Osa I: Sauvarakenteiden kimmoiset menetelmät

2. Yksikkövoimamanetelmä

Tehtävä 2.1:

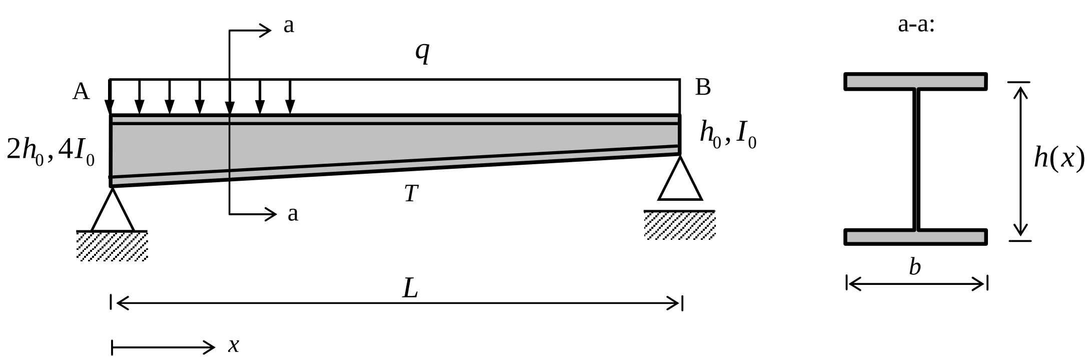
Oheisen ohutuumaisen I-palkin korkeus vaihtelee lineaarisesti kaavan

$$h(x) = h_0(2 - \frac{x}{L}),$$

mukaisesti, missä h_0 on palkin korkeus sen oikeassa päässä B. Jos laippojen jäyhyysmomentti oman pintakeskiöakselinsa suhteen ja uuman jäyhyysmomentti jätetään pieninä suureina huomioonottamatta, poikkileikkauksen jäyhyysmomentti on likimain

$$I \approx 2 \cdot bt \cdot [\frac{h(x)}{2}]^2 = \frac{b_0 t h_0^2}{2}(2 - \frac{x}{L})^2 = I_0(2 - \frac{x}{L})^2,$$

missä $I_0 = bth_0^2/2$ on sen arvo palkin oikeassa päässä B. Määritä palkin oikean pään B kiertymä, (a) kun palkkia kuormittaa tasainen kuorma q ja (b) kun palkin alalaippa saa vakiosuuruisen lämpötilan muutoksen T ja ylälaipan lämpötila ei muutu. Palkin kimmomoduuli on E ja pituuden lämpötilakerroin on α_T. Suorita integroinnit Simpsonin kaavalla neljää jakoväliä $(n = 4)$ käyttäen. Määritä lisäksi (b) kohdan tulos suorittamalla integrointi analyyttisesti ja määritä Simpsonin kaavalla laskemasi tuloksen virheprosentti.



Ohje: Analyyttisessä integroinnissa voit käyttää seuraavaa kaavaa.

$$\int \frac{xdx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b).$$

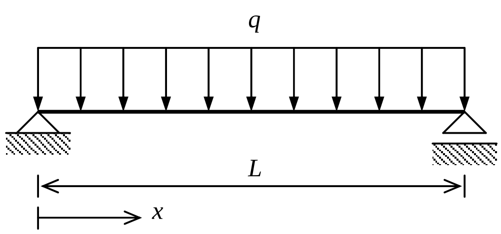
Ratkaisu:

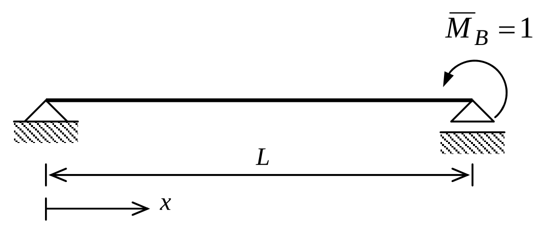
a) Kiertymä tasaisesta kuormasta.

Yksikkövoimamenetelmä:

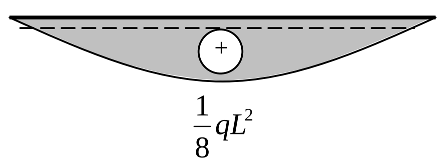
$$\overbrace{\overline{M}_B}^{=1}\varphi_B = \int_0^L \frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI(x)}\,dx \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = \int_0^L \frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI(x)}\,dx\,.$$

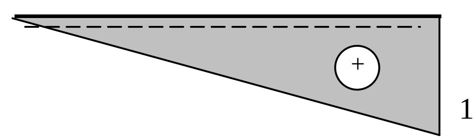
Ulkoinen kuorma: Yksikkömomentti $\overline{M}_B = 1$:





M – kuvio $\overline{M}$ – kuvio





$$M(x) = \frac{q}{2}(Lx - x^2)\,, \qquad \overline{M}(x) = \frac{x}{L}\,.$$

Merkitään

$$F(x) = \frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI(x)} = \frac{q}{EI_0 L}\frac{Lx^2 - x^3}{2(2-\frac{x}{L})^2}$$

ja käytetään Simpsonin kaavassa neljää jakoväliä, jolloin

$$\varphi_B = \int_0^L F(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4)\,,$$

missä $F_i = F(x_i), \quad x_i = i\Delta x, \quad (i = 0,\cdots,4)$.

Suoritetaan laskelmat oheisen taulukon muodossa:

i	$\frac{x_i}{L}$	Kerroin	$\frac{EI_0}{qL^2}F_i$
0	0	1	0
1	0.25	4	0.007653
2	0.5	2	0.027777
3	0.75	4	0.045000
4	1	1	0

$$\varphi_B = \frac{L}{3\cdot 4}\frac{qL^2}{EI_0}(0+4\cdot 0.007653+2\cdot 0.027777+4\cdot 0.045000+0) = \underline{\underline{0.02218\frac{qL^3}{EI_0}}}\,.$$

b) Kiertymä lämpötilan muutoksesta.

Yksikkövoimamenetelmä:

$$\varphi_B = \int_0^L \overline{M}(x)\kappa_0(x)dx\,,$$

missä alkukäyristymä on

$$\kappa_0(x) = \frac{\alpha_T \Delta T}{h(x)} = \frac{\alpha_T T}{h_0(2-\frac{x}{L})}\,.$$

Merkitään

$$F(x) = \overline{M}(x)\kappa_0(x) = \frac{x}{L}\frac{\alpha_T T}{h_0(2-\frac{x}{L})} = \frac{\alpha_T T}{h_0 L}\frac{x}{2-\frac{x}{L}}\,.$$

Simpson:

$$\varphi_B = \int_0^L F(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(F_0+4F_1+2F_2+4F_3+F_4)\,.$$

Taulukko:

i	$\frac{x_i}{L}$	Kerroin	$\frac{h_0}{\alpha_T T}F_i$
0	0	1	0
1	0.25	4	0.142857
2	0.5	2	0.333333
3	0.75	4	0.6
4	1	1	1

$$\varphi_B = \frac{L}{3 \cdot 4}\frac{\alpha_T T}{h_0}(0 + 4 \cdot 0.142857 + 2 \cdot 0.333333 + 4 \cdot 0.6 + 1) = \underline{\underline{0.38651\frac{\alpha_T TL}{h_0}}}\,.$$

b)-kohdan kiertymä analyyttisesti:

$$\varphi_B = \int_0^L F(x)dx = \frac{\alpha_T T}{h_0 L}\int_0^L \frac{x}{2-\frac{x}{L}}dx = \frac{\alpha_T T}{h_0 L}\Big|_0^L[-Lx - 2L^2\ln(2-\frac{x}{L})]$$

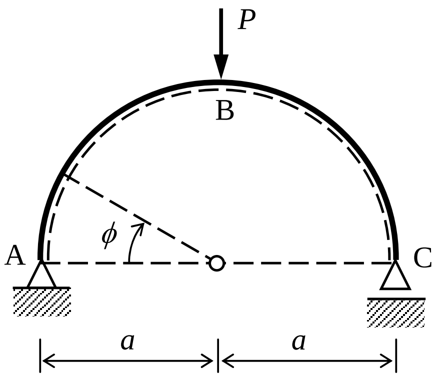
$$= \frac{\alpha_T T}{h_0 L}[-L^2 - 2L^2 \overbrace{\ln(1)}^{0} + 2L^2\ln(2)] = [2\ln(2) - 1]\frac{\alpha_T TL}{h_0} \approx \underline{\underline{0.38629\frac{\alpha_T TL}{h_0}}}.$$

Simpsonin kaavalla lasketun tuloksen virheprosentti:

$$e = \frac{0.38651 - 0.38629}{0.38629} \cdot 100\% = \underline{\underline{0.057\%}}\,.$$

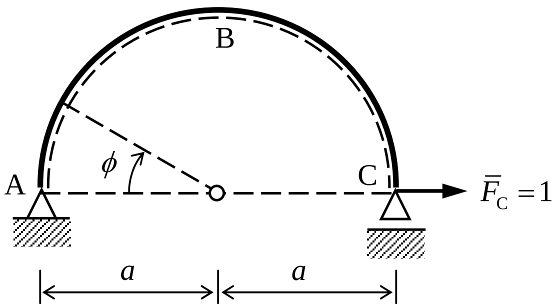
Tehtävä 2.2:

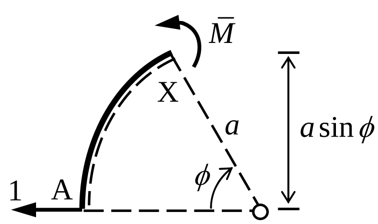
Oheista puoliympyrän muotoista kaarta kuormittaa pistekuorma P sen lakipisteessä B ja kaaren taivutusjäykkyys on EI. Määritä yksikkövoimamenetelmällä tukipisteen C vaakasiirtymä, kun kaari otaksutaan aksiaalisesti jäykäksi ($EA = \infty$).



Ratkaisut:

Virtuaalinen taivutusmomentti $\overline{M}$ **:**

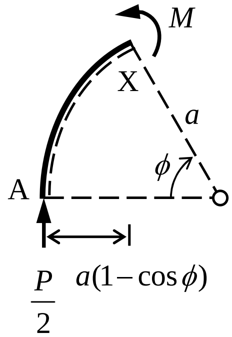




X $\quad \overline{M} - a\sin\phi = 0 \;\Rightarrow\; \overline{M} = a\sin\phi$

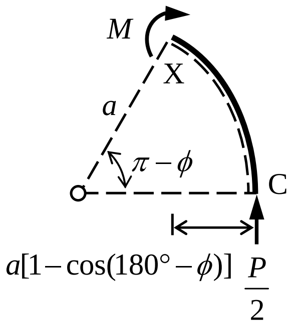
Todellinen taivutusmomentti M **:**

Väli AB:



$$\text{X}\curvearrowleft \quad M - \frac{P}{2}a(1-\cos\phi) = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{Pa}{2}(1-\cos\phi)$$

Väli BC:



$$\text{X}\curvearrowleft \quad -M + \frac{P}{2}a[1-\cos(\pi-\phi)] = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{Pa}{2}(1+\cos\phi)$$

Yksikkövoimamenetelmä:

$$\overbrace{\bar{F}_{\mathrm{C}}}^{1}\delta_{\mathrm{C}} = \int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}ds \;\Rightarrow\; \delta_{\mathrm{C}} = \int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}ds = \frac{1}{EI}\int_0^L \bar{M}M\,ds$$

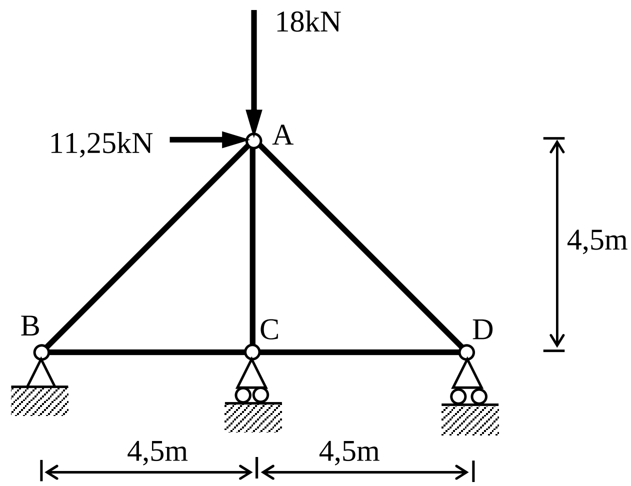
Vaihdetaan integrointimuuttujaksi ϕ. Jos koordinaattia s mitataan pisteestä A lähtien, saadaan $s = a\phi$, $ds = ad\phi$ ja $\phi = s/a$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{C}} &= \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} \bar{M}Mad\phi = \frac{a}{EI}\int_0^{\pi}\bar{M}Md\phi \\
&= \frac{a}{EI}[\int_0^{\pi/2} a\sin\phi\cdot\frac{Pa}{2}(1-\cos\phi)d\phi + \int_{\pi/2}^{\pi} a\sin\phi\cdot\frac{Pa}{2}(1+\cos\phi)d\phi] \\
&= \frac{Pa^3}{2EI}[\int_0^{\pi/2}(\sin\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi)d\phi + \int_{\pi/2}^{\pi}(\sin\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi)d\phi] \\
&= \frac{Pa^3}{2EI}[\Big|_0^{\pi/2}(-\cos\phi + \frac{1}{4}\cos 2\phi) + \Big|_{\pi/2}^{\pi}(-\cos\phi - \frac{1}{4}\cos 2\phi)] \\
&= \underline{\underline{\frac{Pa^3}{2EI}}}
\end{aligned}$$

3 Yleinen voimamenetelmä

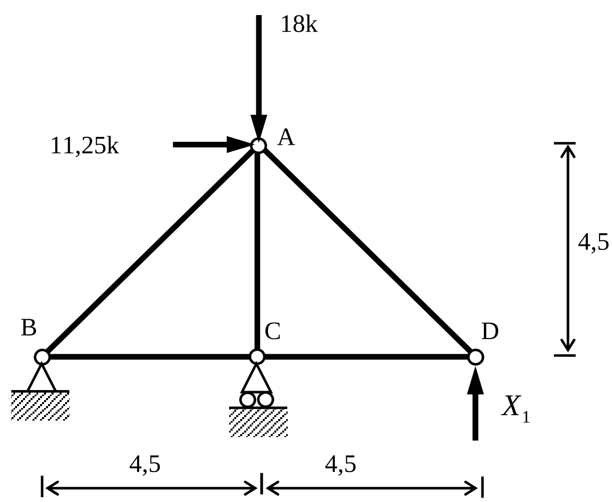
Tehtävä 3.1:

Oheisen ristikon kaikkien sauvojen aksiaalijäykkyys *EA* on vakio. Määritä sauvavoimat.



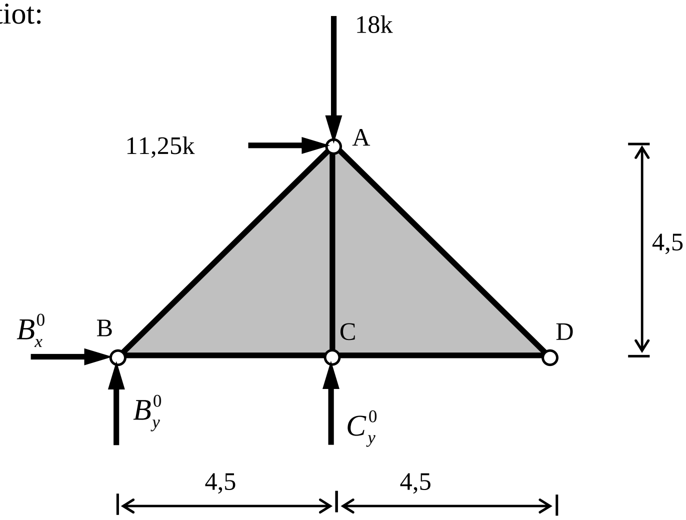
Ratkaisu:

<u>Staattisesti määrätty perusmuoto:</u>



<u>Sauvavoimat ulkoisesti kuormasta:</u>

Tukireaktiot:

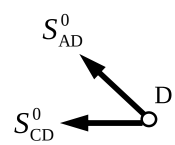


$$\rightarrow \quad B_x^0 + 11,25\text{kN}=0 \;\Rightarrow\; B_x^0 = -11,25\text{kN}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{B}} \quad C_y^0 \cdot 4,5\text{m} - 11,25 \cdot 4,5\text{m} - 18\text{kN} \cdot 4,5\text{m}=0 \;\Rightarrow\; C_y^0 = 29,25\text{kN}$$

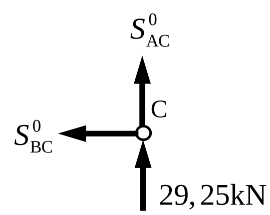
$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{C}} \quad -B_y^0 \cdot 4,5\text{m} - 11,25 \cdot 4,5\text{m}=0 \;\Rightarrow\; B_y^0 = -11,25\text{kN}$$

Sauvavoimat nivelmenetelmällä:



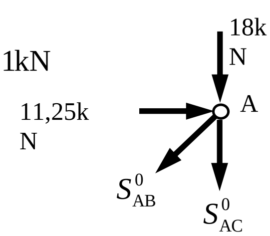
$$\uparrow \quad S_{\mathrm{AD}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{AD}}^0 = 0$$

$$\rightarrow \quad -S_{\mathrm{CD}}^0 - S_{\mathrm{AD}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{CD}}^0 = 0$$



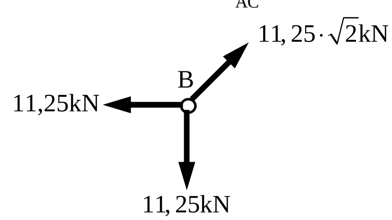
$$\uparrow \quad S_{\mathrm{AC}}^0 + 29,25\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{AC}}^0 = -29,25\text{kN}$$

$$\rightarrow \quad -S_{\mathrm{BC}}^0 = 0 \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{BC}}^0 = 0$$



$$\uparrow \quad -S_{\mathrm{AB}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} + 11,25\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{AB}}^0 = 11,25\text{kN} \cdot \sqrt{2} = 15,91\text{kN}$$

$$\rightarrow \quad -S_{\mathrm{AB}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} - S_{\mathrm{AC}}^0 - 18\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{AC}}^0 = -6,75\text{kN}$$

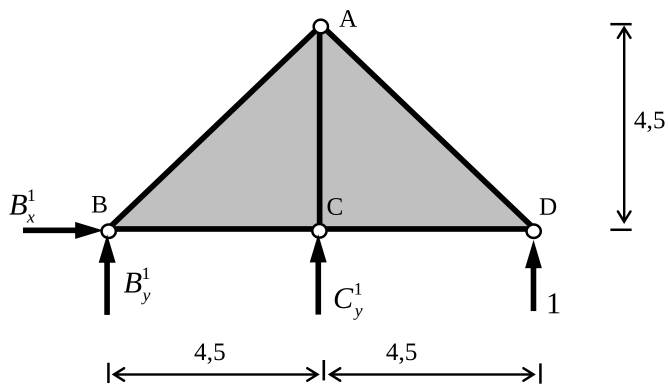


$$\uparrow \quad 11{,}25\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 11,25\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0,\ \text{OK}$$

$$\rightarrow \quad 11{,}25\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 11,25\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0,\ \text{OK}$$

<u>Sauvavoimat kuormasta $X_1 = 1$:</u>

Tukireaktiot:



$\rightarrow\ B_x^1 = 0$

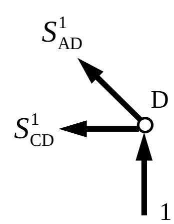
B) $C_y^1 \cdot 4,5\text{m} + 1 \cdot 9\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; C_y^1 = -2$

C) $-B_y^1 \cdot 4,5\text{m} + 1 \cdot 4,5\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; B_y^1 = 1$

Sauvavoimat nivelmenetelmällä:

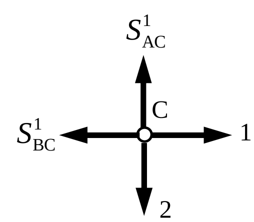
$$\uparrow \quad S_{\text{AD}}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; S_{\text{AD}}^1 = -\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \quad -S_{\text{CD}}^1 - S_{\text{AD}}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\text{CD}}^1 = 1$$



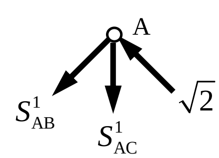
$$\uparrow \quad S_{\text{AC}}^1 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; S_{\text{AC}}^1 = 2$$

$$\rightarrow \quad -S_{\text{BC}}^1 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; S_{\text{BC}}^1 = 1$$



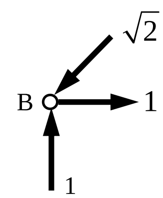
$$\uparrow \quad \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - S_{\text{AB}}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} - S_{\text{AC}}^1 = 0 \;\Rightarrow\; S_{\text{AC}}^1 = 2$$

$$\rightarrow \quad -S_{\text{AB}}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\text{AB}}^1 = -\sqrt{2}$$



$$\uparrow \quad 1 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0,\ \text{OK}$$

$$\rightarrow \quad 1 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0,\ \text{OK}$$



Staattisesti määräämätön suure:

Sauva	L [m]	S^0 [kN]	S^1	$S^0 S^1 L$ [kNm]	$(S^1)^2 L$ [m]
AB	$4,5\sqrt{2}$m	$11,25\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-143,19$	12,73
AC	4,5m	$-29,25$	2	$-263,25$	18
AD	$4,5\sqrt{2}$m	0	$-\sqrt{2}$	0	12,73
BC	4,5m	0	1	0	4,5
CD	4,5m	0	1	0	4,5
$\sum$				$-406,44$	52,46

$$\delta_{10} = \sum \frac{S^0 S^1 L}{EA} = \frac{1}{EA} \sum S^0 S^1 L = \frac{-406,44\text{Nm}}{EA}$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{(S^1)^2 L}{EA} = \frac{1}{EA} \sum (S^1)^2 L = \frac{52,46\text{m}}{EA}$$

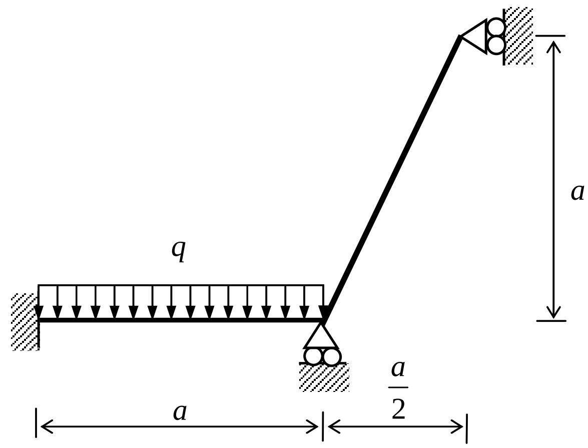
$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-406,44}{52,46}\text{kN} = \underline{7,748\text{kN}}$$

Sauvavoimat:

Sauva	S^0 [kN]	S^1	$S = S^0 + S^1 X_1$ [kN]
AB	$11,25\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	4,95
AC	$-29,25$	2	$-13,75$
AD	0	$-\sqrt{2}$	$-10,96$
BC	0	1	7,75
CD	0	1	7,75

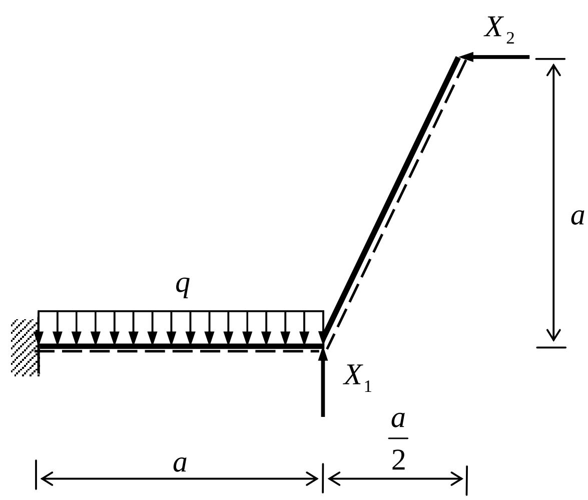
Tehtävä 3.2:

Määritä yleisellä voimamenetelmällä oheisen tasajäykän tasokehän taivutusmomentti-kuvio. Sauvojen taivutusjäykkyys on EI ja ne ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA = \infty$).

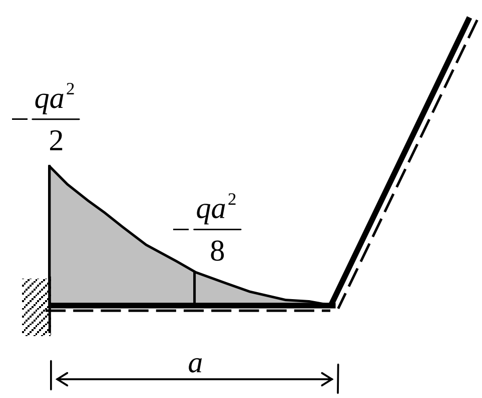


Ratkaisu:

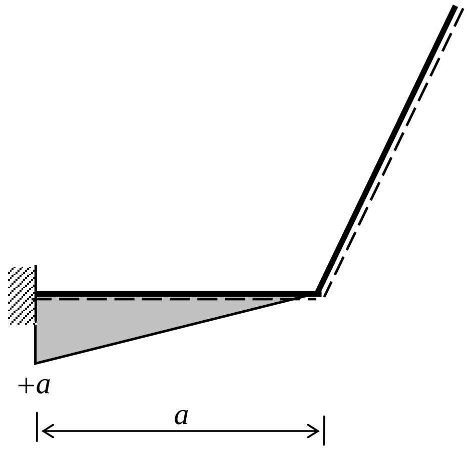
SMPM:



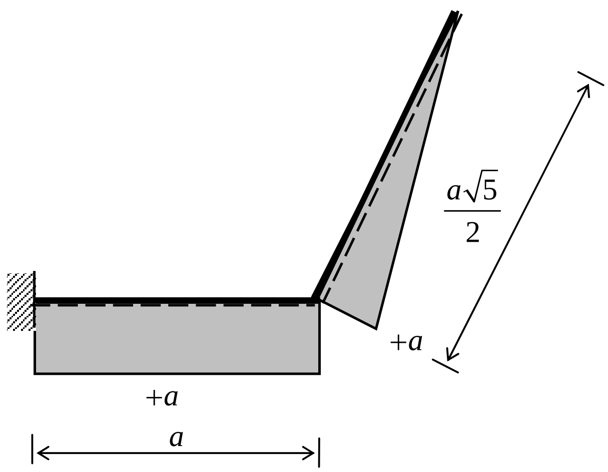
M_0 -kuvio:



M_1 -kuvio:



M_2 -kuvio:



SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\int M_1 M_0 ds = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{4}a\cdot a\cdot(-\frac{1}{2}qa^2) = -\frac{1}{8}\frac{qa^4}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\int M_2 M_0 ds = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot a\cdot a\cdot(-\frac{1}{2}qa^2) = -\frac{1}{6}\frac{qa^4}{EI}\cdot$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\int M_1^2 ds = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot a\cdot a^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\int M_1 M_2 ds = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot a = \frac{1}{2}\frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\int M_2^2 ds = \frac{1}{EI}\cdot(a\cdot a^2 + \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{5}}{2}\cdot a^2) = \frac{6+\sqrt{5}}{6}\frac{a^3}{EI}$$

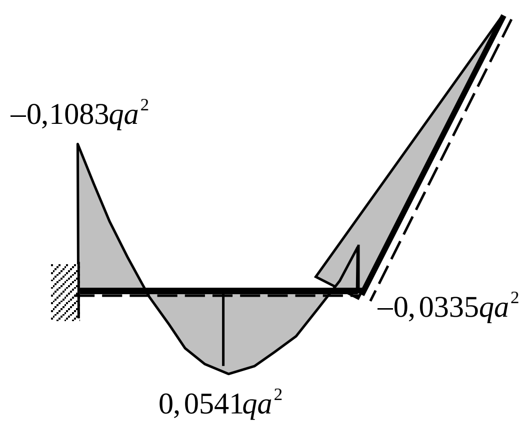
Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\delta_{10} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -\delta_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}X_1 + \dfrac{1}{2}X_2 = \dfrac{1}{8}qa \\ \dfrac{1}{2}X_1 + \dfrac{6+\sqrt{5}}{6}X_2 = \dfrac{1}{6}qa \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = \dfrac{3}{4}qa \\ 3X_1 + (6+\sqrt{5})X_2 = qa \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6+\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{3}{4} \\ 1 \end{Bmatrix} qa$$

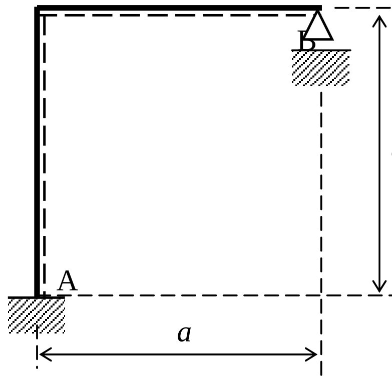
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3+2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6+\sqrt{5} & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{3}{4} \\ 1 \end{Bmatrix} qa = \frac{1}{3+2\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} \dfrac{3}{4}(2+\sqrt{5}) \\ -\dfrac{1}{4} \end{Bmatrix} qa = \begin{Bmatrix} 0,4252qa \\ -0,0335qa \end{Bmatrix}$$

M-kuvio:



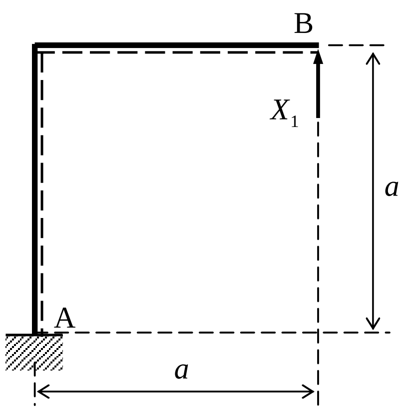
Tehtävä 3.3:

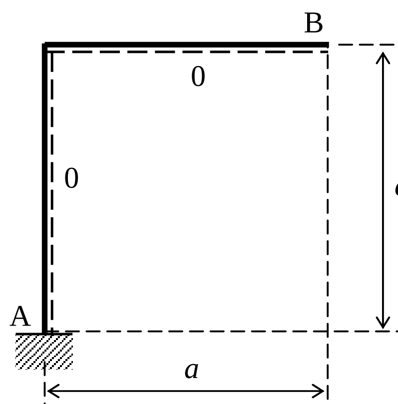
Määritä yleisellä voimamenetelmällä ja piirrä oheisen tasokehän vakiosuuruisesta lämpötilan muutoksesta T aiheutuvat normaalivoima- ja taivutusmomenttikuviot. Sauvat ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA = \infty$) sekä niiden taivutusjäykkyys EI ja pituuden lämpötilakerroin α_T ovat vakioita.



