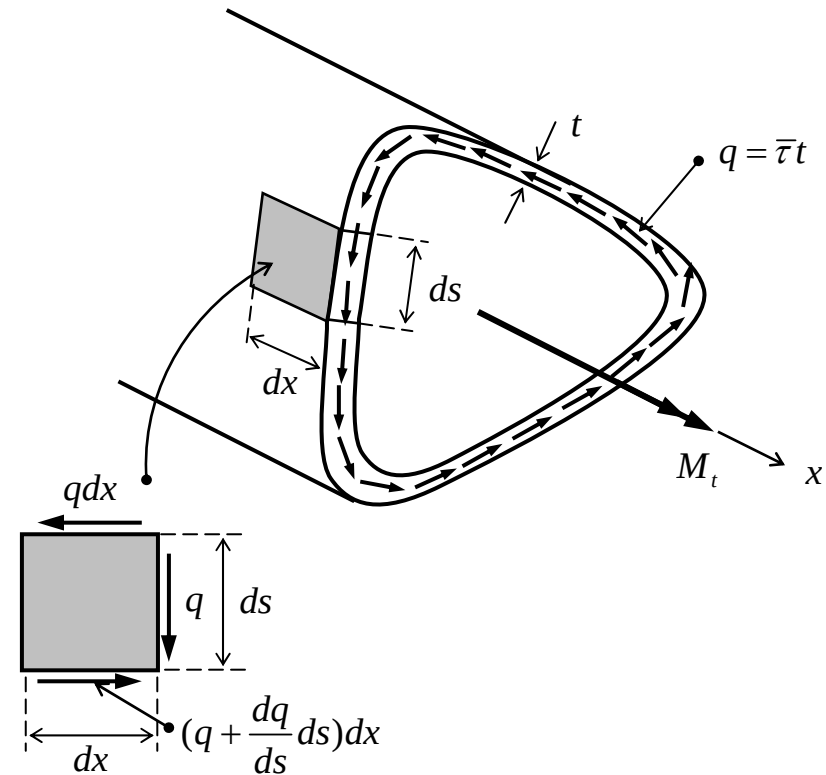
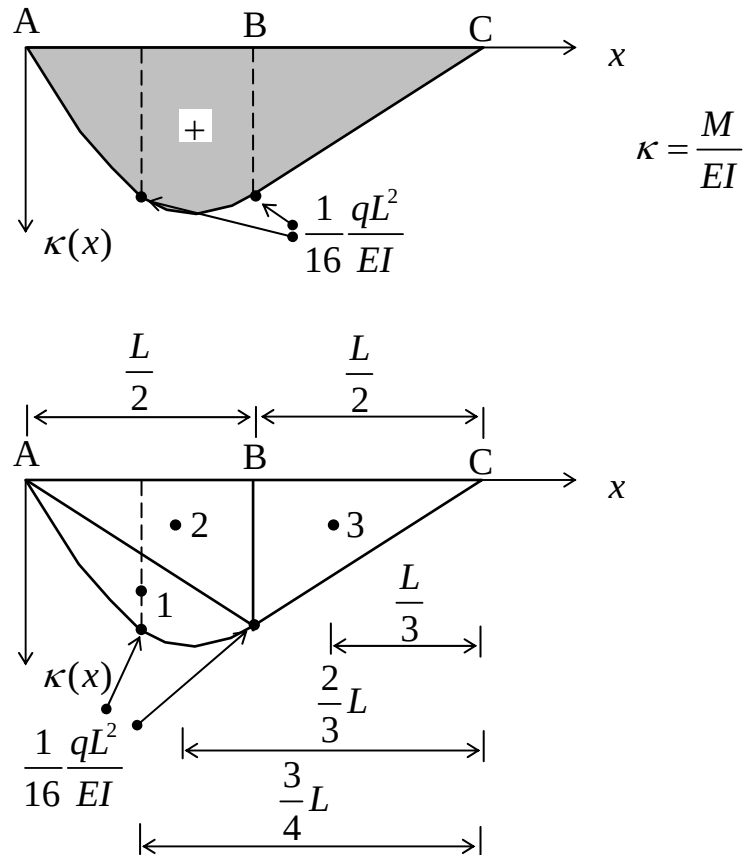


Rak-54.1300 RAKENTEIDEN MEKANIIKAN PERUSTEET

Luentomoniste

Jukka Aalto



1. STAATTISESTI MÄÄRÄTTYJEN RAKENTEIDEN STATIIKKAA

Tässä luvussa palataan staattisesti määrättyjen rakenteiden statiikan käsittelyyn. Ensimmäinen kosketus aiheeseen saatiin, kun Statiikan kurssissa käsiteltiin ristikkoja ja sauvojen leikkausrasitusten määrittämistä. Rakenteiden lujuusopin kurssin osan II luvuissa 1, 2 ja 3 aiheen käsittelyä jatkettiin ja nyt jatketaan vielä jonkin verran eteenpäin. Koska esitettävä on suoraa jatkoa Rakenteiden lujuusopin mainituille luvuille, kannatta ne tässä vaiheessa käydä läpi kertauksen vuoksi.

1.1 Staattisen määräämättömyyden kertaluku

1.11 Staattisesti määrätty ja staattisesti määräämätön rakenne

Rakenne (tai sen osa) on **staattisesti määrätty**, jos siihen vaikuttavat tuntemattomat voimasuureet voidaan ratkaista yksikäsitteisesti käyttäen **tasapainoyhtälöitä**. Jos näin ei ole, rakenne on **staattisesti määräämätön**. Rakenne on ulkoisesti staattisesti määrätty, jos sen tukivoimat voidaan määrittää tasapainoyhtälöitä käyttäen. Muussa tapauksessa se on ulkoisesti staattisesti määräämätön.

1.12 Staattisen määräämättömyyden kertaluku

Tarkastellaan rakennetta (tai sen osaa), ja halutaan määrittää siihen vaikuttavat voimasuureet. Jos rakenteesta piirretään vapaakappalekuvio, osa siihen vaikuttavista ulkoisista voimasuureista on tuntemattomia. Merkitään näiden lukumäärää symbolilla n_{tunt} . Statiikan perusteella rakenteelle voidaan muodostaa tietty määrä **riippumattomia** tasapainoyhtälöitä. Merkitään näiden lukumäärää symbolilla n_{yht} . Jos tuntemattomat voimasuureet voidaan määrittää pelkästään tasapainoyhtälöiden avulla (eli statiikan keinoin), sanotaan, että rakenne on **staattisesti määrätty**. Probleema muodostuu siis n_{yht} yhtälöstä, joissa on n_{tunt} tuntematonta. Jos yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia eli $n_{\text{yht}} = n_{\text{tunt}}$, yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu¹.

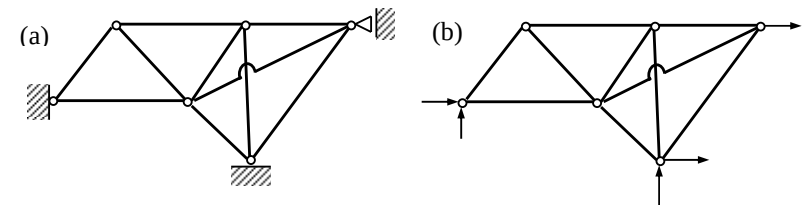
¹ Yhtälöryhmän pitää lisäksi olla ratkaistavissa, eli sen kerroinmatriisin tulee olla ei-singulaarinen. Tämä ehto toteutuu, jos tasapainoyhtälöt ovat riippumattomia.

Rakenteen (tai sen osan) **staattisen määräämättömyyden kertaluku** määritellään kaavalla

$$n_s = n_{\text{tunt}} - n_{\text{yht}} \quad (1.1)$$

Staattisesti määrättyssä rakenteessa siis $n_{\text{tunt}} = n_{\text{yht}}$ eli staattisen määräämättömyyden kertaluku $n_s = 0$. Jos $n_s > 0$ on rakenne **staattisesti määräämätön**. Tällöin n_s ilmaisee niiden tuntemattomien voimasuureiden lukumäärän, joita ei statiikan keinoin kyetä määrittämään. Näiden määrittämiseksi tarvitaan lisäyhtälöitä, joiden muodostamista käsitellään staattisesti määräämättömien rakenteiden ratkaisemisen yhteydessä. Jos $n_s < 0$ rakenne muodostaa **mekanismin**.

1.13 Ristikön staattisen määräämättömyyden kertaluku



Kuva 1.1: Tasoristikko: (a) tuet (b) tukireaktiot

Tarkastellaan **tasoristikkoa** (kuva 1.1). Tuntemattomina ovat sauvavoimat ja tukivoimat joten $n_{\text{tunt}} = s + t$, missä s on sauvojen lukumäärä ja t on tuentaan liittyvien siirtymärajoitteiden (ns. yksiarvoisten tukien) lukumäärä. Tasoristikossa kutakin niveltä kohti voidaan kirjoittaa kaksi tasapainoyhtälöä, joten $n_{\text{yht}} = 2k$, missä k on nivelten lukumäärä. Tasoristikön **staattisen määräämättömyyden kertaluku** on siten

$$n_s = s + t - 2k \quad (1.2)$$

(Kuvan 1.1 tapauksessa saadaan $n_s = 10 + 5 - 2 \cdot 6 = 3$). Jos $n_s = 0$, ristikko on tavallisesti **staattisesti määrätty**, jos $n_s > 0$, ristikko on **staattisesti määräämätön** ja jos $n_s < 0$, ristikko muodostaa **mekanismin**.

Avaruusristikolle voidaan suorittaa vastaavanlainen tarkastelu. Avaruusristikossa kutakin niveltä kohti voidaan kirjoittaa kolme tasapainoyhtälöä, joten yhtälöiden lukumäärä on nyt $3k$. Lauseketta (1.2) vastaa nyt lauseke

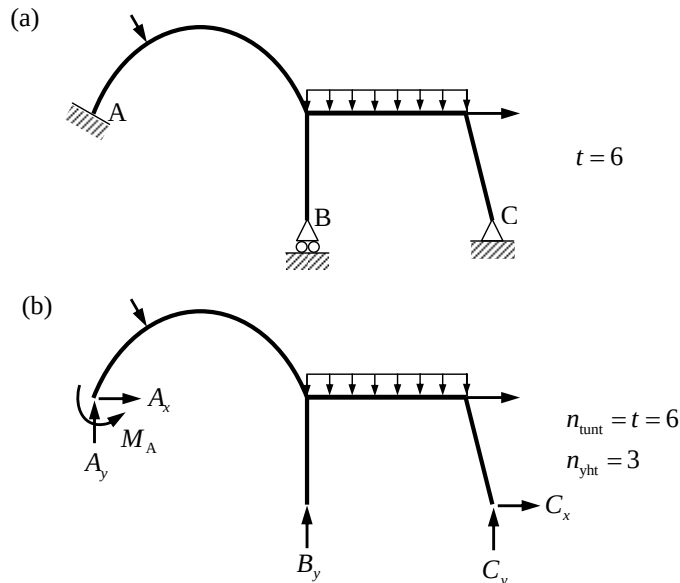
$$n_s = s + t - 3k, \quad (1.3)$$

jossa termin $2k$ paikalla on termi $3k$.

1.14 Palkin, kehän tai kaaren staattisen määräämättömyyden kertaluku

Rakenne, jossa ei ole suljettuja renkaita

Tarkastelemme ensin palkkia, tasokehää, tasokaarta tai niiden yhdistelmää, jossa ei ole suljettuja renkaita. Kuva 1.2 esittää tällaista rakennetta, jonka osat on liitetty toisiinsa monoliittisesti eli liikkumattomin liitoksin.

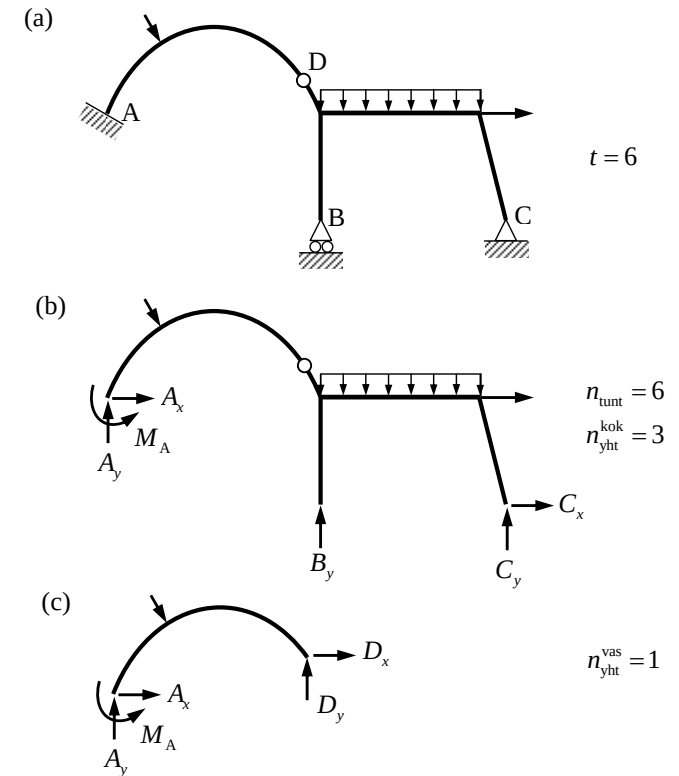


Kuva 1.2: (a) Tasorakenne, jonka osat liittyvät toisiinsa monoliittisesti ja (b) sen vapaakappalekuvia.

Kuvan 1.2a mukaisesti rakenteen pisteen A vaaka- ja pystysiirtymät sekä kiertymä on estetty, pisteen B pystysiirtymä on estetty ja pisteen C vaaka ja pystysiirtymät on estetty. Näistä tuennoista muodostuu rakenteen yksiarvoiset tuet (rajoitteet) ja niiden lukumäärä on $t = 6$. Näitä tuentoja vastaavasti rakenteen vapaakappalekuviossa (kuva 1.2b) rakenteeseen kohdistuu $n_{\text{tunt}} = t = 6$ tuntematonta tukireaktiota (5 voimaa ja yksi momentti). Koska tasorakenteelle voidaan kirjoittaa 3 riippumatonta tasapainoyhtälöä, $n_{\text{yht}} = 3$. Näin rakenteen staattisen määräämättömyyden kertaluvulle saadaan kaava

$$n_s = n_{\text{tunt}} - n_{\text{yht}} = t - 3$$

(ja erityisesti kuvan 1.2 tapauksessa tulos $n_s = 6 - 3 = 3$).



Kuva 1.3: (a) Tasorakenne, jossa on nivel, (b) sen vapaakappalekuvio sekä (c) nivelen vasemman puoleisen osan vapaakappalekuvio.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 1.3 tasorakennetta, joka muodostuu kahdesta monoliittisesta osasta, joiden välillä on nivel. Tasorakenteen nivel mahdollistaa kiertymisen siihen liittyvien rakenteen osien välillä. Nivel on siten liitos, jolla on yksi vapausaste, kiertymä. Rakenteemme liitosten vapausasteiden lukumäärä on siten $c = 1$.

Koko rakenteen vapaakappalekuviossa (kuva 1.3b) on samat kuusi tuntematonta tukivoimaa, joten $n_{\text{tunt}} = 6$ ja sille voidaan muodostaa $n_{\text{yht}}^{\text{kok}} = 3$ tasapainoyhtälöä. Näiden yhtälöiden lisäksi rakenteelle voidaan muodostaa yksi lisätasapainoyhtälö seuraavasti. Ajatellaan rakenteen osien välinen nivel poistetuksi, ja tarkastellaan vasemman puoleisen osan vapakappalekuviota (kuva 1.3c). Kirjoittamalla tämän osan momenttitasapainoyhtälö nivelpisteen D suhteen, saadaan alkuperäisten tuntemattomien tukireaktioiden välille uusi riippumaton tasapainoyhtälö. Näin kuvan 1.3 rakenteelle saatiin $n_{\text{yht}} = n_{\text{yht}}^{\text{kok}} + n_{\text{yht}}^{\text{vas}} = 3 + 1 = 4$ riippumatonta tasapainoyhtälöä. Jos rakenteessa on useampia liitoksia, saadaan kutakin liitosta kohti vastaavasti yksi uusi riippumaton tasapainoyhtälö. Näin, jos rakenteen liitosten vapausasteiden lukumäärä on c , sille voidaan kirjoittaa $n_{\text{yht}} = 3 + c$ riippumatonta tasapainoyhtälöä. Näin rakenteen staattisen määräämättömyyden kertaluvulle saadaan kaava

$$n_s = n_{\text{tunt}} - n_{\text{yht}} = t - c - 3$$

(ja erityisesti kuvan 1.3 tapauksessa tulos $n_s = 6 - 1 - 3 = 2$).

Tämän johdattelevan tarkastelun perusteella päädyimme johtopäätökseen, että palkin, tasokehän, tasokaaren tai niiden yhdistelmän, jossa **ei ole suljettuja renkaita**, staattisen määräämättömyyden kertaluku voidaan määrittää kaavalla

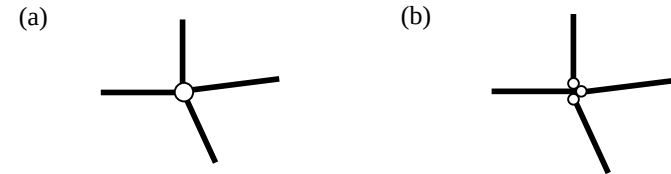
$$n_s = t - c - 3, \quad (1.4)$$

missä t on rakenteen yksiarvoisten tukien (rajoitteiden) lukumäärä ja c on sen liitosten vapausasteiden lukumäärä. Seuraavassa tarkastellaan joitakin tyypillisiä liitoksia ja niiden vapausasteita.

Liitoksen vapausasteiden lukumäärä

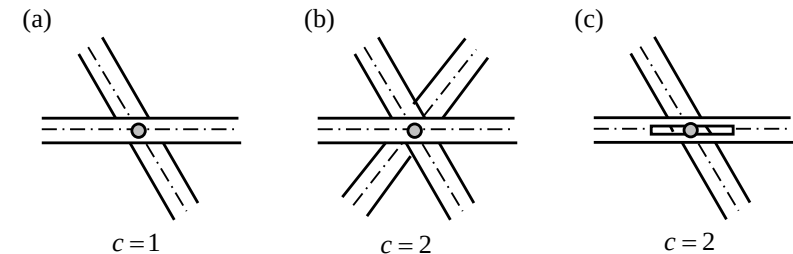
Liitoksen vapausasteiden lukumäärällä c ymmärretään sen sallimien liikkemahdollisuuksien lukumäärä. Yleisin sauvarakenteiden liitos on

nivel. Kahden rakenteen osan välisen nivelen vapausasteiden lukumäärä $c = 1$, koska nivel sallii rakenteen osien välisen kiertymän. Kolmen rakenteen osan välisen nivelen vapausasteiden lukumäärä $c = 2$, jne. Kuva 1.4 havainnollistaa asiaa, kun sauvoja on neljä ja $c = 3$. Muunlaisiakin liitoksia esiintyy.



Kuva 1.4: Nivel kehärakenteen nurkassa: (a) neljään sauvaan liittyvä nivel, jonka $c = 3$, (b) vastaavat yksivapausasteiset nivelet

Kuvassa 1.5 on kolme liitosta. Kuvan (a) liitos on kahden sauvan välinen nivel, joten $c = 1$, kuvan (b) liitos on kolmen sauvan välinen nivel, joten $c = 2$ ja kuvan (c) liitos sallii kahden sauvan välisen vaakasiirtyvän ja kiertymän, joten $c = 2$.



Kuva 1.5: Liitoksia.

