac{\partial f}{\partial\{x\}} = \{0\} . \qquad \text{(L.2.2)}$$

On huomattava, että kirjallisuudessa merkinnällä (L.2.1) tarkoitetaan joskus myös vastaavaa vaakavektoria.

Hyvin usein esiintyviä skalaareja ovat ns. (homogeeninen) <u>lineaarimuoto</u> eli lineaarinen muoto (engl. linear form) ja ns. (homogeeninen) <u>neliömuoto</u> eli kvadraattinen muoto (engl. quadratic form) muuttujien {x} suhteen.

Lineaarinen muoto

$$f = \{A\}^T\{x\} = \{x\}^T\{A\} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \,, \qquad \text{(L.2.3)}$$

jossa n×1 pystyvektorin {A} alkiot eivät ole {x}:n funktioita. Lineaariselle muodolle saadaan helposti yhteys

$$\frac{\partial f}{\partial\{x\}} = \{A\} \,. \qquad \text{(L.2.4)}$$

Neliömuoto

$$f = \{x\}^T[A]\{x\} = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n +$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_nx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \,, \qquad \text{(L.2.5)}$$

jossa n×n neliömatriisin [A] alkiot eivät ole {x}:n funktioita. Neliömuodolle pätee

$$\frac{\partial f}{\partial\{x\}} = 2[A]\{x\} \,, \qquad \text{(L.2.6)}$$

kun [A] on symmetrinen. (Neliömuodon matriisi [A] voidaan aina valita symmetriseksi ilman yleisyyden menetystä. Jos aluksi esimerkiksi $a_{12} \neq a_{21}$, otetaan $a_{12}^{uusi} = a_{21}^{uusi} = (a_{12}+a_{21})^{vanha}/2$. Neliömuodon arvo ei muutu.)

Esimerkiksi yleisen toista astetta olevan lausekkeen

$$f(\{x\}) = \frac{1}{2}\{x\}^T[A]\{x\} + \{A\}^T\{x\} + a_0 \,, \qquad \text{(L.2.7)}$$

jossa a_0 on vakio, stationaarisuusehdot tulevat täten olemaan

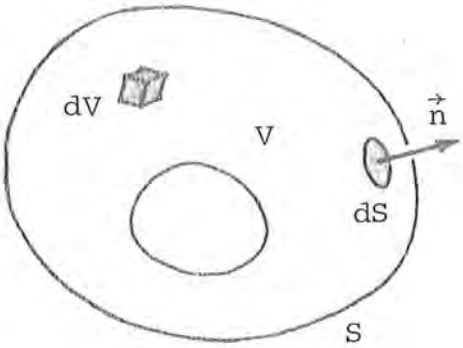
$$\frac{\partial f}{\partial\{x\}} \equiv [A]\{x\} + \{A\} = \{0\} \qquad \text{(L.2.8)}$$

eli lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisi on symmetrinen.

L.2.2 Gaussin lause

Yleistetty Gaussin lause [3.2, s. 154] on

$$\int_V \vec{\nabla} * f dV = \int_S d\vec{S} * f \qquad \text{(L.2.9)}$$



Kuva L.2.1

eli

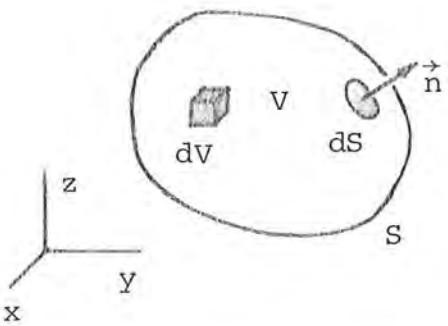
$$\int_V \vec{\nabla} * f dV = \int_S \vec{n} * f dS \ . \qquad \text{(L.2.9')}$$

Suure f on mielivaltainen jatkuva (derivaatat paloittain jatkuvia) skalaari-, vektori- tai tensoriarvoinen paikan funktio. Tähden merkityksen valinta on lisäksi suoritettava siten, että suure $\vec{\nabla} * f$ on määritelty. Suure f saa riippua lisäksi mm. ajasta t; kaava (L.2.9) pätee kullakin hetkellä.

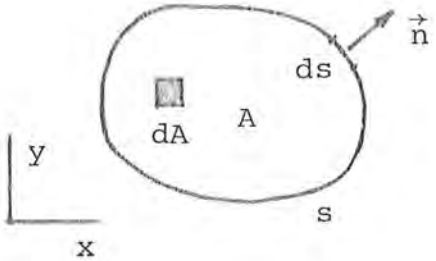
Tavanomainen ns. Gaussin lause eli divergenssilause syntyy ottamalla $f \to \vec{f}$ ja $* \to \cdot$, jolloin saadaan

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = \int_S \vec{n} \cdot \vec{f} dS \quad \left(= \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{S}\right) \ . \qquad \text{(L.2.9'')}$$