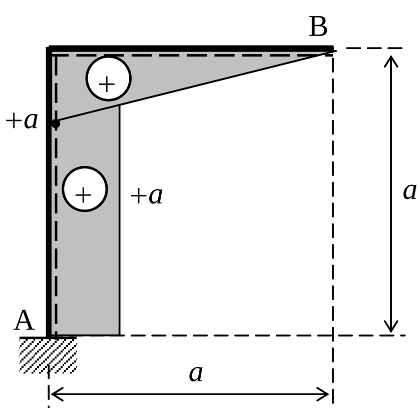
Ratkaisu:

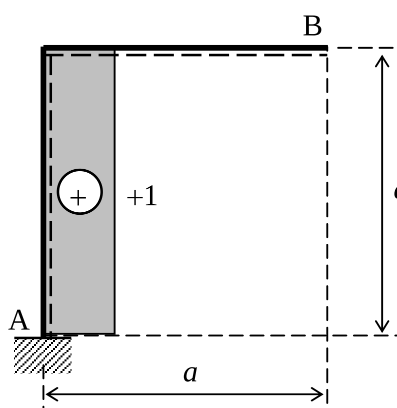
SMPM: M_0-kuvio:





M_1-kuvio: N_1-kuvio:

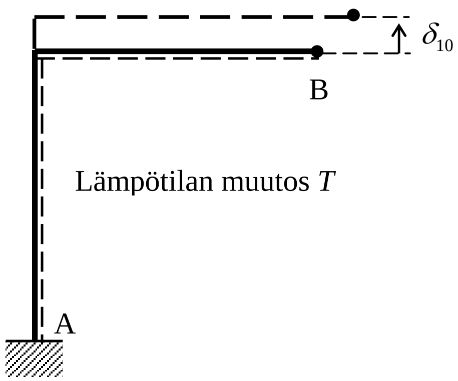


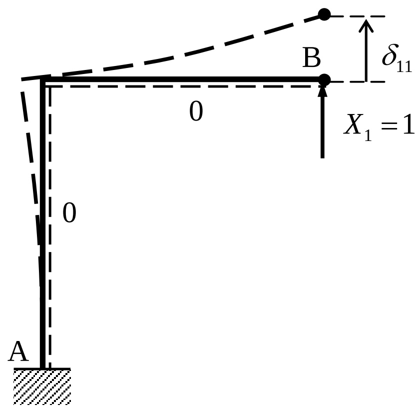


SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^a \left(\frac{M_1 \overbrace{M_0}^{0}}{EI} + \overbrace{N_1}^{1} \overbrace{\varepsilon_0}^{\alpha_T T}\right) dx = \alpha_T T \int_0^a 1 dx = \alpha_T Ta$$

$$\delta_{11} = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^a \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI}(a \cdot a^2 + \frac{1}{3} a \cdot a^2) = \frac{4}{3}\frac{a^3}{EI}$$





Yhtälö ja ratkaisu:

$$\delta_1 \equiv \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

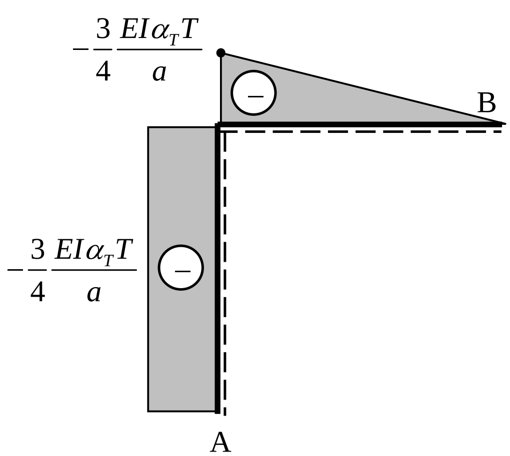
$$\Rightarrow \; \mathrm{X}_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\alpha_T Ta}{\frac{4}{3}\frac{qa^3}{EI}} = -\frac{3}{4}\frac{EI\alpha_T T}{a^2}$$

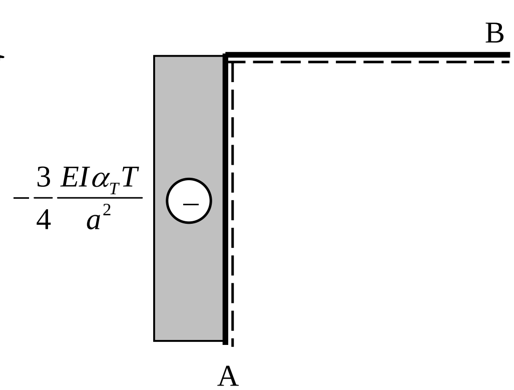
Normaalivoima- ja taivutusmomenttikuviot:

$$N(x) = N_0(x) + X_1 N_1(x) = -\frac{3}{4}\frac{EI\alpha_T T}{a^2} N_1(x)$$

$$M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x) = -\frac{3}{4}\frac{EI\alpha_T T}{a^2} M_1(x)$$

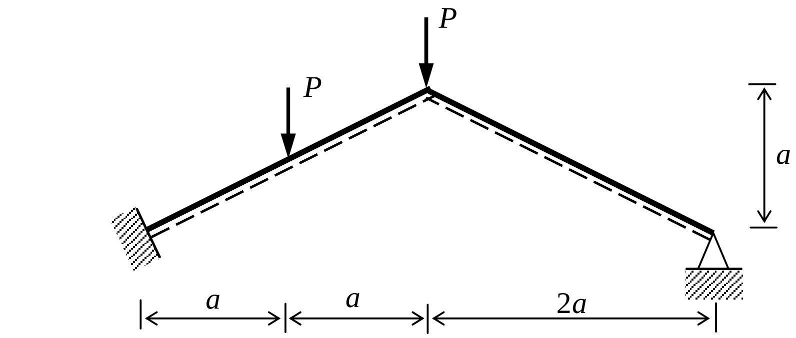
M-kuvio: N-kuvio:





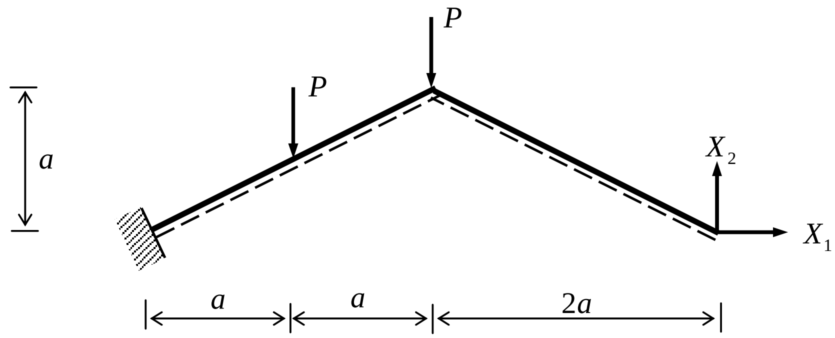
Tehtävä 3.4:

Määritä yleisellä voimamenetelmällä oheisen tasajäykän tasokehän taivutusmomentti-kuvio. Sauvojen taivutusjäykkyys on EI ja ne ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA = \infty$).

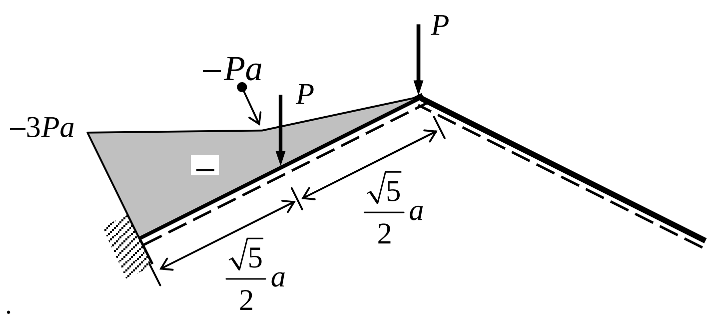


Ratkaisu:

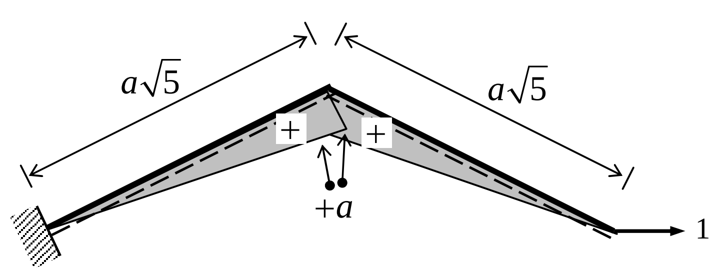
SMPM:



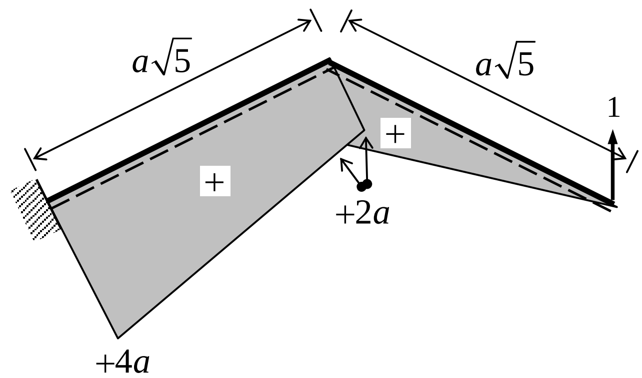
M_0 -kuvio:



M_1 -kuvio:



M_2 -kuvio:



SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \{\frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a \cdot [-3Pa + 2 \cdot (-Pa)] \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a \cdot (-Pa) \cdot (2 \cdot \frac{a}{2} + a)\}$$

$$= -\frac{3\sqrt{5}}{8} \frac{Pa^3}{EI},$$

$$\delta_{20} = \int \frac{M_0 M_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \{\frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a \cdot [(-3Pa) \cdot (2 \cdot 4a + 3a) + (-Pa) \cdot (4a + 2 \cdot 3a)] +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a \cdot (-Pa) \cdot (2 \cdot 3a + 2a)\} = -\frac{17\sqrt{5}}{4} \frac{Pa^3}{EI},$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot (\frac{1}{3} \cdot a\sqrt{5} \cdot a^2 + \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{5} \cdot a^2) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \frac{a^3}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot [\frac{1}{6} \cdot a\sqrt{5} \cdot (4a + 2 \cdot 2a) \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{5} \cdot a \cdot 2a] = 2\sqrt{5} \frac{a^3}{EI},$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} [\frac{1}{3} \cdot a\sqrt{5} \cdot [(4a)^2 + 4a \cdot 2a + (2a)^2] \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{5} \cdot (2a)^2] = \frac{32}{3} \sqrt{5} \frac{a^3}{EI}.$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 &= -\delta_{10} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 &= -\delta_{20} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{2\sqrt{5}}{3} X_1 + 2\sqrt{5} X_2 &= \frac{3\sqrt{5}}{8} P \\ 2\sqrt{5} X_1 + \frac{32}{3}\sqrt{5} X_2 &= \frac{17\sqrt{5}}{4} P \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2X_1 + 6X_2 &= \frac{9}{8} P \\ 6X_1 + 32X_2 &= \frac{51}{4} P \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{P}{8} \begin{Bmatrix} 9 \\ 102 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 32 - 6^2} \begin{bmatrix} 32 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \frac{P}{8} \begin{Bmatrix} 9 \\ 102 \end{Bmatrix} = \frac{P}{28 \cdot 8} \begin{Bmatrix} -324 \\ 150 \end{Bmatrix}, \text{Tai}$$

$$X_1 = -\frac{81}{56} P, \; X_2 = \frac{75}{112} P.$$

Taivutusmometin arvoja:

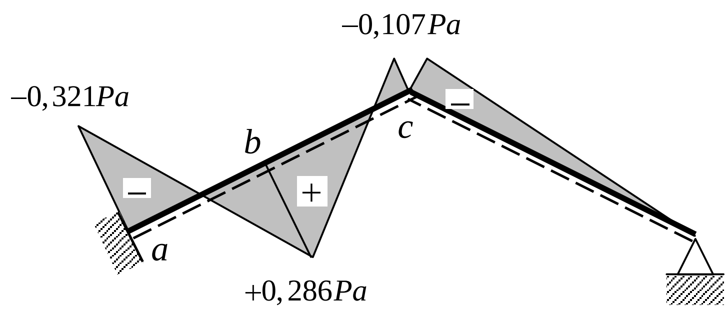
$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

$$M_a = -3Pa + 0\cdot(-\frac{81}{56}P) + 4a\cdot\frac{75}{112}P = -\frac{9}{28}Pa \approx -0{,}321Pa,$$

$$M_b = -Pa + \frac{a}{2}\cdot(-\frac{81}{56}P) + 3a\cdot\frac{75}{112}P = \frac{8}{28}Pa \approx 0{,}286Pa,$$

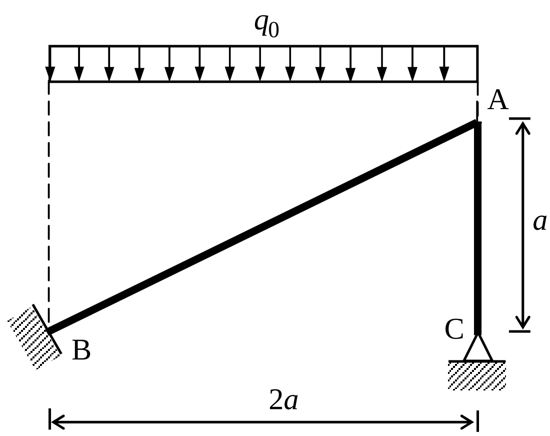
$$M_c = 0 + a\cdot(-\frac{81}{56}P) + 2a\cdot\frac{75}{112}P = -\frac{3}{28} \approx -0{,}107Pa.$$

M-kuvio:



Tehtävä 3.5:

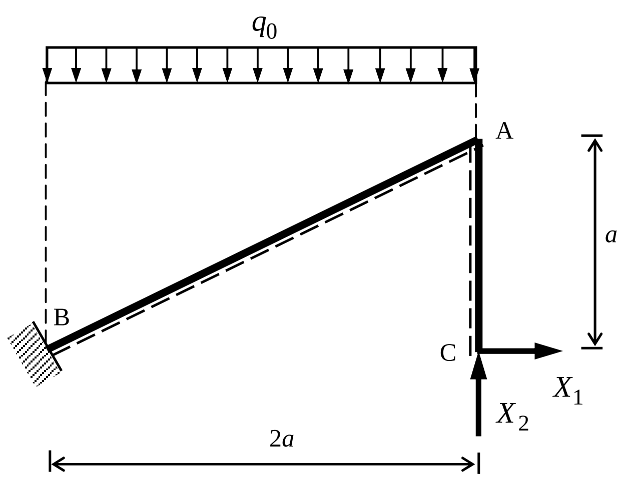
Ohesta tasokehää kuormittaa kuvan (vaakatason pituutta kohti) tasan jakautunut lumikuorma q_0. Määritä yleisellä voimamenetelmällä kehän taivutusmomenttikuvio. Sauvat otaksutaan aksiaalisesti jäykiksi ($EA = \infty$) ja niiden taivutusjäykkyys on *EI*.



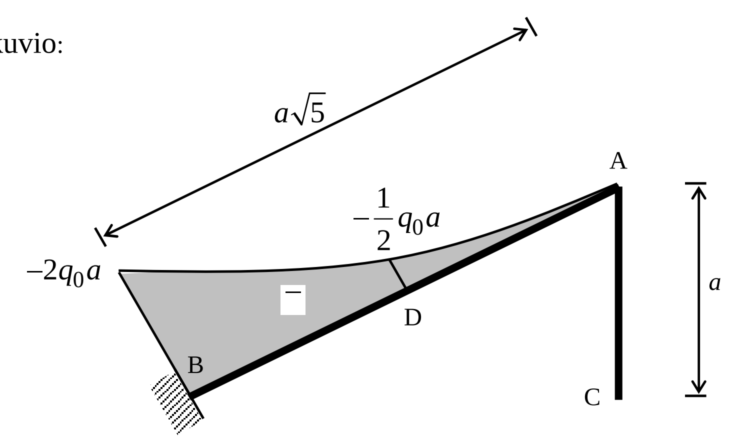
Ratkaisu:

(a)

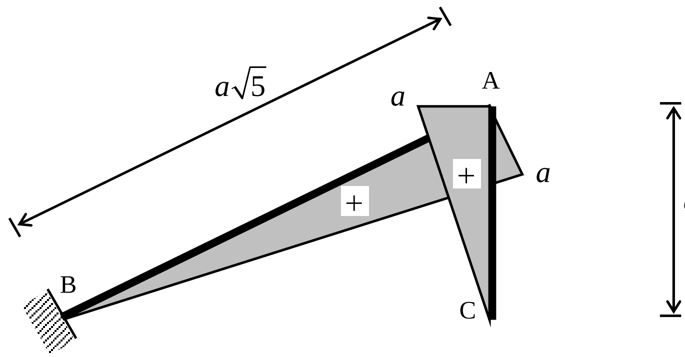
SMPM:



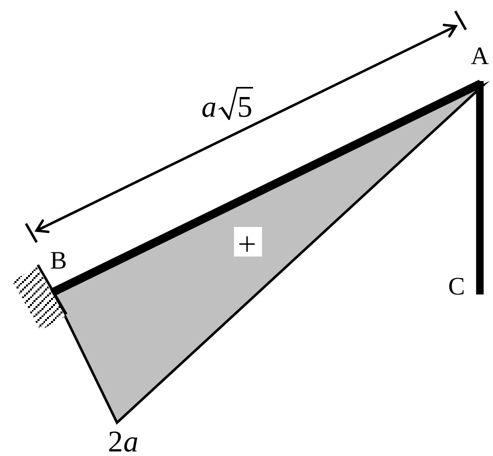
M_0 -kuvio:



M_1 -kuvio:



M_2 -kuvio:



SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot a \cdot (-\frac{1}{2} q_0 a^2) = -\frac{\sqrt{5}}{6} \frac{q_0 a^4}{EI}$$

$$\delta_{20} = \int \frac{M_2 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{a\sqrt{5}}{6} \cdot 2a \cdot [-2q_0 a^2 + 2(-\frac{1}{2} q_0 a^2)] = -\sqrt{5} \frac{q_0 a^4}{EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} (\frac{a\sqrt{5}}{3} a^2 + \frac{a}{3} a^2) = \frac{\sqrt{5}+1}{3} \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{a\sqrt{5}}{6} a \cdot 2a = \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{a\sqrt{5}}{3} (2a)^2 = \frac{4\sqrt{5}}{3} \frac{a^3}{EI}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} \delta_1 \equiv \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_2 \equiv \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{5}}{6}\dfrac{q_0 a^4}{EI} + \dfrac{\sqrt{5}+1}{3}\dfrac{a^3}{EI} X_1 + \dfrac{\sqrt{5}}{3}\dfrac{a^3}{EI} X_2 = 0 \\ -\sqrt{5}\dfrac{q_0 a^4}{EI} + \dfrac{\sqrt{5}}{3}\dfrac{a^3}{EI} X_1 + \dfrac{4\sqrt{5}}{3}\dfrac{a^3}{EI} X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}) X_1 + 4X_2 = 2q_0 a \\ X_1 + 4X_2 = 3q_0 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+4} q_0 a \approx \underline{-0,2088 q_0 a} \\ X_2 = \dfrac{5\sqrt{5}+6}{6\sqrt{5}+8} q_0 a \approx \underline{0,8022 q_0 a} \end{cases}$$

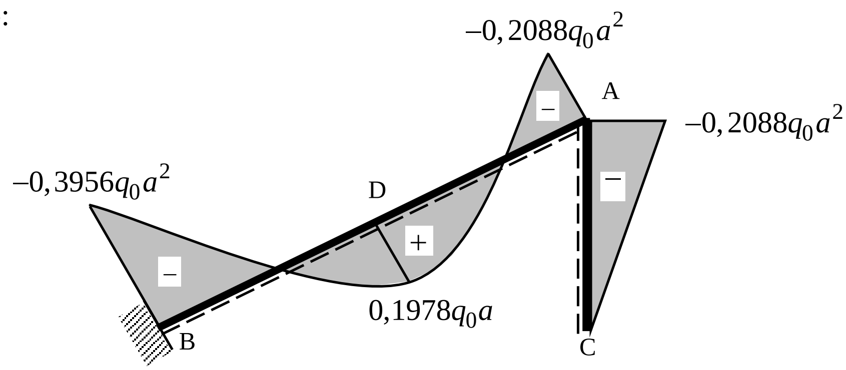
Taivutusmomentit pisteissa A, B ja D:

$$M_A = M_{A0} + M_{A1} X_1 + M_{A2} X_2 \approx 0 + a \cdot (-0,2088 q_0 a) + 0 \cdot 0,8022 q_0 a = \underline{-0,2088 q_0 a^2}$$

$$M_B = M_{B0} + M_{B1} X_1 + M_{B2} X_2 \approx -2q_0 a + 0 \cdot (-0,2088 q_0 a) + 2a \cdot 0,8022 q_0 a = \underline{-0,3956 q_0 a^2}$$

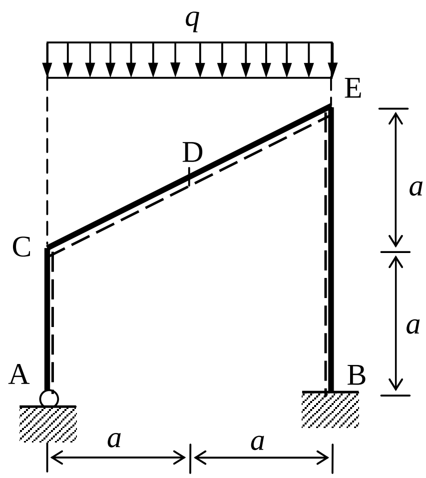
$$M_D = M_{D0} + M_{D1} X_1 + M_{D2} X_2 = -\frac{1}{2} q_0 a + \frac{a}{2}(-0,2088 q_0 a) + a \cdot 0,8022 q_0 a = \underline{0,1978 q_0 a^2}$$

M-kuvio:



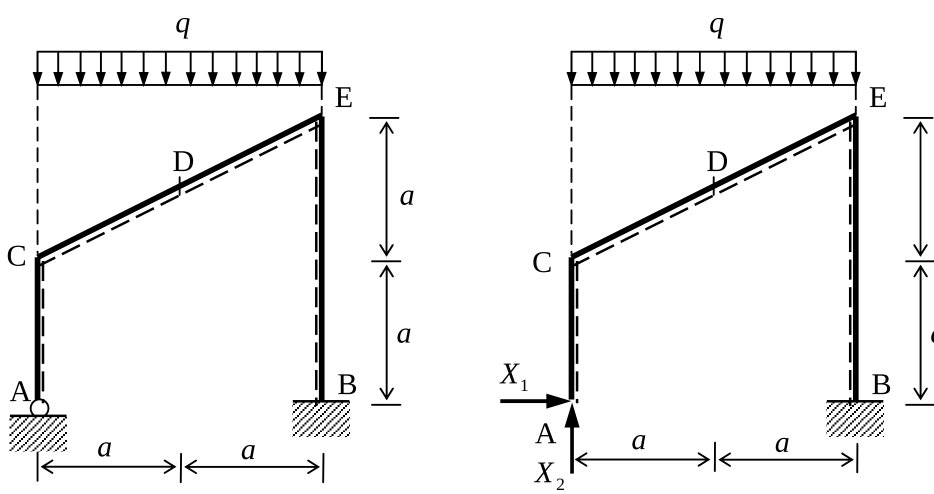
Tehtävä 3.6:

Kuvan tasokehä on tuettu liikkumattomalla niveltuella pisteessä A ja se on jäykästi kiinnitetty pisteessä B. Sauvaa CE kuormittaa (vaakatason pituutta kohti) tasan jakau-tunut lumikuorma q. Määritä (a) yleisellä voimamenetelmällä kehän taivutusmomentti-kuvio. Kehän kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI, ne ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA = \infty$) ja noudattavat teknistä taivutusteoriaa ($GA = \infty$).