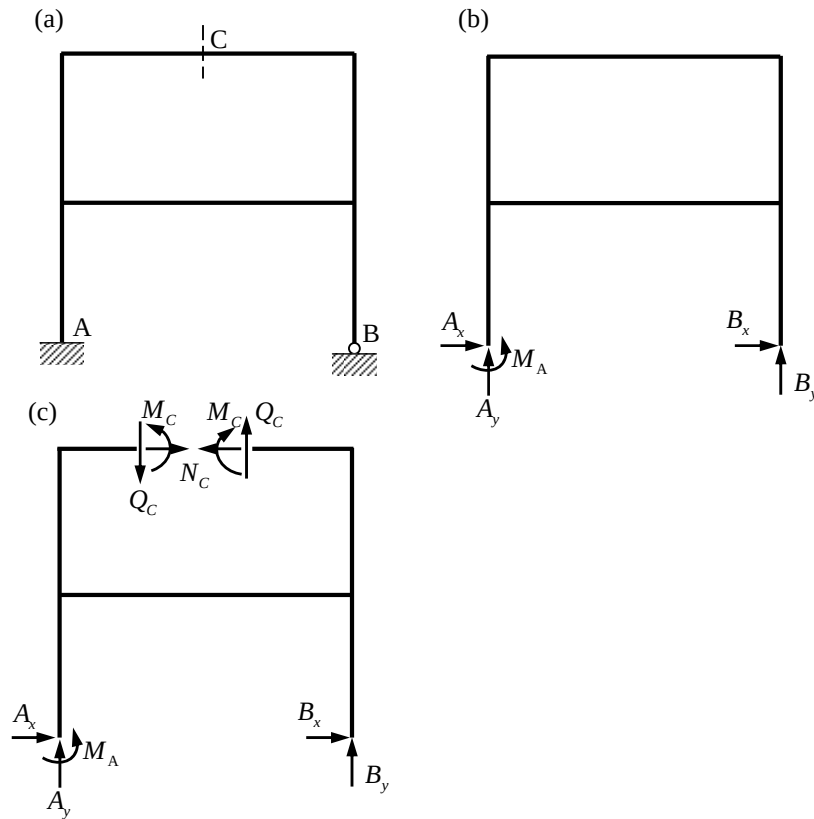
Rakenne, jossa on suljettuja renkaita

Jos rakenteessa on suljettuja renkaita, tuntemattomien lukumäärä kasvaa. Tavoitteena näet on, että rakenteen kaikki voimasuureet (myös leikkausrasitukset) voidaan määrittää tasapainotarkasteluilla.

Tarkastellaan kuvan 1.6a mukaista monoliittista tasokehää, jossa on suljettu rengas. Yksiarvoisten tukien lukumäärä tuilla A ja B on $t = 5$, joita vastaavat kuvan 1.6b tuntemattomat tukireaktiot. Vaikka jälkimmäiset tunnettaisiin, leikkausrasituksia suljetun renkaan sauvoissa ei kyettäisi määrittämään. Ajatellaan rakenteen suljettu rengas leikatuksi pisteestä C kuvan (c) mukaisesti, jolloin tehtävään tulee 3

lisätuntematonta, leikkausrasitukset N_c , Q_c ja M_c . Jos tukireaktioiden lisäksi nämä tunnettaisiin, voitaisiin rakenteen kaikki voimasuureet määrittää. Tehtävässä on siten $n_{\text{tunt}} = t + 3$ määritettävää tuntematonta ja käytettävissä on $n_{\text{yht}} = 3$ tasapainoyhtälöä. Vastaavasti, jos rakenteessa on useampia suljettuja renkaita, sen tuntemattomien lukumäärä kasvaa arvolla $3r$, missä r on suljettujen renkaiden lukumäärä, jolloin tehtävän tuntemattomien lukumäärä on $n_{\text{tunt}} = t + 3r$. Näin monoliittisen rakenteen, jossa on r suljettua rengasta, staattisen määräämättömyyden kertaluku on

$$n_s = n_{\text{tunt}} - n_{\text{yht}} = t + 3r - 3.$$



Kuva 1.6: (a) Tasokehä, jossa on suljettu rengas, (b) sen vapaakappalekuvio ja (b) sen kahden osan vapaakappalekuviot. Kehän ulkoista kuormitusta ei ole merkitty kuvaan.

Jos rakenteessa on lisäksi liitoksia niiden vaikutus on samanlainen kuin edellä.

Tämän johdattelevan tarkastelun perusteella päädyimme tulokseen, että palkin, tasokehän, tasokaaren tai niiden yhdistelmän, jossa on **suljettuja renkaita**, staattisen määräämättömyyden kertaluku voidaan määrittää kaavalla

$$n_s = t + 3r - c - 3, \quad (1.5)$$

missä t on rakenteen yksiarvoisten tukien (rajoitteiden) lukumäärä, r on suljettujen renkaiden lukumäärä ja c on sen liitosten vapausasteiden lukumäärä.

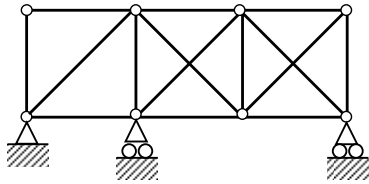
Vastaavan avaruusrakenteen staattisen määräämättömyyden kertaluvun kaava on

$$n_s = t + 6r - c - 6, \quad (1.6)$$

Tämä kaava eroaa kaavasta (1.5) vain siten, että luvut 3 on korvattu luvuilla 6. Tämä johtuu siitä, että kolmidimensioisessa tapauksessa on käytettävissä kuusi riippumatonta tasapainoyhtälöä ja että jokaisessa katkaisussa on 6 jännitysresultanttia.

Kolmidimensioisten sauvarakenteiden yleisimmät liitokset ovat **sarana-** ja **pallonivel**. Sarananivel mahdollistaa kiertymisen tietyn akselin ympäri ja sen vapausasteiden lukumäärä on 1. Pallonivel mahdollistaa kiertymisen kolmen akselin ympäri ja sen vapausasteiden lukumäärä on 3.

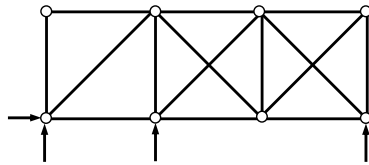
Esimerkki 1.1: Määritetään oheisen tasoristikon staattisen määräämättömyyden kertaluku. (Risteävät diagonaalisauvat pääsevät vapaasti liukumaan toistensa suhteen.)



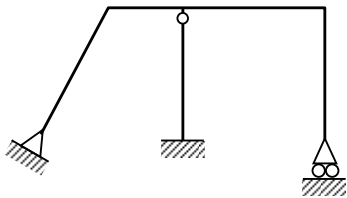
Saadaan:

$$s = 15, k = 8, t = 4,$$

$$n_s = s + t - 2k = 15 - 4 - 2 \cdot 8 = \underline{\underline{3}}$$



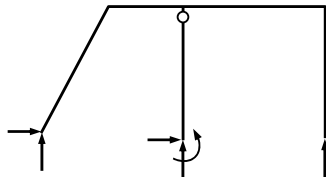
Esimerkki 1.2: Määritetään oheisen tasokehän staattisen määräämättömyyden kertaluku.



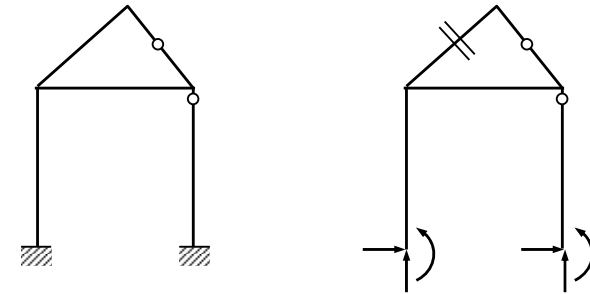
Saadaan:

$$t = 6, c = 1,$$

$$n_s = t - c - 3 = 6 - 1 - 3 = \underline{\underline{2}}.$$



Esimerkki 1.3: Määritetään oheisen tasokehän staattisen määräämättömyyden kertaluku.

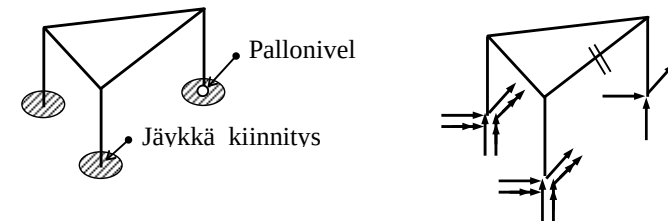


Saadaan:

$$t = 6, r = 1, c = 2,$$

$$n_s = t + 3r - c - 3 = 6 + 3 \cdot 1 - 2 - 3 = \underline{\underline{4}}.$$

Esimerkki 1.4: Määritetään oheisen avaruuskehän staattisen määräämättömyyden kertaluku.

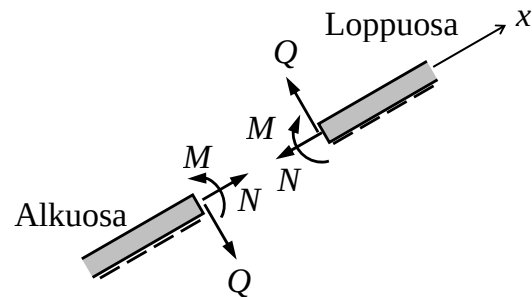


Saadaan:

$$t = 15, r = 1, c = 0,$$

$$n_s = t + 6r - c - 6 = 15 + 6 \cdot 1 - 0 - 6 = \underline{\underline{15}}.$$

1.2 Kaltevan tai pystysuoran tasosauvan leikkaus- rasitukset

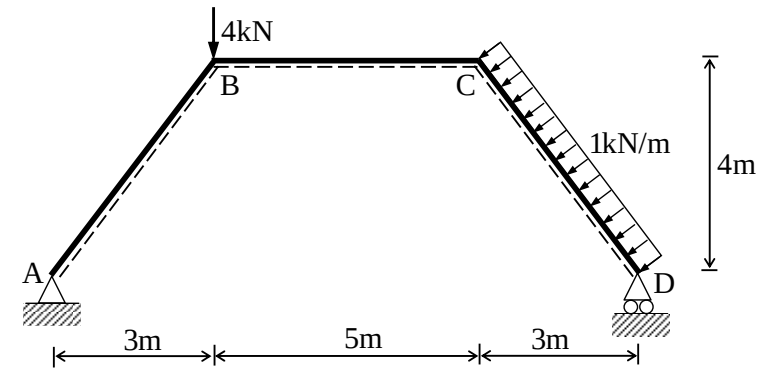


Kuva 1.7: Kaltevan suoran sauvan leikkausrasitusten positiiviset suunnat

Kaltevan tai pystysuoran sauvan **leikkausrasitusten positiiviset suunnat** on esitetty kuvassa 1.7. Ne voidaan ilmaista sanallisesti seuraavasti:

- **Normaalivoima** N on sauvan akselin suuntainen ja sen positiivinen suunta on tarkasteltavasta sauvan osasta **ulospäin**.
- **Leikkausvoima** Q on sauvan akselia vastaan kohtisuora ja sen positiivinen suunta on sauvan **alkuosassa** kohti **positiivista reunaa** ja sauvan **loppuosassa** kohti **negatiivista reunaa**.
- Positiivinen **taivutusmomentti** M pyrkii **venyttämään palkin positiivista reunaa**, ts. momenttinuolen häntä on positiivisella puolella.

Esimerkki 1.5: Määritetään oheisen tasokehän rasiuskuvat.



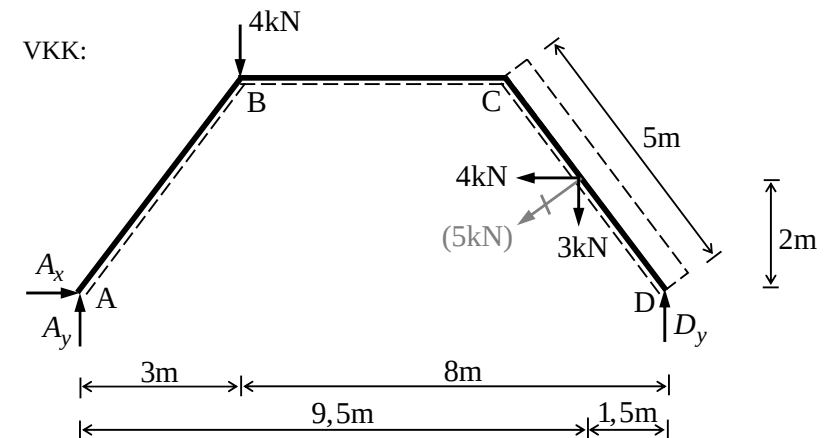
Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$$n_s = t - c - 3 = 3 - 0 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Staattisesti määrätty}$$

Tukireaktiot:

VKK:

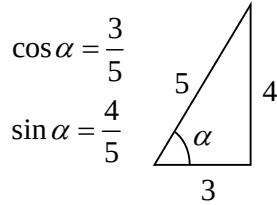
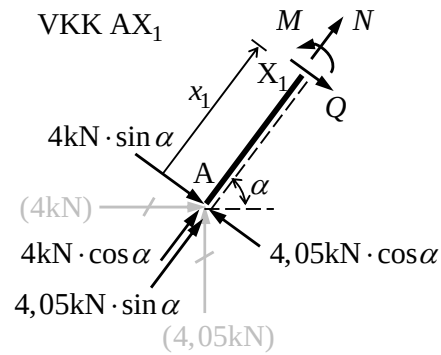


$$\rightarrow A_x - 4\text{kN} = 0 \Rightarrow A_x = 4\text{kN}$$

$$\curvearrowleft A \quad D_y \cdot 11\text{m} - 3\text{kN} \cdot 9,5\text{m} + 4\text{kN} \cdot 2\text{m} - 4\text{kN} \cdot 3\text{m} = 0 \Rightarrow D_y = 2,95\text{kN}$$

$$\curvearrowleft D \quad -A_y \cdot 11\text{m} + 4\text{kN} \cdot 8\text{m} + 4\text{kN} \cdot 2\text{m} + 3\text{kN} \cdot 1,5\text{m} = 0 \Rightarrow A_y = 4,05\text{kN}$$

Väli AB:



$$\nearrow N + 4\text{kN} \cdot \cos \alpha + 4,05\text{kN} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N = -4\text{kN} \cdot \frac{3}{5} - 4,05\text{kN} \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{-5,64\text{kN}}}$$

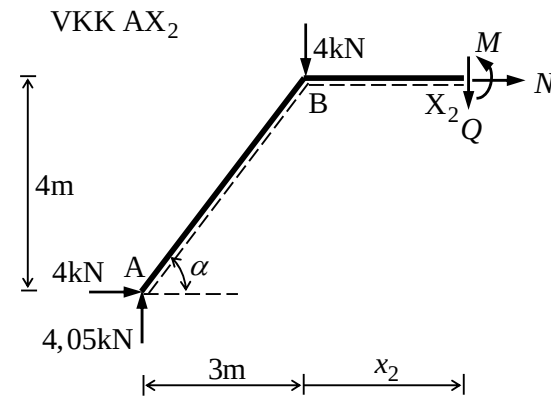
$$\searrow Q + 4\text{kN} \cdot \sin \alpha - 4,05\text{kN} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow Q = -4\text{kN} \cdot \frac{4}{5} + 4,05\text{kN} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\underline{-0,77\text{kN}}}$$

$$x_1 \curvearrowright M + 4\text{kN} \cdot \sin \alpha \cdot x_1 - 4,05\text{kN} \cdot \cos \alpha \cdot x_1 = 0$$

$$\Rightarrow M = (-4\text{kN} \cdot \frac{4}{5} + 4,05\text{kN} \cdot \frac{3}{5}) \cdot x_1 = \underline{\underline{-0,77\text{kN} \cdot x_1}}$$

Väli BC:



$$\rightarrow N + 4\text{kN} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = -4\text{kN}}}$$

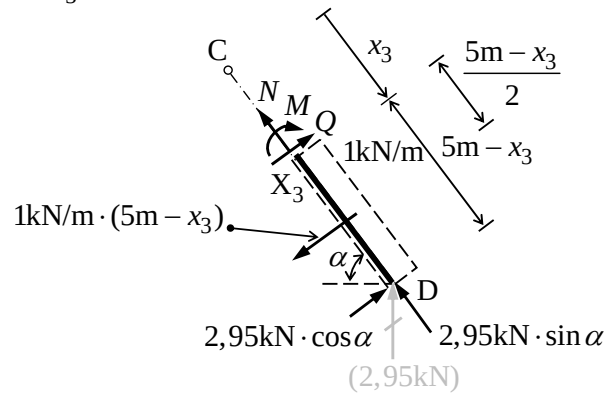
$$\downarrow Q - 4,05\text{kN} + 4\text{kN} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q = 0,05\text{kN}}}$$

$$x_2 \curvearrowright M - 4,05\text{kN} \cdot (3\text{m} + x_2) + 4\text{kN} \cdot 4\text{m} + 4\text{kN} \cdot x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M = -3,85\text{kNm} + 0,05\text{kN} \cdot x_2}}$$

Väli CD:

VKK X_3D



$$\nearrow N + 2,95 \text{ kN} \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow N = -2,95 \text{ kN} \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{-2,36 \text{ kN}}}$$

$$\nearrow Q - 1 \text{ kN/m} \cdot (5\text{m} - x_3) + 2,95 \text{ kN} \cdot \cos \alpha = 0$$

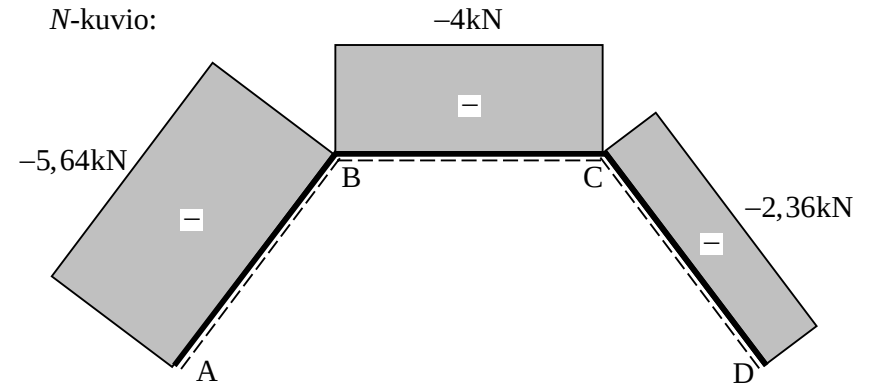
$$\Rightarrow Q = 5 \text{ kN} - 1 \text{ kN/m} \cdot x_3 - 2,95 \text{ kN} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\underline{3,23 \text{ kN} - 1 \text{ kN/m} \cdot x_3}}$$

$$\curvearrowright X_3 M - 2,95 \text{ kN} \cdot \cos \alpha \cdot (5\text{m} - x_3) + 1 \text{ kN/m} \cdot (5\text{m} - x_3) \cdot \frac{5\text{m} - x_3}{2} = 0$$

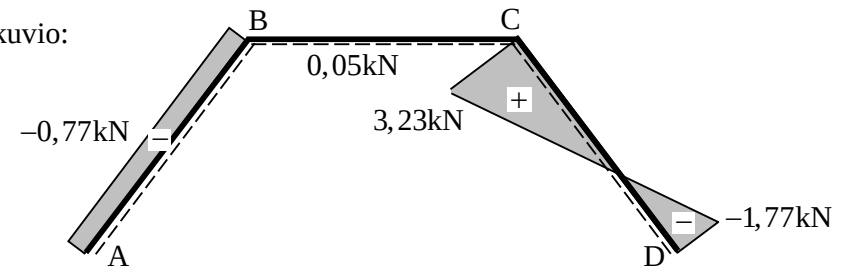
$$\Rightarrow M = \underline{\underline{-3,65 \text{ kNm} + 3,23 \text{ kN} \cdot x_3 - 0,5 \text{ kN/m} \cdot x_3^2}}$$

Rasituskuviot:

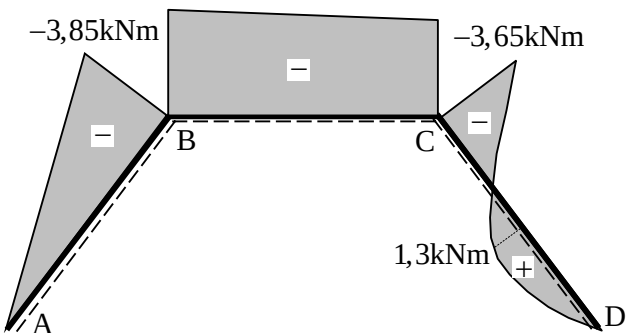
N -kuvio:



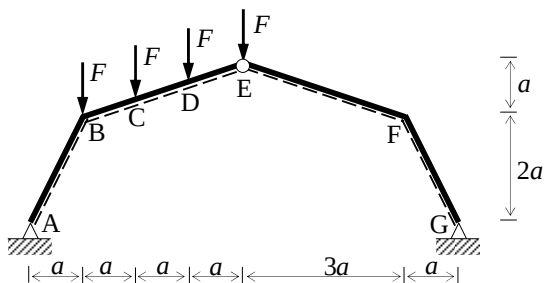
Q -kuvio:



M -kuvio:



Esimerkki 1.6: Määritetään oheisen kolminivelkehän rasituskuviot.