Gaussin lauseen ehkä helpoiten muistissa pysyvät muodot ovat karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa (peräkkäisillä valinnoilla $\vec{f} = f(x,y,z)\vec{i}$ jne.) syntyvät kaavat



$$\left.\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV &= \int_S n_x f dS \ , \\ \int_V \frac{\partial f}{\partial y} dV &= \int_S n_y f dS \ , \\ \int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV &= \int_S n_z f dS \ , \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.2.10)}$$



$$\left.\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA &= \int_s n_x f ds \ , \\ \int_A \frac{\partial f}{\partial y} dA &= \int_s n_y f ds \ , \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.2.10')}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx}\, dx = \Big|_{x_1}^{x_2} f \,. \qquad \text{(L.2.10'')}$$

Kuva L.2.2

Näissä kaavoissa f saa jälleen olla myös vektoriarvoinen suure. (Kaavat (L.2.10') saadaan esimerkiksi kaavoista (L.2.10) seuraavasti. Otetaan alueeksi V z-akselin suuntainen sylinteri (korkeus h, poikkileikkaus A) ja funktio $f = f(x,y)$ riippumattomaksi koordinaatista z. Sylinterin päätypinnoilla $n_x = n_y = 0$ ja lisäksi voidaan kirjoittaa vaipalla $dS = hds$ sekä alueessa $dV = hdA$. Jakamalla yhtälöt puolittain termillä h päästään annettuihin tuloksiin.)

Gaussin lausetta soveltamalla saadaan (Otetaan $f \to gh$ ja havaitaan, että $\partial f/\partial x \to \partial(gh)/\partial x = \partial g/\partial x \cdot h + g \cdot \partial h/\partial x$ jne.) ns. <u>osittaisintegrointikaavat</u>

$$\left.\begin{aligned}
\int_V g\frac{\partial h}{\partial x}\, dV &= \int_S n_x ghdS - \int_V \frac{\partial g}{\partial x}\, hdV \,, \\
\int_V g\frac{\partial h}{\partial y}\, dV &= \int_S n_y ghdS - \int_V \frac{\partial g}{\partial y}\, hdV \,, \\
\int_V g\frac{\partial h}{\partial z}\, dV &= \int_S n_z ghdS - \int_A \frac{\partial g}{\partial z}\, hdV \,,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.2.11)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_A g\frac{\partial h}{\partial x}\, dA &= \int_s n_x ghds - \int_A \frac{\partial g}{\partial x}\, hdA \,, \\
\int_A g\frac{\partial h}{\partial y}\, dA &= \int_s n_y ghds - \int_A \frac{\partial g}{\partial y}\, hdA \,,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(L.2.11')}$$

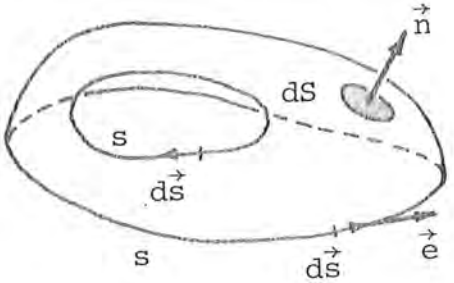
$$\int_{x_1}^{x_2} g\frac{dh}{dx}\, dx = \Big|_{x_1}^{x_2} gh - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dg}{dx}\, hdx \,. \qquad \text{(L.2.11'')}$$

Todettakoon, että ylläesitetyt kaavat pätevät luonnollisesti vastaavina, jos riippumattomien koordinaattien tunnusten x,y,z sijasta käytetään tunnuksia a,b,c.

L.2.3 Stokesin lause

Yleistetty Stokesin lause [3.2, s.154] on

$$\int_S (d\vec{S}\times\vec{\nabla})*f = \int_s d\vec{s}*f \qquad \text{(L.2.12)}$$



Kuva L.2.3

eli

$$\int_S (\vec{n}\times\vec{\nabla})*f dS = \int_s \vec{e}*f ds \ . \qquad \text{(L.2.12')}$$

Suure f voi olla jälleen skalaari-, vektori- tai tensorifunktio.

Tavanomainen Stokesin lause syntyy valitsemalla $f \to \vec{f}$ ja $* \to \cdot$ sekä ottamalla huomioon, että skalaarikolmitulo $(\vec{n}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{f} = \vec{\nabla}\times\vec{f}\cdot\vec{n}$, jolloin saadaan

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{f}\cdot\vec{n}S = \int_s \vec{f}\cdot d\vec{s} \ . \qquad \text{(L.2.12'')}$$

Kaarialkion $d\vec{s}$ suunta on valittava siten, että kun liikutaan pinnan S valitulla positiivisella puolella reunaa pitkin alkion $d\vec{s}$ osoittamaan suuntaan, pinta S jää vasemmalle puolelle.

L.2.4 Leibnitzin sääntö

Integraalin

$$I(x,y,t) = \int_{z_1(x,y,t)}^{z_2(x,y,t)} f(x,y,z,t)\,dz \tag{L.2.13}$$

osittaisderivaatat parametrien x, y ja t suhteen ovat [3.3, s. 30]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial x} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f}{\partial x}\,dz + f\Big|_{z=z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x} - f\Big|_{z=z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}\,, \\
\frac{\partial I}{\partial y} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f}{\partial y}\,dz + f\Big|_{z=z_2}\frac{\partial z_2}{\partial y} - f\Big|_{z=z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y}\,, \\
\frac{\partial I}{\partial t} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dz + f\Big|_{z=z_2}\frac{\partial z_2}{\partial t} - f\Big|_{z=z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{L.2.14}$$