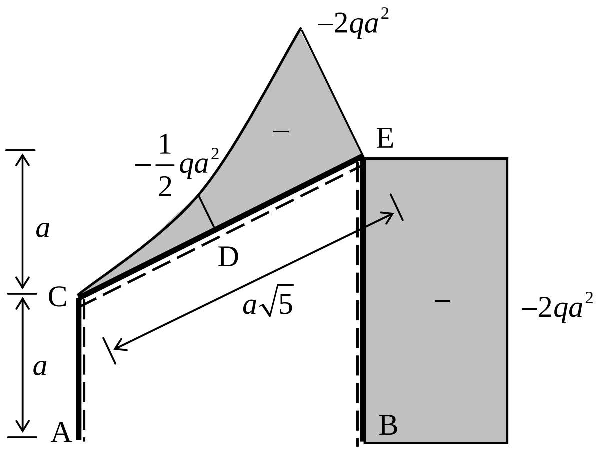


Ratkaisu:

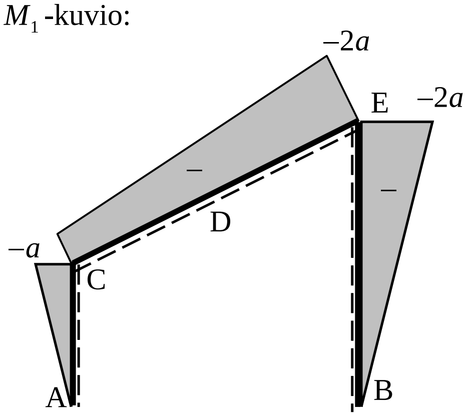
Rakenne ja SMPM:



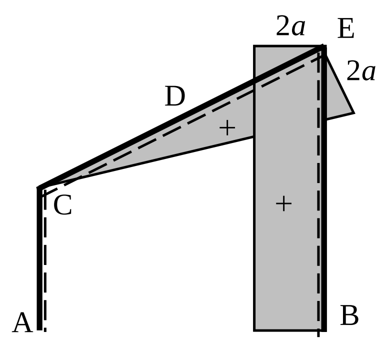
M_0 -kuvio:



M_1 -kuvio:



M_2 -kuvio:



SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^L M_1 M_0 dx = \frac{1}{EI}\{\frac{a\sqrt{5}}{6}[2(-a-2a)(-\frac{1}{2}qa^2)+(-2a)\cdot(-2qa^2)]$$

$$+\frac{2a}{2}(-2a)(-2qa)\} = (\frac{7\sqrt{5}}{6}+4)\frac{qa^4}{EI} \approx \underline{6,6087\frac{qa^4}{EI}}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^L M_2 M_0 dx = \frac{1}{EI}\{\frac{a\sqrt{5}}{6}\cdot 2a[2(-\frac{1}{2}qa^2)-2qa^2]$$

$$+2a\cdot 2a\cdot(-2qa^2)\} = -(\sqrt{5}+8)\frac{qa^4}{EI} \approx \underline{-10,2361\frac{qa^4}{EI}}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^L M_1^2 dx = \frac{1}{EI}\{\frac{a}{3}\cdot a^2 + \frac{a\sqrt{5}}{3}[a^2+a\cdot 2a+(2a)^2]+\frac{2a}{3}(2a)^2\}$$

$$= (3+\frac{7\sqrt{5}}{3})\frac{a^3}{EI} \approx \underline{8,2175\frac{a^3}{EI}}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^L M_1M_2dx=\frac{1}{EI}[\frac{a\sqrt{5}}{6}2a(-a-2\cdot 2a)+\frac{2a}{2}2a(-2a)]$$

$$=-(\frac{5\sqrt{5}}{3}+4)\frac{a^3}{EI}\approx \underline{-7,7268\frac{a^3}{EI}}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^L M_2^2dx=\frac{1}{EI}[\frac{a\sqrt{5}}{3}(2a)^2+2a(2a)^2]$$

$$=(\frac{4\sqrt{5}}{3}+8)\frac{a^3}{EI}\approx \underline{10,9814\frac{a^3}{EI}}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}8,2175 & -7,7268\\ -7,7268 & 10,9814\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-6,6087qa\\ 10,2361qa\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{30,5362}\begin{bmatrix}10,9814 & 7,7268\\ 7,7268 & 8,2175\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-6,6087qa\\ 10,2361qa\end{Bmatrix}=\frac{1}{30,5362}\begin{Bmatrix}6,5195qa\\ 33,0510qa\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}0,2135qa\\ 1,0824qa\end{Bmatrix}$$

Taivutusmomentit pisteissä B-E:

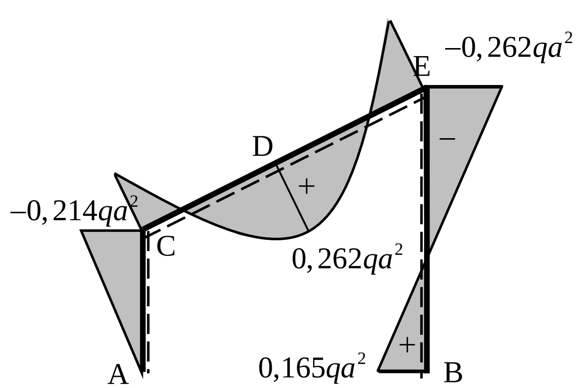
$$M_{\text{B}}=M_{\text{B0}}+X_1M_{\text{B1}}+X_2M_{\text{B2}}=-2qa^2+0,2135qa\cdot 0+1,0824qa\cdot 2a\approx \underline{0,1648qa^2}$$

$$M_{\text{C}}=M_{\text{C0}}+X_1M_{\text{C1}}+X_2M_{\text{C2}}=0+0,2135qa\cdot(-a)+1,0824qa\cdot 0\approx \underline{-0,2135qa^2}$$

$$M_{\text{D}}=M_{\text{D0}}+X_1M_{\text{D1}}+X_2M_{\text{D2}}=-\frac{1}{2}qa^2+0,2135qa\cdot(-\frac{3}{2}a)+1,0824qa\cdot a\approx \underline{0,8203qa^2}$$

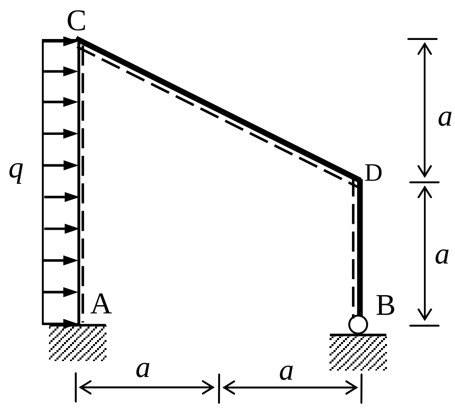
$$M_{\text{E}}=M_{\text{E0}}+X_1M_{\text{E1}}+X_2M_{\text{E2}}=-2qa^2+0,2135qa\cdot(-2a)+1,0824qa\cdot 2a\approx \underline{-0,2622qa^2}$$

M -kuvio:



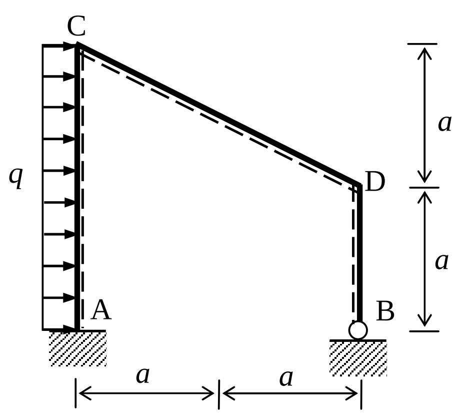
Tehtävä 3.7:

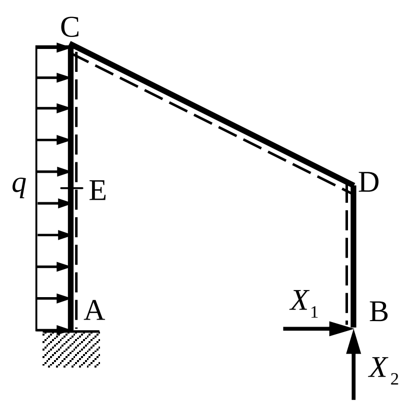
Kuvan tasokehä on jäykästi kiinnitetty pisteessä A ja se on tuettu liikkumattomalla niveltuella pisteessä B. Sauvaa AC kuormittaa tasan jakautunut tuulikuorma q. Määritä yleisellä voimamenetelmällä kehän taivutusmomenttikuvio. Kehän kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI, ne ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA = \infty$) ja noudattavat teknistä taivutusteoriaa ($GA = \infty$).



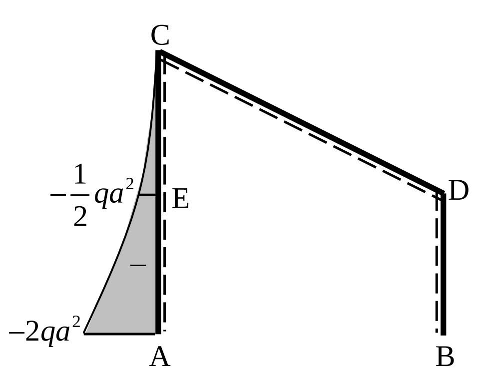
Ratkaisu:

Rakenne ja SMPM:



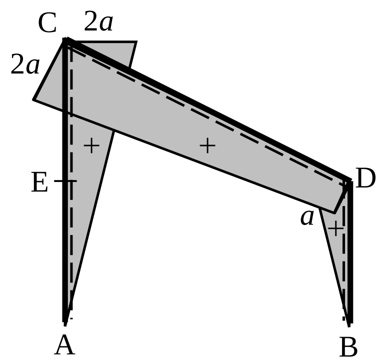


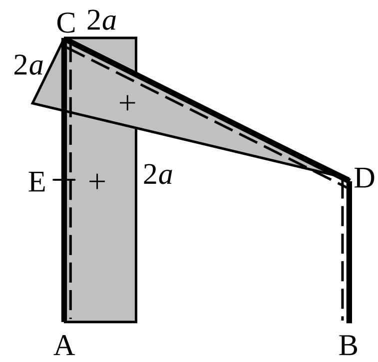
M_0 -kuvio:



M_1 -kuvio:

M_2 -kuvio:





SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_1 M_0 dx = \frac{1}{EI} \frac{2a}{3} 2a \cdot (-\frac{1}{2} qa^2) = -\frac{2}{3} \frac{qa^4}{EI} \approx \underline{-0,6667 \frac{qa^4}{EI}}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_2 M_0 dx = \frac{1}{EI} \frac{2a}{6} 2a \cdot [-2qa^2 + 4 \cdot (-\frac{1}{2} qa^2)] = -\frac{8}{3} \frac{qa^4}{EI} = \underline{-2,6667 \frac{qa^4}{EI}}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_1^2 dx = \frac{1}{EI} \{ \frac{2a}{3} (2a)^2 + \frac{a\sqrt{5}}{3} [(2a)^2 + 2a \cdot a + a^2] + \frac{a}{3} \cdot a^2 \}$$

$$= (3 + \frac{7\sqrt{5}}{3}) \frac{a^3}{EI} \approx \underline{8,2175 \frac{a^3}{EI}}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_1 M_2 dx = \frac{1}{EI} [\frac{2a}{2} 2a \cdot 2a + \frac{a\sqrt{5}}{6} 2a(2 \cdot 2a + a)] = (4 + \frac{5\sqrt{5}}{3}) \frac{a^3}{EI} \approx \underline{7,7268 \frac{a^3}{EI}}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_2^2 dx = \frac{1}{EI} [2a(2a)^2 + \frac{a\sqrt{5}}{3} (2a)^2] = (8 + \frac{4\sqrt{5}}{3}) \frac{a^3}{EI} \approx \underline{10,9814 \frac{a^3}{EI}}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8,2175 & 7,7268 \\ 7,7268 & 10,9814 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,6667qa \\ 2,6667qa \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{30,5362} \begin{bmatrix} 10,9814 & -7,7268 \\ -7,7268 & 8,2175 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,6667qa \\ 2,6667qa \end{Bmatrix} = \frac{1}{30,5362} \begin{Bmatrix} -13,2838qa \\ 16,7621qa \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0,4350qa \\ 0,5489qa \end{Bmatrix}$$

Taivutusmomentit pisteissä B-E:

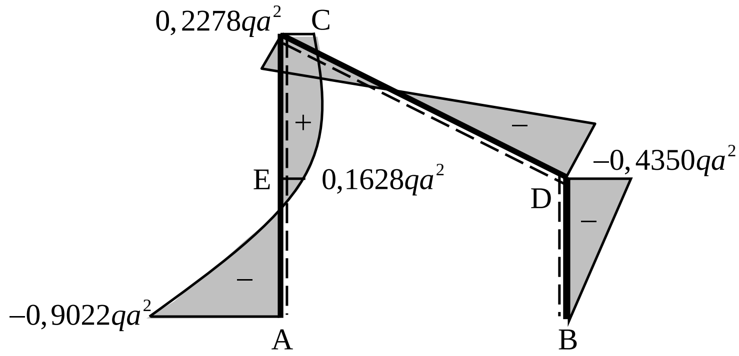
$$M_{\text{A}} = M_{\text{A0}} + X_1 M_{\text{A1}} + X_2 M_{\text{A2}} = -2qa^2 - 0,4350qa \cdot 0 + 0,5489qa \cdot 2a \approx \underline{-0,9022qa^2}$$

$$M_{\text{C}} = M_{\text{C0}} + X_1 M_{\text{C1}} + X_2 M_{\text{C2}} = 0 - 0,4350qa \cdot 2a + 0,5489qa \cdot 2a \approx \underline{0,2278qa^2}$$

$$M_{\text{D}} = M_{\text{D0}} + X_1 M_{\text{D1}} + X_2 M_{\text{D2}} = 0 - 0,4350qa \cdot a + 0,5489qa \cdot 0 \approx \underline{-0,4350qa^2}$$

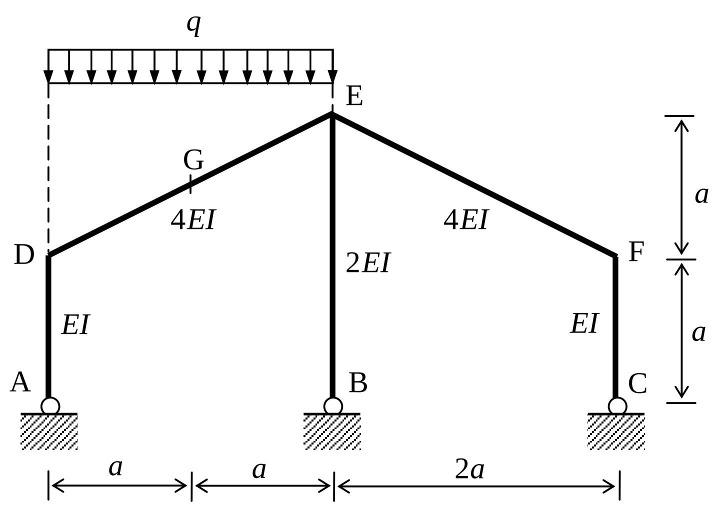
$$M_{\text{E}} = M_{\text{E0}} + X_1 M_{\text{E1}} + X_2 M_{\text{E2}} = -\frac{1}{2} qa^2 - 0,4350qa \cdot a + 0,5489qa \cdot 2a \approx \underline{0,1628qa^2}$$

M -kuvio:

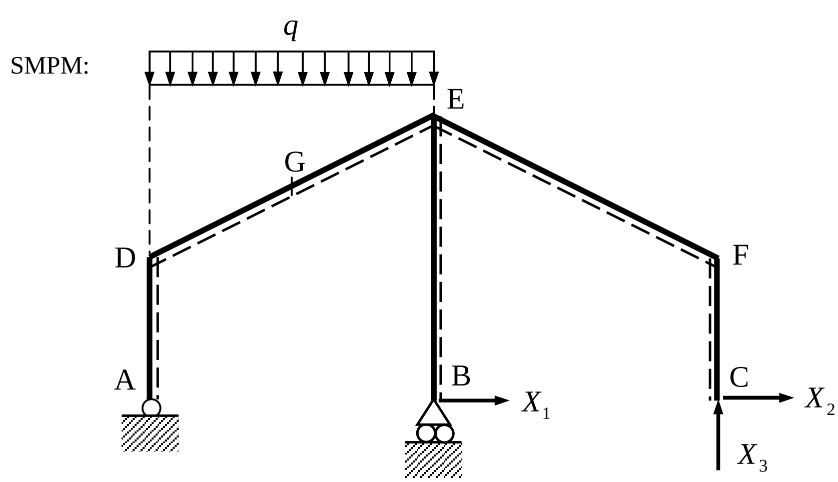


Tehtävä 3.8:

Kuvan 1 tasokehä on tuettu liikkumattomilla niveltuilla pisteissä A, B ja C. Sen sauvaa DE kuormittaa (vaakatason pituutta kohti) tasan jakautunut lumikuorma q. Määritä yleisellä voimamenetelmällä (a) kehän taivutusmomenttikuvio ja (b) yksik-kövoimamenetelmällä pisteen G pystysiirtymä. Kehän sauvat noudattavat teknistä taivutusteoriaa ($GA=\infty$) ja ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA=\infty$). Valitse sauvojen positiiviset pinnat, staattisesti määrätty perusmuoto ja staattisesti määräämättömät suureet kuvan 2 mukaisesti.



Kuva 1: Tasokehä.

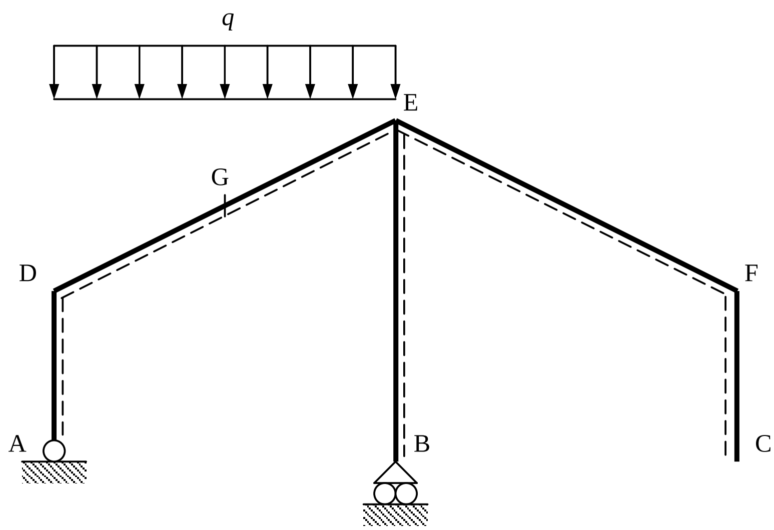


Kuva 2: Staattisesti määrätty perusmuoto.

Ratkaisu:

a) Kehän taivutusmomenttikuvio:

Taivutusmomentti M_0:



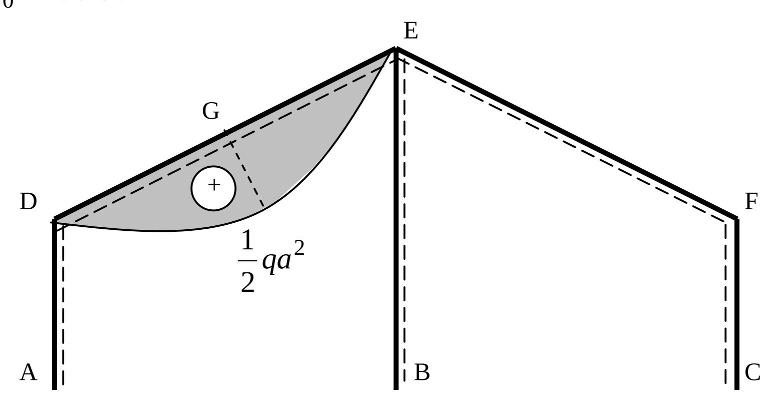
Tukireaktiot:

$A_{x0} = 0 \quad \longrightarrow$

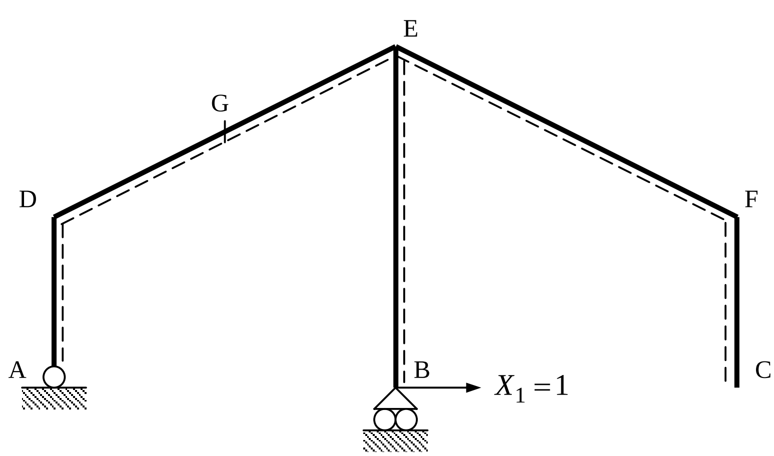
$A_{y0} = qa \quad \uparrow$

$B_{y0} = qa \quad \uparrow$

$M_0 - \text{kuvio}:$



Taivutusmomentti M_1:



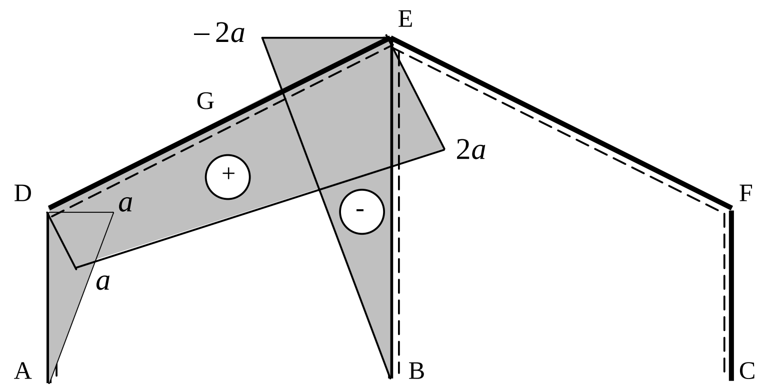
Tukireaktiot:

$A_{x1} = -1 \quad \longrightarrow$

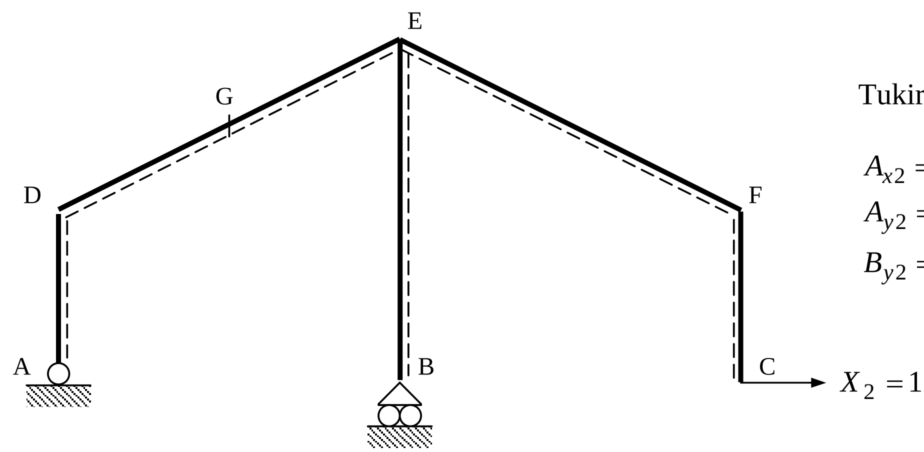
$A_{y1} = 0 \quad \uparrow$

$B_{y1} = 0 \quad \uparrow$

$M_1 - \text{kuvio}:$



Taivutusmomentti M_2:



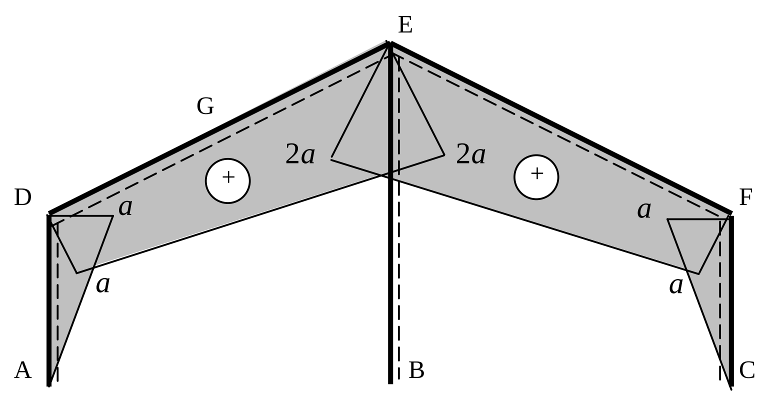
Tukireaktiot:

$A_{x2} = -1 \longrightarrow$

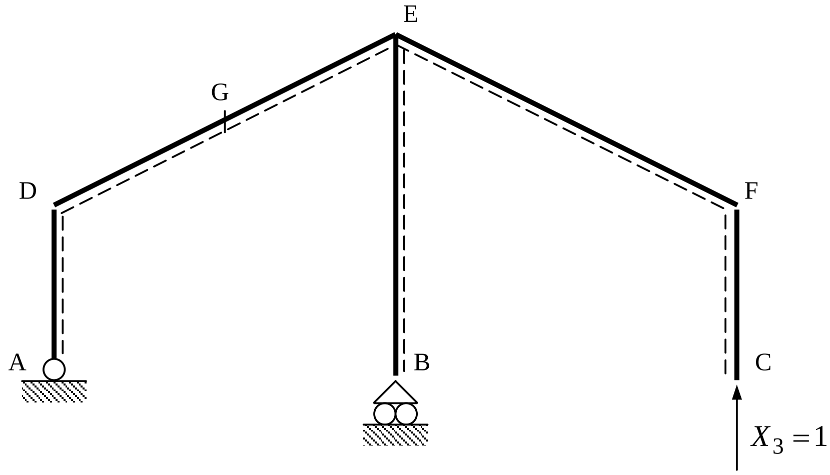
$A_{y2} = 0 \quad \uparrow$

$B_{y2} = 0 \quad \uparrow$

$M_2 - \text{kuvio}:$



Taivutusmomentti M_3:



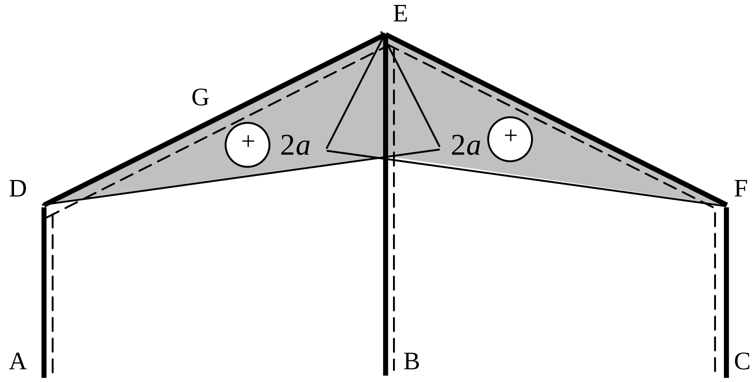
Tukireaktiot:

$A_{x3} = 0 \rightarrow$

$A_{y3} = 1 \uparrow$

$B_{y3} = -2 \uparrow$

$M_3 -$ kuvio:



Yhtälöryhmä staattisesti määräämättömille suureille:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = -\delta_{10} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\delta_{20} \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = -\delta_{30} \end{cases}$$

missä staattisesti määrätyn perusmuodon siirtymät ulkoisesta kuormituksesta ovat:

$$\delta_{10} = \int_D^E \frac{M_1 M_0}{4EI} ds = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{3} \cdot (a + 2a) \cdot \frac{qa^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8} \frac{qa^4}{EI},$$

$$\delta_{20} = \int_D^E \frac{M_2 M_0}{4EI} ds = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{3} \cdot (a + 2a) \cdot \frac{qa^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8} \frac{qa^4}{EI},$$

$$\delta_{30} = \int_D^E \frac{M_3 M_0}{4EI} ds = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{3} \cdot 2a \cdot \frac{qa^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{12} \frac{qa^4}{EI}.$$