Huomautus: Kolminivelkehäksi kutsutaan kahdella siirtymättömällä niveltuella tuettua kehää, jossa on yksi nivel. Se on erittäin käyttökelpoinen staattisesti määrätty rakenne.

Ratkaisu:

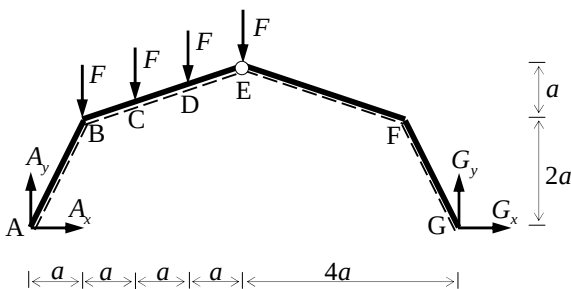
Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$$n_s = t - c - 3 = 4 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Staattisesti määrätty}$$

Tukireaktiot:

Huomautus: Staattisesti määrätyn rakenteen, jossa on nivel, tukireaktiot voidaan määrittää (esimerkiksi) muodostamalla **koko rakenteen tasapainoyhtälöt** sekä nivelen kohdalta katkaistun rakenteen jomman kumman **osan momenttitasapainoyhtälö nivelpisteen suhteen**.

VKK:

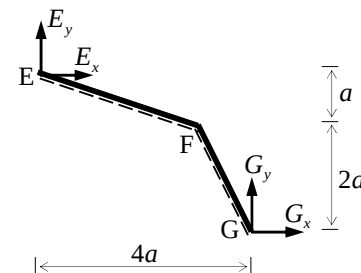


$$\rightarrow A_x + G_x = 0 \Rightarrow A_x = -G_x$$

$$\overset{G}{\curvearrowleft} -A_y \cdot 8a + F \cdot 7a + F \cdot 6a + F \cdot 5a + F \cdot 4a = 0 \Rightarrow A_y = \frac{11}{4}F$$

$$\overset{A}{\curvearrowleft} G_y \cdot 8a - F \cdot 4a - F \cdot 3a - F \cdot 2a - F \cdot a = 0 \Rightarrow G_y = \frac{5}{4}F$$

VKK EG:



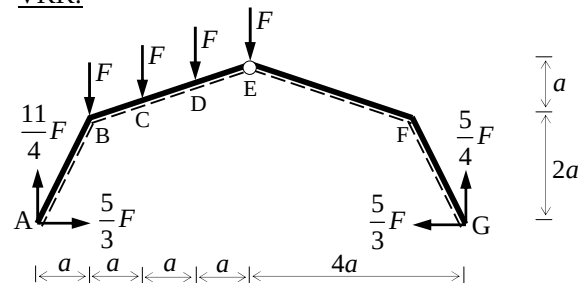
$$\overset{E}{\curvearrowleft} G_x \cdot 3a + G_y \cdot 4a = 0 \Rightarrow G_x = -\frac{4}{3}G_y$$

Saadaan vielä:

$$G_x = -\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}F = -\frac{5}{3}F, A_x = -G_x = \frac{5}{3}F.$$

Oheiseen kuvaan on piirretty koko rakenteen vapaakappalekuvio, jonka tukireaktiot nyt tunnetaan. Se tarkoitus on helpottaa leikkausrasitusten määrittämistä varten tarvittavien rakenteen osien vapaakappalekuvioiden piirtämistä.

VKK:

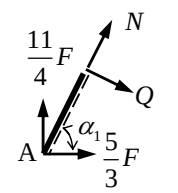


Leikkausrasitukset:

Määritetään tässä leikkausrasitukset käyttäen hyödyksi Rakenteiden lujuusopin osan II luvun 3 lausetta 1. Koska väleillä AB, BC,...,FG ei vaikuta jakautunutta kuormaa, ovat normaalivoima ja leikkausvoima niillä vakioita ja taivutusmomentti jakautuu lineaarisesti.

Normaalivoima ja leikkausvoima:

Väli AB:

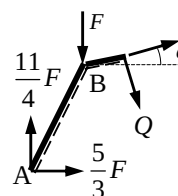


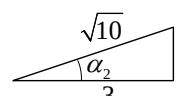
$$\begin{aligned} \nearrow N + \frac{11}{4}F \cdot \sin \alpha_1 + \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha_1 &= 0 \\ \Rightarrow N &= -\frac{11}{4}F \cdot \sin \alpha_1 - \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha_1 = -3,21F \\ \searrow Q - \frac{11}{4}F \cdot \cos \alpha_1 + \frac{5}{3}F \cdot \sin \alpha_1 &= 0 \\ \Rightarrow Q &= \frac{11}{4}F \cdot \cos \alpha_1 - \frac{5}{3}F \cdot \sin \alpha_1 = 2,72F \end{aligned}$$



$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\sin \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Väli BC:



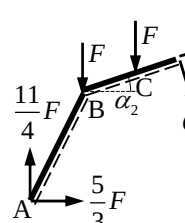


$\cos \alpha_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$$\begin{aligned} \nearrow N + \frac{11}{4}F \cdot \sin \alpha_2 + \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha_2 - F \sin \alpha_2 &= 0 \\ \Rightarrow N &= -2,13F \end{aligned}$$

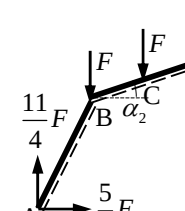
$$\begin{aligned} \searrow Q - \frac{11}{4}F \cdot \cos \alpha_2 + \frac{5}{3}F \cdot \sin \alpha_2 + F \cos \alpha_2 &= 0 \\ \Rightarrow Q &= 1,13F \end{aligned}$$

Väli CD:



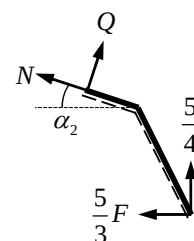
$$\begin{aligned} \nearrow N + \frac{11}{4}F \cdot \sin \alpha_2 + \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha_2 - 2F \sin \alpha_2 &= 0 \\ \Rightarrow N &= -1,81F \\ \searrow Q - \frac{11}{4}F \cdot \cos \alpha_2 + \frac{5}{3}F \cdot \sin \alpha_2 + 2F \cos \alpha_2 &= 0 \\ \Rightarrow Q &= 0,18F \end{aligned}$$

Väli DE:



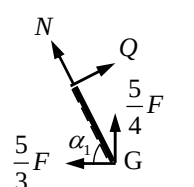
$$\begin{aligned} \nearrow N + \frac{11}{4}F \cdot \sin \alpha_2 + \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha_2 - 3F \sin \alpha_2 &= 0 \\ \Rightarrow N &= -1,50F \\ \searrow Q - \frac{11}{4}F \cdot \cos \alpha_2 + \frac{5}{3}F \cdot \sin \alpha_2 + 3F \cos \alpha_2 &= 0 \\ \Rightarrow Q &= -0,76F \end{aligned}$$

Väli EF:



$$\begin{aligned} \nwarrow N + \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha_2 + \frac{5}{4}F \cdot \sin \alpha_2 &= 0 \Rightarrow N = -1,98F \\ \nearrow Q - \frac{5}{3}F \cdot \sin \alpha_2 + \frac{5}{4}F \cdot \cos \alpha_2 &= 0 \Rightarrow Q = -0,66F \end{aligned}$$

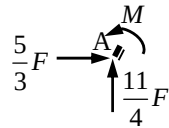
Väli FG:



$$\begin{aligned} \nwarrow N + \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha_1 + \frac{5}{4}F \cdot \sin \alpha_1 &= 0 \Rightarrow N = -1,86F \\ \nearrow Q - \frac{5}{3}F \cdot \sin \alpha_2 + \frac{5}{4}F \cdot \cos \alpha_2 &= 0 \Rightarrow Q = -0,93F \end{aligned}$$

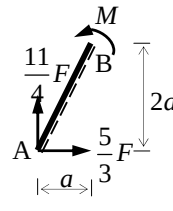
Taivutusmomentti:

Piste A:



$$\zeta(A) \quad \underline{\underline{M=0}}$$

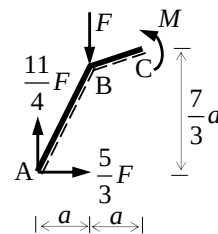
Piste B:



$$\zeta(B) \quad M - \frac{11}{4}F \cdot a + \frac{5}{3}F \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow M = \underline{\underline{-\frac{7}{12}Fa}}$$

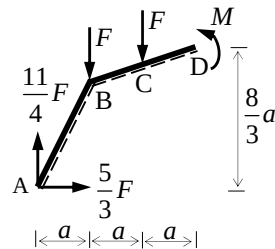
Piste C:



$$\zeta(C) \quad M - \frac{11}{4}F \cdot 2a + \frac{5}{3}F \cdot \frac{7}{3}a + F \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{11}{18}Fa}}$$

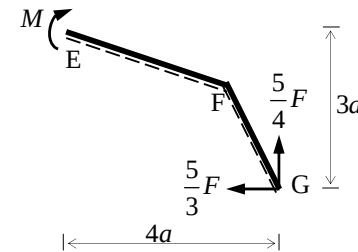
Piste D:



$$\zeta(D) \quad M - \frac{11}{4}F \cdot 3a + \frac{5}{3}F \cdot \frac{8}{3}a + F \cdot 2a + F \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{29}{36}Fa}}$$

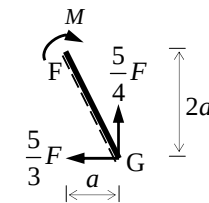
Piste E:



$$\zeta(E) \quad M + \frac{5}{3}F \cdot 3a - \frac{5}{4}F \cdot 4a = 0$$

$$\Rightarrow M = \underline{\underline{0}}$$

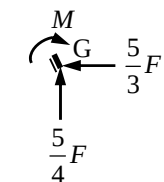
Piste F:



$$\zeta(F) \quad M + \frac{5}{3}F \cdot 2a - \frac{5}{4}F \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow M = \underline{\underline{-\frac{25}{12}Fa}}$$

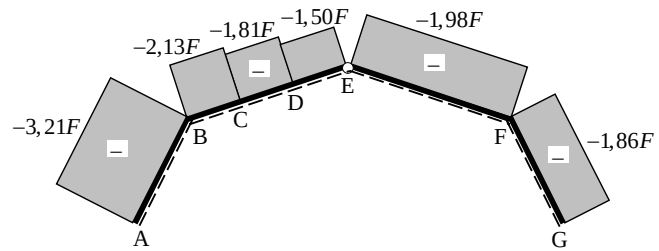
Piste G:



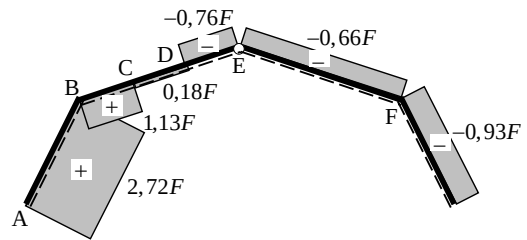
$$\zeta(G) \quad \underline{\underline{M=0}}$$

Rasituskuviot:

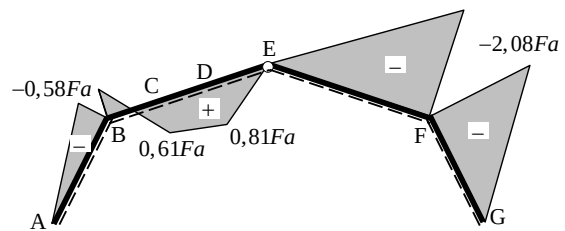
N-kuvio:



Q-kuvio:

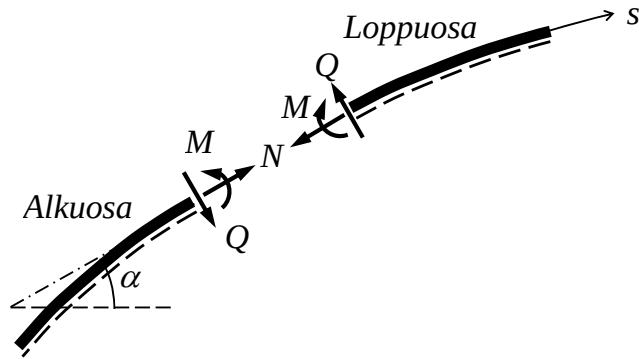


M-kuvio:



1.3 Kaareva tasosauva

Kaarevan tasosauvan akseli on tasossa oleva kaari. Siihen voidaan liittää pituuskoordinaatti s , joka yhtyy sauvan akseliin. Kulma α on vaakatason ja s -akselin välinen kulma, **tarkasteltavan leikkauksen kohdalla**.



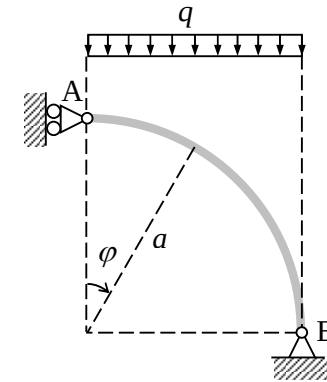
Kuva 1.8: Kaarevan tasosauvan leikkausrasitusten positiiviset suunnat

Kaarevan tasosauvan leikkausrasitusten positiiviset suunnat on esitetty kuvassa 1.8. Ne voidaan ilmaista sanallisesti seuraavasti:

- **Normaalivoima** N on sauvan akselin katkaisukohtaan asetetun tangentin suuntainen ja sen positiivinen suunta on tarkasteltavasta sauvan osasta **ulospäin**.
- **Leikkausvoima** Q on sauvan akselin katkaisukohtaan asetetun normaalin suuntainen ja sen positiivinen suunta on sauvan **alkuosassa** kohti **positiivista reunaa** ja sauvan **loppuosassa** kohti **negatiivista reunaa**.
- Positiivinen **taivutusmomentti** M pyrkii **venyttämään palkin positiivista reunaa**, ts. momenttinuolen häntä on positiivisella puolella.

Kaarevan tasosauvan normaalivoiman ja leikkausvoiman määrittäminen on mukavin suorittaa muodostamalla sauvan akselin **tarkasteltavan leikkauksen kohdalla** olevan tangentin suuntainen ja sitä vastaan kohtisuora tasapainoyhtälö. Edellisestä yhtälöstä saadaan suoraan ratkaistuksi normaalivoima ja jälkimmäisestä leikkausvoima.

Esimerkki 1.7: Kuvan ympyrän neljänneksen muotoista kaarta kuormittaa vaakatason pituusyksikköä kohti tasan jakautunut kuorma q . Määritä kaaren leikkausrasitukset kulman φ funktiona.

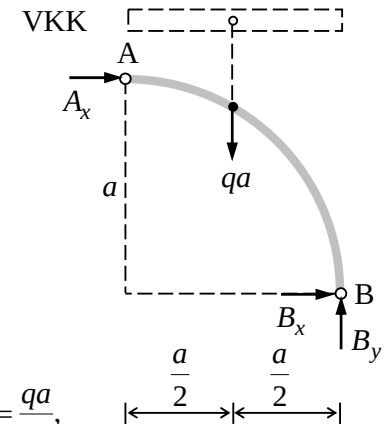


Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$$n_s = t - c - 3 = 3 - 0 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Staattisesti määrätty}$$

Tukireaktiot:

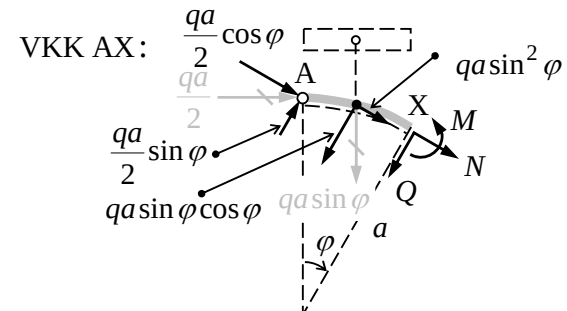


$$\uparrow B_y - qa = 0 \Rightarrow B_y = qa$$

$$\curvearrowright -A_x \cdot a + qa \cdot \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow A_x = \frac{qa}{2},$$

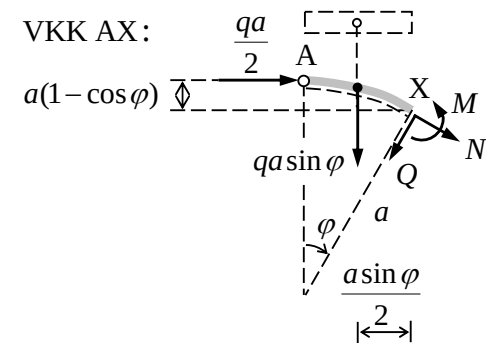
$$\rightarrow A_x + B_x = 0 \Rightarrow B_x = -A_x = -\frac{qa}{2}$$

Normaalivoima ja leikkausvoima:



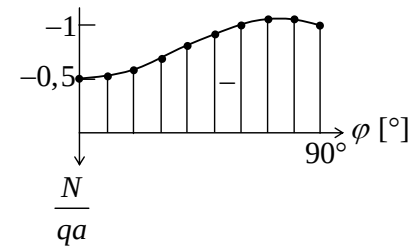
$$\begin{aligned} \rightarrow N + \frac{qa}{2} \cos \varphi + qa \sin^2 \varphi &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = -\frac{qa}{2} (\cos \varphi + 2 \sin^2 \varphi)}} \\ \downarrow Q - \frac{qa}{2} \sin \varphi + qa \sin \varphi \cos \varphi &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q = \frac{qa}{2} \sin \varphi (1 - 2 \cos \varphi)}} \end{aligned}$$

Taivutusmomentti:

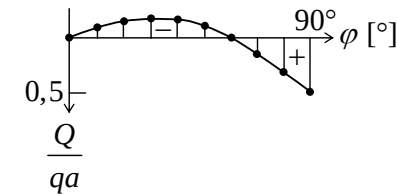


$$\begin{aligned} \sum \bar{X} \quad M + qa \sin \varphi \cdot \frac{a \sin \varphi}{2} - \frac{qa}{2} \cdot a(1 - \cos \varphi) &= 0 \\ \Rightarrow \underline{\underline{M = \frac{1}{2} qa^2 (1 - \cos \varphi - \sin^2 \varphi)}} \end{aligned}$$

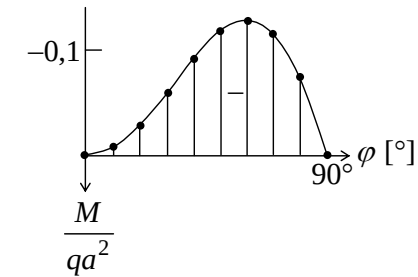
Normaalivoimakuvio:



Leikkausvoimakuvio:



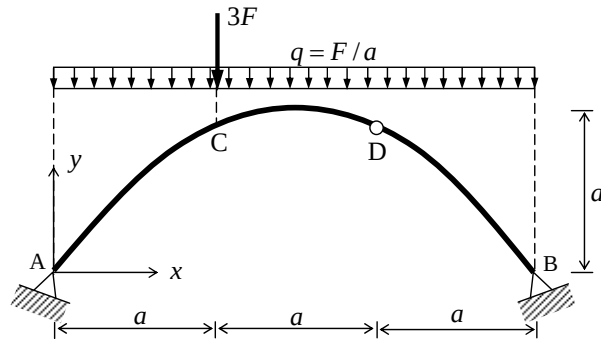
Taivutusmomenttikuvio:



Esimerkki 1.8: Oheista kolminivelkaarta kuormittaa pistekuorma $3F$ ja vaakatason pituutta kohti laskettu tasainen kuorma $q = F/a$. Kaari on paraabelin muotoinen ja sen yhtälö on

$$y(x) = 1,5x - 0,5\frac{x^2}{a}.$$

Määritä kaaren rasituskuviot.



Huomautus: Kolminivelkaareksi kutsutaan kahdella siirtymättömällä niveltuella tuettua kaarta, jossa on yksi nivel. Se on erittäin yleinen ja käyttökelpoinen staattisesti määrätty kaarirakenne.

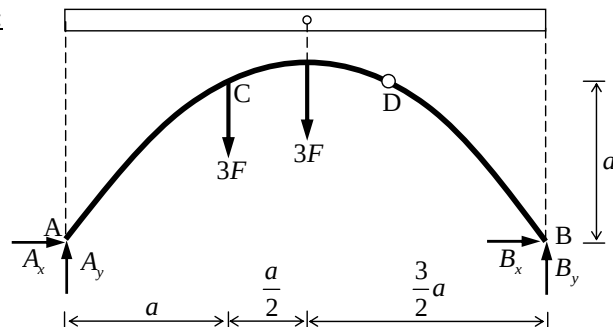
Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$$n_s = t - c - 3 = 4 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Staattisesti määrätty}$$

Tukireaktiot:

VKK:

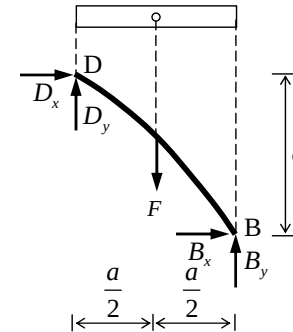


$$\sum \textcircled{B} -A_y \cdot 3a + 3F \cdot 2a + 3F \cdot \frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow A_y = \underline{3,5F}$$

$$\sum \textcircled{A} B_y \cdot 3a - 3F \cdot \frac{3}{2}a - 3F \cdot a = 0 \Rightarrow B_y = \underline{2,5F}$$

$$\rightarrow A_x + B_x = 0$$

VKK DB:

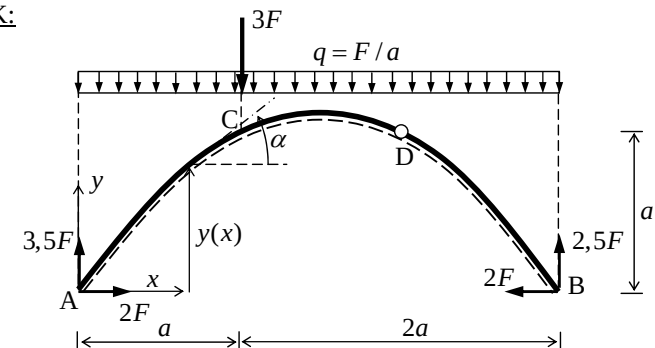


$$\sum \textcircled{D} B_x \cdot a + B_y \cdot a - F \cdot \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow B_x = 0,5F - B_y = \underline{-2F}$$

$$A_x = -B_x = \underline{2F}$$

Oheiseen kuvaan on piirretty koko rakenteen vapaakappalekuvio, jonka tukireaktiot nyt tunnetaan. Se tarkoitus on helpottaa leikkausrasitusten määrittämistä varten tarvittavien rakenteen osien vapaakappalekuvien piirtämistä.

VKK:

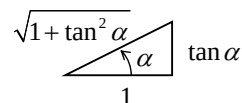


Leikkausrasitukset:

Geometriaa:

$$y(x) = 1,5x - 0,5\frac{x^2}{a}, \quad \tan \alpha = y'(x) = 1,5 - \frac{x}{a}$$

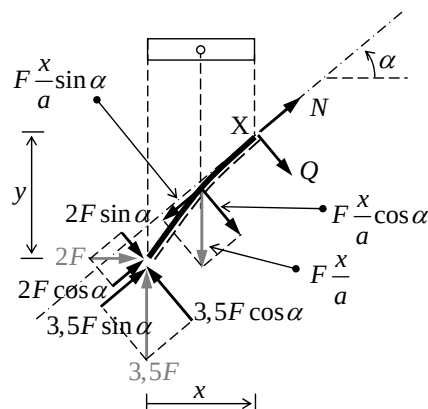
$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$



Väli AC:

($0 \leq x < a$, kaaren alkuosan avulla)

Normaalivoima ja leikkausvoima:



$$\nearrow N - F \frac{x}{a} \sin \alpha + 2F \cos \alpha + 3,5F \sin \alpha = 0$$

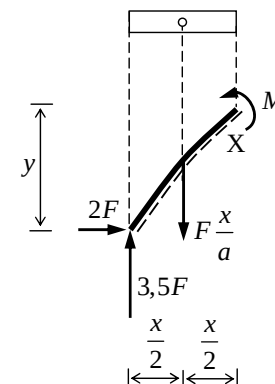
$$\Rightarrow N = F \frac{x}{a} \sin \alpha - 2F \cos \alpha - 3,5F \sin \alpha = \underline{\underline{-[2 \cos \alpha + (3,5 - \frac{x}{a}) \sin \alpha]F}}$$

$$\searrow Q + F \frac{x}{a} \cos \alpha + 2F \sin \alpha - 3,5F \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow Q = -F \frac{x}{a} \cos \alpha - 2F \sin \alpha + 3,5F \cos \alpha = \underline{\underline{-[2 \sin \alpha (3,5 - \frac{x}{a}) \cos \alpha]F}}$$

Väli AC jatkuu...

Taivutusmomentti:



$$\curvearrowright X \quad M - 3,5F \cdot x + 2F \cdot y + F \frac{x}{a} \cdot \frac{x}{2} = 0$$

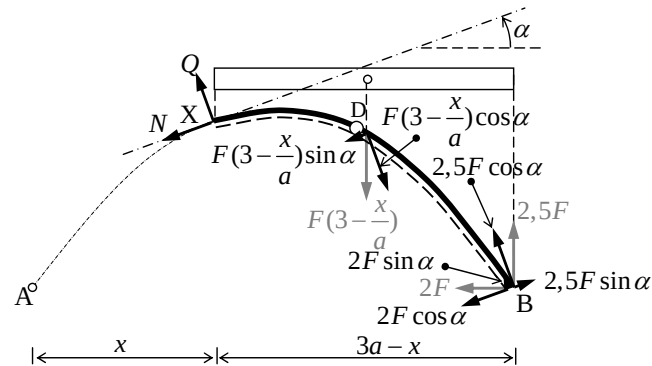
$$\Rightarrow M = 3,5F \cdot x - 2F \cdot y - F \frac{x}{a} \cdot \frac{x}{2} = 3,5F \cdot x - 2F \cdot (1,5x - 0,5\frac{x^2}{a}) - 0,5F \frac{x^2}{a}$$

$$= \underline{\underline{0,5(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2})Fa}}$$

Väli CB:

($a < x \leq 3a$; kaaren loppuosan avulla)

Normaalivoima ja leikkausvoima:



$$\leftarrow N + F\left(3 - \frac{x}{a}\right)\sin \alpha + 2F \cos \alpha - 2,5F \sin \alpha = 0$$

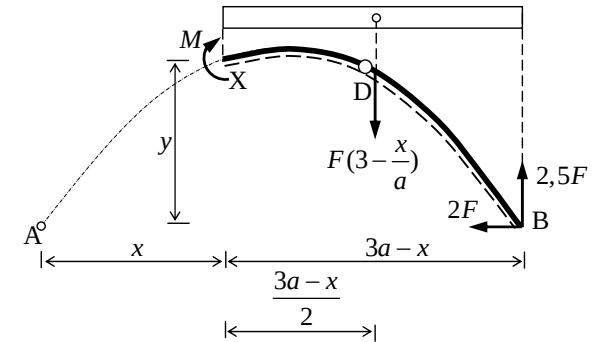
$$\Rightarrow N = -\left[2 \cos \alpha + \left(0,5 - \frac{x}{a}\right)\sin \alpha\right]F$$

$$\uparrow Q - F\left(3 - \frac{x}{a}\right)\cos \alpha + 2F \sin \alpha + 2,5F \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow Q = \left[-2 \sin \alpha + \left(0,5 - \frac{x}{a}\right)\cos \alpha\right]F$$

Väli CB jatkuu...

Taivutusmomentti:



$$\curvearrowright M + F\left(3 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{3a-x}{2} - 2,5F \cdot (3a-x) + 2F \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow M = -F\left(3 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{3a-x}{2} + 2,5F \cdot (3a-x) - 2F \cdot y$$

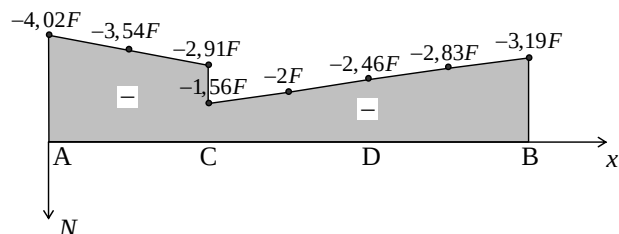
$$= 3Fa - 0,5Fx - 0,5F \frac{x^2}{a} - 2F\left(1,5x - 0,5 \frac{x^2}{a}\right)$$

$$= \left(3 - 2,5 \frac{x}{a} + 0,5 \frac{x^2}{a^2}\right)Fa$$

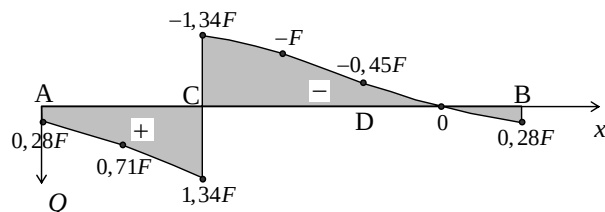
Laskelma:

x/a	$\tan \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	N/F	Q/F	$M/(Fa)$
0	1,5	0,832	0,555	-4,02	0,28	0
0,5	1	0,707	0,707	-3,54	0,71	0,375
1 ⁻	0,5	0,447	0,894	-2,91	1,34	1
1 ⁺	0,5	0,447	0,894	-1,56	-1,34	1
1,5	0	0	1	-2	-1	0,375
2	-0,5	-0,447	0,894	-2,46	-0,45	0
2,5	-1	-0,707	0,707	-2,83	0	-0,125
3	-1,5	-0,832	0,555	-3,19	0,28	0

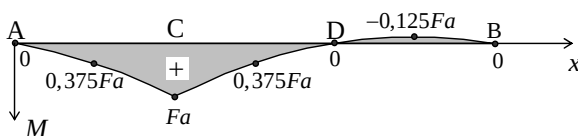
N-kuvio:



Q-kuvio:

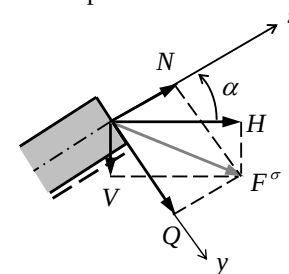


M-kuvio:



Vaihtoehtoinen tapa määrittää normaalivoima ja leikkausvoima:

Kaltevien, suorien sauvojen sekä kaarevien sauvojen yhteydessä normaalivoima N ja leikkausvoima Q voidaan määrittää myös siten, että niiden sijasta määritetään ensin ns. **horisontaalirasitus** H ja ns. **vertikaalirasitus** V (kuva 1.9), jotka ovat jännitysresultanttivoiman F^σ vaak- ja pystysuorat komponentit.



Kuva 1.9: Horisontaalirasitus ja vertikaalirasitus.

Kun nämä sitten tunnetaan voidaan normaalivoima N ja leikkausvoima Q , jotka ovat jännitysresultanttivoiman F^σ aksiaali- ja poikittaiskomponentit, määrittää kaavoilla

$$\begin{aligned} N &= H \cos \alpha - V \sin \alpha, \\ Q &= H \sin \alpha + V \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Kaavoja (1.13) käytettäessä on tärkeää pitää mielessä, että kulma α on kuvan 1.9 mukaisesti määritelty vaakasuunnan (vasemmalta oikealle) ja sauvan akselin suunnan s väliseksi kulmaksi, jonka positiivinen suunta on vastapäivään.

Huomautus 1: Horisontaalirasituksen H ja vertikaalirasituksen V määrittäminen tapahtuu paljolti samaan tapaan kuin **vaakasuoran sauvan** normaalivoiman ja leikkausvoiman määrittäminen.

Huomautus 2: Jos kaarta kuormittaa pelkästään **pystysuora kuormitus**, on horisontaalirasitus H **vakio**.

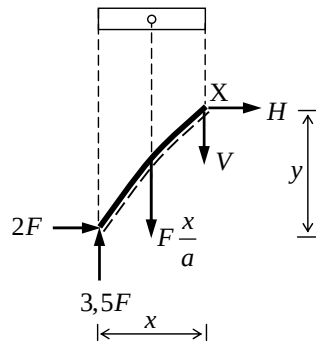
Huomautus 3: Suureita H ja V voitaisiin kutsua pelkästään horisontaalivoimaksi ja vertikaalivoimaksi. Tässä on kuitenkin käytetty termejä horisontaalirasitus ja vertikaalirasitus muistuttamaan siitä, että kysymys on leikkausrasituksista.

Esimerkki 1.9: Määritetään esimerkin 1.8 horisontaali- ja vertikaalirasitusten lausekkeet ja niiden avulla normaali- ja leikkausvoiman lausekkeet.

Väli AC:

$(0 \leq x < a$, kaaren alkuosan avulla)

Horisontaali- ja vertikaalirasitus:



$$\rightarrow H + 2F = 0 \Rightarrow \underline{\underline{H = -2F}}$$

$$\downarrow V - 3,5F + F \frac{x}{a} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{V = (3,5 - \frac{x}{a})F}}$$

Normaali- ja leikkausvoima:

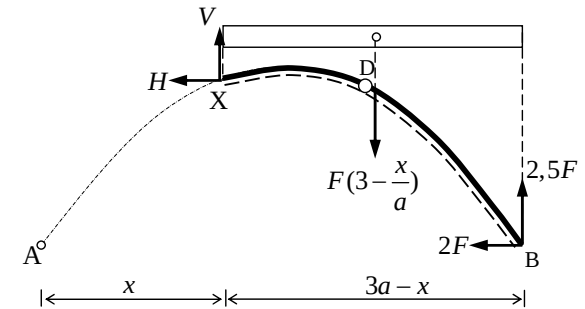
$$N = H \cos \alpha - V \sin \alpha = \underline{\underline{-[2 \cos \alpha + (3,5 - \frac{x}{a}) \sin \alpha]F}}$$

$$Q = H \sin \alpha + V \cos \alpha = \underline{\underline{-[2 \sin \alpha + (3,5 - \frac{x}{a}) \cos \alpha]F}}$$

Väli CB:

$(a < x \leq 3a$; kaaren loppuosan avulla)

Horisontaali- ja vertikaalirasitus:



$$\leftarrow H + 2F = 0 \Rightarrow \underline{\underline{H = -2F}}$$

$$\uparrow V + 2,5F - F(3 - \frac{x}{a}) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{V = -(0,5 - \frac{x}{a})F}}$$

Normaali- ja leikkausvoima:

$$N = H \cos \alpha - V \sin \alpha = \underline{\underline{-[2 \cos \alpha + (0,5 - \frac{x}{a}) \sin \alpha]F}}$$

$$Q = H \sin \alpha + V \cos \alpha = \underline{\underline{-[2 \sin \alpha + (0,5 - \frac{x}{a}) \cos \alpha]F}}$$

1.4 Puristusviiva

Annettua kuormitusta vastaavalla **puristusviivalla** ymmärretään sellaisen sauvan akselia, johon annettu kuormitus synnyttää pelkän (puristavan) normaalivoiman.

Puristusviiva on jo hyvin kauan ollut erittäin tärkeä suunnittelun apuneuvo. Sitä käytettiin vetoa kestävämmien rakenteiden kuten muurattujen holvien ja kaarien konstruointiin. Edullinen muoto kaarelle (tai holville), jonka oma paino suhteessa sen muihin kuormituksiin on verrattain suuri, saatiin konstruoida ko. rakenteelle puristusviiva.

Yleisessä tapauksessa puristusviivan muotoisen kaaren konstruointi on iteratiivinen prosessi: Aluksi otaksutaan kaaren geometria (kaaren akselin muoto ja poikkileikkauksen vaihtelu), jonka perusteella saadaan oman painon ja pysyvän kuorman jakautuma. Määritetään ko. kuormitusta vastaava puristusviiva. Sen perusteella saadaan kaarelle uusi muoto ja myös poikkileikkausta voidaan joutua muuttamaan. Määritetään uusi kuorman jakautuma, jne. Kun puristusviiva ja kaaren geometria on saatu valmiiksi, joudutaan kaaren toiminta varmistamaan muuttuville kuormille. Puristusviivan tulee kaikissa kuormitustapauksissa, kaaren kussakin poikkileikkauksessa pysyä ns. **sydänkuvi** sisäpuolella. Poikkileikkauksen sydänkuviota tarkastellaan myöhemmin tässä kurssissa.

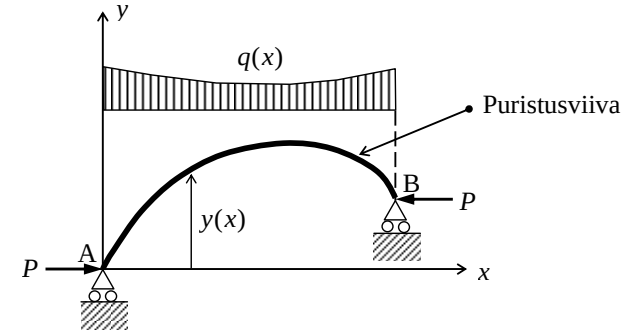
Puristusviivan määrittäminen

Ennen laskinten ja tietokoneiden aikaa puristusviiva määritettiin graafisesti ns. **köysimonikulmiolla**, jota käytettiin myös köysien analyysissä. Tässä esityksessä ei köysimonikulmiota tarkastella, vaan puristusviiva pyritään määrittämään analyttisesti.

Esitettävä menettely perustuu siihen, että puristusviivan muotoisen sauvan **taivutusmomentti on** jokaisessa sauvan pisteessä **nolla**.