Joustomatriisin (symmetrinen) alkiot ovat:

$$\delta_{11} = \int_A^D \frac{M_1 M_1}{EI} ds + \int_D^E \frac{M_1 M_1}{4EI} ds + \int_B^E \frac{M_1 M_1}{2EI} ds$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{a}{3} \cdot a^2 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{3} \cdot (a^2 + 2a^2 + 4a^2) + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2a}{3} \cdot 4a^2 = \frac{20 + 7\sqrt{5}}{12} \frac{a^3}{EI},$$

$$\delta_{12} = \int_A^D \frac{M_1 M_2}{EI} ds + \int_D^E \frac{M_1 M_2}{4EI} ds$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{a}{3} \cdot a^2 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{3} \cdot (a^2 + 2a^2 + 4a^2) = \frac{4 + 7\sqrt{5}}{12} \frac{a^3}{EI},$$

$$\delta_{13} = \int_D^E \frac{M_1 M_3}{4EI} ds = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{6} \cdot (a + 2 \cdot 2a) \cdot 2a = \frac{5\sqrt{5}}{12} \frac{a^3}{EI},$$

$$\delta_{22} = 2\int_A^D \frac{M_2 M_2}{EI} ds + 2\int_D^E \frac{M_2 M_2}{4EI} ds$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{a}{3} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{3} \cdot (a^2 + 2a^2 + 4a^2) = \frac{4 + 7\sqrt{5}}{6} \frac{a^3}{EI},$$

$$\delta_{23} = 2\int_D^E \frac{M_2 M_3}{4EI} ds = 2 \cdot \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{6} \cdot (a + 2 \cdot 2a) \cdot 2a = \frac{5\sqrt{5}}{6} \frac{a^3}{EI},$$

$$\delta_{33} = 2\int_D^E \frac{M_3 M_3}{4EI} ds = 2 \cdot \frac{1}{4EI} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{3} \cdot 4a^2 = \frac{2\sqrt{5}}{3} \frac{a^3}{EI}.$$

Yhtälöryhmäksi saadaan:

$$\begin{cases} \frac{20 + 7\sqrt{5}}{12} X_1 + \frac{4 + 7\sqrt{5}}{12} X_2 + \frac{5\sqrt{5}}{12} X_3 = -\frac{\sqrt{5}}{8} qa \\ \frac{4 + 7\sqrt{5}}{12} X_1 + \frac{4 + 7\sqrt{5}}{6} X_2 + \frac{5\sqrt{5}}{6} X_3 = -\frac{\sqrt{5}}{8} qa \\ \frac{5\sqrt{5}}{12} X_1 + \frac{5\sqrt{5}}{6} X_2 + \frac{2\sqrt{5}}{3} X_3 = -\frac{\sqrt{5}}{12} qa, \end{cases}$$

jonka ratkaisu on

$$X_1 \approx -0.0649359\, qa, \quad X_2 \approx -0.0167668\, qa, \quad X_3 \approx -0.0634565\, qa\,.$$

Tukireaktiot:

$$A_x = \overbrace{A_{x0}}^{0} + A_{x1} X_1 + A_{x2} X_2 + \overbrace{A_{x3}}^{0} X_3 = -1 \cdot (-0.06494\, qa) - 1 \cdot (-0.01677\, qa) = 0.08171 qa, \quad \longrightarrow$$

$$A_y = A_{y0} + \overbrace{A_{y1}}^{0} X_1 + \overbrace{A_{y2}}^{0} X_2 + A_{y3} X_3 = qa + 1 \cdot (-0.06346\,qa) = 0.93654\,qa, \quad \uparrow$$

$$B_x = X_1 = -0.06494\,qa\,, \quad \longrightarrow$$

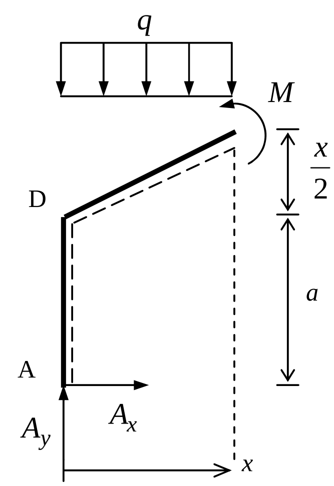
$$B_y = B_{y0} + \overbrace{B_{y1}}^{0} X_1 + \overbrace{B_{y2}}^{0} X_2 + B_{y3} X_3 = qa - 2 \cdot (-0.06346\,qa) = 1.1269\,qa\,, \quad \uparrow$$

$$C_x = X_2 = -0.01677\,qa\,, \quad \longrightarrow$$

$$C_y = X_3 = -0.06346\,qa\,. \quad \uparrow$$

Määritetään taivutusmomentin arvoja rakenteen $M-$kuvion piirtämistä varten.

$$M_D = -A_x \cdot a = -0.08171 qa^2\,,$$



Sauva DE:

$$M(x) = A_y \cdot x - A_x \cdot (a + \frac{x}{2}) - \frac{1}{2} q x^2\,,$$

$$M_G = M(a) = 0.3140\,qa^2\,,$$

$$M_E = M(2a) = -0.29034\,qa^2\,,$$

$$\frac{dM}{dx}(x_0) = 0: \quad x_0 = 0.89565\,a;$$

$$M_{\max} = M(x_0) = 0.3194\,qa^2.$$

Sauva BE:

$$M_E = -X_1 \cdot 2a = 0.12987\,qa^2\,.$$

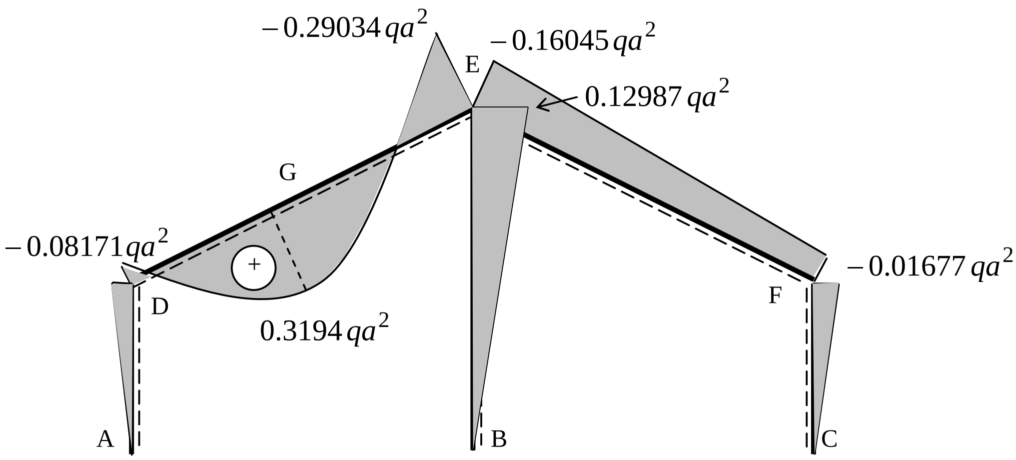
Sauva CF:

$$M_F = X_2 \cdot a = -0.01677\,qa^2\,.$$

Sauva EF:

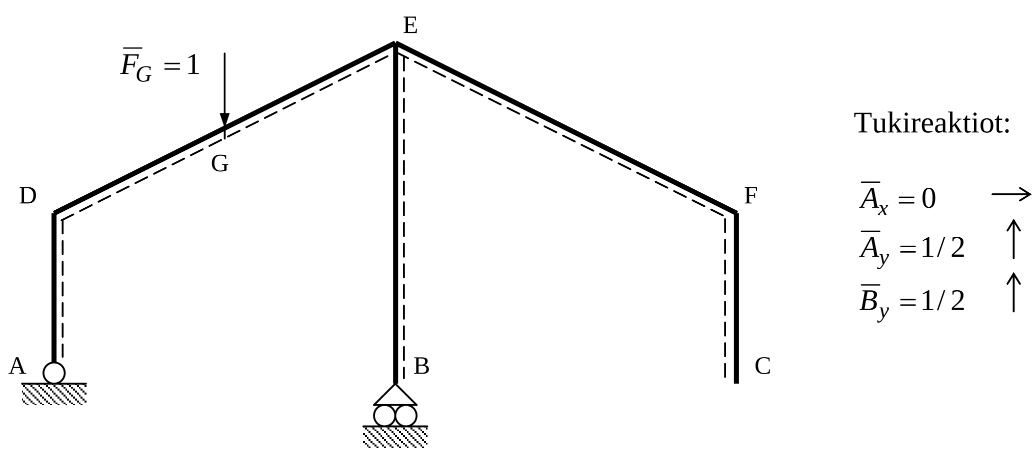
$$M_E = X_3 \cdot 2a + X_2 \cdot 2a = -0.16045\,qa^2\,.$$

$M-\text{kuvio}:$

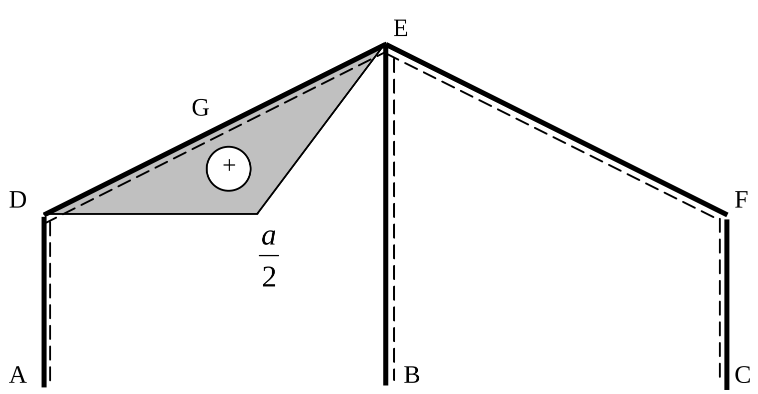


b) <u>Pisteen G pystysiirtymä yksikkövoimamenetelmällä</u>:

Asetetaan yksikkövoima $\overline{F}_G = 1$ staattisesti määrättyyn perusmuotoon.



$\overline{M}-\text{kuvio}:$



Yksikkövoimamenetelmä:

$$\delta_G = \int_D^G \frac{\overline{M}M}{4EI}\,ds + \int_G^E \frac{\overline{M}M}{4EI}\,ds\,,$$

missä

$$\int_D^G \frac{\overline{M}M}{4EI}\,ds = \frac{1}{4EI}\cdot\frac{\sqrt{5}a}{2\cdot 6}\cdot\frac{a}{2}\cdot(2\cdot 0.24113\,qa^2 + 0.3140\,qa^2) = 0.01855\,\frac{qa^4}{EI}\,,$$

$$\int_G^E \frac{\overline{M}M}{4EI}\,ds = \frac{1}{4EI}\cdot\frac{\sqrt{5}a}{2\cdot 6}\cdot\frac{a}{2}\cdot(0.3140\,qa^2 + 2\cdot 0.13682\,qa^2) = 0.01369\,\frac{qa^4}{EI}\,,$$

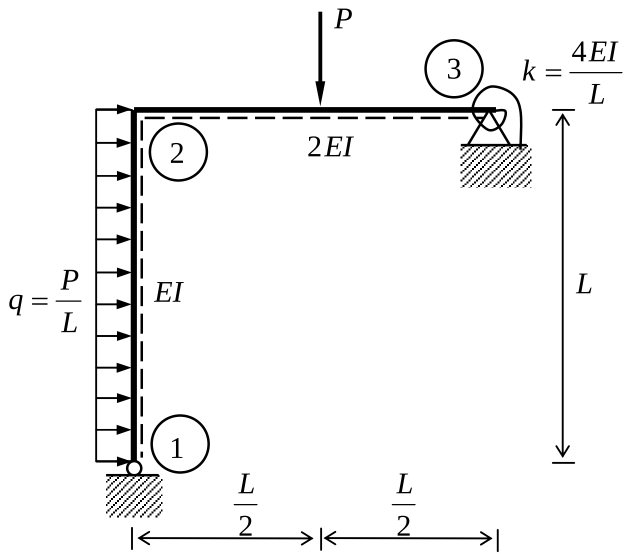
joten pisteen G pystysiirtymäksi saadaan

$$\delta_G = (0.01855 + 0.01369)\,\frac{qa^4}{EI} = \underline{\underline{0.03224\,\frac{qa^4}{EI}}}\,.$$

4. Momenttimenetelmä ja kulmanmuutosmenetelmä

Tehtävä 4.1:

Määritä kulmanmuutosmenetelmällä oheisen kehän taivutusmomenttikuvio.

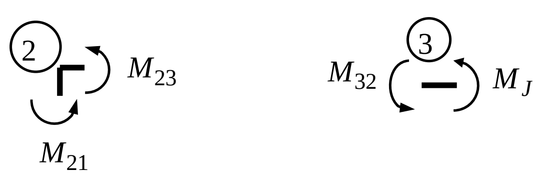


Ratkaisu:

Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = 0 \;\Rightarrow$ <u>siirtymätön!</u>

Tasapainoehdot:

$$
\begin{aligned}
&\text{Nurkka 1: } M_{12} = 0 \text{ (nivel)} \\
&\text{Nurkka 2: } M_{21} + M_{23} = 0 \\
&\text{Nurkka 3: } M_{32} + M_j = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(a)}
$$



Yhteensopivuusehdot:

$$
\begin{aligned}
&\text{Nurkka 2: } \varphi_{21} = \varphi_{23} = \varphi_2 \\
&\text{Nurkka 3: } \varphi_{32} = \varphi_J = \varphi_3
\end{aligned}
\qquad \text{(b)}
$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt (tasapainoehdoissa esiintyville momenteille):

Sauva 1-2:

$$
\begin{aligned}
M_{21} &= \frac{3EI}{L}\varphi_{21} - \frac{3EI}{L}\overbrace{\psi_{21}}^{0} + MK_{21}^{0} = \frac{3EI}{L}\varphi_{21} + \frac{\overbrace{q}^{P/L}\,L^2}{8} \\
&= \frac{3EI}{L}\varphi_{21} - \frac{PL}{8}
\end{aligned}
\tag{c1}
$$

Sauva 2-3:

$$
\begin{aligned}
M_{23} &= \frac{4\cdot 2EI}{L}\varphi_{23} + \frac{2\cdot 2EI}{L}\varphi_{32} - \frac{6\cdot 2EI}{L}\overbrace{\psi_{23}}^{0} + MK_{23} = \frac{8EI}{L}\varphi_{23} + \frac{4EI}{L}\varphi_{32} - \frac{PL}{8} \\
M_{32} &= \frac{4\cdot 2EI}{L}\varphi_{32} + \frac{2\cdot 2EI}{L}\varphi_{23} - \frac{6\cdot 2EI}{L}\overbrace{\psi_{32}}^{0} + MK_{32} = \frac{8EI}{L}\varphi_{32} + \frac{4EI}{L}\varphi_{23} + \frac{PL}{8}
\end{aligned}
\tag{c2}
$$

Kierrejousen yhtälö:

$$
M_J = k\varphi_J = \frac{4EI}{L}\varphi_J \tag{d}
$$

Sijoittamalla momenttien lausekkeet (c) ja (d) tasapainoehtoihin (a) ja ottamalla huomioon yhteensopivuusehdot (b) saadaan

$$
\begin{aligned}
&\frac{3EI}{L}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} + \frac{PL}{8} + \frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} - \frac{PL}{8} = 0 \\
&\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} - \frac{PL}{8} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_J}^{\varphi_3} = 0 \\
&\Rightarrow \\
&\frac{11EI}{L}\varphi_2 + \frac{4EI}{L}\varphi_3 = 0 \\
&\frac{4EI}{L}\varphi_2 + \frac{12EI}{L}\varphi_3 = \frac{PL}{8}
\end{aligned}
$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä, saadaan nurkkakiertymille φ_2 ja φ_3 tulokset

$$
\varphi_2 = \frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI},\ \varphi_3 = -\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI}.
$$

Sijoittamalla lausekkeisiin (c) ja (d) saadaan sauvanpäämomenteille ja jousimomentille

$$M_{21}=\frac{3EI}{L}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2}+\frac{PL}{8}=\frac{3EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI}+\frac{PL}{8}=\underline{\underline{\frac{4}{29}PL}}$$

$$M_{23}=\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2}+\frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3}-\frac{PL}{8}=\frac{8EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI}+\frac{4EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI})-\frac{PL}{8}=\underline{\underline{-\frac{4}{29}PL}}$$

$$M_{32}=\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3}+\frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_3}+\frac{PL}{8}=\frac{8EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI})+\frac{4EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI}+\frac{PL}{8}=\underline{\underline{\frac{11}{232}PL}}$$

$$M_J=\frac{4EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI})=\underline{\underline{-\frac{11}{232}PL}}$$

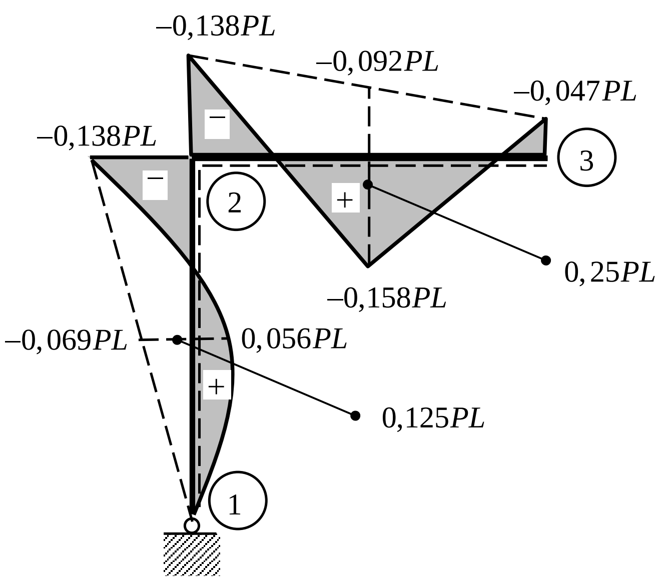
Taivutusmomenteille nurkissa saadaan

$M_1=0$ (nivel),

$$M_2=-M_{21}=M_{23}=-\frac{4}{29}PL\approx-0{,}138PL,$$

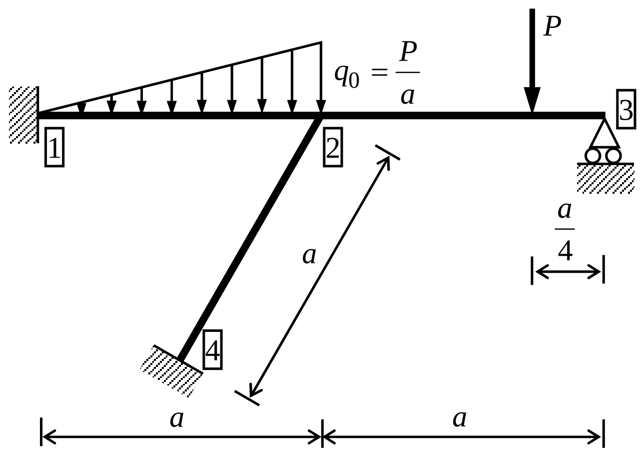
$$M_3=-M_{32}-\frac{11}{232}PL=-0{,}047PL.$$

Taivutusmomenttikuvio:



Tehtävä 4.2:

Määritä kulmanmuutosmenetelmällä oheisen kehän taivutusmomenttikuvio. Kehän kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on *EI*.



Ratkaisu:

Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0 \;\Rightarrow\;$ <u>siirtymätön!</u>

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt ja yhteensopivuus:

$$M_{12} = \frac{4EI}{a}\overbrace{\varphi_{12}}^{0} + \frac{2EI}{a}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} + MK_{12} = \frac{2EI}{a}\varphi_2 - \left(\frac{0}{20} + \frac{\overbrace{q_0}^{P/a}}{30}\right)a^2 = \frac{2EI}{a}\varphi_2 - \frac{1}{30}Pa$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{a}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} + \frac{2EI}{a}\overbrace{\varphi_{12}}^{0} + MK_{21} = \frac{4EI}{a}\varphi_2 + \left(\frac{0}{30} + \frac{\overbrace{q_0}^{P/a}}{20}\right)a^2 = \frac{4EI}{a}\varphi_2 + \frac{1}{20}Pa$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{a}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + MK_{23}^{0} = \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{P\frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}a}{2a^2}\left(\frac{1}{4}a + a\right) = \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{15}{128}Pa$$

$$M_{24} = \frac{4EI}{a}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + \frac{2EI}{a}\overbrace{\varphi_{42}}^{0} + \overbrace{MK_{24}}^{0} = \frac{4EI}{a}\varphi_2$$

$$M_{42} = \frac{4EI}{a}\overbrace{\varphi_{42}}^{0} + \frac{2EI}{a}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} + \overbrace{MK_{42}}^{0} = \frac{2EI}{a}\varphi_2$$

Nurkan 2 momenttitasapaino:

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4EI}{a}\varphi_2 + \frac{1}{20}Pa + \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{15}{128}Pa + \frac{4EI}{a}\varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{11EI}{a}\varphi_2 - \frac{172}{2560}Pa = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\varphi_2 = \frac{43}{7040}\frac{Pa^2}{EI} \approx 0{,}006108\frac{Pa^2}{EI}}$$

Sauvanpäämomentit:

$$M_{12} = \frac{2EI}{a}(0,006108\frac{Pa^2}{EI}) - \frac{1}{30}Pa = -0,02111Pa,$$

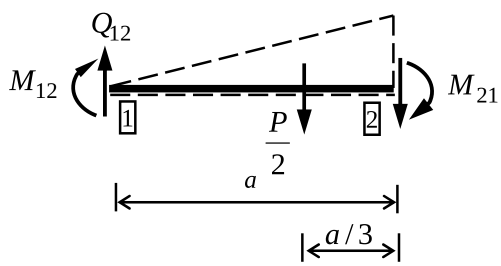
$$M_{21} = \frac{4EI}{a}(0,006108\frac{Pa^2}{EI}) + \frac{1}{20}Pa = 0,07443Pa,$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{a}(0,006108\frac{Pa^2}{EI}) - \frac{15}{128}Pa = -0,09886Pa;$$

$$M_{24} = \frac{4EI}{a}(0,006108\frac{Pa^2}{EI}) = 0,02443Pa,$$

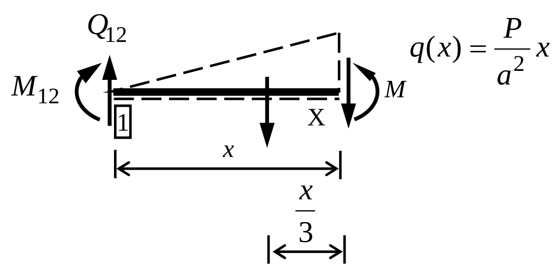
$$M_{42} = \frac{2EI}{a}(0,006108\frac{Pa^2}{EI}) = 0,01222Pa.$$

Sauvanpääleikkausvoima Q_{12}:



$$\boxed{2} \quad Q_{12} \cdot a + M_{12} + M_{21} - \frac{P}{2} \cdot \frac{a}{3} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{12} = \frac{P}{6} - \frac{M_{12} + M_{21}}{a} \approx 0,11335P$$

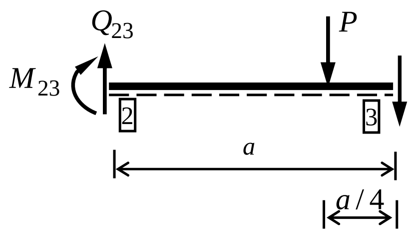
Taivutusmomentti sauvalla 1-2:



$$\mathrm{X} \quad M - M_{12} - Q_{12}x + \frac{1}{2}\frac{P}{a^2}x^2 \cdot \frac{x}{3} = 0 \;\Rightarrow\; M = M_{12} + Q_{12}x - \frac{1}{6}\frac{x^3}{a^3}Pa = (-0,02111 + 0,11335\frac{x}{a} - \frac{1}{6}\frac{x^2}{a^2})Pa$$

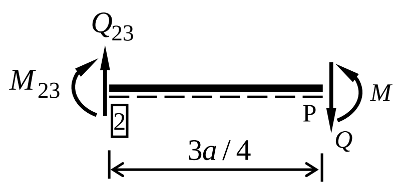
x/a	M/pa
0	-0,02111
1/3	0,0105
2/3	0,0051
1	-0,0744

Sauvanpääleikkausvoima Q_{23}:



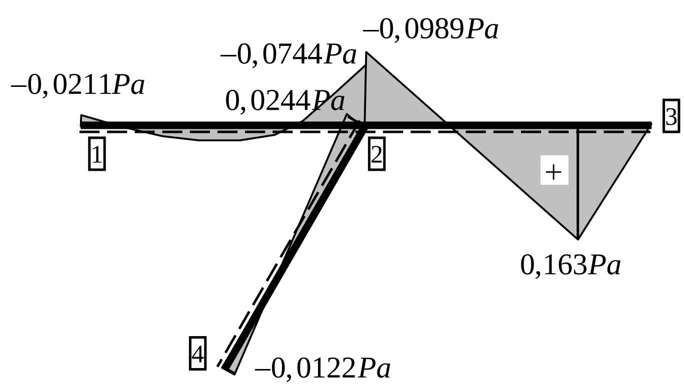
$$\boxed{3}\quad Q_{23} \cdot a + M_{23} - P \cdot \frac{a}{4} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{23} = \frac{P}{4} - \frac{M_{23}}{a} \approx 0,3489P$$

Taivutusmomentti sauvalla 2-3 kuorman P kohdalla:



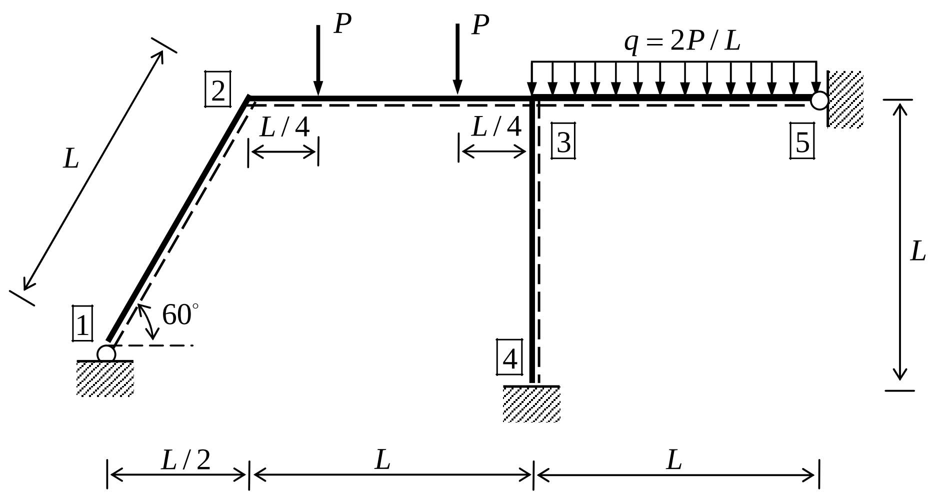
$$\mathrm{P}\quad M - M_{23} - Q_{23} \cdot \frac{3}{4} a = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{3}{4} Q_{23} a + M_{23} \approx \frac{3}{4} \cdot 0,3489Pa - 0,09886Pa = \underline{0,1628Pa}.$$

Taivutusmomenttikuvio:



Tehtävä 4.3:

Määritä kulmanmuutosmenetelmällä oheisen tasokehän taivutusmomentti-, leikkausvoima- ja normaalivoimakuviot. Kehän kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on *EI*.