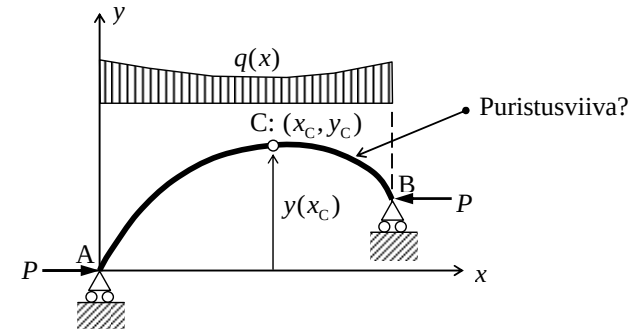
Rajoitetaan rakenteisiin, joita rasittaa **pystysuora kuormitus**. Oma paino ja usein myös pysyvä kuorma ovat tällaisia. Eräänlaisena perustehtävänä puristusviivan määrittämisessä voidaan pitää kuvan 1.10 kaarta, joka on tuettu liikkuvilla niveltuilla pisteistä A ja B ja johon vaikuttaa puristavat vaakavoimat P . Käytetään kaaren (puristusviivan) korkeusasemalle valittuun vaakatasoon (x -akseli) nähden merkintää $y(x)$. Pisteiden A ja B

kautta kulkevan puristusviivan korkeusasema $y(x)$ saadaan kirjoittamalla pisteen X **vasemman tai oikean puoleisen rakenteen osan momenttitasapainoyhtälö** pisteen X suhteen ja ratkaisemalla $y(x)$ saadusta yhtälöstä.



Kuva 1.10: Pisteiden A ja B kautta kulkeva puristusviiva.

Tavallisesti probleemana on määrittää puristusviiva, joka kulkee kolmen pisteen kautta. Kuvassa 1.11 tarkastellaan pisteiden A, B ja C kautta kulkevan puristusviivan määrittämistä. Ensinnäkin määritetään pisteiden A ja B kautta kulkevan puristusviivan pisteen C korkeusasema $y(x_c)$ pitäen vaakavoimaa P tuntemattomana parametrina. Pisteiden A, B ja C kautta kulkevaa puristusviivaa vastaava P :n arvo saadaan sitten ehdosta $y(x_c) = y_c$.



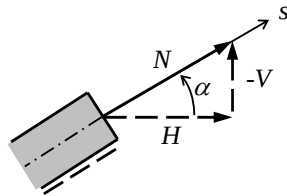
Kuva 1.11: Pisteiden A, B ja C kautta kulkeva puristusviiva.

Huomautus: Puristusviivan korkeusasemalle on tässä käytetty merkintää $y(x)$, jonka positiivinen suunta on **ylöspäin** ja vastaava globaali x, y -

koordinaatisto on siis **oikeakätinen**. Tasosauvoille käytetty paikallinen x,y -koordinaatisto taas oli (x,y -tasossa tarkasteltuna) **vasenkätinen** ja vaakasuoran sauvan y -koordinaatti oli **alaspäin**. Kysymyksessä ovat siis eri koordinaatistot.

Puristusviivan muotoisen sauvan normaalivoima

Puristusviivan muotoisen sauvan **normaalivoimalle** (puristusviivaa vastaavasta kuormituksesta) saadaan kuvan 1.12 perusteella kaava

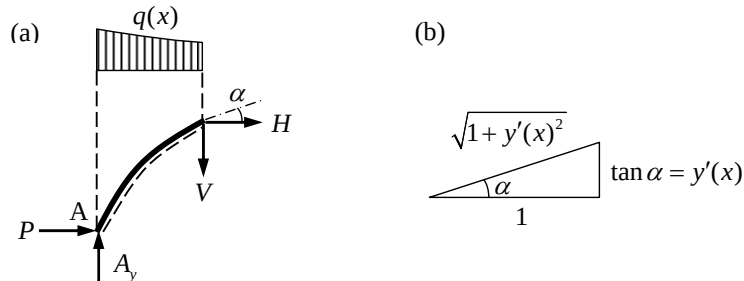


Kuva 1.12: Pelkän normaalivoiman rasittama poikkileikkaus.

$$N = \frac{H}{\cos \alpha}, \quad (1.14)$$

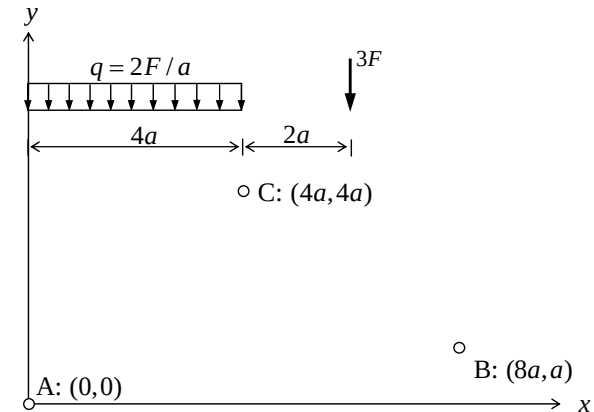
missä H on sauvan horisontaalirasitus. Kuvan 1.13a VKK:n vaakasuorasta tasapainoehdosta seuraa horisontaalirasitukselle helposti tulos $H = -P$ ja kuvan 1.13b perusteella nähdään, että $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + y'(x)^2}$. Sijoittamalla nämä tulokset kaavaan (1.14) saadaan puristusviivan muotoisen sauvan normaalivoimalle tulos

$$N = -P\sqrt{1 + y'(x)^2}. \quad (1.15)$$

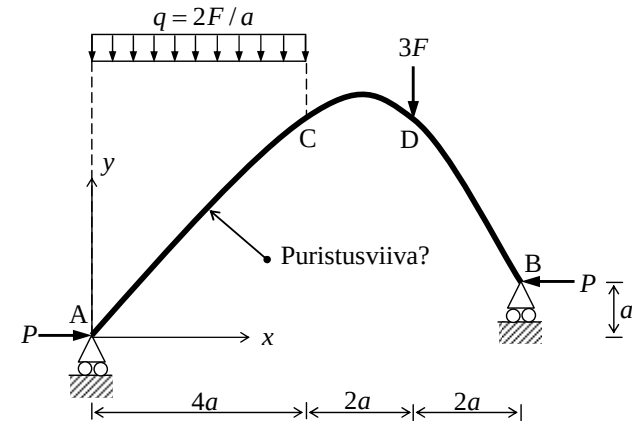


Kuva 1.13: Puristusviivaa vastaavan normaalivoiman määrittäminen.

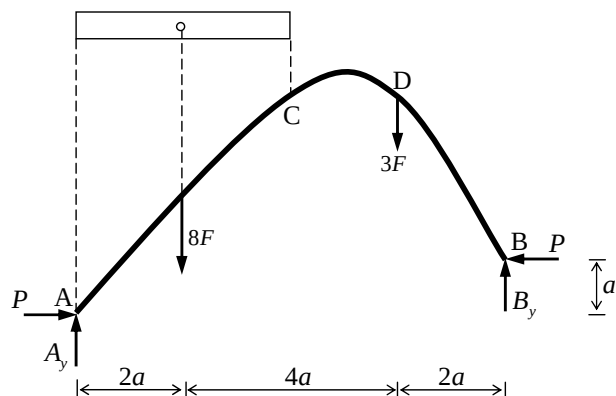
Esimerkki 1.10: Määritetään puristusviiva rakenteelle, jota kuormittaa oheinen tasainen kuorma ja pistekuorma ja joka kulkee pisteiden A, B ja C kautta. Määritetään myös normaalivoiman jakautuma puristusviivalla.



Ratkaisu:



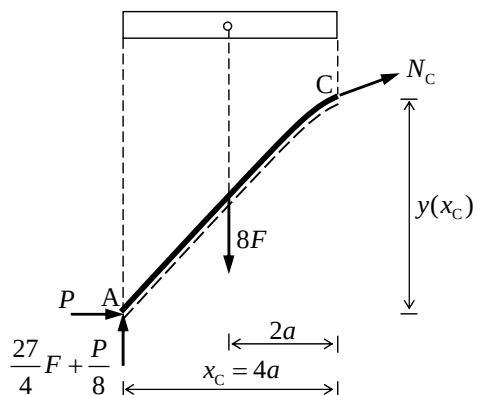
Tukireaktiot:



$$\sum B) -A_y \cdot 8a + 8F \cdot 6a + 3F \cdot 2a + Pa = 0 \Rightarrow A_y = \frac{27}{4}F + \frac{P}{8}$$

$$\sum A) B_y \cdot 8a - 8F \cdot 2a - 3F \cdot 6a + Pa = 0 \Rightarrow B_y = \frac{17}{4}F - \frac{P}{8}$$

Pisteen C korkeusasema:



Momenttitasapainoyhtälö pisteen C suhteen:

$$\sum C) \left(\frac{27}{4}F + \frac{P}{8}\right) \cdot 4a - P \cdot y(x_c) - 8F \cdot 2a = 0 \Rightarrow y(x_c) = 11 \frac{Fa}{P} + \frac{a}{2}$$

Vaakavoiman P arvo:

$$y(x_c) = y_c \Leftrightarrow 11 \frac{Fa}{P} + \frac{a}{2} = 4a \Rightarrow P = \frac{22}{7}F$$

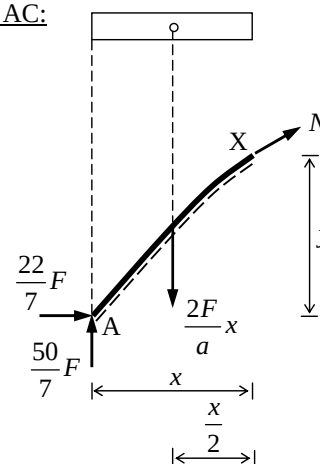
Puristusviivan määrittäminen:

Tukireaktioille saadaan nyt

$$A_y = \frac{27}{4}F + \frac{P}{8} = \frac{50}{7}F$$

$$B_y = \frac{17}{4}F - \frac{P}{8} = \frac{27}{7}F$$

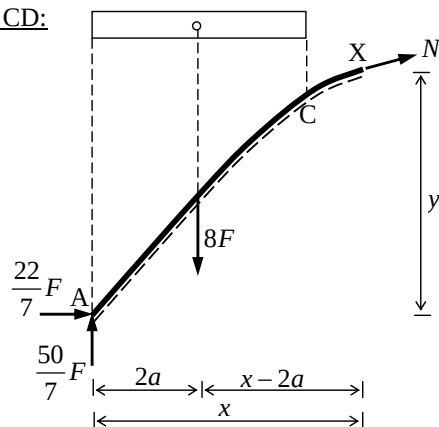
Väli AC:



Momenttitasapainoyhtälö pisteen X suhteen:

$$\sum X) \frac{50}{7}F \cdot x - \frac{22}{7}F \cdot y - \frac{2F}{a}x \cdot \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{25}{11}x - \frac{7}{22a}x^2$$

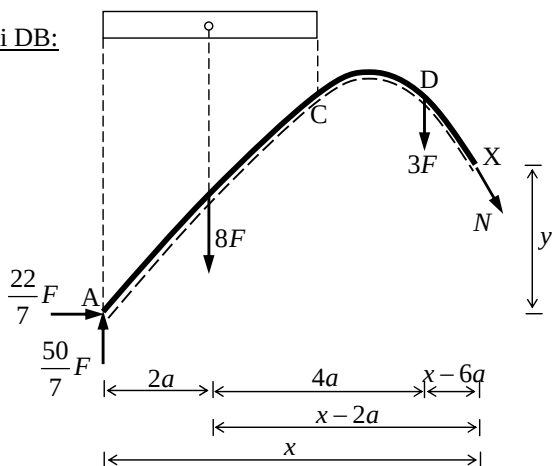
Väli CD:



Momenttitasapainoyhtälö pisteen X suhteen:

$$\sum \zeta_X \quad \frac{50}{7}F \cdot x - \frac{22}{7}F \cdot y - 8F \cdot (x - 2a) = 0 \Rightarrow y = \frac{56}{11}a - \frac{3}{11}x$$

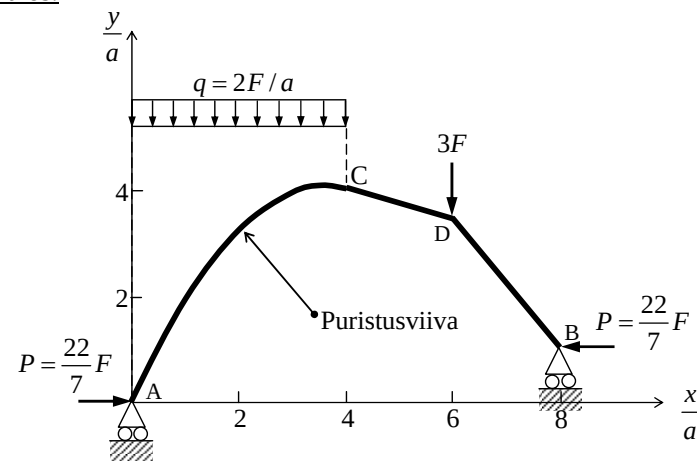
Väli DB:



Momenttitasapainoyhtälö pisteen X suhteen:

$$\sum \zeta_X \quad \frac{50}{7}F \cdot x - \frac{22}{7}F \cdot y - 8F \cdot (x - 2a) - 3F \cdot (x - 6a) = 0 \Rightarrow y = \frac{119}{11}a - \frac{27}{22}x$$

Tulos:



Normaalivoima:

Väli AC:

$$y'(x) = \frac{25}{11} - \frac{7}{11} \frac{x}{a}$$

$$N(x) = -P \sqrt{1 + y'(x)^2} = -\frac{22}{7}F \sqrt{1 + \left(\frac{25}{11} - \frac{7}{11} \frac{x}{a}\right)^2} = -\frac{2}{7}F \sqrt{746 - 350 \frac{x}{a} + 49 \frac{x^2}{a^2}}$$

Väli CD:

$$y'(x) = -\frac{3}{11}$$

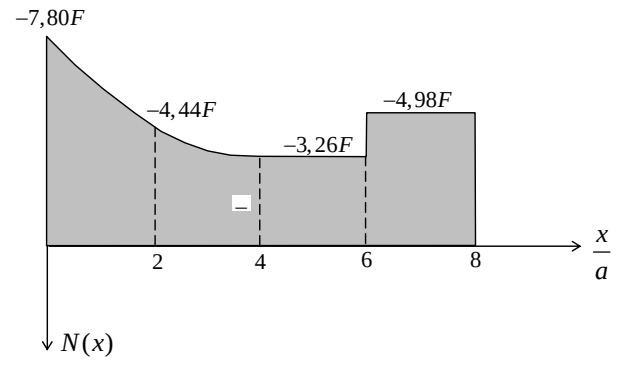
$$N(x) = -P \sqrt{1 + y'(x)^2} = -\frac{22}{7}F \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{11}\right)^2} = -\frac{2}{7}F \sqrt{130} \approx -3,26F$$

Väli DB:

$$y'(x) = -\frac{27}{22}$$

$$N(x) = -P \sqrt{1 + y'(x)^2} = -\frac{22}{7}F \sqrt{1 + \left(-\frac{27}{22}\right)^2} = -\frac{\sqrt{1213}}{7}F \approx -4,98F$$

N-kuvio:

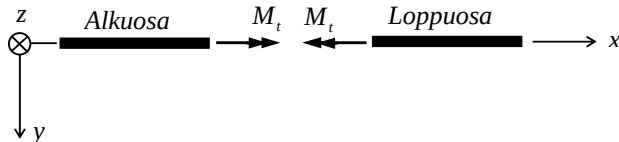


1.5 Väännetyt rakenteet

Monet käytännön rakenteet voidaan riittävällä tarkkuudella analysoida käyttäen edellä käsiteltyä tasosauvarakenteen mallia, jossa leikkausrasitukset olivat N , Q ja M . Ottamalla näiden lisäksi käyttöön neljäs leikkausrasitus, **vääntömomentti** M_t , voimme sisällyttää tarkastelumme piiriin **akselit** ja sellaiset vaakatasossa olevat sauvarakenteet, joita kuormittaa pystysuuntainen kuormitus. Vaakatasossa olevaa kehärakennetta, jota kuormittaa pystysuuntainen kuormitus, kutsutaan usein **arinaksi**. Tarkastelemme myös **vaakatasossa kaarevaa palkkia**. Rajoitumme luonnollisesti tässäkin staattisesti määrättyihin tapauksiin.

1.51 Vääntömomentti

Seuraavassa tarkastellaan vain **vääntömomentin määrittämistä**. Muiden leikkausrasitusten määrittäminen onkin jo tuttua. Vääntömomentin positiivinen suunta on kuvan 1.14 mukainen.

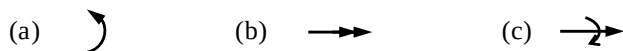


Kuva 1.14: Vääntömomentin positiivinen suunta.

Havaitaan, että

- **Vääntömomenttinoili** on sauvan akselin suuntainen ja sen positiivinen suunta on **tarkasteltavasta leikkauskohdasta ulospäin** (materiaalista poispäin)

Huomautus: Tasotapauksessa momentille (esim. taivutusmomentti) on totuttu käyttämään kaarevaa nuolta (kuva 1.15a). Kolmidimensioisessa tapauksessa momenttia merkitään joko kaksoisnuolella (kuva 1.15b) tai nuolella ja kiertosuunnan ilmaisevalla kaarevalla nuolella (kuva 1.15c)



Kuva 1.15: Momenttinoilia: (a) tasotapaus, (b) ja (c) kolmidimensioinen tapaus.

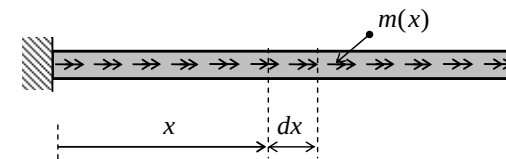
Momentin kiertosuunta määräytyy **oikean käden ruuvisäännön** mukaan. Vääntömomentille käytetään tässä yleensä kaksoisnuolimerkintää.

1.52 Vääntömomentin määrittäminen

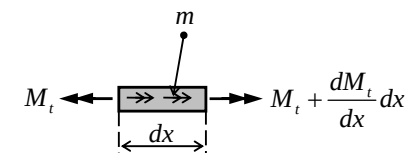
Kun tukireaktiot on määritetty tarkastellaan rakennetta, jota kuormittaa tasapainossa oleva voimasysteemi. Rakenteen tietyn sauvan pisteessä X vaikuttava vääntömomentti M_t saadaan ajattelemalla rakenne leikatuksi pisteen X kohdalta kahteen osan ja määrittämällä jomman kumman osan **momenttitasapainoyhtälö sauvan akselin suhteen**.

1.53 Väännetyin sauva-alkion tasapainoyhtälö

Tarkastellaan kuvan 1.16 suoraa sauvaa, jota kuormittaa jakautunut vääntävä ulkoinen momentti $m(x)$.



Kuva 1.16: Väännetty suora sauva



Kuva 1.17: Väännetty sauva-alkio

Sauva-alkion, jonka pituus on dx , (kuva 1.17) momenttitasapainoyhtälöksi sauvan akselin suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad M_t + \frac{dM_t}{dx} dx - M_t + m dx &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{dM_t}{dx} + m \right) dx &= 0 \Rightarrow \frac{dM_t}{dx} = -m \end{aligned}$$

Huomautus: Kaksoisnuolimerkintä tarkoittaa tässä sitä, että muodostetaan momenttitasapainoyhtälö vaak-akselin suhteen pitäen kaksoisnuolen ilmaisevaa kiertosuuntaa positiivisena.

Sauva-alkion **momenttitasapainoyhtälö sen akselin suhteen** on siis

$$M'_t = -m \quad (1.15)$$

Tuloksesta (1.15) seuraa helposti seuraavat lauseet, jotka ovat voimassa **suoralle sauvalle**:

Lause 1:

Sauvan **kuormittamattomalla** osalla ($m = 0$) on M_t on **vakio**.

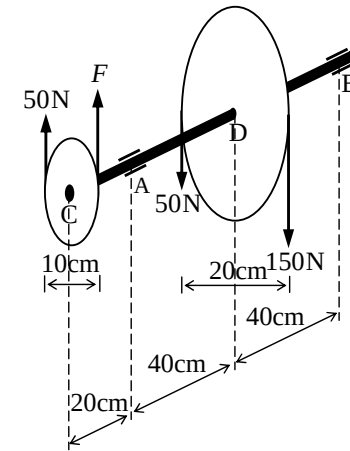
Lause 2:

Tasaisen kuormituksen m_0 alueella on M_t on **lineaarinen** kulmakertoimen ollessa $-m_0$.

Lause 3:

Vääntävän ulkoisen **pistemomentin** kohdalla on M_t :n arvossa tämän momentin suuruinen **hyppäys**.

Esimerkki 1.11: Piirretään oheisen tasaisesti pyörivän akselin rasituskuviot. Tuet A ja B ovat laakereita, jotka mahdollistavat akselin pyörimisen, ja tuki B estää myös akselin liukumisen pituussuunnassa.



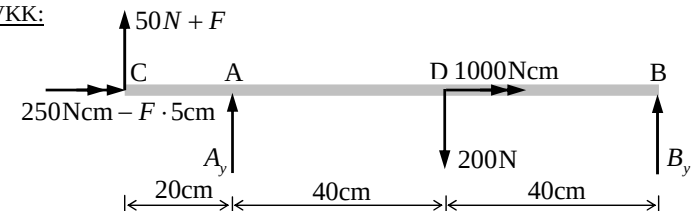
Ratkaisu:

Koska akseli pyörii tasaisesti (vakio kulmanopeudella) on kysymyksessä statiikan ongelma.

Tukireaktiot ja voima F :

Koska rakenteeseen vaikuttaa vain pystysuoria kuormia, on tarkastelu helpointa suorittaa pisteiden A ja B kautta kulkevassa pystytasossa. Samasta syystä voidaan päätellä, että lyhyen radiaalilaakerin A ja lyhyen aksiaalilaakerin B tukireaktioiden vaakasuuntaiset komponentit häviävät. Piirretään akselin VKK, johon on redusoitu kiekoilta välittyvät vääntävät momentit. Sen avulla tukireaktiot ja voima F voidaan helposti määrittää:

VKK:



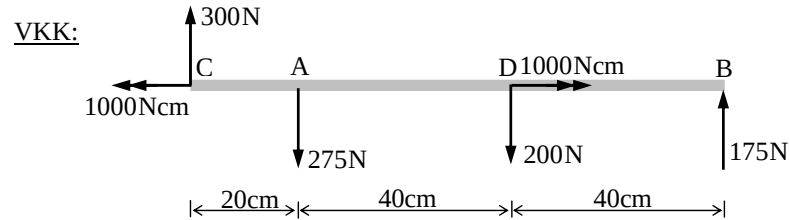
$$\Rightarrow 250\text{Ncm} - F \cdot 5\text{cm} + 1000\text{Ncm} = 0 \Rightarrow F = 250\text{N}$$

$$\sum \overset{A}{\curvearrowright} B_y \cdot 80\text{cm} - 200\text{N} \cdot 40\text{cm} - \overbrace{(50\text{N} + F) \cdot 20\text{cm}}^{300\text{N}} = 0 \Rightarrow B_y = 175\text{N}$$

$$\overset{300\text{N}}{\curvearrowleft} \text{B} \quad -(\overbrace{50\text{N} + F}) \cdot 100\text{cm} - A_y \cdot 80\text{cm} + 200\text{N} \cdot 40\text{cm} = 0 \Rightarrow \underline{A_y = -275\text{N}}$$

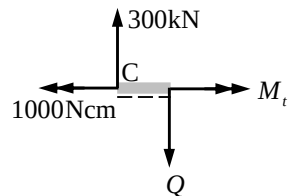
Leikkausrasitukset:

Rakenteen VKK, johon on merkitty tukireaktiot:



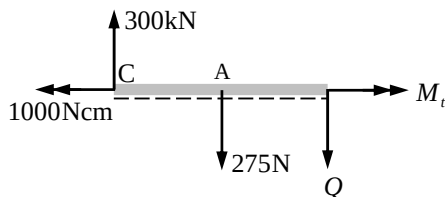
Määritetään ensin vääntömomentti ja leikkausvoima käyttäen hyväksi tietoa, että ne ovat akselin kuormittamattomalla osalla vakioita.

Väli CA:



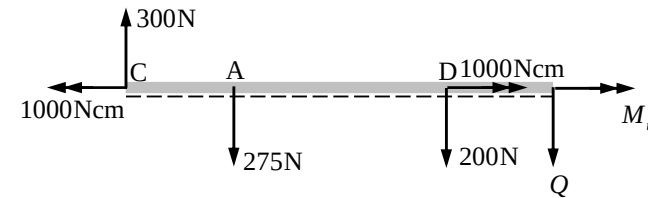
$$\begin{aligned} \rightarrow M_t - 1000\text{Ncm} &= 0 \Rightarrow M_t = \underline{1000\text{Ncm}} \\ \downarrow Q - 300\text{N} &= 0 \Rightarrow Q = \underline{300\text{N}} \end{aligned}$$

Väli AD:



$$\begin{aligned} \rightarrow M_t - 1000\text{Ncm} &= 0 \Rightarrow M_t = \underline{1000\text{Ncm}} \\ \downarrow Q - 300\text{N} + 275\text{N} &= 0 \Rightarrow Q = \underline{25\text{N}} \end{aligned}$$

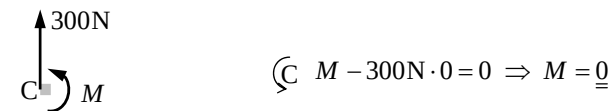
Väli DB:



$$\begin{aligned} \rightarrow M_t - 1000\text{Ncm} + 1000\text{Ncm} &= 0 \Rightarrow M_t = \underline{0} \\ \downarrow Q &= 300\text{N} - 275\text{N} - 200\text{N} = \underline{-175\text{N}} \end{aligned}$$

Määritetään sitten taivutusmomentti käyttäen hyväksi tietoa, että se on akselin kuormittamattomalla osalla lineaarinen. Tarvitaan siis vain taivutusmomentin arvot pisteissä C, A, D ja B.

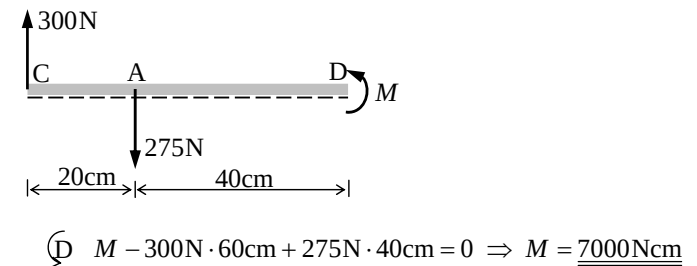
Piste C:



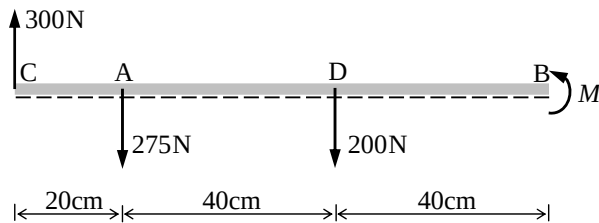
Piste A:



Piste D:

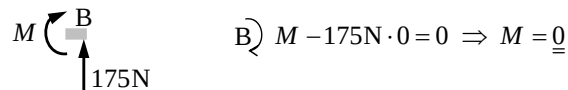


Piste B:



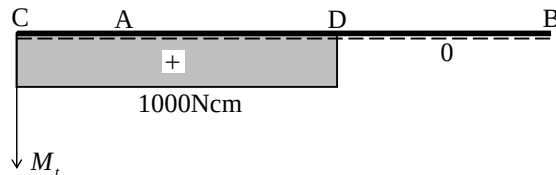
$$\sum \mathcal{M}_B = 300\text{ N} \cdot 100\text{ cm} + 275\text{ N} \cdot 80\text{ cm} + 200\text{ N} \cdot 40\text{ cm} = 0 \Rightarrow M = \underline{\underline{0}}$$

Tarkistus akselin loppuosasta:

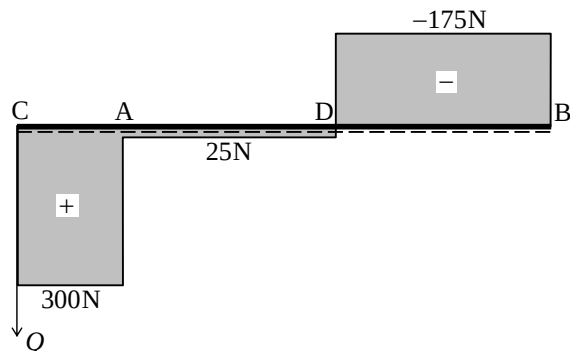


Rasituskuviot:

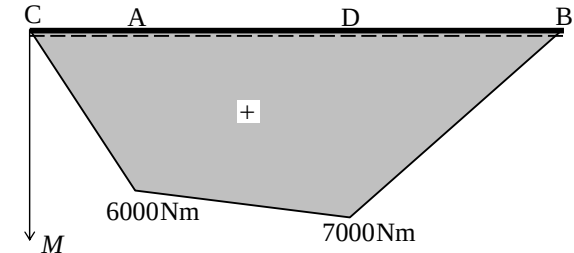
M_t - kuvio:



Q-kuvio:

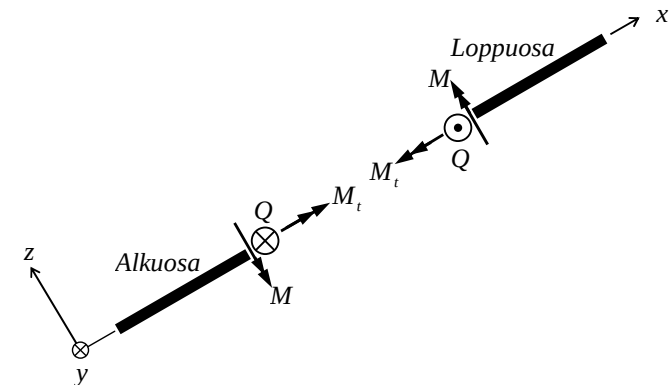


M-kuvio:



1.54 Leikkausrasitusten positiiviset suunnat arinarakenteessa

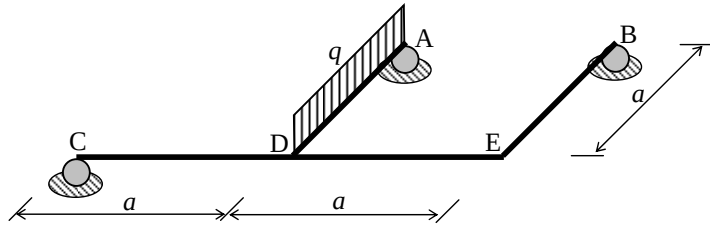
Arinarakenne on siis vaakatasossa oleva kehä, johon vaikuttaa pystysuuntainen kuormitus. Sen leikkausrasitukset ovat leikkausvoima Q , taivutusmomentti M ja vääntömomentti M_t . Arinarakennettä on usein tarkoituksenmukaista tarkastella ylhäältäpäin katsottuna. Kuva 1.18 esittää leikkausrasitusten positiivisia suuntia arinarakenteen sauvassa ylhäältäpäin katsottuna.



Kuva 1.18: Leikkausrasitusten positiiviset suunnat arinarakenteessa

Huomautus: Merkintä $\odot$ (nuolen **kärki** katsojaan päin) tarkoittaa katsojaan päin suuntautuvaa voimaa ja merkintä $\otimes$ (nuolen **pyrstö** katsojaan päin) tarkoittaa katsojasta poispäin suuntautuvaa voimaa. Myös katsojasta poispäin suuntautuvaa y -akselia kuvataan kuvassa 1.18 merkinnällä $\otimes$.

Esimerkki 1.12: Kuvan arinarakennetta kuormittaa pystysuora tasan jakautunut viivakuorma q sauvalla AD. Rakenne on tuettu siten, että tuet A, B ja C ovat pallo-niveltukia, jotka estävät pystyliikkeen. Piirretään rakenteen M_t -, Q - ja M -kuviot.

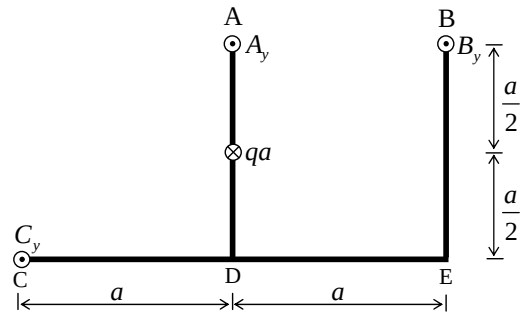


Ratkaisu:

Tukireaktiot:

Arinaa on mukavin tarkastella ylhäältäpäin. Koska tukien pystyliike on estetty, niillä on vain pystysuora tukireaktiokomponentti.

VKK:



$$A \rightarrow B \quad -C_y \cdot a + qa \cdot \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow C_y = \frac{qa}{2}$$

$$\begin{array}{c} A \\ \uparrow \\ D \end{array} \quad C_y \cdot a - B_y \cdot a = 0 \Rightarrow B_y = C_y = \frac{qa}{2}$$

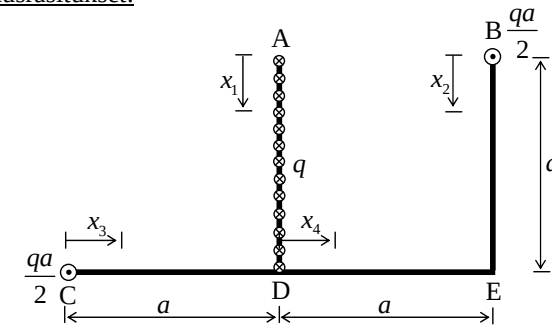
$$\odot \quad A_y + B_y + C_y - qa = 0 \Rightarrow A_y = qa - B_y - C_y = 0$$

Huomautus: Merkinnällä $A \rightarrow B$ tasapainoyhtälön edessä tarkoitetaan sitä, että on kirjoitettu momenttitasapainoyhtälö pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suhteen pitäen kaksoisnuolen osoittamaa kiertosuuntaa

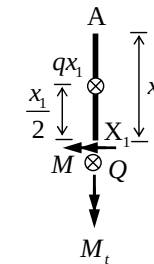
positiivisena. Merkinnällä $\odot$ tasa-painoyhtälön edessä tarkoitetaan sitä, että on kirjoitettu kuvatasoa vastaan kohtisuora voimatasapainoyhtälö pitäen suuntaa katsojaan päin positiivisena. Vastaavanlaisia muitakin merkintöjä, joiden merkitys on ilmeinen käytetään seuraavassa.

Leikkausrasitukset:

VKK:



Sauva AD:

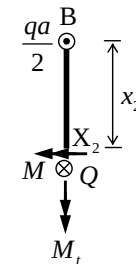


$$\otimes \quad Q + qx_1 = 0 \Rightarrow Q = -qx_1$$

$$\leftarrow X_1 \quad M + qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 0 \Rightarrow M = -\frac{1}{2}qx_1^2$$

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ X_1 \end{array} \quad M_t = 0$$

Sauva BE:

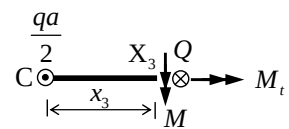


$$\otimes \quad Q - \frac{qa}{2} = 0 \Rightarrow Q = \frac{qa}{2}$$

$$\leftarrow X_2 \quad M - \frac{qa}{2} \cdot x_2 = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{2}qax_2$$

$$\begin{array}{c} B \\ \downarrow \\ X_2 \end{array} \quad M_t = 0$$

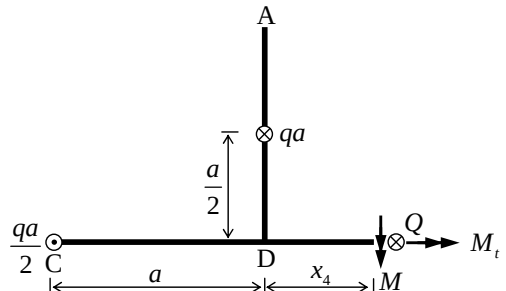
Sauva CD:

$$\otimes \quad Q - \frac{qa}{2} = 0 \Rightarrow Q = \underline{\underline{\frac{qa}{2}}}$$


$$\downarrow X_3 \quad M - \frac{qa}{2} \cdot x_3 = 0 \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{1}{2} qax_3}}$$

$C \rightarrow X_3 \quad \underline{\underline{M_t = 0}}$

Sauva DE:



$$\otimes \quad Q - \frac{qa}{2} + qa = 0 \Rightarrow Q = \underline{\underline{-\frac{qa}{2}}}$$

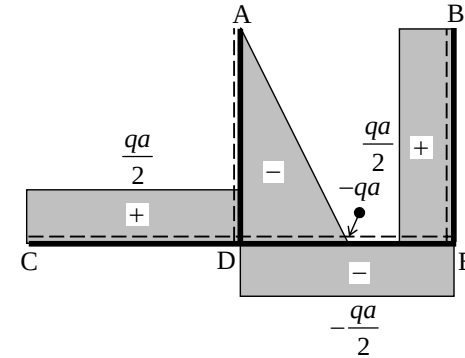
$$\downarrow X_4 \quad M - \frac{qa}{2} \cdot (a + x_4) + qax_4 = 0 \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{1}{2} qa(a - x_4)}}$$

$D \rightarrow X_4 \quad M_t - qa \cdot \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow M_t = \underline{\underline{\frac{1}{2} qa^2}}$

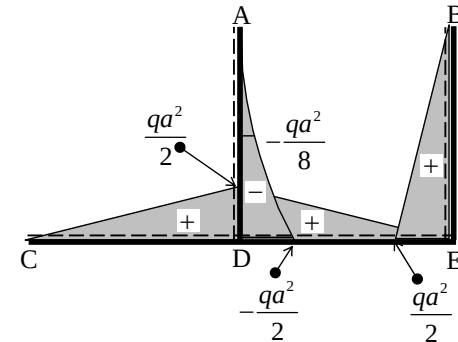
Rasituskuviot:

Rasituskuviot voidaan piirtää esimerkiksi rakenteen tasoon. Käytetään katkoviivaa viittaamaan valittuun rasituskuvion positiiviseen suuntaan kullakin sauvalla.