Ratkaisu:

Sivusiirtyvyyden kertaluku: $n_{\mathrm{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 5 - 6 - 4 = 0$. <u>Kehä on sivusiirtymätön!</u>

Tasapainoehdot:

Nurkka 2: $M_{21} + M_{23} = 0$

Nurkka 3: $M_{32} + M_{34} + M_{35} = 0$

Yhteensopivuusehdot:

Nurkka 2: $\varphi_{21} = \varphi_{23} = \varphi_2$

Nurkka 3: $\varphi_{32} = \varphi_{34} = \varphi_{35} = \varphi_3$

Nurkka 4: $\varphi_{43} = \varphi_4 = 0$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt (tasapainoehdoissa esiintyville momenteille)

Sauva $1-2$: $M_{21} = a_{21}^0 \overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} + \overbrace{MK_{21}^0}^{0} = a_{21}^0 \varphi_2$

Sauva $2-3$:
$$M_{23} = a_{23} \overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + b_{23} \overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} + MK_{23} = a_{23}\varphi_2 + b_{23}\varphi_3 + MK_{23}$$
$$M_{32} = a_{32} \overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} + b_{32} \overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + MK_{32} = a_{32}\varphi_3 + b_{32}\varphi_2 + MK_{32}$$

Sauva $3-4$: $M_{34} = a_{34} \overbrace{\varphi_{34}}^{\varphi_3} + b_{34} \overbrace{\varphi_{43}}^{0} + \overbrace{MK_{34}}^{0} = a_{34}\varphi_3$

Sauva $3-5$: $M_{35} = a_{35}^0 \overbrace{\varphi_{35}}^{\varphi_3} + MK_{35}^0 = a_{35}^0 \varphi_3 + MK_{35}^0$

Sijoittamalla momenttien lausekkeet nurkkien 2 ja 3 tasapainoehtoihin, saadaan yhtälöpari tuntemattomille sauvanpääkiertymille φ_2 ja φ_3:

$$
\begin{aligned}
&(a_{21}^0 + a_{23})\varphi_2 + b_{23}\varphi_3 = -MK_{23} \\
&b_{32}\varphi_2 + (a_{32} + a_{34} + a_{35}^0)\varphi_3 = -MK_{32} - MK_{35}^0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Sauvavakiot:

$$a_{23} = a_{32} = a_{34} = \frac{4EI}{L}, \qquad a_{21}^0 = a_{35}^0 = \frac{3EI}{L}, \qquad b_{23} = b_{32} = \frac{2EI}{L} .$$

Kuormitustermit:

$$MK_{23} = -MK_{32} = -\frac{P \cdot \frac{L}{4} \cdot (\frac{3L}{4})^2}{L^2} - \frac{P \cdot \frac{3L}{4} \cdot (\frac{L}{4})^2}{L^2} = -\frac{3}{16} PL ,$$

$$MK_{35}^0 = -\frac{1}{8} qL^2 = -\frac{1}{4} PL .$$

Sijoittamalla sauvavakioiden ja kuormitustermien arvot yhtälölpariin (1), saadaan

$$
\begin{cases}
(3+4)\dfrac{EI}{L}\varphi_2 + \dfrac{2EI}{L}\varphi_3 = \dfrac{3}{16} PL \\
\dfrac{2EI}{L}\varphi_2 + (4+4+3)\dfrac{EI}{L}\varphi_3 = (-\dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{4})PL = \dfrac{1}{16} PL
\end{cases}
$$

$\Rightarrow$

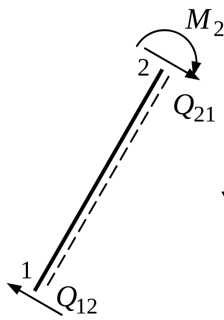
$$
\begin{cases}
7\varphi_2 + 2\varphi_3 = \dfrac{3}{16}\dfrac{PL^2}{EI} \\
2\varphi_2 + 11\varphi_3 = \dfrac{1}{16}\dfrac{PL^2}{EI}
\end{cases}
$$

Yhtälöparin ratkaisu on: $\varphi_2 \approx 0.026541 \dfrac{PL^2}{EI}, \quad \varphi_3 \approx 0.000856 \dfrac{PL^2}{EI}$.

Sauvanpäämomentit:

$$
\begin{aligned}
&M_{12} = 0 \\
&M_{21} = a_{21}^0\varphi_2 = 3 \cdot 0.026541 PL = 0.07962\, PL = -MK_{23} \\
&M_{32} = a_{32}\varphi_3 + b_{32}\varphi_2 + MK_{32} = (4 \cdot 0.000856 + 2 \cdot 0.026541 + \frac{3}{16})PL = 0.24401 PL \\
&M_{34} = a_{34}\varphi_3 = 4 \cdot 0.000856\, PL = 0.00342\, PL \\
&M_{43} = b_{43}\varphi_3 = 2 \cdot 0.000856\, PL = 0.00171 PL \\
&M_{35} = -M_{32} - M_{34} = (-0.24401 - 0.00342)\, PL = -0.24743 PL \\
&M_{53} = 0
\end{aligned}
$$

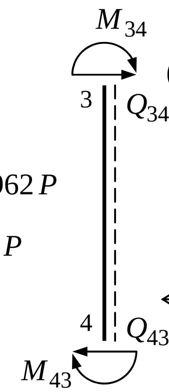
Sauvanpääleikkausvoimat:



$\circlearrowleft 1 \quad M_{21} + Q_{21}L = 0 \quad \Rightarrow$

$$Q_{21} = -\frac{M_{21}}{L} = -0.07962\,P$$

$$\nwarrow \quad Q_{12} = Q_{21} = -0.07972\,P$$

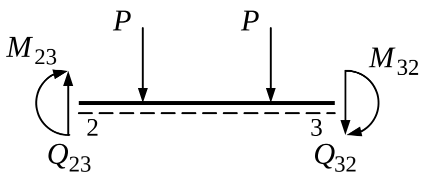


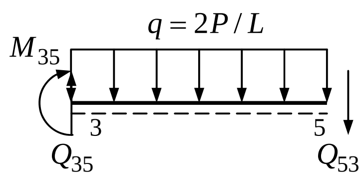
$\circlearrowleft 4 \quad M_{43} + M_{34} + Q_{34}L = 0$

$\Rightarrow$

$$Q_{34} = -\frac{M_{43} + M_{34}}{L} = -0.00513\,P$$

$$\longleftarrow \quad Q_{43} = Q_{34} = -0.00513\,P$$





$\circlearrowleft 2 \quad M_{23} + M_{32} + Q_{32}L + P\dfrac{L}{4} + P\dfrac{3L}{4} = 0$

$\Rightarrow$

$$Q_{32} = -\frac{M_{23} + M_{32}}{L} - P = -1.16439\,P$$

$\uparrow \quad Q_{23} - Q_{32} - P - P = 0$

$\Rightarrow$

$$Q_{23} = Q_{32} + 2P = 0.83561\,P$$

$\circlearrowleft 3 \quad M_{35} + Q_{53}L + \dfrac{2P}{L}L\dfrac{L}{2} = 0$

$\Rightarrow$

$$Q_{53} = -\frac{M_{35}}{L} - P = -0.75257\,P$$

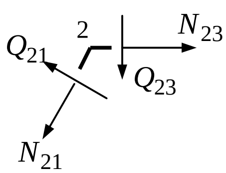
$\uparrow \quad Q_{35} - Q_{53} - \dfrac{2P}{L}L = 0$

$\Rightarrow$

$$Q_{35} = Q_{53} + 2P = 1.24743\,P$$

Sauvanpäänormaalivoimat:

Nurkka 2:



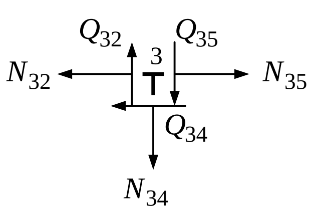
$\uparrow \quad -Q_{23} + Q_{21}\overbrace{\cos 60^\circ}^{1/2} - N_{21}\overbrace{\sin 60^\circ}^{\sqrt{3}/2} = 0 \quad \Rightarrow$

$$N_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_{21} - \frac{2}{\sqrt{3}}Q_{23} = -1.01091\,P = N_{12}$$

$\longrightarrow \quad N_{23} - Q_{21}\overbrace{\sin 60^\circ}^{\sqrt{3}/2} - N_{21}\overbrace{\cos 60^\circ}^{1/2} = 0 \quad \Rightarrow$

$$N_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2}Q_{21} + \frac{1}{2}N_{21} = -0.57449\,P = N_{32}$$

Nurkka 3:



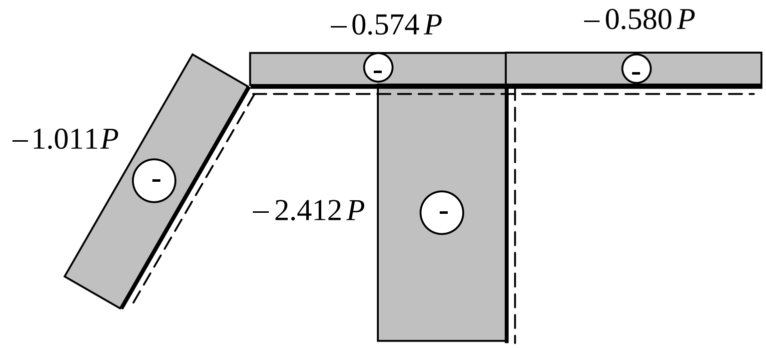
$\uparrow \quad Q_{32} - Q_{35} - N_{34} = 0 \quad \Rightarrow$

$$N_{34} = Q_{32} - Q_{35} = -2.41182\,P$$

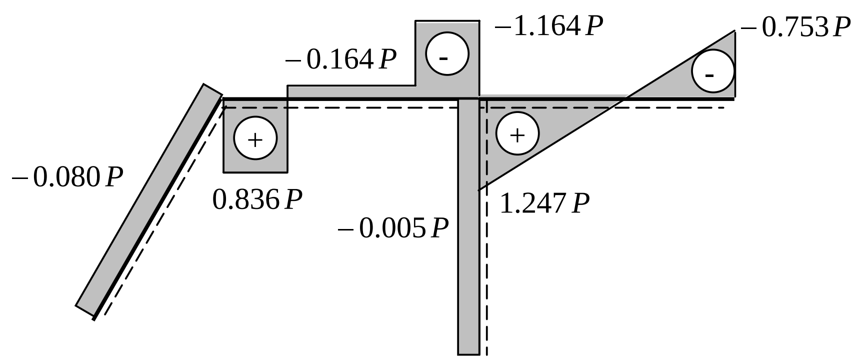
$\longrightarrow \quad N_{35} - N_{32} - Q_{34} = 0 \quad \Rightarrow$

$$N_{35} = N_{32} + Q_{34} = -0.57962\,P$$

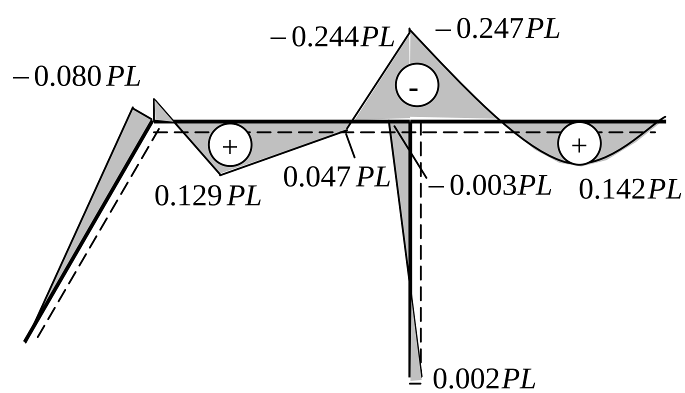
N – kuvio:



Q – kuvio:

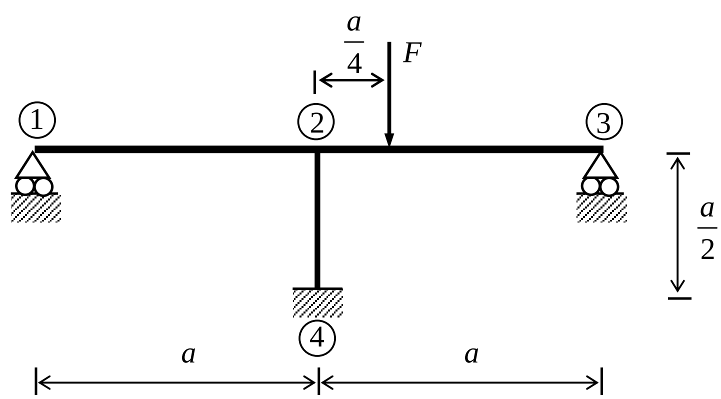


M – kuvio:



Tehtävä 4.4:

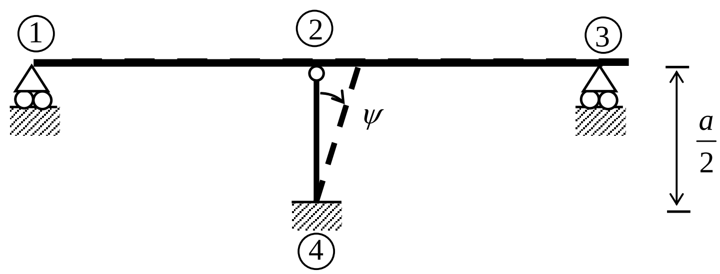
Määritä kulmanmuutosmenetelmällä ja piirrä oheisen tasokehän M-kuvio. Sauvojen taivutusjäykkyys EI on vakio.



Ratkaisu:

Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1 \;\Rightarrow$ <u>1. riippumaton sauvakiertymä!</u>

Kinematiikka:



Oheisen kuvan perusteella nähdään, että:

$\psi_{12} = \psi_{23} = 0, \;\; \psi_{24} = \psi,$

$u_1 = u_2 = u_3 = \psi \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2}\psi a,$ muut siirtymäkomponentit $= 0$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt:

$$M_{21} = a_{21}^0 \overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} - c_{21}^0 \overbrace{\psi_{21}}^{0} + MK_{21}^0 = \frac{3EI}{a}\varphi_2$$

$$M_{23} = a_{23}^0 \overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} - c_{23}^0 \overbrace{\psi_{23}}^{0} + MK_{23}^0 = \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{F\frac{a}{4}\cdot\frac{3a}{4}}{2a^2}\left(\frac{3a}{4} + a\right) = \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{21}{128}Fa$$

$$M_{24} = a_{24} \overbrace{\varphi_{24}}^{\varphi_2} + a_{42} \overbrace{\varphi_{42}}^{0} - c_{24} \overbrace{\psi_{24}}^{\psi} + MK_{23}^0 = \frac{4EI}{a/2}\varphi_2 - \frac{6EI}{a/2}\psi = \frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi$$

$$M_{42} = a_{42} \overbrace{\varphi_{42}}^{0} + a_{24} \overbrace{\varphi_{24}}^{\varphi_2} - c_{42} \overbrace{\psi_{42}}^{\psi} + MK_{42}^0 = \frac{2EI}{a/2}\varphi_2 - \frac{6EI}{a/2}\psi = \frac{4EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi$$

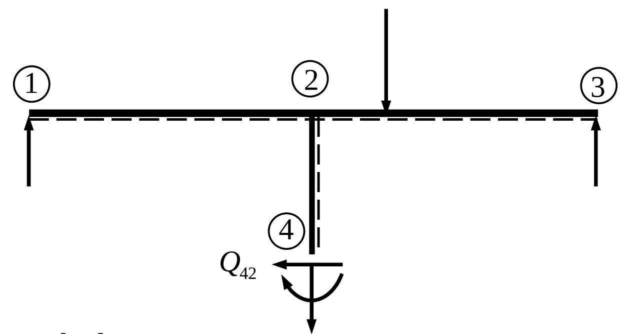
Nurkan 2 momenttitasapaino:

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

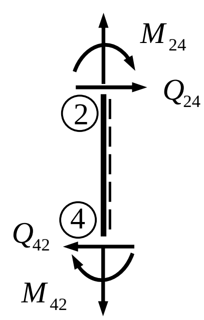
$$\Rightarrow \frac{3EI}{a}\varphi_2 + \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{21}{128}Fa + \frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{14EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi - \frac{21}{128}Fa = 0.}$$

Siirtoyhtälö:



Vaakasuora tasapainoyhtälö
$\Rightarrow Q_{42} = 0$



Momenttitasapaino sauvanpään 2 suhteen

$$\Rightarrow \overbrace{Q_{42}}^{0} \cdot \frac{a}{2} + M_{24} + M_{42} = 0 \Rightarrow M_{24} + M_{42} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi + \frac{4EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi = 0 \Rightarrow \frac{12EI}{a}\varphi_2 - \frac{24EI}{a}\psi = 0 \Rightarrow \underline{\psi = \frac{\varphi_2}{2}}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} \frac{14EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi - \frac{21}{128}Fa = 0 \\ \psi = \frac{\varphi_2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{14EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\frac{\varphi_2}{2} - \frac{21}{128}Fa = 0 \Rightarrow \underline{\varphi_2 = \frac{21}{1024}\frac{Fa^2}{EI}}, \quad \underline{\psi = \frac{21}{2048}\frac{Fa^2}{EI}}$$

Sauvanpäämomentit:

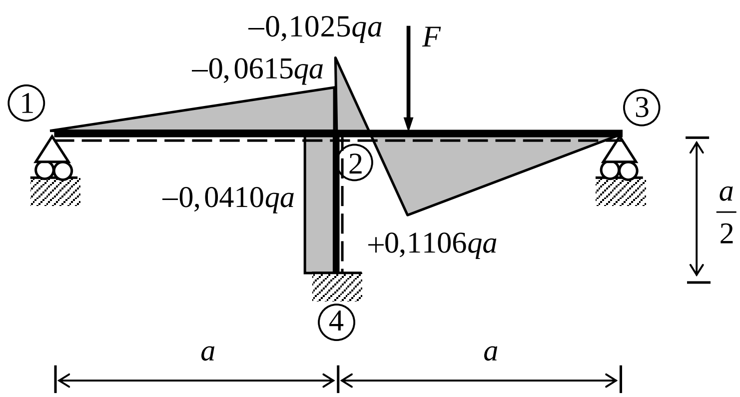
$$M_{21} = \frac{3EI}{a}\varphi_2 = \frac{3EI}{a}\frac{21}{1024}\frac{Fa^2}{EI} = \frac{63}{1024}Fa = 0{,}0615Fa$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{21}{128}Fa = \frac{3EI}{a}\frac{21}{1024}\frac{Fa^2}{EI} - \frac{21}{128}Fa = -\frac{105}{1024}Fa = -0{,}1025Fa$$

$$M_{24} = \frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi = \frac{8EI}{a}\frac{21}{1024}\frac{Fa^2}{EI} - \frac{12EI}{a}\frac{21}{2048}\frac{Fa^2}{EI} = \frac{42}{1024}Fa = 0{,}0410Fa$$

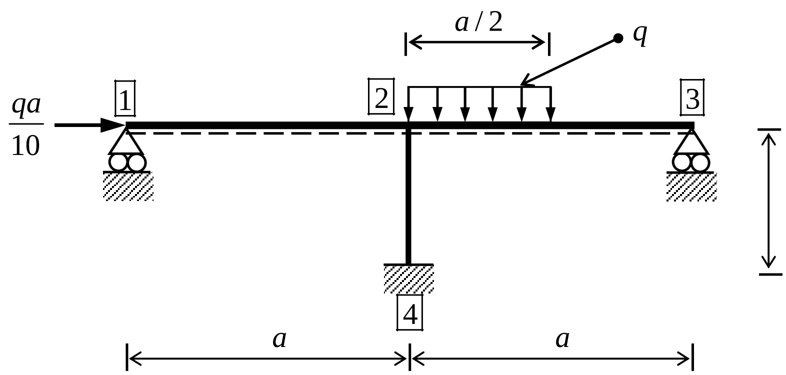
$$M_{42} = \frac{4EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi = \frac{4EI}{a}\frac{21}{1024}\frac{Fa^2}{EI} - \frac{12EI}{a}\frac{21}{2048}\frac{Fa^2}{EI} = -\frac{42}{1024}Fa = -0{,}0410Fa$$

M-kuvio:



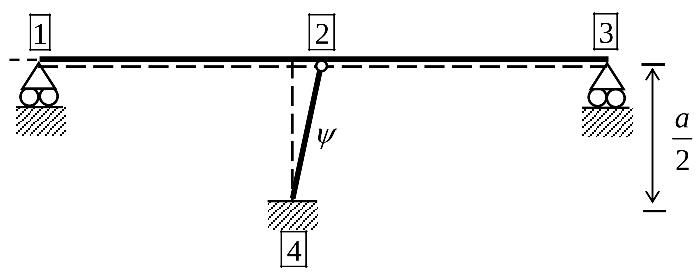
Tehtävä 4.5:

Määritä kulmanmuutosmenetelmällä ja piirrä oheisen tasokehän vaakapalkin *M*-kuvio. Sauvojen taivutusjäykkyys *EI* on vakio.



Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1 \;\Rightarrow$ <u>1. riippumaton sauvakiertymä!</u>

Kinematiikkaa:



$\psi_{12} = 0,\;\; \psi_{23} = 0,\;\; \psi_{24} = \psi$

$u_1 = \psi \cdot \frac{a}{2} = \frac{\psi a}{2}$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt:

$$M_{21} = \frac{3EI}{a}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} - \frac{3EI}{a}\overbrace{\psi_{21}}^{0} + \overbrace{MK_{21}^0}^{0} = \underline{\frac{3EI}{a}\varphi_2}$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{a}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} - \frac{3EI}{a}\overbrace{\psi_{23}}^{0} + MK_{23}^0 = \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{q\frac{3}{4}a \cdot \frac{a}{2}}{8a^2}[4(\frac{a}{4})^2 + 8\frac{a}{4}\cdot\frac{3}{4}a - (\frac{a}{2})^2]$$

$$= \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{3qa^2}{64}[\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}] = \underline{\frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{9qa^2}{128}}$$

$$M_{24} = \frac{4EI}{a/2}\overbrace{\varphi_{24}}^{\varphi_2} + \frac{2EI}{a/2}\overbrace{\varphi_{42}}^{0} - \frac{6EI}{a/2}\overbrace{\psi_{24}}^{\psi} + \overbrace{MK_{24}}^{0} = \underline{\frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi}$$

$$M_{42} = \frac{4EI}{a/2}\overbrace{\varphi_{42}}^{0} + \frac{2EI}{a/2}\overbrace{\varphi_{24}}^{\varphi_2} - \frac{6EI}{a/2}\overbrace{\psi_{42}}^{\psi} + \overbrace{MK_{42}}^{0} = \underline{\frac{4EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi}$$

Nurkan $\boxed{2}$ momenttitasapaino:

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3EI}{a}\varphi_2 + \frac{3EI}{a}\varphi_2 - \frac{9qa^2}{128} + \frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi = 0$$

$$\Rightarrow\; \underline{\frac{14EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi = \frac{9qa^2}{128}}$$

Virtuaalinen siirtymätila:

$$\bar{\psi} = 1 \;\Rightarrow\; \bar{\psi}_{12} = \bar{\psi}_{23} = 0,\; \bar{\psi}_{24} = 1,\; \bar{u}_1 = \frac{a}{2}.$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = \frac{qa}{10}\cdot\bar{u}_1 = \frac{qa^2}{20}$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{int}} = M_{21}\overbrace{\bar{\psi}_{21}}^{0} + M_{23}\overbrace{\bar{\psi}_{23}}^{0} + M_{24}\overbrace{\bar{\psi}_{24}}^{1} + M_{42}\overbrace{\bar{\psi}_{42}}^{1} = M_{24} + M_{42}$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = 0 \;\Rightarrow\; M_{24} + M_{42} + \frac{qa^3}{20} = 0$$

Siirtymäyhtälö kiertymien avulla:

$$\frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi + \frac{4EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi + \frac{qa^2}{20} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{-\frac{12EI}{a}\varphi_2 + \frac{24EI}{a}\psi = \frac{qa^2}{20}}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} \dfrac{14EI}{a}\varphi_2 - \dfrac{12EI}{a}\psi = \dfrac{9qa^2}{128} \\ -\dfrac{12EI}{a}\varphi_2 + \dfrac{24EI}{a}\psi = \dfrac{qa^2}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\varphi_2 - 6\psi = \dfrac{9qa^3}{256EI} \\ -3\varphi_2 + 6\psi = \dfrac{qa^3}{80EI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\varphi_2 = \dfrac{61}{5120}\dfrac{qa^3}{EI} \approx 0,0119\dfrac{qa^3}{EI}} \\ \underline{\psi = \dfrac{247}{30720}\dfrac{qa^3}{EI} \approx 0,0080\dfrac{qa^3}{EI}} \end{cases}$$

Sauvanpäämomentit M_{21} ja M_{23}:

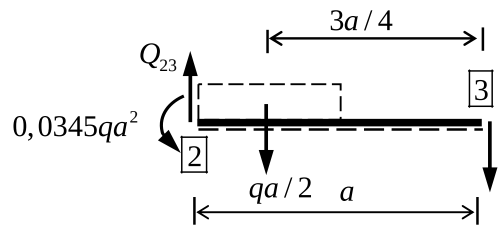
$$M_{21} = \frac{3EI}{a}\cdot\frac{61}{5120}\frac{qa^3}{EI} = \underline{\frac{183}{5120}qa^2 \approx 0,0357qa^2}$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{a}\cdot\frac{61}{5120}\frac{qa^3}{EI} - \frac{9qa^2}{128} = \underline{-\frac{177}{5120}qa^2 \approx -0,03457qa^2}$$

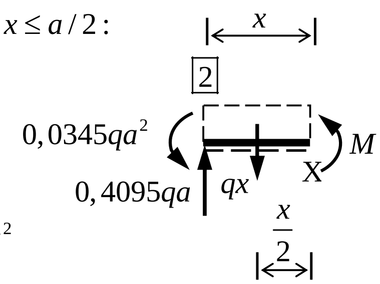
Sauvanpääleikkausvoima Q_{23}:

$$\boxed{3}\ \ -Q_{23}\cdot a+\frac{qa}{2}\cdot\frac{3}{4}a+0,03457qa^2=0$$

$$\Rightarrow Q_{23}=0,4096qa$$



Taivutusmomentti sauvalla $\boxed{2}-\boxed{3}$ välillä $0\le x\le a/2$:

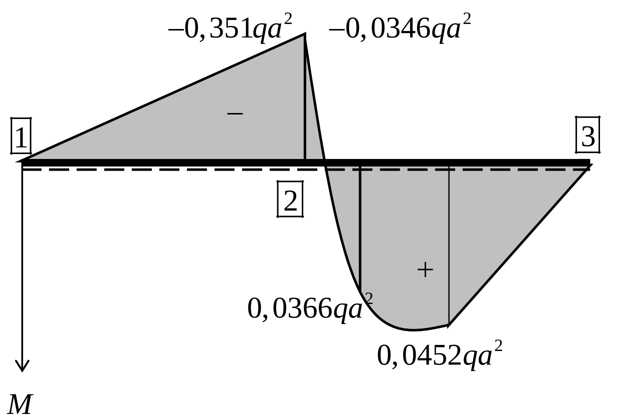


$$X\ \ M-0,4096qa\cdot x+qx\cdot\frac{x}{2}+0,03457qa^2=0$$

$$\Rightarrow\ M=(-0,03457+0,4096\frac{x}{a}-0,5\frac{x^2}{a^2})qa^2$$

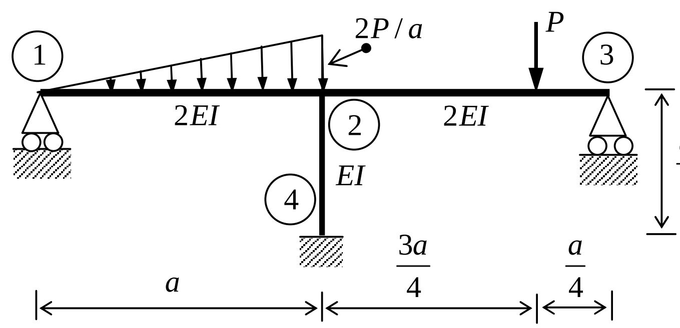
$$M(0)=-0,0346qa^2,\ M(\frac{a}{4})=0,0366qa^2,\ M(\frac{a}{2})=0,0452qa^2$$

Palkin $\boxed{1}-\boxed{3}$ taivutusmomenttikuvio:



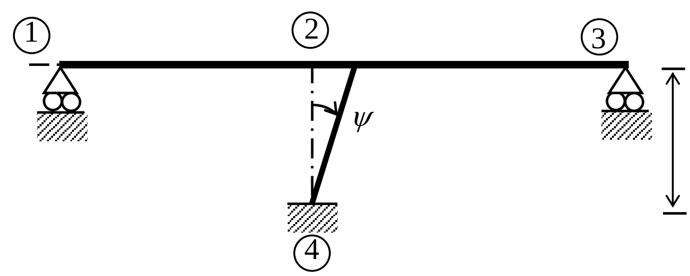
Tehtävä 4.6:

Määritä kulmanmuutosmenetelmällä oheisen tasokehän vaakapalkkien taivutusmomentti-kuviot.