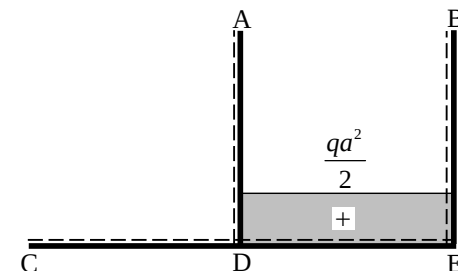
Q-kuvio:

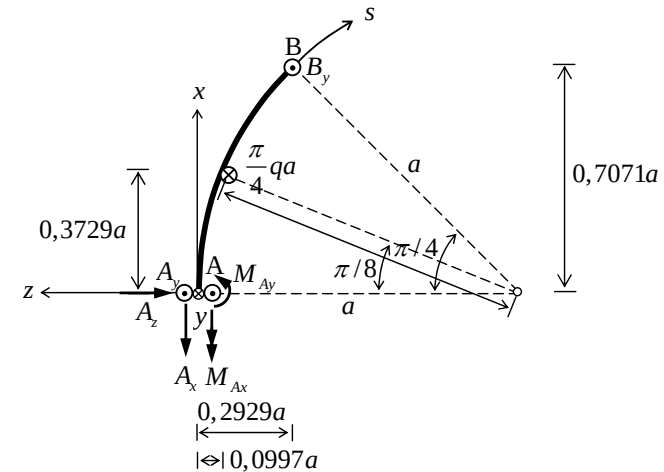
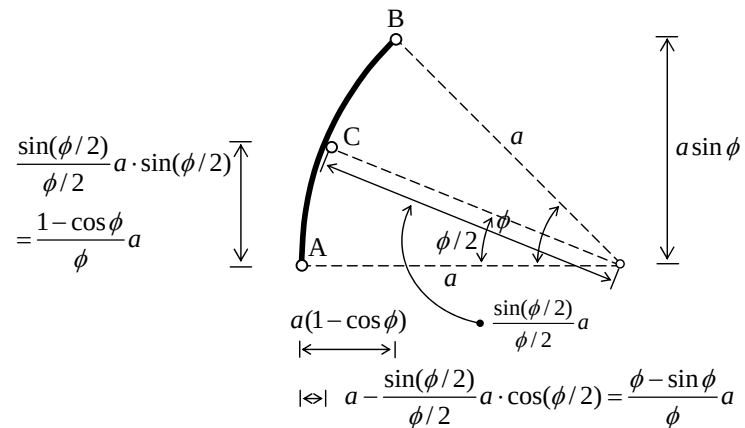
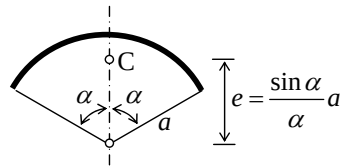


M-kuvio:



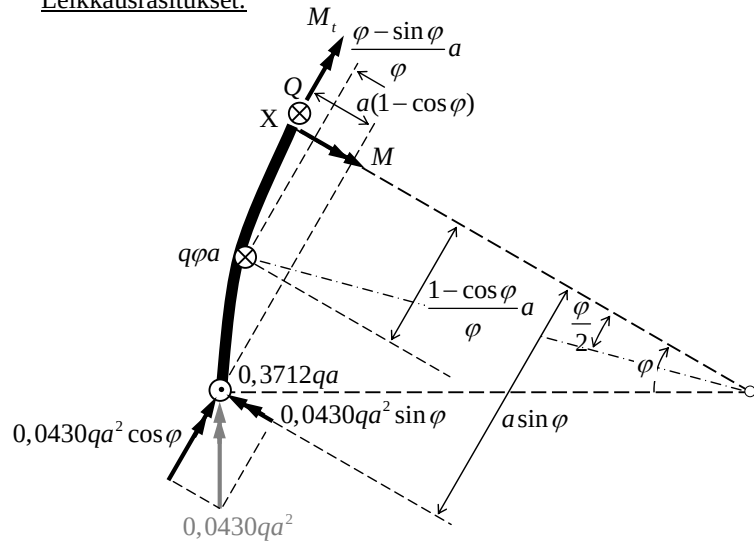
M_t - kuvio:





$$A_x = 0, A_z = 0$$

Leikkausrasitukset:



$$\otimes \quad Q - 0,3440qa + q\varphi a = 0 \Rightarrow Q = \underline{\underline{(0,3712 - \varphi)qa}}$$

$$\nearrow \quad M_t + 0,0430qa^2 \cos \varphi - 0,3712qa \cdot a(1 - \cos \varphi) + q\varphi a \cdot \frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi} a = 0$$

$$M_t = (-0,0430 \cos \varphi + 0,3712 - 0,3712 \cos \varphi - \varphi + \sin \varphi) a^2 = 0$$

$$\Rightarrow M_t = \underline{\underline{(0,3712 - 0,4142 \cos \varphi + \sin \varphi - \varphi)qa^2}}$$

$$\searrow \quad M - 0,0430qa^2 \sin \varphi - 0,3712qa \cdot a \sin \varphi + q\varphi a \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi} a = 0$$

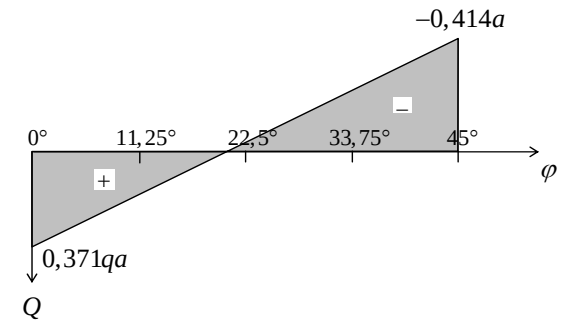
$$\Rightarrow M = \underline{\underline{(0,4142 \sin \varphi + \cos \varphi - 1)qa^2}}$$

Laskelma:

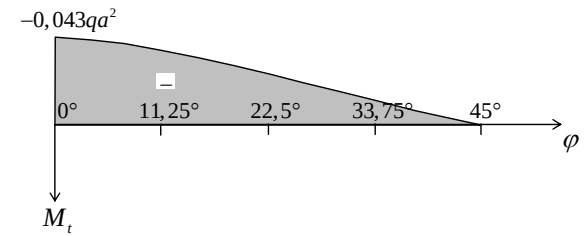
$\varphi [^\circ]$	$\varphi [\text{rad}]$	$Q/(qa)$	$M_t/(qa^2)$	$M/(qa^2)$
0	0	0,3712	-0,0430	0
11,25	$\pi/16$	0,1749	-0,0363	0,0616
22,5	$\pi/8$	-0,0215	-0,0215	0,0824
33,75	$3\pi/16$	-0,2178	-0,0113	0,0616
45	$\pi/4$	-0,4142	0	0

Rasituskuviot:

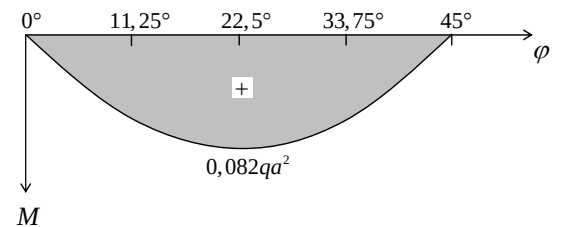
Q-kuvio:



M_t - kuvio:

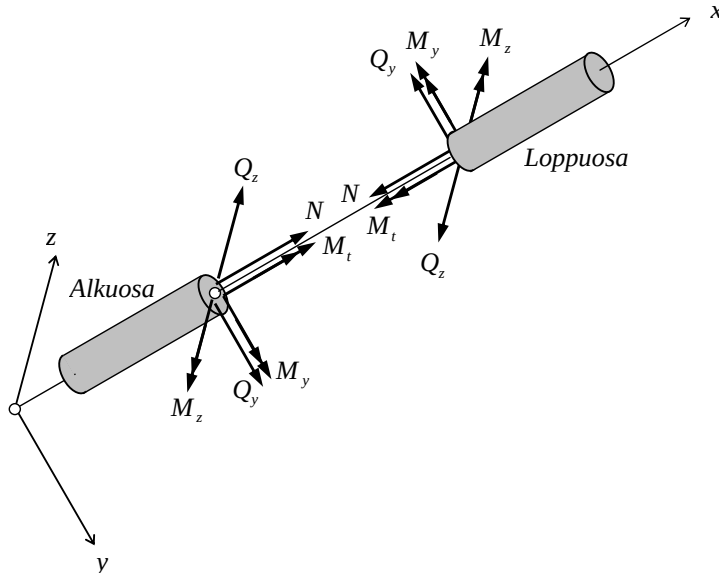


M-kuvio:



1.6 Kolmidimensioiset rakenteet

Yleisessä kolmidimensioisessa tapauksessa leikkausrasituksia on siis kuusi kappaletta. Niiden määrittämistä varten sauvaan liitetään suorakulmainen x, y, z –koordinaatisto siten, että x – akseli yhtyy sauvan akseliin. Muiden akselien suunnat määräytyvät esimerkiksi siten, että z – akseli asetetaan vaakatasoon.

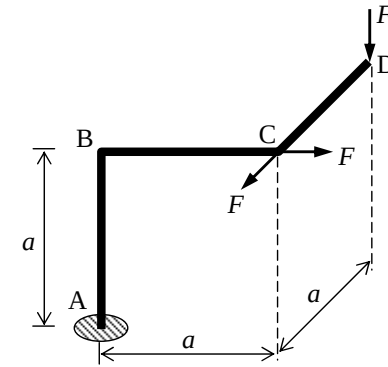


Kuva 1.19: Kolmidimensioisen sauvan leikkausrasitusten positiiviset suunnat.

Kolmidimensioisen sauvarakenteen leikkausrasitusten määrittäminen käy päinsä vastaavaan tapaan kuin edellä on yksinkertaisemmissa tapauksissa kuvattu. Laskelmien havainnollistaminen on vain hieman vaikeampaa ja laskeminen työläämpää. Käytännössä esiintyvät kolmidimensioiset sauvarakenteet ovat useimmiten staattisesti määräämättömiä. Niiden analysointi tapahtuu tavallisesti ns. yleistä siirtymämenetelmää, jota kutsutaan usein myös sauvarakenteiden elementtimenetelmäksi, käyttäen tietokoneella.

Huomautus: Positiiviset taivutusmomentit M_y ja M_z aiheuttavat vetoa palkin positiivisille (positiivisten z – ja y – akselien osoittamille) puolille.

Esimerkki 1.14: Määritä oheisen avaruuskehän sauvan BC leikkausrasitukset.



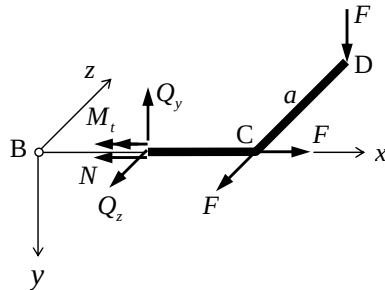
Ratkaisu:

Koska rakenne on ulokemainen, ei tukireaktioita tarvitse määrittää, jos leikkausrasitukset määritetään tarkastelemalla leikkauskohdan ulokkeen puoleisen rakenteen osan tasapainoa.

Asetetaan sauvaan BC koordinaatisto, jonka x – akseli yhtyy janaan BC, z – akseli on vaakasuora ja y – akseli suuntautuu alaspäin. Koska sauvalla BC ei vaikuta jakautunutta kuormaa, normaalivoima, leikkausvoimat ja vääntömomentti ovat sauvalla vakioita ja taivutusmomentit jakautuvat lineaarisesti. Näin riittää, kun määritämme normaalivoiman, leikkausvoimat ja vääntömomentin arvot sauvan päissä.

Normaalivoima, leikkausvoimat ja vääntömomentti:

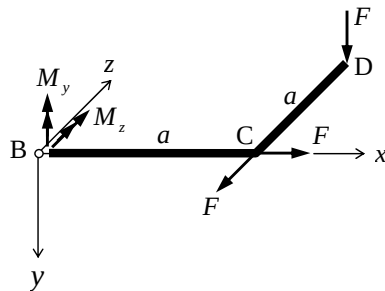
VKK:



$$\begin{aligned} \rightarrow x \quad -N + F &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{N = F}} \\ y \downarrow \quad -Q_y + F &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q_y = F}} \\ \nearrow z \quad -Q_z - F &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q_z = -F}} \\ \rightarrow x \quad -M_t - Fa &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{M_t = -Fa}} \end{aligned}$$

Taivutusmomentit pisteessä B:

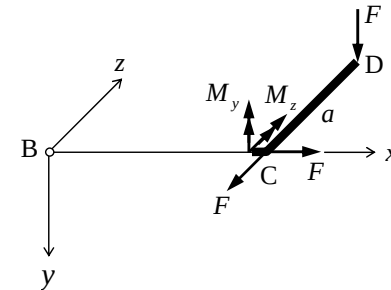
VKK:



$$\begin{aligned} y \downarrow \quad -M_y + Fa &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{M_y = Fa}} \\ \nearrow z \quad M_z + Fa &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{M_z = -Fa}} \end{aligned}$$

Taivutusmomentit pisteessä C:

VKK:



$$\begin{aligned} y \downarrow \quad -M_y &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{M_y = 0}} \\ \nearrow z \quad M_z &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus:

Sauvan BC normaalivoima, leikkausvoimat ja vääntömomentti ovat vakioita ja niillä on arvot:

$$\underline{\underline{N = F}}, \underline{\underline{Q_y = F}}, \underline{\underline{Q_z = -F}}, \underline{\underline{M_t = -Fa}}$$

Sauvan BC taivutusmomenttien arvot sen päissä ovat:

$$\text{Pää B: } \underline{\underline{M_y = Fa}}, \underline{\underline{M_z = -Fa}}$$

$$\text{Pää C: } \underline{\underline{M_y = 0}}, \underline{\underline{M_z = 0}}$$

Päiden välillä taivutusmomentit jakautuvat lineaarisesti.

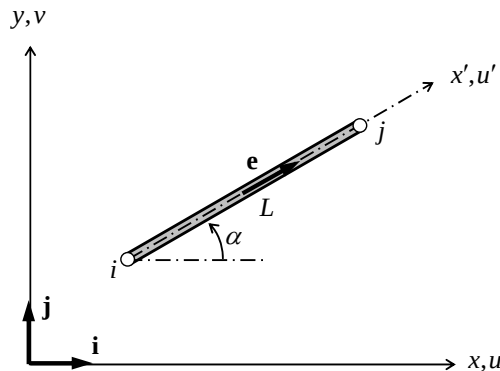
2. Yksinkertaisten rakenteiden siirtymien määrittämisestä

2.1 Staattisesti määrätyn ristikon siirtymätila

Staattisesti määrätyn ristikon siirtymätilan määrittäminen, kun sauva-voimat ja niiden avulla määritetyt sauvojen venymät tunnetaan, ei ole suoralta kädeltä aivan helppo tehtävä. Vähänkään monimutkaisemman rakenteen yhteydessä joudutaan helposti geometrisiin tarkasteluihin, jotka eivät ole kaikkien mielestä mukavia.

Eräs tehokkaimmista menetelmistä tähän tarkoitukseen on niin sanottu **yksikkövoimamenetelmä**, jota käsitellään Rakenteiden mekaniikka I:ssä. Tässä esitetään pienehköjä tasoristikoita varten analyyttinen käsittelytapa, jolla geometriset konstruktiot voidaan välttää. Menettely perustuu yhteen helposti muistissa säilyvään kaavaan, mutta sen käyttö vaatii jonkin verran huolellisuutta.

Aluksi johdetaan tämä kaava. Tarkastellaan kuvan 2.1 nivelsauvaa, jonka venymä ε tunnetaan. Merkitään tässä sauvan akseliin yhtyvää pituuskoordinaattia ja sen aksiaalista siirtymää symboleilla x' ja u' sekä siirtymiä globaalissa x, y –koordinaatistossa symboleilla u ja v .



Kuva 2.1: Nivelsauva.

Sauvan suuntaiselle yksikkövektorille saadaan kuvan 2.1 perusteella

$$\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}, \quad (2.1)$$

missä sauvan kaltevuuskulman α sinille ja kosinille on voimassa

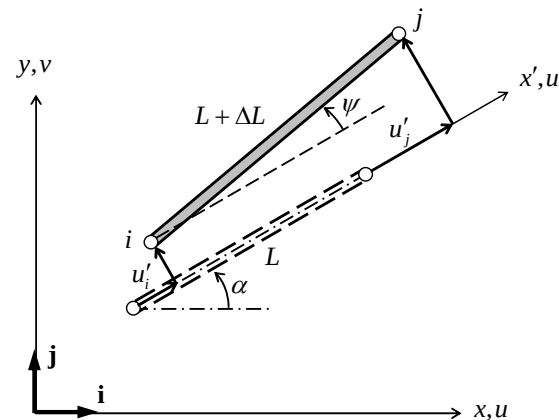
$$\cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad \sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{L}. \quad (2.2)$$

Jos sauvan tarkasteltavan pisteen siirtymävektori on

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (2.3)$$

sauvan aksiaaliselle siirtymälle saadaan lauseke

$$u' = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = \cos \alpha \cdot u + \sin \alpha \cdot v. \quad (2.4)$$



Kuva 2.2: Nivelsauvan siirtyminen.

Kuvan 2.2 perusteella saadaan yhtälö

$$(L + \Delta L) \cos \psi = L + u'_j - u'_i, \quad (2.5)$$

missä ψ on sauvan rotaatiokulma. Jos tehdään tavanomainen pienten rotaatioiden oletus, jossa ψ on niin pieni, että voidaan merkitä $\cos\psi = 1$, yhtälö (2.4) saa muodon

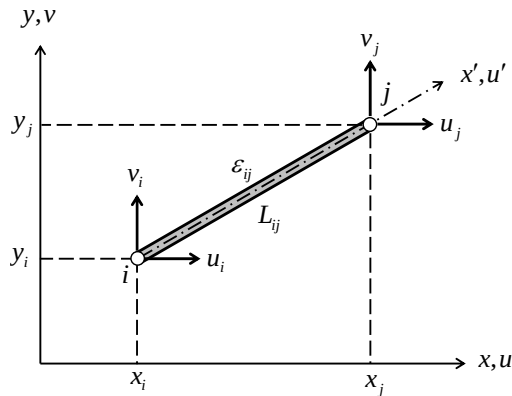
$$u'_j - u'_i = \Delta L. \quad (2.6)$$

Soveltamalla kaavaa (2.3) sauvan päissä i ja j , saadaan tästä

$$\cos\alpha(u_j - u_i) + \sin\alpha(v_j - v_i) = \Delta L. \quad (2.7)$$

Koska nivelsauvan on tavallisesti homogeeninen, on sen venymä ε vakio ja pituudenmuutokselle on voimassa $\Delta L = \varepsilon L$. Ottamalla lopuksi huomioon lausekkeet (2.2), saadaan yhtälö

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2. \quad (2.8)$$



Kuva 2.3: Yhtälöön (2.8) liittyvä kuva.

Kuvassa 2.3 on esitetty kaavaan (2.8) liittyvät merkinnät. Sen on siis yhtälö, joka sitoo nivelsauvan ij nivelten siirtymiä u_i , v_i , u_j ja v_j , kun sauva kokee annetun venymän ε_{ij} . Kun kysymyksessä on staattisesti määrätty **mekaanisesti kuormitettu** ristikko, jonka sauvavoimat voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan, tarkasteltavan sauvan venymä on

$$\varepsilon_{ij} = \frac{S_{ij}}{EA_{ij}}, \quad (2.9)$$

missä EA_{ij} on sauvan aksiaalijäykkyys ja S_{ij} on sen sauvavoima. Kun kysymyksessä on staattisesti määrätty ristikko, joka sauva kokee **lämpötilan muutoksen** ΔT_{ij} , sauvan venymä on

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T_{ij} \quad (2.10)$$

missä α_{ij} on sauvan pituuden lämpötilakerroin.

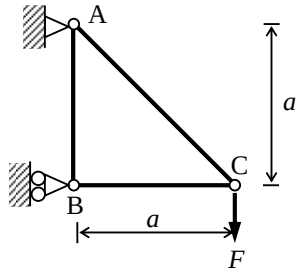
Periaatteeltaan samalla tavalla voidaan johtaa kaava

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) + (z_j - z_i)(w_j - w_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2, \quad (2.11)$$

jota voidaan käyttää staattisesti määrätyn **kolmidimensioisen** ristikon siirtymätilan määrittämiseen.

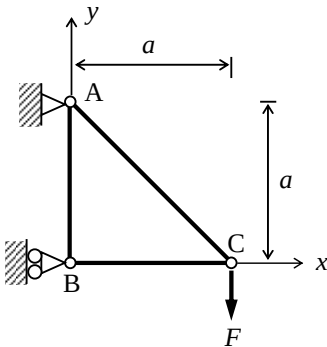
Yhtälöiden (2.8) ja (2.11) käyttöä staattisesti määrätyn ristikon sauvavoimien määrittämiseen tarkastellaan seuraavissa esimerkeissä.