Ratkaisu:

Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2\cdot 4 - 4 - 3 = 1 \;\Rightarrow$ <u>1. riippumaton sauvakiertymä!</u>



Oheisen kuvan perusteella nähdään, että:

$$\psi_{12} = \psi_{23} = 0,\;\; \psi_{24} = \psi,$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = \psi \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\psi a,\;\; \text{muut siirtymäkomponentit} = 0$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt:

$$M_{21} = a_{21}^0 \overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} - c_{21}^0 \overbrace{\psi_{21}}^{0} + MK_{21}^0 = \frac{3\cdot 2EI}{a}\varphi_2 + \left(\frac{7\cdot 0}{120} + \frac{2P/a}{15}\right)a^2 = \frac{6EI}{a}\varphi_2 + \frac{2}{15}Pa$$

$$M_{23} = a_{23}^0 \overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} - c_{23}^0 \overbrace{\psi_{23}}^{0} + MK_{23}^0 = \frac{3\cdot 2EI}{a}\varphi_2 - \frac{P\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{4}}{2a^2}\left(\frac{a}{4} + a\right) = \frac{6EI}{a}\varphi_2 - \frac{15}{128}Pa$$

$$M_{24} = a_{24} \overbrace{\varphi_{24}}^{\varphi_2} + a_{42} \overbrace{\varphi_{42}}^{0} - c_{24} \overbrace{\psi_{24}}^{\psi} + MK_{23}^0 = \frac{4EI}{a/2}\varphi_2 - \frac{6EI}{a/2}\psi = \frac{8EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi$$

$$M_{42} = a_{42} \overbrace{\varphi_{42}}^{0} + a_{24} \overbrace{\varphi_{24}}^{\varphi_2} - c_{42} \overbrace{\psi_{42}}^{\psi} + MK_{42}^0 = \frac{2EI}{a/2}\varphi_2 - \frac{6EI}{a/2}\psi = \frac{4EI}{a}\varphi_2 - \frac{12EI}{a}\psi$$

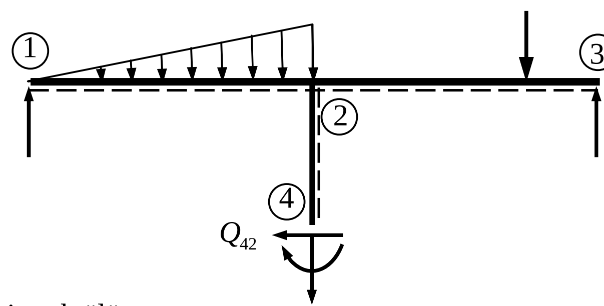
Nurkan 2 momenttitasapaino:

$$M_{21}+M_{23}+M_{24}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{6EI}{a}\varphi_2+\frac{2}{15}Pa+\frac{6EI}{a}\varphi_2-\frac{15}{128}Pa+\frac{8EI}{a}\varphi_2-\frac{12EI}{a}\psi=0$$

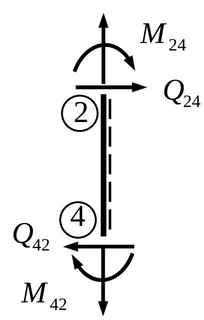
$$\Rightarrow \underline{\frac{20EI}{a}\varphi_2-\frac{12EI}{a}\psi+\frac{31}{1920}Pa=0.}$$

Siirtymäyhtälö:



Vaakasuora tasapainoyhtälö

$\Rightarrow\ Q_{42}=0$



Momenttitasapaino sauvanpään 2 suhteen

$$\Rightarrow\ \overbrace{Q_{42}}^{0}\cdot\frac{a}{2}+M_{24}+M_{42}=0\Rightarrow\ M_{24}+M_{42}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{8EI}{a}\varphi_2-\frac{12EI}{a}\psi+\frac{4EI}{a}\varphi_2-\frac{12EI}{a}\psi=0\ \Rightarrow\ \frac{12EI}{a}\varphi_2-\frac{24EI}{a}\psi=0\ \Rightarrow\ \underline{\psi=\frac{\varphi_2}{2}}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases}\dfrac{20EI}{a}\varphi_2-\dfrac{12EI}{a}\psi+\dfrac{31}{1920}Pa=0\\[2ex] \psi=\dfrac{\varphi_2}{2}\end{cases}$$

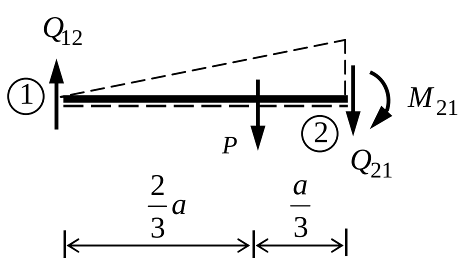
$$\Rightarrow\ \frac{20EI}{a}\varphi_2-\frac{12EI}{a}\frac{\varphi_2}{2}+\frac{31}{1920}Pa=0\ \Rightarrow\ \underline{\varphi_2=-\frac{31}{26880}\frac{Pa^2}{EI}},\ \ \underline{\psi=-\frac{31}{53760}\frac{Pa^2}{EI}}$$

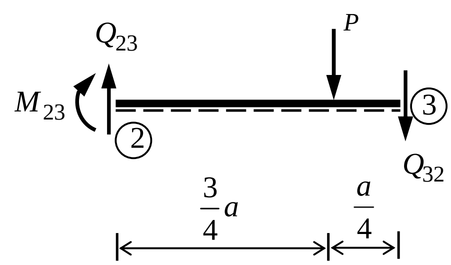
Sauvanpäämomentit:

$$M_{21} = \frac{6EI}{a}\varphi_2 + \frac{2}{15}Pa = \frac{6EI}{a}(-\frac{31}{26880})\frac{Pa^2}{EI} + \frac{2}{15}Pa = 0{,}1264Pa$$

$$M_{23} = \frac{6EI}{a}\varphi_2 - \frac{15}{128}Pa = \frac{6EI}{a}(-\frac{31}{26880})\frac{Pa^2}{EI} - \frac{15}{128}Pa = -0{,}1241Pa$$

Sauvanpääleikkausvoimat Q_{21} ja Q_{23}:





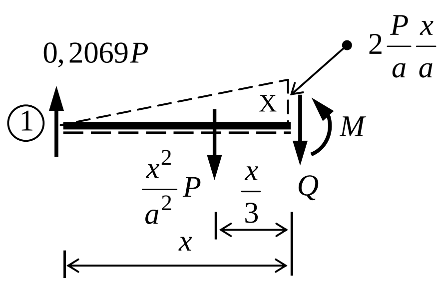
2 $-Q_{12}\cdot a + P\cdot\frac{a}{3} - M_{21} = 0$

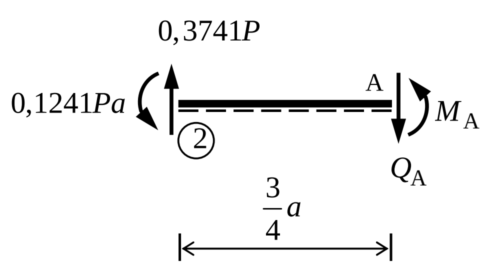
$\Rightarrow\ Q_{12} = (\frac{1}{3} - 0{,}1264)P = 0{,}2069P$

3 $-Q_{23}\cdot a + P\cdot\frac{a}{4} - M_{23} = 0$

$\Rightarrow\ Q_{23} = (\frac{1}{4} + 0{,}1241)P = 0{,}3741P$

Taivutusmomentti:





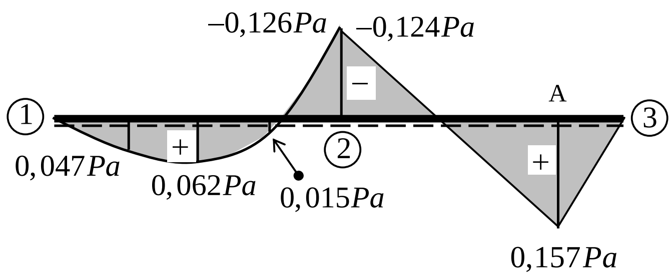
X $-0{,}2069P\cdot x + \frac{x^2}{a^2}P\cdot\frac{x}{3} + M = 0$

$\Rightarrow\ M = \frac{x}{a}(0{,}2069 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{a^2})Pa$

A $-0{,}3741P\cdot\frac{3}{4}a + 0{,}1241Pa + M_A = 0$

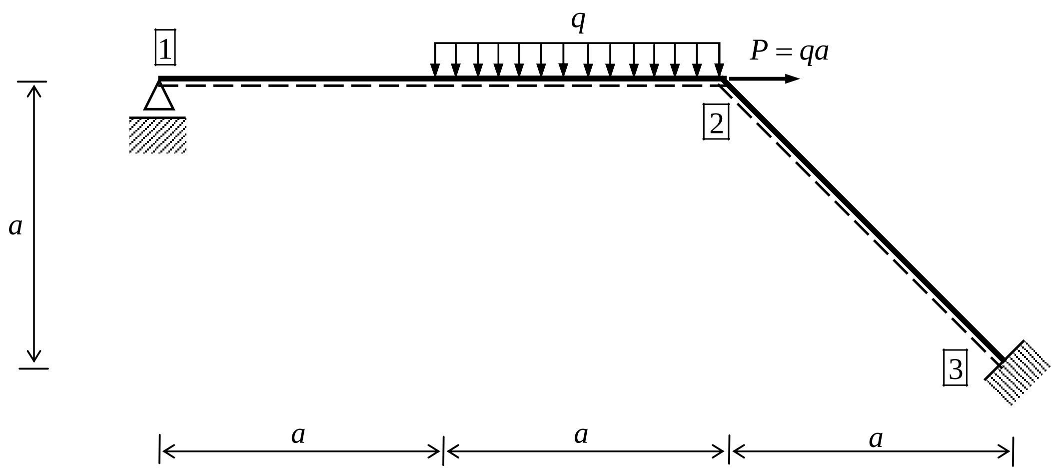
$\Rightarrow\ M_A = 0{,}1565Pa$

M-kuvio:



Tehtävä 4.7:

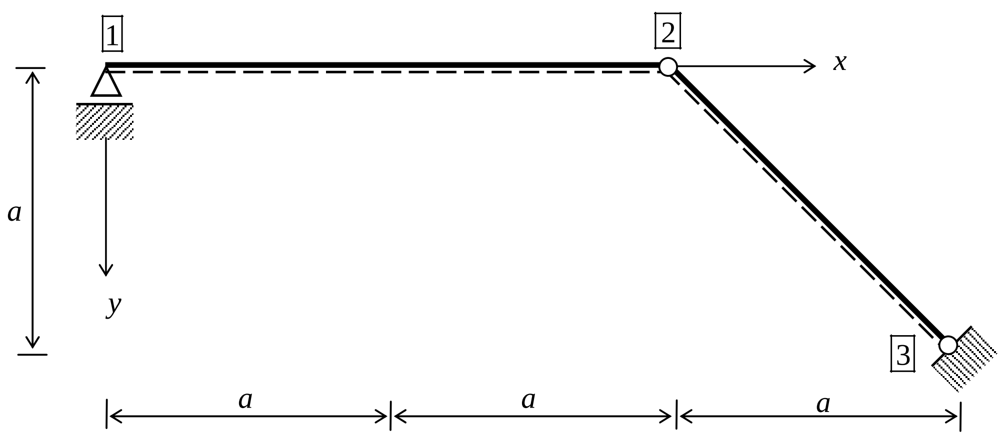
Määritä kulmanmuutosmenetelmällä ja piirrä oheisen tasokehän taivutusmomenttikuvio. Kehän kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on *EI*.



Ratkaisu:

Nivelmekanismi:

Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2\cdot 3 - 3 - 2 = 1.$



Kinematiikka:

$$\text{Sauva } \boxed{1}-\boxed{2}: \begin{cases} u_2 - u_1 = -(\overbrace{y_2 - y_1}^{0})\psi_{12} \;\Rightarrow\; u_2 = u_1, \\ v_2 - \overbrace{v_1}^{0} = (\overbrace{x_2 - x_1}^{2a})\psi_{12} \;\Rightarrow\; v_2 = 2a\psi_{12}. \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{2}-\boxed{3}: \begin{cases} \overbrace{u_3}^{0} - \overbrace{u_2}^{u_1} = -(\overbrace{y_3 - y_2}^{a})\psi_{23} \;\Rightarrow\; u_1 = a\psi_{23} = -2a\psi_{12}, \\ \overbrace{v_3}^{0} - \overbrace{v_2}^{2a\psi_{12}} = (\overbrace{x_3 - x_2}^{a})\psi_{23} \;\Rightarrow\; \psi_{23} = -2\psi_{12}. \end{cases}$$

Otetaan riippumattomaksi sauvakiertymäksi $\psi_{12} = \psi$ **,** jolloin saadaan:

$u_1 = u_2 = -2a\psi,\ v_2 = 2a\psi,\ \psi_{23} = -2\psi$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt:

$$M_{21} = \frac{3EI}{2a}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} - \frac{3EI}{2a}\overbrace{\psi_{21}}^{\psi} + MK_{21}^0 = \frac{3EI}{2a}\varphi_2 - \frac{3EI}{2a}\psi + \frac{q\frac{3a}{2}a}{8(2a)^2}[4(\frac{a}{2})^2 + 8\frac{3a}{2}\frac{a}{2} - a^2]$$

$$= \frac{3EI}{2a}\varphi_2 - \frac{3EI}{2a}\psi + \frac{9}{32}qa^2$$

$$M_{23} = \frac{4EI}{a\sqrt{2}}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + \frac{2EI}{a\sqrt{2}}\overbrace{\varphi_{32}}^{0} - \frac{6EI}{a\sqrt{2}}\overbrace{\psi_{23}}^{-2\psi} + \overbrace{MK_{23}}^{0} = 2\sqrt{2}\frac{EI}{a}\varphi_2 + 6\sqrt{2}\frac{EI}{a}\psi$$

$$M_{32} = \frac{4EI}{a\sqrt{2}}\overbrace{\varphi_{32}}^{0} + \frac{2EI}{a\sqrt{2}}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} - \frac{6EI}{a\sqrt{2}}\overbrace{\psi_{32}}^{-2\psi} + \overbrace{MK_{32}}^{0} = \sqrt{2}\frac{EI}{a}\varphi_2 + 6\sqrt{2}\frac{EI}{a}\psi$$

Nurkan $\boxed{2}$ momenttitasapaino:

$$M_{21} + M_{23} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{3EI}{2a}\varphi_2 - \frac{3EI}{2a}\psi + \frac{9}{32}qa^2 + 2\sqrt{2}\frac{EI}{a}\varphi_2 + 6\sqrt{2}\frac{EI}{a}\psi = 0$$

$$\Rightarrow\ \underline{(4\sqrt{2}+3)\frac{EI}{a}\varphi_2 + (12\sqrt{2}-3)\frac{EI}{a}\psi = -\frac{9}{16}qa^2}$$

Siirtymäyhtälö:

$\bar{\psi} = 1,\ \ \bar{\psi}_{12} = 1,\ \ \bar{\psi}_{23} = \bar{\psi}_{32} = -2,\ \bar{u}_2 = -2a,\ \bar{v}_2 = 2a$

$$W_{\text{int}} = M_{21}\overbrace{\bar{\psi}_{21}}^{1} + M_{23}\overbrace{\bar{\psi}_{23}}^{-2} + M_{32}\overbrace{\bar{\psi}_{32}}^{-2} = M_{21} - 2M_{23} - 2M_{32}$$

$$W_{\text{ext}} = P\bar{u}_2 + qa\cdot\frac{3}{4}\bar{v}_2 = qa(-2a + \frac{3}{4}\cdot 2a) = -\frac{qa^2}{2}$$

$$W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = 0 \ \Rightarrow\ M_{21} - 2M_{23} - 2M_{32} - \frac{qa^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{3EI}{2a}\varphi_2 - \frac{3EI}{2a}\psi + \frac{9}{32}qa^2 - 4\sqrt{2}\frac{EI}{a}\varphi_2 - 12\sqrt{2}\frac{EI}{a}\psi - 2\sqrt{2}\frac{EI}{a}\varphi_2 - 12\sqrt{2}\frac{EI}{a}\psi + qa^2 = 0 \text{ Yht}$$

$$\Rightarrow\ \underline{(12\sqrt{2}-3)\frac{EI}{a}\varphi_2 + (48\sqrt{2}+3)\frac{EI}{a}\psi = -\frac{7}{16}qa^2}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} (4\sqrt{2}+3)\varphi_2 + (12\sqrt{2}-3)\psi = -\dfrac{9}{16}\dfrac{qa^3}{EI} \\ (12\sqrt{2}-3)\varphi_2 + (48\sqrt{2}+3)\psi = -\dfrac{7}{16}\dfrac{qa^3}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8,657 & 13,971 \\ 13,971 & 70,882 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{EI}\begin{Bmatrix} -0,5625 \\ -0,4375 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{EI}\frac{1}{418,437}\begin{bmatrix} 70,882 & -13,971 \\ -13,971 & 8,657 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0,5625 \\ -0,4375 \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{EI}\begin{Bmatrix} -0,08068 \\ 0,00973 \end{Bmatrix}$$

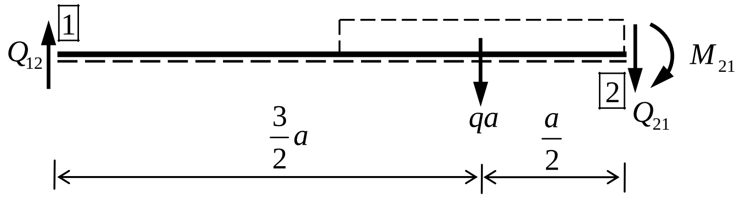
Sauvanpäämomentit:

$$M_{21} = \frac{3EI}{2a}(-0,08068\frac{qa^3}{EI}) - \frac{3EI}{2a}(0,00973\frac{qa^3}{EI}) + \frac{9}{32}qa^2 = 0,1456qa^2$$

$$M_{23} = 2\sqrt{2}\frac{EI}{a}(-0,08068\frac{qa^3}{EI}) + 6\sqrt{2}\frac{EI}{a}(0,00973\frac{qa^3}{EI}) = -0,1456qa^2, \text{ OK}$$

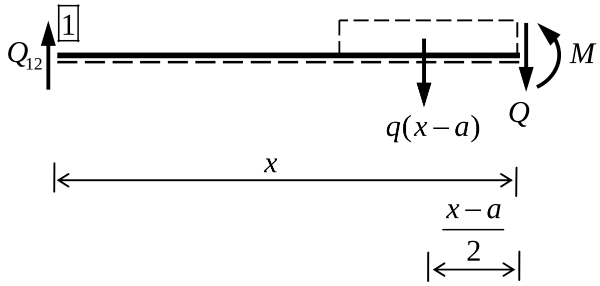
$$M_{32} = \sqrt{2}\frac{EI}{a}(-0,08068\frac{qa^3}{EI}) + 6\sqrt{2}\frac{EI}{a}(0,00973\frac{qa^3}{EI}) = 0,0315qa^2$$

Sauvanpääleikkausvoima Q_{12}:



$$\boxed{2}\quad Q_{12}\cdot 2a - qa\cdot\frac{a}{2} + M_{21} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{12} = \frac{qa}{4} - \frac{\overbrace{M_{21}}^{0,1456qa^2}}{2a} = 0,1772qa$$

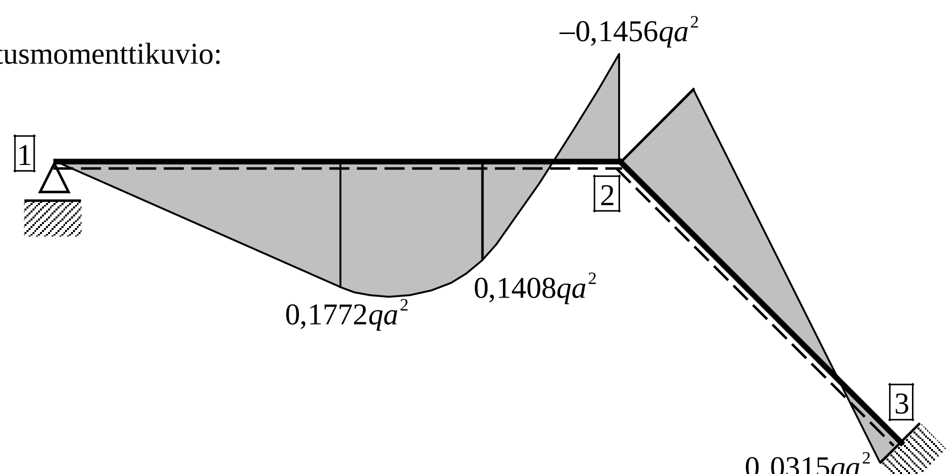
Taivutusmomentti välillä $a \le x \le 2a$:



$$\text{X}\quad Q_{12}\cdot x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2} - M = 0$$

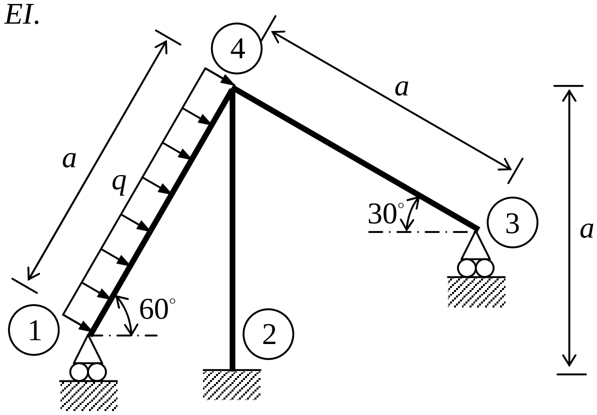
$$\Rightarrow\; M = Q_{12}\cdot x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2} = [0,1772\frac{x}{a} - 0,5(\frac{x}{a}-1)^2]qa^2$$

Taivutusmomenttikuvio:



Tehtävä 4.8:

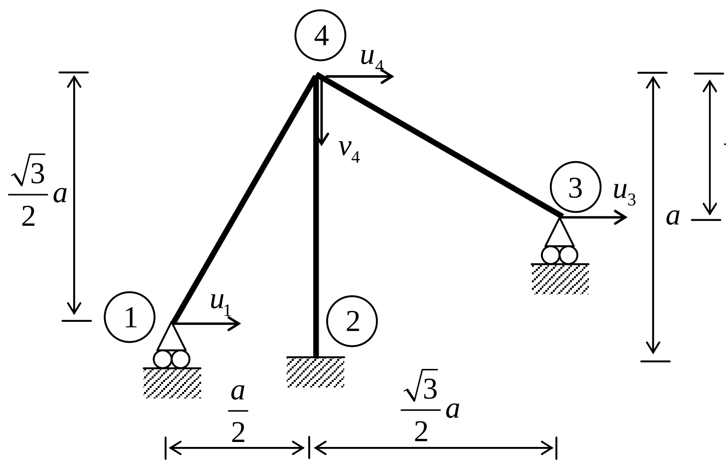
Määritä kulmanmuutosmenetelmällä ja piirrä oheisen tasokehän *M*-kuvio. Kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on *EI*.



Ratkaisu:

Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1 \;\Rightarrow\;$ <u>1. riippumaton sauvakiertymä!</u>

Nurkkien kinematiikkaa:



$$\begin{cases} u_4 = u_1 + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\psi_{14} \\ v_4 = \overbrace{v_1}^{0} + \dfrac{a}{2}\psi_{14} = \dfrac{a}{2}\psi_{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = u_4 - a\psi_{24} = u_1 + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\psi_{14} - a\psi_{24} = 0 \\ v_2 = v_4 = \dfrac{a}{2}\psi_{14} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\psi_{14} = 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \psi_{14} = 0,\; u_1 = u_4 = a\psi_{24},\; v_4 = 0$$

$$\begin{cases} u_3 = u_4 - \dfrac{a}{2}\psi_{34} = a\psi_{24} - \dfrac{a}{2}\psi_{34} \\ v_3 = v_4 + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\psi_{34} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\psi_{34} = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\psi_{34} = 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \psi_{24} = \psi_{34} = 0, \ u_3 = a\psi_{34}$$

Valitaan $\psi_{24} = \psi$, jolloin

$$u_1 = u_3 = u_4 = a\psi, \ u_2 = 0, \ v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0, \ \psi_{24} = \psi, \ \psi_{14} = \psi_{34} = 0.$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt:

$$M_{41} = \frac{3EI}{a}\overbrace{\varphi_{41}}^{\varphi_4} - \frac{3EI}{a}\overbrace{\psi_{41}}^{0} + MK_{41}^0 = \frac{3EI}{a}\varphi_4 + \frac{qa^2}{8},$$

$$M_{24} = \frac{4EI}{a}\overbrace{\varphi_{24}}^{0} + \frac{2EI}{a}\overbrace{\varphi_{42}}^{\varphi_4} - \frac{6EI}{a}\overbrace{\psi_{24}}^{\psi} + \overbrace{MK_{24}}^{0} = \frac{2EI}{a}\varphi_4 - \frac{6EI}{a}\psi,$$

$$M_{42} = \frac{4EI}{a}\overbrace{\varphi_{42}}^{\varphi_4} + \frac{2EI}{a}\overbrace{\varphi_{24}}^{0} - \frac{6EI}{a}\overbrace{\psi_{42}}^{\psi} + \overbrace{MK_{24}}^{0} = \frac{4EI}{a}\varphi_4 - \frac{6EI}{a}\psi,$$

$$M_{43} = \frac{3EI}{a}\overbrace{\varphi_{43}}^{\varphi_4} - \frac{3EI}{a}\overbrace{\psi_{43}}^{0} + MK_{43}^0 = \frac{3EI}{a}\varphi_4.$$

Nurkan 4 momenttitasapaino:

$$M_{41} + M_{42} + M_{43} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{3EI}{a}\varphi_4 + \frac{qa^2}{8} + \frac{4EI}{a}\varphi_4 - \frac{6EI}{a}\psi + \frac{3EI}{a}\varphi_4 = 0$$

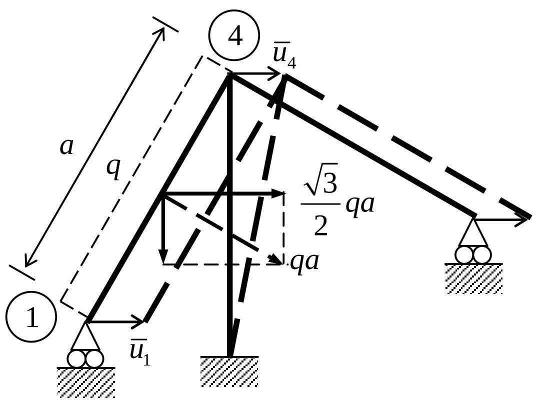
$$\Rightarrow \ \underline{\frac{10EI}{a}\varphi_4 - \frac{6EI}{a}\psi + \frac{qa^2}{8} = 0}$$

Siirtymäyhtälöt:

- sisäinen virtuaalinen työ

$$W_{\text{int}} = M_{41}\overbrace{\bar{\psi}_{41}}^{0} + M_{42}\overbrace{\bar{\psi}_{42}}^{\bar{\psi}=1} + M_{24}\overbrace{\bar{\psi}_{24}}^{\bar{\psi}=1} + M_{43}\overbrace{\bar{\psi}_{43}}^{0} = M_{42} + M_{24}$$

$$= \frac{4EI}{a}\varphi_4 - \frac{6EI}{a}\psi + \frac{2EI}{a}\varphi_4 - \frac{6EI}{a}\psi = \frac{6EI}{a}\varphi_4 - \frac{12EI}{a}\psi$$



- ulkoinen virtuaalinen työ

$$W_{\text{ext}} = \frac{\sqrt{3}}{2}qa \cdot \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_4}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}qa \cdot a\overbrace{\bar{\psi}}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}qa^2$$

- virtuaalisen työn periaate

$$W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\frac{6EI}{a}\varphi_4 - \frac{12EI}{a}\psi + \frac{\sqrt{3}}{2}qa^2 = 0}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} 10\varphi_4 - 6\psi = -\dfrac{qa^3}{8EI} \\ -6\varphi_4 + 12\psi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{qa^3}{EI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_4 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{EI} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_4 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{10 \cdot 12 - 6^2} \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \frac{qa^3}{EI} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{84} \begin{Bmatrix} -\dfrac{3}{2} + 3\sqrt{3} \\ -\dfrac{3}{4} + 5\sqrt{3} \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EI} = \begin{Bmatrix} 0,04401 \\ 0,09417 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EI}$$

Sauvanpäämomentit:

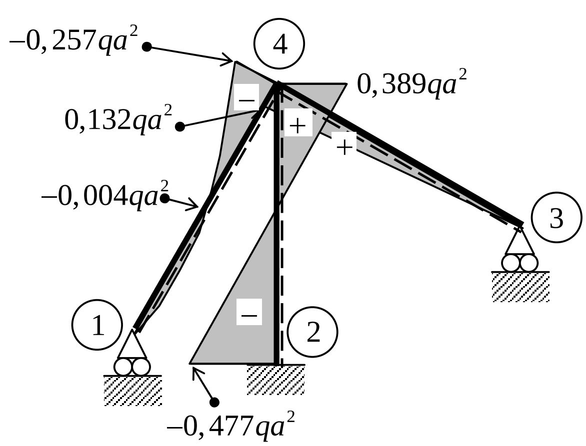
$$M_{41} = \frac{3EI}{a} \cdot 0,04401\frac{qa^3}{EI} + \frac{qa^2}{8} = 0,257qa^2,$$

$$M_{24} = \frac{2EI}{a} \cdot 0,04401\frac{qa^3}{EI} - \frac{6EI}{a} \cdot 0,09417\frac{qa^3}{EI} = -0,477qa^2$$

$$M_{42} = \frac{4EI}{a} \cdot 0,04401\frac{qa^3}{EI} - \frac{6EI}{a} \cdot 0,09417\frac{qa^3}{EI} = -0,389qa^2$$

$$M_{43} = \frac{3EI}{a} \cdot 0,04401\frac{qa^3}{EI} = 0,132qa^2$$

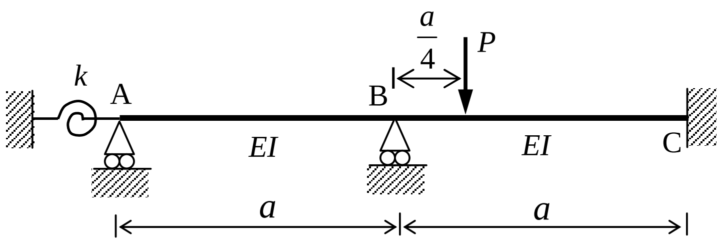
Taivutusmomenttikuvio:



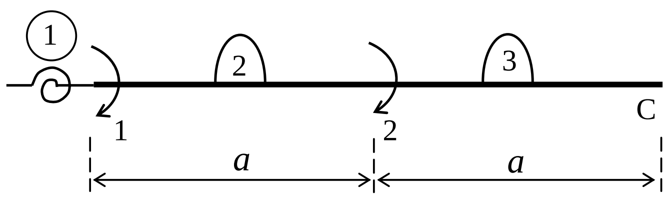
5. Sauvarakenteiden siirtymämenetelmä eli elementtimenetelmä

Tehtävä 5.1:

Määritä elementtimenetelmällä oheisen palkin kiertymät pisteissä A ja B käyttäen kahta palkki- ja yhtä kierrejousielementtiä. Määritä myös palkin taivutusmomenttikuvio. Kierrejousen jousivakiolla on arvo $k = 2EI/a$.



Ratkaisu:



Rakenteen jäykkyysmatriisin alkiot:

$$K_{11} = K_{22}^1 + K_{22}^2 = k + \frac{4EI}{a} = \frac{2EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{6EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{24}^2 = \frac{2EI}{a} (= K_{21})$$

$$K_{22} = K_{44}^2 + K_{22}^3 = \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{8EI}{a}$$

Rakenteen kuormitusvektorin alkiot:

$$FK_1 = \overbrace{FK_2^1}^{0} + \overbrace{FK_2^2}^{0} = 0$$

$$FK_2 = \overbrace{FK_4^2}^{0} + FK_2^3 = MK_1^3 = -\frac{P\frac{a}{4}(\frac{3a}{4})^2}{a^2} = -\frac{9}{64}Pa$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\} \Rightarrow \frac{EI}{a}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{9}{64}Pa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{9}{64}\frac{Pa^2}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6\cdot 8 - 2^2}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{9}{64}\frac{Pa^2}{EI} = \frac{9}{44\cdot 64}\begin{Bmatrix} -2 \\ 6 \end{Bmatrix}\frac{Pa^2}{EI} = \frac{9}{1408}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \end{Bmatrix}\frac{Pa^2}{EI}.$$

Pisteiden A ja B kiertymät:

$$\underline{\underline{\varphi_A = a_1 = -\frac{9}{1408}\frac{Pa^2}{EI}}}, \quad \underline{\underline{\varphi_B = a_2 = \frac{27}{1408}\frac{qa^2}{EI}}}$$

Elementti 2:

$$\{F\}^2 = [K]^2\{a\}^2 + \{FK\}^2 \Rightarrow$$

$$F_2^2 = K_{21}^2 \overbrace{a_1^2}^{0} + K_{22}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_1} + K_{23}^2 \overbrace{a_3^2}^{0} + K_{24}^2 \overbrace{a_4^2}^{a_2} + \overbrace{FK_2^2}^{MK_1^2=0}$$

$$= \frac{4EI}{a}\left(-\frac{9}{1408}\frac{Pa^2}{EI}\right) + \frac{2EI}{a}\frac{27}{1408}\frac{Pa^2}{EI} = \frac{9}{704}Pa$$

$$F_4^2 = K_{41}^2 \overbrace{a_1^2}^{0} + K_{42}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_1} + K_{43}^2 \overbrace{a_3^2}^{0} + K_{44}^2 \overbrace{a_4^2}^{a_2} + \overbrace{FK_4^2}^{MK_2^2=0}$$

$$= \frac{2EI}{a}\left(-\frac{9}{1408}\frac{Pa^2}{EI}\right) + \frac{4EI}{a}\frac{27}{1408}\frac{Pa^2}{EI} = \frac{45}{704}Pa$$

Taivutusmomentit pisteissä A ja B:

$$M_A = F_2^2 = \frac{9}{704}Pa \approx \underline{0,013Pa}, \quad M_B = -F_4^2 = -\frac{45}{704}Pa \approx \underline{-0,064Pa}$$

Elementti 3:

$$\{F\}^3 = [K]^3\{a\}^3 + \{FK\}^3 \Rightarrow$$

$$F_2^3 = K_{21}^3 \overbrace{a_1^3}^{0} + K_{22}^3 \overbrace{a_2^3}^{a_2} + K_{23}^3 \overbrace{a_3^2}^{0} + K_{24}^3 \overbrace{a_4^3}^{0} + \overbrace{FK_2^2}^{MK_1^3}$$

$$= \frac{4EI}{a}\frac{27}{1408}\frac{Pa^2}{EI} - \frac{9}{64}Pa = -\frac{45}{704}Pa$$

$$F_4^3 = K_{41}^3 \overbrace{a_1^3}^{0} + K_{42}^3 \overbrace{a_2^3}^{a_2} + K_{43}^3 \overbrace{a_3^3}^{0} + K_{44}^3 \overbrace{a_4^3}^{0} + \overbrace{FK_4^3}^{MK_2^3}$$

$$= \frac{2EI}{a}\frac{27}{1408}\frac{Pa^2}{EI} + \frac{P(\frac{a}{4})^2\frac{3a}{4}}{a^2} = \frac{60}{704}Pa$$

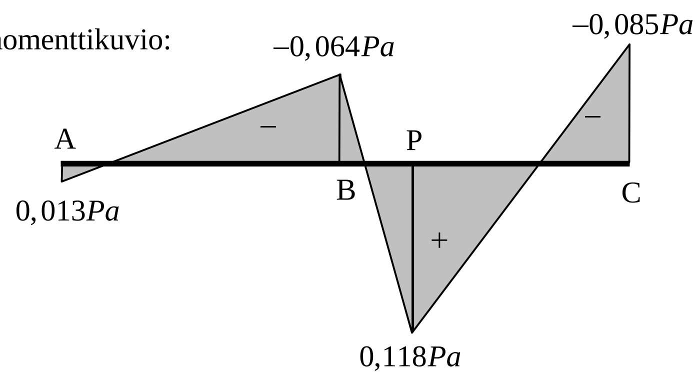
Taivutusmomentit pisteissä A ja B:

$$M_B = F_2^3 = -\frac{45}{704}Pa \approx \underline{-0,064Pa}, \quad M_C = -F_4^3 = -\frac{60}{704}Pa \approx \underline{-0,085Pa},$$

Taivutusmomentti pistevoiman P vaikutuspisteessä P:

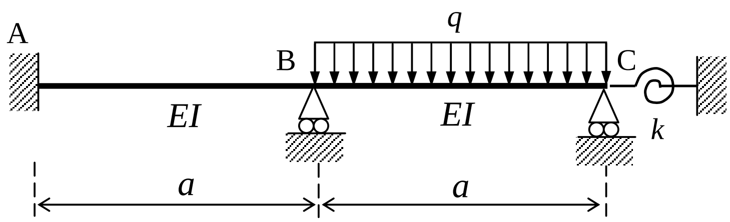
$$M_P = \frac{3}{4}\left(-\frac{45}{704}Pa\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{60}{704}Pa\right) + \frac{3}{4}P\cdot\frac{a}{4} = \underline{0,118Pa}$$

Taivutusmomenttikuvio:

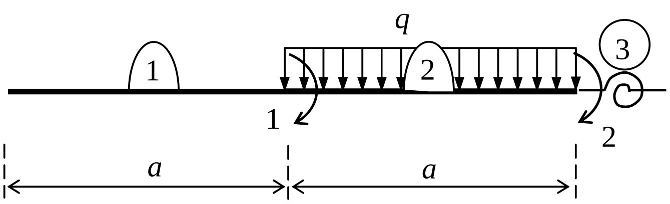


Tehtävä 5.2:

Määritä elementtimenetelmällä oheisen palkin kiertymät pisteissä B ja C käyttäen kahta palkki- ja yhtä kierrejousielementtiä. Määritä lisäksi taivutusmomentin arvot pisteissä B ja C. Kierrejousen jousivakiolla on arvo $k = 2EI/a$.



Ratkaisu:



Rakenteen jäykkyysmatriisin alkiot:

$$K_{11} = K_{44}^1 + K_{22}^2 = \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{8EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{24}^2 = \frac{2EI}{a} (= K_{21})$$

$$K_{22} = K_{44}^2 + K_{11}^3 = \frac{4EI}{a} + k = \frac{4EI}{a} + \frac{2EI}{a} = \frac{6EI}{a}$$

Rakenteen kuormitusvektorin alkiot:

$$FK_1 = FK_4^1 + FK_2^2 = MK_1^2 = -\frac{qa^2}{12}$$

$$FK_2 = FK_4^2 + FK_1^3 = MK_2^2 + 0 = \frac{qa^2}{12}$$

Yhtälöryhmä:

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\} \;\Rightarrow\; \frac{EI}{a}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \frac{qa^2}{12}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{12EI}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6 \cdot 8 - 2^2}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}\frac{qa^3}{12EI} = \frac{1}{12 \cdot 44}\begin{Bmatrix} 8 \\ -10 \end{Bmatrix}\frac{qa^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{264}\begin{Bmatrix} 4 \\ -5 \end{Bmatrix}\frac{qa^3}{EI}.$$

Pisteiden B ja C kiertymät:

$$\underline{\underline{\varphi_B = a_1 = \frac{1}{66}\frac{qa^3}{EI}}}, \quad \underline{\underline{\varphi_C = a_2 = -\frac{5}{264}\frac{qa^3}{EI}}}$$

Elementti 2:

$$\{F\}^2 = [K]^e\{a\}^2 + \{FK\}^2$$

$$\Rightarrow\ F_2^2 = K_{21}^2 \overbrace{a_1^2}^{0} + K_{22}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_1} + K_{23}^2 \overbrace{a_3^2}^{0} + K_{24}^2 \overbrace{a_4^2}^{a_2} + \overbrace{FK_2^2}^{MK_1^2}$$

$$= \frac{4EI}{a}\frac{4}{264}\frac{qa^3}{EI} + \frac{2EI}{a}(-\frac{5}{264}\frac{qa^3}{EI}) - \frac{qa^2}{12} = (\frac{16}{264} - \frac{10}{264} - \frac{1}{12})qa^2 = -\frac{2}{33}qa^2$$

$$F_4^2 = K_{41}^2 \overbrace{a_1^2}^{0} + K_{42}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_1} + K_{43}^2 \overbrace{a_3^2}^{0} + K_{44}^2 \overbrace{a_4^2}^{a_2} + \overbrace{FK_4^2}^{MK_2^2}$$

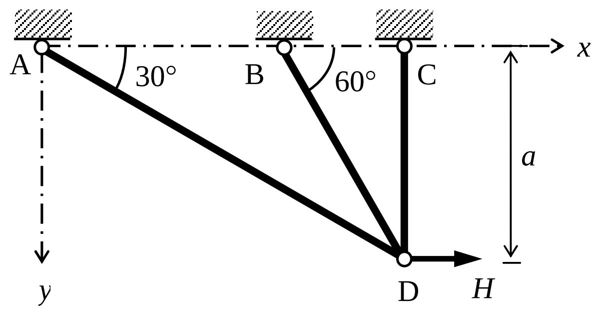
$$= \frac{2EI}{a}\frac{4}{264}\frac{qa^3}{EI} + \frac{4EI}{a}(-\frac{5}{264}\frac{qa^3}{EI}) + \frac{qa^2}{12} = (\frac{8}{264} - \frac{20}{264} + \frac{1}{12})qa^2 = \frac{5}{132}qa^2$$

Taivutusmomentit pisteissä B ja C:

$$\underline{\underline{M_B = F_2^2 = -\frac{2}{33}qa^2}},\ \underline{\underline{M_C = -F_4^2 = -\frac{5}{132}qa^2}}$$

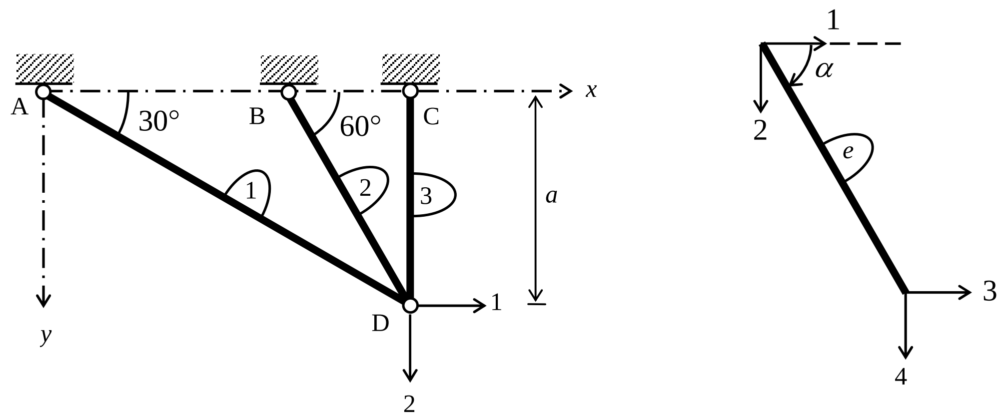
Tehtävä 5.3:

Oheisen tasoristikon niveleen D vaikuttaa vaakavoima *H*. Määritä elementtimenetelmällä nivelen D siirtymäkomponentit ja sauvan BD sauvavoima. Kaikkien sauvojen aksiaalijäykkyys on *EA* ja ne otaksutaan painottomiksi.



Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausasteet:



Elementtien pituudet:

$$L^1 = \frac{a}{\sin 30°} = 2a, \quad L^2 = \frac{a}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}a, \quad L^3 = a,$$

Rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin alkioiden kokoaminen:

$$K_{11} = K_{33}^1 + K_{33}^2 + K_{33}^3 = \frac{EA}{L^1}\cos^2 30° + \frac{EA}{L^2}\cos^2 60° + \frac{EA}{L^3}\cos^2 90° = \frac{EA}{2a}\cdot\frac{3}{4} + \frac{EA}{2a/\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4} + \frac{EA}{a}\cdot 0$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{8}\frac{EA}{a} \approx \underline{0,5915\frac{EA}{a}}$$

$$K_{12} = K_{34}^1 = K_{34}^2 = K_{34}^3 = \frac{EA}{L^1}\sin 30°\cos 30° + \frac{EA}{L^2}\sin 60°\cos 60° + \frac{EA}{L^3}\sin 90°\cos 90°$$

$$= \frac{EA}{2a}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{EA}{2a/\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{EA}{a}\cdot 1\cdot 0 = \frac{\sqrt{3}+3}{8}\frac{EA}{a} \approx \underline{0,5915\frac{EA}{a}} = K_{21}$$

$$K_{22} = K_{44}^1 = K_{44}^2 = K_{44}^3 = \frac{EA}{L^1}\sin^2 30° + \frac{EA}{L^2}\sin^2 60° + \frac{EA}{L^3}\sin^2 90° = \frac{EA}{2a}\cdot\frac{1}{4} + \frac{EA}{2a/\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{4} + \frac{EA}{a}\cdot 1$$

$$= (\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} + 1)\frac{EA}{a} = \frac{9+3\sqrt{3}}{8}\frac{EA}{a} \approx \underline{1,7745\frac{EA}{a}}$$

$FK_1 = 0,\ FK_2 = 0$ (Painottomat sauvat.)

Vapausastekuormat:

$P_1 = H,\ P_2 = 0.$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\} \Leftrightarrow \begin{cases} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 = P_1 \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 = P_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,5915\frac{EA}{a}a_1 + 0,5915\frac{EI}{a}a_2 = H \\ 0,5915\frac{EI}{a}a_1 + 1,7745\frac{EI}{a}a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5915 & 0,5915 \\ 0,5915 & 1,7745 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{Ha}{EA}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{0,6997}\begin{bmatrix} 1,7745 & -0,5915 \\ -0,5915 & 0,5915 \end{bmatrix}\frac{Ha}{EA}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{0,6997}\begin{Bmatrix} 1,7745 \\ -0,5915 \end{Bmatrix}\frac{Ha}{EA} = \underline{\begin{Bmatrix} 2,536 \\ -0,845 \end{Bmatrix}\frac{Ha}{EA}}$$

Nivelen D siirtymät:

$$\underline{\underline{u_{\mathrm{D}} = a_1 = 2,536\frac{Pa}{EA},\ v_{\mathrm{D}} = a_2 = -0,845\frac{Pa}{EA}.}}$$

Elementti 2:

Elementtivapausasteiden arvot sauvakoordinaatistossa:

$$\{a'\}^2 = [T]\{a\}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & \sin 60° & 0 & 0 \\ -\sin 60° & \cos 60° & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 60° & \sin 60° \\ 0 & 0 & -\sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \\ a_4^2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + \sqrt{3} a_2 \\ -\sqrt{3} a_1 + a_2 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,536 \\ -2,619 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EA}$$

Sauvavoimat:

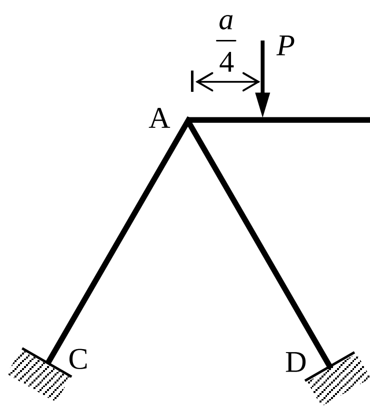
$$\{F'\}^2 = [K']^2 \{a'\}^2 + \overbrace{\{FK'\}^2}^{\{0\}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = \frac{EA}{L^2}(u_1' - u_2'), \quad V_1 = 0, \quad U_2 = \frac{EA}{L^2}(u_2' - u_1'), \quad V_2 = 0.$$

$$S^2 = U_2 = \frac{EA}{L^e}(u_2' - u_1') = \frac{EA}{2a/\sqrt{3}}(0,536 \frac{Pa}{EA} - 0) = \underline{\underline{0,464P}}.$$

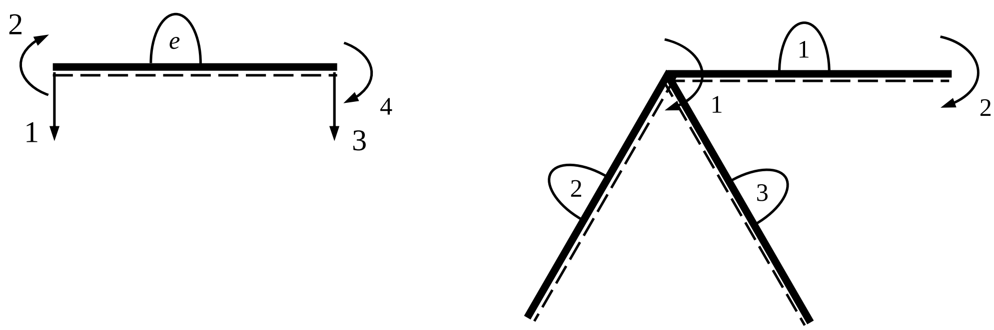
Tehtävä 5.4:

Oheisen kehän kaikkien sauvojen pituus on *a*, taivutusjäykkyys on *EI* ja ne ovat aksiaalisesti venymättömiä. Kehä on siten siirtymätön, ja siinä esiintyy vain kaksi kiertymävapausastetta, pisteiden A ja B kiertymät. Ratkaise elementtimenetelmällä käyttäen kolmea palkkielementtiä (a) nämä kiertymät sekä (b) sauvan AB taivutusmomenttikuvio.



Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausasteet:



Rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitusvektorin alkioiden kokoaminen:

$$K_{11} = K_{22}^1 + K_{44}^2 + K_{22}^3 = \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{12EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{24}^1 = \frac{2EI}{a} (= K_{21})$$

$$K_{22} = K_{44}^1 = \frac{4EI}{a}$$

$$FK_1 = FK_2^1 = MK_1^1 = -\frac{P\frac{a}{4}\cdot(\frac{3a}{4})^2}{a^2} = -\frac{9}{64}Pa$$

$$FK_2 = FK_4^1 = MK_2^1 = \frac{P(\frac{a}{4})^2\cdot\frac{3a}{4}}{a^2} = \frac{3}{64}Pa$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + FK_1 = 0 \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + FK_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{12EI}{a}a_1 + \dfrac{2EI}{a}a_2 - \dfrac{9}{64}Pa = 0 \\ \dfrac{2EI}{a}a_1 + \dfrac{4EI}{a}a_2 + \dfrac{3}{64}Pa = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a_1 + 1a_2 = \dfrac{9}{128}\dfrac{Pa^2}{EI} \\ 1a_1 + 2a_2 = -\dfrac{3}{128}\dfrac{Pa^2}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{3Pa^2}{128EI}\begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\frac{3Pa^2}{128EI}\begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{3}{1408}\begin{Bmatrix} 7 \\ -9 \end{Bmatrix}\frac{Pa^2}{EI}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = \frac{21}{1408}\frac{Pa^2}{EI} \approx 0,01491\frac{Pa^2}{EI} = \varphi_{\mathrm{A}},\ a_2 = -\frac{27}{1408}\frac{Pa^2}{EI} \approx -0,01918\frac{Pa^2}{EI} = \varphi_{\mathrm{B}}}}$$

Elementti 1:

Elementtivapausasteiden arvot:

$$a_1^1 = 0,\ a_2^1 = a_1 = 0,01491\frac{Pa^2}{EI},\ a_3^1 = 0,\ a_4^1 = a_2 = -0,01918\frac{Pa^2}{EI}.$$

Sauvanpääleikkausvoima ja sauvanpäämomentti päässä A:

$$V_1^1 \equiv F_1^1 = K_{11}^1\overbrace{a_1^1}^{0} + K_{12}^1\overbrace{a_2^1}^{a_1} + K_{13}^1\overbrace{a_3^1}^{0} + K_{14}^1\overbrace{a_4^1}^{a_2} + +\overbrace{FK_1^1}^{VK_1^1}$$

$$= K_{12}^1 a_1 + K_{14}^1 a_2 + VK_1^1$$

$$= \frac{6EI}{a^2}\cdot 0,01491\frac{Pa^2}{EI} + \frac{6EI}{a^2}\cdot(-0,01918\frac{Pa^2}{EI}) - \frac{P\frac{3a}{4}}{a}[1 + \frac{\frac{a}{4}(\frac{3a}{4} - \frac{a}{4})}{a^2}]$$

$$= 0,08946P - 0,11508P - 0,84375P$$

$$= \underline{-0,86937P}$$

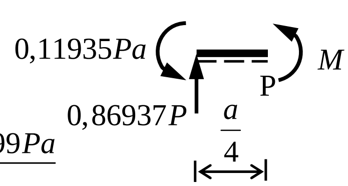
$$M_1^1 \equiv F_2^1 = K_{21}^1\overbrace{a_1^1}^{0} + K_{22}^1\overbrace{a_2^1}^{a_1} + K_{23}^1\overbrace{a_3^1}^{0} + K_{24}^1\overbrace{a_4^1}^{a_2} + \overbrace{FK_2^1}^{MK_1^1}$$

$$= K_{22}^1 a_1 + K_{24}^1 a_2 + MK_1^1 = \frac{4EI}{a}\cdot 0,01491\frac{Pa^2}{EI} + \frac{2EI}{a}\cdot(-0,01918\frac{Pa^2}{EI}) - \frac{P\frac{a}{4}(\frac{3a}{4})^2}{a^2}$$

$$= 0,05964Pa - 0,03836Pa - 0,14063Pa$$

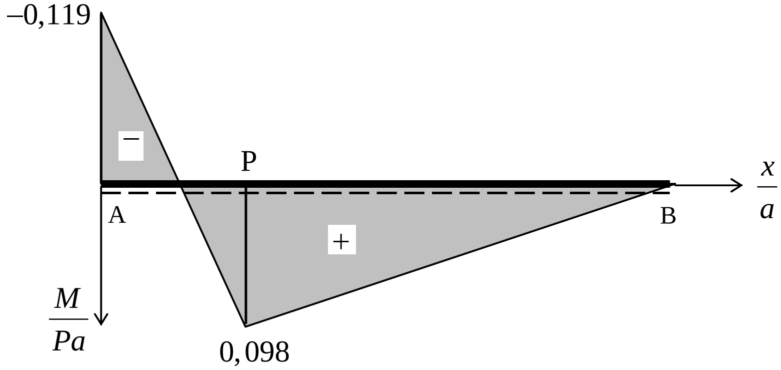
$$= \underline{-0,11935Pa}$$

Taivutusmomentti kuorman P vaikutuspisteessä P:



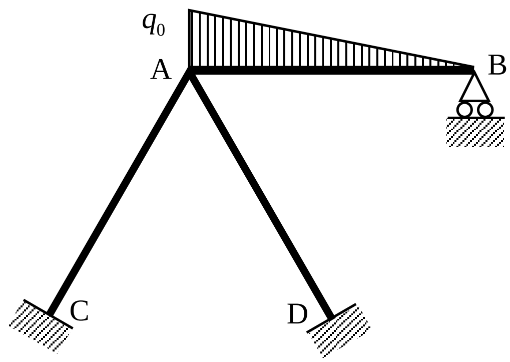
$$\text{P} \quad M - 0,86937P\cdot\frac{a}{4} + 0,11935Pa = 0 \Rightarrow \underline{M = 0,09799Pa}$$

Taivutusmomenttikuvio:



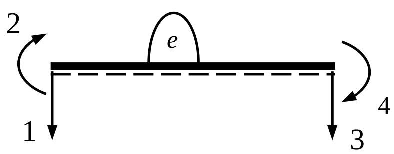
Tehtävä 5.5:

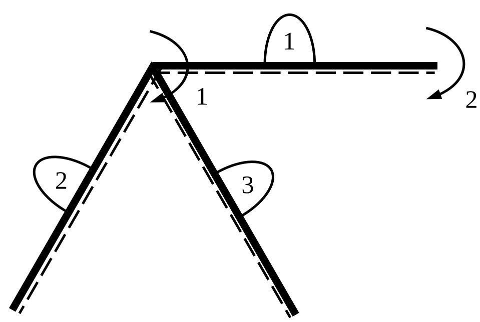
Oheisen kehän kaikkien sauvojen pituus on *a*, taivutusjäykkyys on *EI* ja ne ovat aksiaalisesti venymättömiä. Kehä on siten siirtymätön, ja siinä esiintyy vain kaksi kiertymävapausastetta: Pisteiden A ja B kiertymät. Ratkaise elementtimenetelmällä käyttäen kolmea palkkielementtiä (a) nämä kiertymät sekä (b) sauvan AB taivutusmomenttikuvio.



Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausasteet:





Rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitusvektorin alkioiden kokoaminen:

$$K_{11} = K_{22}^1 + K_{44}^2 + K_{22}^3 = \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{12EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{24}^1 = \frac{2EI}{a} (= K_{21})$$

$$K_{22} = K_{44}^1 = \frac{4EI}{a}$$

$$FK_1 = FK_2^1 = MK_1^1 = -(\frac{q_0}{20} + \frac{0}{30})a^2 = -\frac{1}{20} q_0 a^2$$

$$FK_2 = FK_4^1 = MK_2^1 = (\frac{q_0}{30} + \frac{0}{20})a^2 = \frac{1}{30} q_0 a^2$$

Ratkaisu:

$$\begin{cases} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + FK_1 = 0 \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + FK_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{12EI}{a}a_1 + \dfrac{2EI}{a}a_2 - \dfrac{qa^2}{20} = 0 \\ \dfrac{2EI}{a}a_1 + \dfrac{4EI}{a}a_2 + \dfrac{qa^2}{30} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a_1 + 1a_2 = \dfrac{qa^3}{40EI} \\ 1a_1 + 2a_2 = -\dfrac{qa^3}{60EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{120EI} \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \frac{qa^3}{120EI} \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1320} \begin{Bmatrix} 8 \\ -15 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = \frac{1}{165}\frac{qa^3}{EI} \approx 0{,}00606\frac{qa^3}{EI} = \varphi_{\mathrm{A}},\ a_2 = -\frac{1}{88}\frac{qa^3}{EI} \approx -0{,}01136\frac{qa^4}{EI} = \varphi_{\mathrm{B}}}}$$

Elementti 1:

Elementtivapausasteiden arvot:

$$a_1^1 = 0,\ a_2^1 = a_1 = \frac{1}{165}\frac{q_0a^3}{EI},\ a_3^1 = 0,\ a_4^1 = a_2 = -\frac{1}{88}\frac{q_0a^3}{EI}.$$

Sauvanpääleikkausvoima ja sauvanpäämomentti päässä A:

$$V_1^1 \equiv F_1^1 = K_{11}^1 \overbrace{a_1^1}^{0} + K_{12}^1 \overbrace{a_2^1}^{a_1} + K_{13}^1 \overbrace{a_3^1}^{0} + K_{14}^1 \overbrace{a_4^1}^{a_2} + FK_1^1$$

$$= K_{12}^1 a_1 + K_{14}^1 a_2 + \overbrace{FK_2^1}^{VK_1^1} = \frac{6EI}{a^2}\cdot\frac{1}{165}\frac{q_0a^3}{EI} + \frac{6EI}{a^2}\cdot\left(-\frac{1}{88}\frac{qa^3}{EI}\right) - \frac{7q_0a}{20}$$

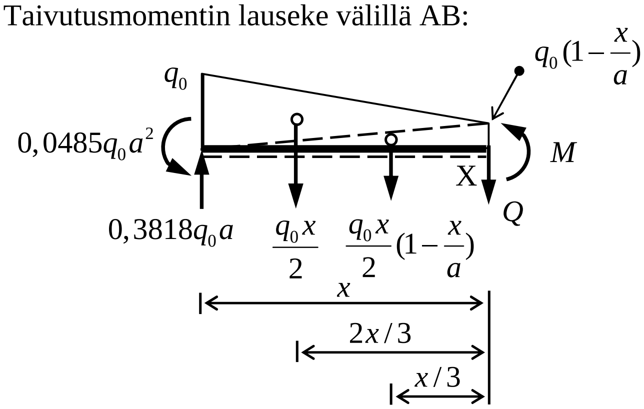
$$= -\frac{21}{55}q_0a \approx \underline{-0{,}3818q_0a}$$

$$M_1^1 \equiv F_2^1 = K_{21}^1 \overbrace{a_1^1}^{0} + K_{22}^1 \overbrace{a_2^1}^{a_1} + K_{23}^1 \overbrace{a_3^1}^{0} + K_{24}^1 \overbrace{a_4^1}^{a_2} + FK_2^1$$

$$= K_{22}^1 a_1 + K_{24}^1 a_2 + \overbrace{FK_2^1}^{MK_1^1} = \frac{4EI}{a}\cdot\frac{1}{165}\frac{q_0a^3}{EI} + \frac{2EI}{a}\cdot\left(-\frac{1}{88}\frac{qa^3}{EI}\right) - \frac{q_0a^2}{20}$$

$$= -\frac{8}{165}q_0a^2 \approx \underline{-0{,}0485q_0a^2}$$

Taivutusmomentin lauseke välillä AB:

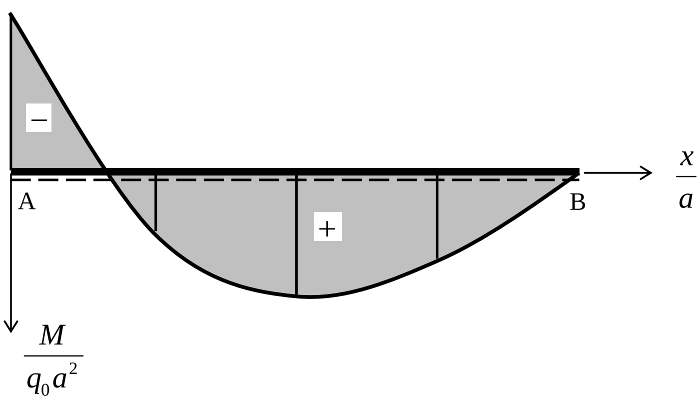


$$\overset{\curvearrowleft}{X}\quad 0{,}0485q_0a^2 - 0{,}3818q_0a\cdot x + \frac{q_0x}{2}\cdot\frac{2x}{3} + \frac{q_0x}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{x}{3} + M = 0$$

$$\Rightarrow\ M = q_0a^2\left[-0{,}0485 + 0{,}3818\frac{x}{a} - 0{,}5\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 0{,}1667\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$$

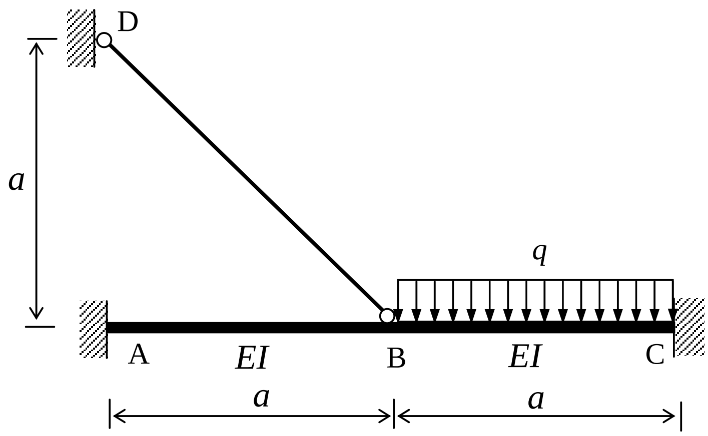
Taivutusmomenttikuvio:

x/a	M/q_0a^2
0	$-0{,}0485$
0,25	0,0183
0,5	0,0382
0,75	0,0269
1	0

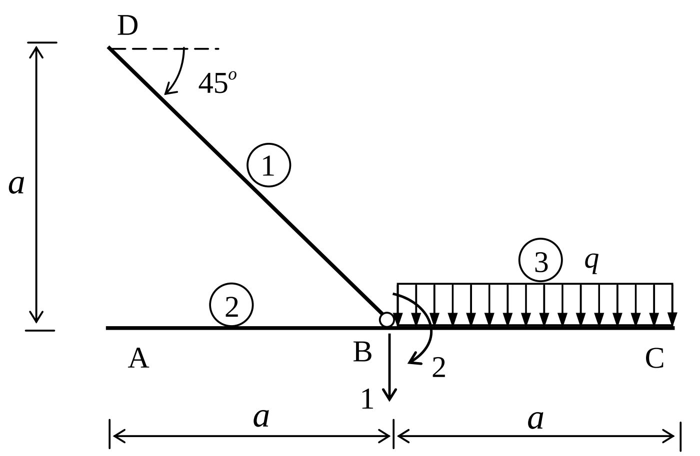


Tehtävä 5.6:

Määritä elementtimenetelmällä oheisen rakenteen palkin AC taipuma ja kiertymä pisteessä B. Palkin AC taivutusjäykkyys on EI ja se on aksiaalisesti venymätön sekä nivelsauvan BD aksiaalijäykkyydellä on arvo $EA = 100EI/a^2$. Valitse systeemivapausas-teiksi palkin AC pisteen B pystysiirtymä ja kiertymä. Kuvaa palkin AC osat AB ja BC palkkielementeillä ja nivelsauva BD ristikkoelementillä.



Ratkaisu:



Rakenteen jäykkyysmatriisin alkiot:

$$K_{11} = K_{44}^1 + K_{33}^2 + K_{11}^3 = \frac{EA}{a\sqrt{2}} \overbrace{\sin^2 45^0}^{1/2} + \frac{12EI}{a^3} + \frac{12EI}{a^3} = (25\sqrt{2} + 24)\frac{EI}{a^3}$$

$$K_{12} = K_{34}^2 + K_{12}^3 = -\frac{6EI}{a^2} + \frac{6EI}{a^2} = 0 (= K_{21})$$

$$K_{22} = K_{44}^2 + K_{22}^3 = \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{8EI}{a}$$

Rakenteen kuormitusvektorin alkiot:

$$FK_1 = FK_4^1 + FK_3^2 + FK_1^3 = 0 + \overbrace{VK_2^2}^{0} + VK_1^3 = -\frac{qa}{2}$$

$$FK_2 = FK_4^2 + FK_2^3 = \overbrace{MK_2^2}^{0} + MK_1^3 = -\frac{qa^2}{12}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\} \;\Rightarrow\; \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 25\sqrt{2}+24 & 0 \\ 0 & 8a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dfrac{qa}{2} \\ -\dfrac{qa^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$(25\sqrt{2}+24)\frac{EI}{a^3}a_1 = \frac{qa}{2} \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{1}{50\sqrt{2}+48}\frac{qa^4}{EI},$$

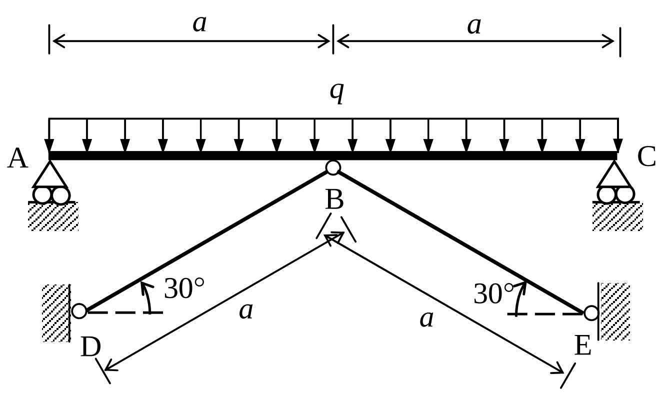
$$8\frac{EI}{a}a_2 = \frac{qa^2}{12} \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{1}{96}\frac{qa^3}{EI}.$$

Pisteen B taipuma ja kiertymä:

$$\underline{\underline{v_B = a_1 = \frac{1}{50\sqrt{2}+48}\frac{qa^4}{EI} \approx 0{,}00842\frac{qa^4}{EI}}}, \quad \underline{\underline{\varphi_B = a_2 = \frac{1}{96}\frac{qa^3}{EI} \approx 0{,}0104\frac{qa^3}{EI}}}$$

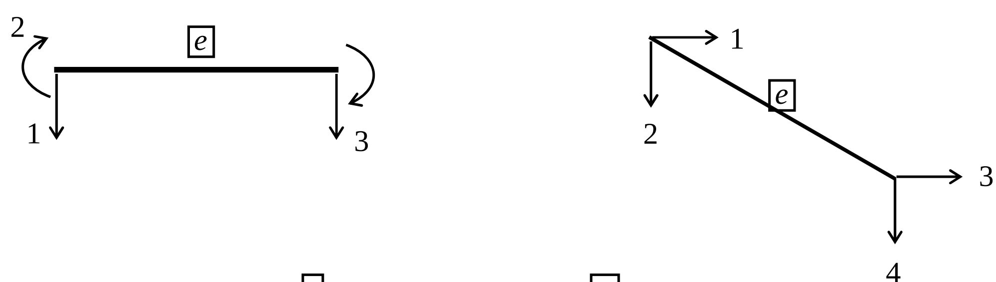
Tehtävä 5.7:

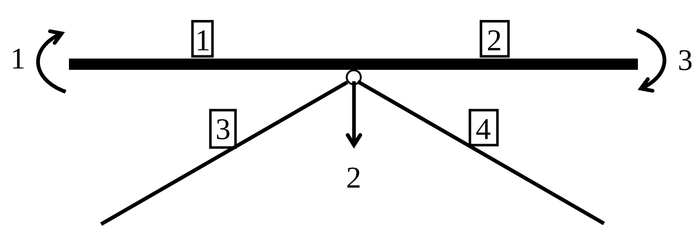
Määritä elementtimenetelmällä oheisen rakenteen pisteen A kiertymä ja pisteen B pystysiirtymä. Palkin AC taivutusjäykkyys on EI sekä nivelsauvojen BD ja BE aksiaalijäykkyydellä on arvo $EA = 100EI/a^2$. Kuvaa palkin AC osat AB ja BC palkkielementeillä ja nivelsauvat BD ja BE ristikkoelementeillä. Valitse aluksi systeemivapausasteiksi a_1 a_2, ja a_3 vastaavasti pisteen A kiertymä, pisteen B pysty-siirtymä ja pisteen C kiertymä. *Ohje:* Muodosta vain kaksi ensimmäistä kolmesta systeemiyhtälöstä. Koska rakenne on B pisteen kautta kulkevan pystyakselin suhteen symmetrinen, systeemivapausasteille on voimassa $a_3 = -a_1$. Tämän tuloksen perusteella voit eliminoida kolmannen tuntemattoman a_3 yhtälöparista.



Tehtävä:

Elementit ja systeemivapausasteet:





Rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitusvektorin alkioiden kokoaminen:

$$K_{11} = K_{22}^{1} = \frac{4EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{23}^{1} = -\frac{6EI}{a^2} (= K_{21})$$

$$K_{13} = 0$$

$$K_{22} = K_{33}^{1} + K_{11}^{2} + K_{44}^{3} + K_{22}^{4} = \frac{12EI}{a^3} + \frac{12EI}{a^3} + \frac{EA}{a}\sin^2(-30^0) + \frac{EA}{a}\sin^2 30^0$$

$$= \frac{EI}{a^3}(12+12+25+25) = 74\frac{EI}{a^3}$$

$$K_{23} = K_{14}^{2} = 6\frac{EI}{a^2}$$

$$FK_1 = FK_2^1 = MK_1^1 = -\frac{qa^2}{12}$$

$$FK_2 = FK_3^1 + FK_1^2 = VK_2^1 + VK_1^2 = -\frac{qa}{2} - \frac{qa}{2} = -qa$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + K_{13}a_3 + FK_1 = 0 \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + K_{23}a_3 + FK_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + K_{13}(-a_1) + FK_1 = 0 \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + K_{23}(-a_1) + FK_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (K_{11} - K_{13})a_1 + K_{12}a_2 + FK_1 = 0 \\ (K_{21} - K_{23})a_1 + K_{22}a_2 + FK_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\frac{4EI}{a} - 0)a_1 - \frac{6EI}{a^2}a_2 - \frac{qa^2}{12} = 0 \\ (-\frac{6EI}{a^2} - \frac{6EI}{a^2})a_1 + 74\frac{EI}{a^3}a_2 - qa = 0 \end{cases}$$

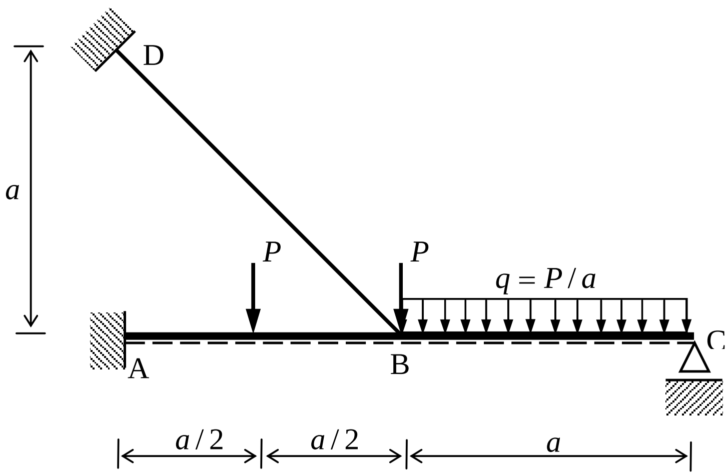
$$\Rightarrow \begin{cases} 4a \cdot a_1 - 6a_2 = \dfrac{qa^4}{12EI} \\ -12a \cdot a_1 + a_2 = \dfrac{qa^4}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a & -6 \\ -12a & 74 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^4}{EI} \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{224a} \begin{bmatrix} 74 & 6 \\ 12a & 4a \end{bmatrix} \frac{qa^4}{EI} \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{224} \begin{Bmatrix} \frac{73}{6} \\ 5a \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{a_1 = \frac{73}{1344}\frac{qa^3}{EI} \approx 0,05432\frac{qa^3}{EI} = \varphi_A,}} \\ \underline{\underline{a_2 = \frac{5}{224}\frac{qa^4}{EI} \approx 0,02232\frac{qa^4}{EI} = v_B}} \end{array}$$

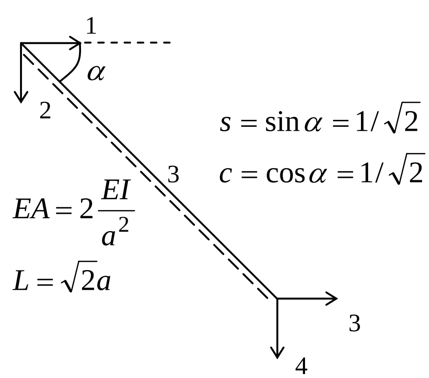
Tehtävä 5.8:

Määritä sauvarakenteiden siirtymämenetelmällä (elementtimenetelmällä) oheisen palkin kiertymä ja taipuma pisteessä B sekä kiertymä pisteessä C. Määritä lisäksi köyden BD normaalivoima (köysivoima) ja palkin AC leikkausvoimien ja taivutusmomenttien arvot pisteissä A, B ja C. Palkki AC on aksiaalisesti jäykkä ja sen taivutusjäykkyys on vakio *EI*. Köysi BD kuvataan ristikkoelementtinä, jonka aksiaalijäykkyys on $EA = 2EI/a^2$.

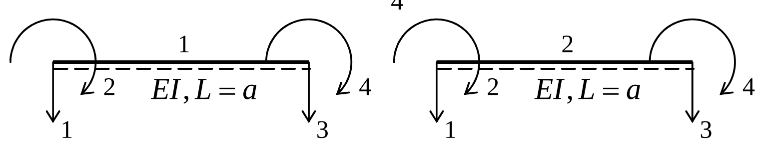


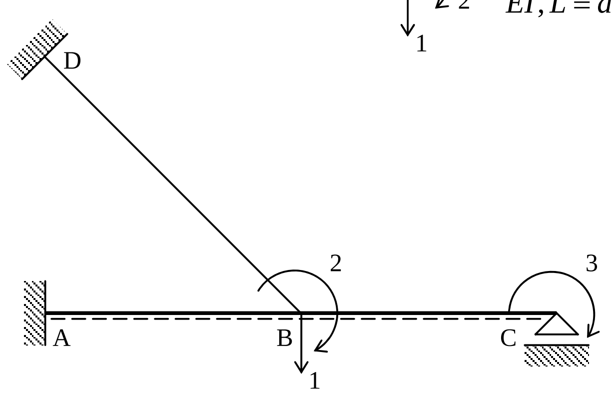
Ratkaisu:

Elementtivapausasteet a_i^e:



Systeemivapausasteet a_i:





Koska systeemivapausasteita on 3 kappaletta niin rakenteen jäykkyysmatriisin $[K]$ koko on 3×3. Rakenteen kuormitusvektorin $\{FK\}$ sekä vapausastekuormavektorin $\{P\}$ koot ovat 3×1. Elementit 1 ja 2 ovat palkkielementtejä ja elementti 3 on ristikkoelementti.

Palkkielementin ja ristikkoelementin jäykkyysmatriisit ovat:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix},$$

$$[K]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}.$$

Rakenteen jäykkyysmatriisin alkiot ovat:

$$K_{11} = K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{44}^3 = \frac{12EI}{a^3} + \frac{12EI}{a^3} + 2\frac{EI}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}a}\cdot\frac{1}{2} = (24+\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{EI}{a^3},$$

$$K_{12} = K_{34}^1 + K_{12}^2 = -\frac{6EI}{a^2} + \frac{6EI}{a^2} = 0 = K_{21},$$

$$K_{13} = K_{14}^2 = \frac{6EI}{a^2} = K_{31},$$

$$K_{22} = K_{44}^1 + K_{22}^2 = \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{8EI}{a},$$

$$K_{23} = K_{24}^2 = \frac{2EI}{a} = K_{32},$$

$$K_{33} = K_{44}^2 = \frac{4EI}{a}.$$

Rakenteen jäykkyysmatriisi on:

$$[K] = \begin{bmatrix} (24+\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{EI}{a^3} & 0 & \frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{8EI}{a} & \frac{2EI}{a} \\ \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix}.$$

Rakenteen kuormitusvektorin alkiot ovat:

$$FK_1 = VK_2^1 + VK_1^2 = -\frac{P}{2} - \frac{\frac{P}{a} \cdot a}{2} = -P\,,$$

$$FK_2 = MK_2^1 + MK_1^2 = \frac{Pa}{8} - \frac{\frac{P}{a} \cdot a^2}{12} = \frac{Pa}{24}\,, FK_3 = MK_2^2 = \frac{Pa}{12}\,.$$

Rakenteen kuormitusvektori on:

$$\{FK\} = \begin{Bmatrix} -P \\ \frac{Pa}{24} \\ \frac{Pa}{12} \end{Bmatrix}.$$

Vapausastekuormien muodostama vektori on:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä $[K]\{a\} = \{P\} - \{FK\}$:

$$\begin{bmatrix} (24 + \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{EI}{a^3} & 0 & \frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{8EI}{a} & \frac{2EI}{a} \\ \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ -\frac{Pa}{24} \\ -\frac{Pa}{12} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_B \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.14735\frac{Pa^3}{EI} \\ 0.06315\frac{Pa^2}{EI} \\ -0.27343\frac{Pa^2}{EI} \end{Bmatrix}.$$

Muunnetaan ristikkoelementin (elem. nro 3) rakennekoordinaatiston vapausasteet sauvakoordinaatiston vapausasteiksi:

$$\{a'\}^3 = [T]^3\{a\}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.14735\frac{Pa^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.10419\frac{Pa^3}{EI} \\ 0.10419\frac{Pa^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}^3 .$$

Ristikkoelementin vapausastevoimat:

$$\{F'\}^3=[K']^3\{a'\}^3=\overbrace{\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{EI}{a^3}}^{EA/L}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0.10419\dfrac{Pa^3}{EI}\\0.10419\dfrac{Pa^3}{EI}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.14734P\\0\\0.14734P\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}U_1\\V_1\\U_2\\V_2\end{Bmatrix}^3$$

Köyden BD normaalivoima:

$$\underline{\underline{N_{BD}}}=N(0)=-U_1^3=\underline{\underline{0.14734\,P}}.\qquad \text{(veto)}$$

Huom ! Palkkielementeille: $\{a'\}^1=\{a\}^1$ ja $\{a'\}^2=\{a\}^2$.

Palkkielementtien vapausastevoimat:

$$\{F'\}^1=[K']^1\{a'\}^1+\{FK'\}^1$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{12EI}{a^3}&\dfrac{6EI}{a^2}&-\dfrac{12EI}{a^3}&\dfrac{6EI}{a^2}\\\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{4EI}{a}&-\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{2EI}{a}\\-\dfrac{12EI}{a^3}&-\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{12EI}{a^3}&-\dfrac{6EI}{a^2}\\\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{2EI}{a}&-\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{4EI}{a}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0.14735\dfrac{Pa^3}{EI}\\0.06315\dfrac{Pa^2}{EI}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\dfrac{P}{2}\\-\dfrac{Pa}{8}\\-\dfrac{P}{2}\\\dfrac{Pa}{8}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1.8893P\\-0.8828Pa\\0.8893P\\-0.5065Pa\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}V_1\\M_1\\V_2\\M_2\end{Bmatrix}^1,$$

$$\{F'\}^2=[K']^2\{a'\}^2+\{FK'\}^2$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{12EI}{a^3}&\dfrac{6EI}{a^2}&-\dfrac{12EI}{a^3}&\dfrac{6EI}{a^2}\\\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{4EI}{a}&-\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{2EI}{a}\\-\dfrac{12EI}{a^3}&-\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{12EI}{a^3}&-\dfrac{6EI}{a^2}\\\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{2EI}{a}&-\dfrac{6EI}{a^2}&\dfrac{4EI}{a}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.14735\dfrac{Pa^3}{EI}\\0.06315\dfrac{Pa^2}{EI}\\0\\-0.27343\dfrac{Pa^2}{EI}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\dfrac{P}{2}\\-\dfrac{Pa}{12}\\-\dfrac{P}{2}\\\dfrac{Pa}{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0065P\\0.5065Pa\\-1.0065P\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}V_1\\M_1\\V_2\\M_2\end{Bmatrix}^2$$

Leikkausvoiman ja taivutusmomentin arvot pisteissä A, B ja C:

$$Q_A=-V_1^1=1.8893P,\quad M_A=M_1^1=-0.8828Pa,$$
$$Q_B^{\text{vas}}=V_2^1=0.8893P,\quad M_B=-M_2^1=0.5065Pa,$$
$$Q_B^{\text{oik}}=-V_1^2=-0.0065P,$$
$$Q_C=V_2^2=-1.0065P,\quad M_C=0.$$