Esimerkki 2.1: Määritetään oheisen tasoristikon nivelten siirtymät (a) Kuormasta F ja (b) lämpötilan muutoksesta ΔT . Ristikon sauvojen poikkipinta-ala A , kimmomoduuli E ja pituuden lämpötilakerroin α ovat vakioita.



Ratkaisu:

Määritetään aluksi nivelten siirtymät, sauvojen venymien avulla ja käytetään sitten saatuja lausekkeita kohtiin (a) ja (b).



Yhtälö (2.8) on

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2$$

Kirjoitetaan se kullekin sauvalle ja otetaan samalla huomioon tukiehdot

$$\text{Sauva AB: } 0 \cdot (\overset{0}{u_B} - \overset{0}{u_A}) - a \cdot (\overset{0}{v_B} - \overset{0}{v_A}) = \varepsilon_{AB} a^2$$

$$\text{Sauva AC: } a \cdot (\overset{0}{u_C} - \overset{0}{u_A}) - a \cdot (\overset{0}{v_C} - \overset{0}{v_A}) = \varepsilon_{AC} (a\sqrt{2})^2$$

$$\text{Sauva BC: } a \cdot (\overset{0}{u_C} - \overset{0}{u_B}) + 0 \cdot (\overset{0}{v_C} - \overset{0}{v_B}) = \varepsilon_{BC} a^2$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} v_B = -\varepsilon_{AB} a \\ u_C - v_C = 2\varepsilon_{AC} a \\ u_C = \varepsilon_{BC} a \end{cases}$$

Jonka ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} v_B = -\varepsilon_{AB} a \\ u_C = \varepsilon_{BC} a \\ v_C = (-2\varepsilon_{AC} + \varepsilon_{BC}) a \end{cases}$$

(a) Kuorma F

Sauvavoimat:

Nivel C:

$$\begin{aligned} & \downarrow F - S_{AC} \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_{AC} = F\sqrt{2} \\ & \leftarrow S_{AC} \cos 45^\circ + S_{BC} = 0 \Rightarrow S_{BC} = -S_{AC} \frac{1}{\sqrt{2}} = -F \end{aligned}$$

Nivel B:

$$\begin{aligned} & \uparrow S_{AB} = 0 \\ & \text{B}_x \end{aligned}$$

Sauvojen venymät:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{S_{ij}}{EA} \Rightarrow \varepsilon_{AB} = 0, \varepsilon_{AC} = \frac{F}{EA} \sqrt{2}, \varepsilon_{BC} = -\frac{F}{EA}$$

Nivelten siirtymät:

$$u_A = 0, v_A = 0,$$

$$u_B = 0, v_B = -a\varepsilon_{AB} = 0,$$

$$u_C = a\varepsilon_{BC} = -\frac{Fa}{EA}, v_C = a(\varepsilon_{BC} - 2\varepsilon_{AC}) = -\frac{(1+2\sqrt{2})Fa}{EA}$$

(b) Lämpötilan muutos:

Sauvojen venymät: $\varepsilon_{ij} = \alpha\Delta T$ (kaikki sauvat)

Nivelten siirtymät:

$$u_A = 0, v_A = 0,$$

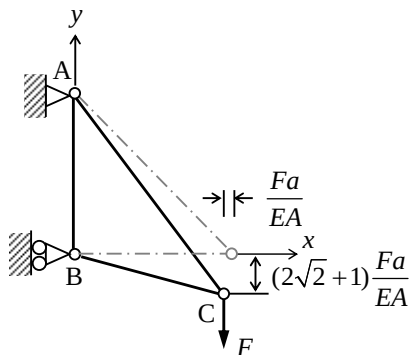
$$u_B = 0, v_B = -\alpha Ta,$$

$$u_C = a\varepsilon_{BC} = -\alpha Ta, v_C = a(\alpha T - 2\alpha T) = -\alpha Ta$$

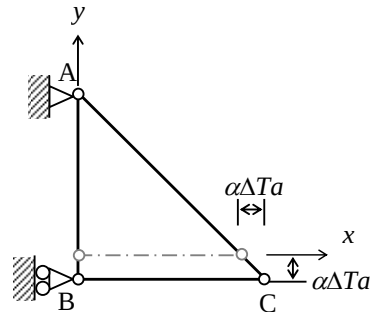
Ristikön siirtymäkuvio:

(Siirtymämittakaava epärealistisen suuri.)

(a) Kuorma F

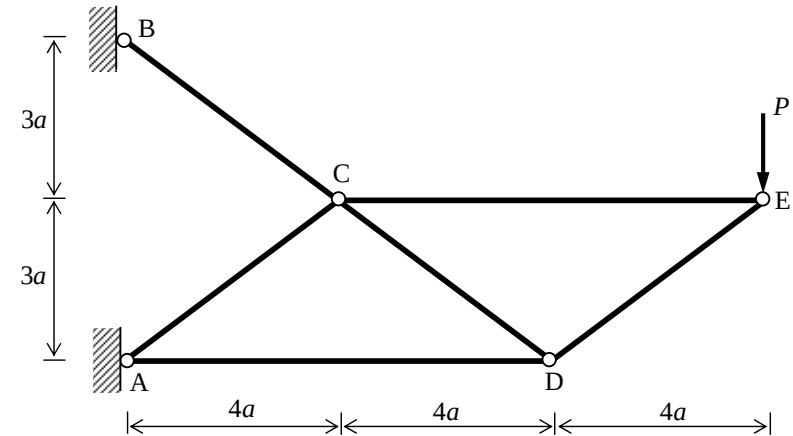


(b) Lämpötilan muutos



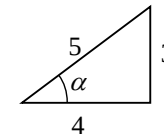
Esimerkki 2.2:

Määritä oheisen ristikon nivelten siirtymät. Kaikkien sauvojen aksiaalijäykkyys on EA .



Ratkaisu:

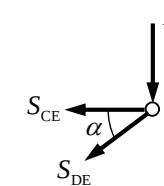
Geometriaa:



$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Sauvavoimien määrittäminen:

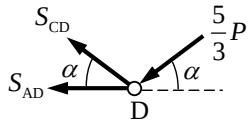
Aloitetaan nivelestä E, johon liittyy kaksi sauvaa:



$$\downarrow P + S_{DE} \overbrace{\sin \alpha}^{3/5} = 0 \Rightarrow S_{DE} = -\frac{5}{3}P$$

$$\leftarrow S_{DE} \overbrace{\cos \alpha}^{4/5} + S_{CE} = 0 \Rightarrow S_{CE} = -\frac{4}{5}S_{DE} = \frac{4}{3}P$$

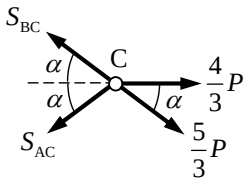
Siirrytään sitten niveleen D, johon liittyy nyt kaksi tuntematonta sauvavoimaa:



$$\uparrow S_{CD} \sin \alpha - \frac{5}{3} P \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow S_{CD} = \frac{5}{3} P$$

$$\leftarrow S_{AD} + S_{CD} \overbrace{\cos \alpha}^{4/5} + \frac{5}{3} P \cdot \overbrace{\cos \alpha}^{4/5} = 0 \Rightarrow S_{AD} = -\frac{4}{5} S_{CD} - \frac{4}{3} P = -\frac{8}{3} P$$

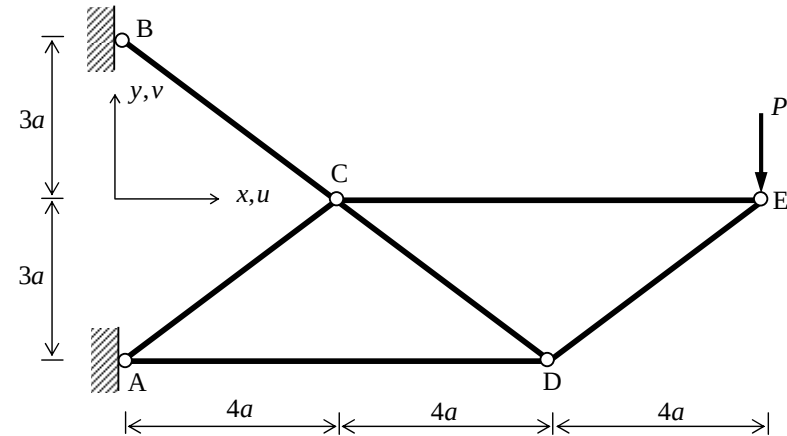
Siirrytään sitten niveleen C, johon liittyy nyt kaksi tuntematonta sauvavoimaa:



$$\left. \begin{aligned} \uparrow S_{BC} \sin \alpha - S_{AC} \sin \alpha - \frac{5}{3} P \sin \alpha &= 0 \\ \leftarrow S_{BC} \overbrace{\cos \alpha}^{4/5} + S_{AC} \overbrace{\cos \alpha}^{4/5} - \frac{5}{3} P \overbrace{\cos \alpha}^{4/5} - \frac{4}{3} P &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} S_{BC} - S_{AC} = \frac{5}{3} P \\ S_{BC} + S_{AC} = \frac{10}{3} P \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{AC} = \frac{5}{6} P, \quad S_{BC} = \frac{5}{2} P$$

Sauvojen pituudet, sauvavoimat ja venymät:



Sauva	$x_j - x_i$	$y_j - y_i$	L_{ij}	S_{ij}	ε_{ij}
AC	$4a$	$3a$	$5a$	$5P/6$	$5P/(6EA)$
BC	$4a$	$-3a$	$5a$	$5P/2$	$5P/(2EA)$
AD	$8a$	0	$8a$	$-8P/3$	$-8P/(3EA)$
CD	$4a$	$-3a$	$5a$	$5P/3$	$5P/(3EA)$
CE	$8a$	0	$8a$	$4P/3$	$4P/(3EA)$
DE	$4a$	$3a$	$5a$	$-5P/3$	$-5P/(3EA)$

Nivelten siirtymät:

Yhtälö:

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2$$

Kirjoitetaan se kaikille sauvuille ja otetaan huomioon tukiehdot:

$$\text{Sauva AC: } 4a(u_C - \overbrace{u_A}^0) + 3a(v_C - \overbrace{v_A}^0) = \frac{5}{6} \frac{P(5a)^2}{EA}$$

$$\text{Sauva BC: } 4a(u_C - \overbrace{u_B}^0) - 3a(v_C - \overbrace{v_B}^0) = \frac{5}{2} \frac{P(5a)^2}{EA}$$

$$\text{Sauva AD: } 8a(u_D - \overset{0}{u_A}) + 0 \cdot (v_D - \overset{0}{v_A}) = -\frac{8 P(8a)^2}{3 EA}$$

$$\text{Sauva CD: } 4a(u_D - u_C) - 3a(v_D - v_C) = \frac{5 P(5a)^2}{3 EA}$$

$$\text{Sauva CE: } 8a(u_E - u_C) + 0 \cdot (v_E - v_C) = \frac{4 P(8a)^2}{3 EA}$$

$$\text{Sauva DE: } 4a(u_E - u_D) + 3a(v_E - v_D) = -\frac{5 P(5a)^2}{3 EA}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4u_C + 3v_C = \frac{125 Pa}{6 EA} \\ 4u_C - 3v_C = \frac{125 Pa}{2 EA} \\ u_D = -\frac{64 Pa}{3 EA} \\ -4u_C + 3v_C + 4u_D - 3v_D = \frac{125 Pa}{3 EA} \\ -u_C + u_E = \frac{32 Pa}{3 EA} \\ -4u_D - 3v_D + 4u_E + 3v_E = -\frac{125 Pa}{3 EA} \end{cases}$$

joka on matriisimuodossa

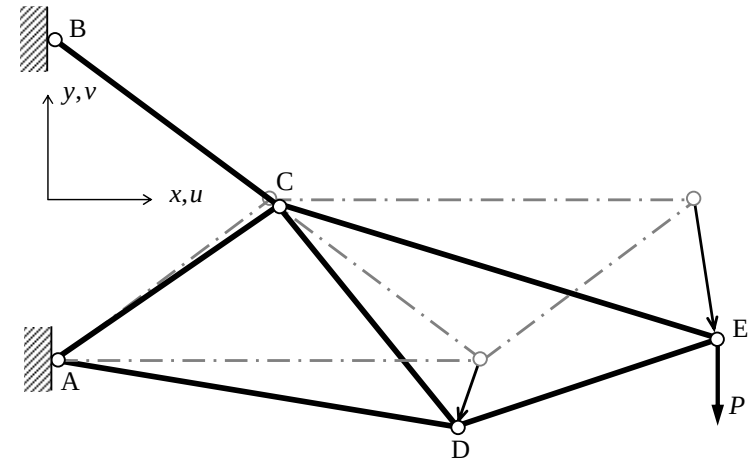
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{bmatrix} 125/6 \\ 125/2 \\ -64/3 \\ 125/3 \\ 32/3 \\ -125/3 \end{bmatrix}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu saadaan helposti taskulaskimella tai matematiikkaohjelmalla. Se on:

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{bmatrix} 10,4 \\ -6,9 \\ -21,3 \\ -63,2 \\ 21,1 \\ -133,6 \end{bmatrix}$$

Ristikön siirtymäkuvio:

(Siirtymämittakaava epärealistisen suuri.)



Laskeman voi suorittaa myös käsin ilman yhtälöryhmän ratkaisijaa. Lähtemällä liikkeelle tulta A ja C, ottamalla heti huomioon niiden tukiehdot ja etenemällä kolmio kerrallaan, saadaan nivelten siirtymät ratkaistua vaiheittain. Laskelma on seuraava:

Sauvat AC ja BC:

$$\begin{cases} 4a(u_C - \overset{0}{u_A}) + 3a(v_C - \overset{0}{v_A}) = \frac{5P(5a)^2}{6EA} \\ 4a(u_C - \overset{0}{u_B}) - 3a(v_C - \overset{0}{v_B}) = \frac{5P(5a)^2}{2EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4u_C + 3v_C = \frac{125 Pa}{6 EA} \\ 4u_C - 3v_C = \frac{125 Pa}{2 EA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_C = \frac{125 Pa}{12 EA} \approx 10,4 \frac{Pa}{EA} \\ v_C = -\frac{125 Pa}{18 EA} \approx -6,9 \frac{Pa}{EA} \end{cases}$$

Sauvat AD ja CD:

$$\left. \begin{aligned} 8a(u_D - \overset{0}{u}_A) + 0 \cdot (v_D - \overset{0}{v}_A) &= \frac{-8P(8a)^2}{3EA} \\ 4a(u_D - \overset{\frac{125 Pa}{12 EA}}{u}_C) - 3a(v_D - \overset{\frac{125 Pa}{18 EA}}{v}_C) &= \frac{5P(5a)^2}{3EA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u_D = -\frac{64 Pa}{3 EA} \\ 4u_D - 3v_D = \frac{625 Pa}{6 EA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_D = -\frac{64 Pa}{3 EA} \approx -21,3 \frac{Pa}{EA} \\ v_D = \frac{4}{3}u_D - \frac{625 Pa}{18 EA} = -\frac{1137 Pa}{18 EA} \approx -63,2 \frac{Pa}{EA} \end{cases}$$

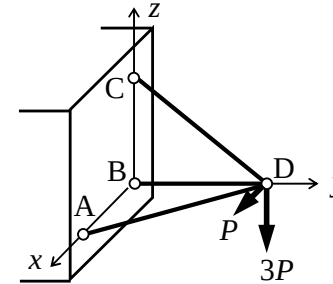
Sauvat CE ja DE:

$$\left. \begin{aligned} 8a(u_E - \overset{\frac{125 Pa}{12 EA}}{u}_C) + 0 \cdot (v_E - \overset{\frac{125 Pa}{18 EA}}{v}_C) &= \frac{4P(8a)^2}{3EA} \\ 4a(u_E - \overset{\frac{64 Pa}{3 EA}}{u}_D) + 3a(v_E - \overset{\frac{1137 Pa}{18 EA}}{v}_D) &= -\frac{5P(5a)^2}{3EA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u_E = \frac{253 Pa}{12 EA} \\ 4u_E + 3v_E = -\frac{1899 Pa}{6 EA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_E = \frac{253 Pa}{12 EA} \approx 21,1 \frac{Pa}{EA} \\ v_E = -\frac{4}{3}u_E - \frac{1899 Pa}{18 EA} = -\frac{2405 Pa}{18 EA} \approx -133,6 \frac{Pa}{EA} \end{cases}$$

Esimerkki 2.3:

Määritetään oheisen avaruusristikon nivelen D siirtymät, kun kaikkien sauvojen aksiaali jäykkyys on EA . Voima P on x -akselin suuntainen ja voima $3P$ on z -akselin suuntainen.



Nivelen koordinaatit:

A: $(3a, 0, 0)$

B: $(0, 0, 0)$

C: $(0, 0, 3a)$

D: $(0, 4a, 0)$

Ratkaisu:

Ristikon sauvavoimat määritettiin Rakenteiden lujuusopin osan I tehtävässä 2.5.

Sauvojen pituudet, sauvavoimat ja venymät:

Sauva	$x_j - x_i$	$y_j - y_i$	$z_j - z_i$	L_{ij}	S_{ij}	ε_{ij}
AD	$-3a$	$4a$	0	$5a$	$-5P/3$	$-5P/(3EA)$
BD	0	$4a$	0	$4a$	$-8P/3$	$-8P/(3EA)$
CD	0	$4a$	$-3a$	$5a$	$5P$	$5P/EA$

Yhtälö (2.11):

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) + (z_j - z_i)(w_j - w_i) = \frac{S_{ij} L_{ij}^2}{EA}$$

Kirjoitetaan se kaikille sauvoille ja otetaan huomioon tukiehdot:

$$\text{Sauva AD: } -3a(u_D - \overset{0}{u}_A) + 4a(v_D - \overset{0}{v}_A) + 0 \cdot (w_D - \overset{0}{w}_A) = -\frac{5 P(5a)^2}{3 EA}$$

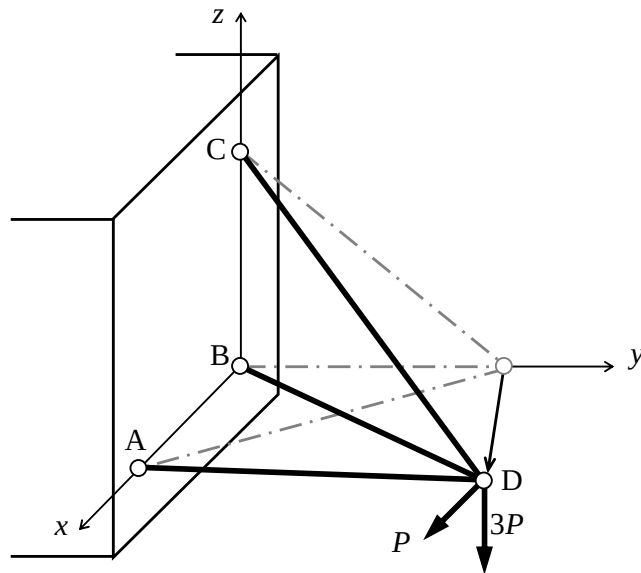
$$\text{Sauva BD: } 0 \cdot (u_D - \overset{0}{u}_B) + 4a(v_D - \overset{0}{v}_B) + 0 \cdot (w_D - \overset{0}{w}_B) = -\frac{8 P(4a)^2}{3 EA}$$

$$\text{Sauva CD: } 0 \cdot (u_D - \overset{0}{u}_C) + 4a(v_D - \overset{0}{v}_C) - 3a \cdot (w_D - \overset{0}{w}_C) = 5 \frac{P(5a)^2}{EA}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} -3u_D + 4v_D = -\frac{125}{3} \frac{Pa}{EA} \\ v_D = -\frac{32}{3} \frac{Pa}{EA} \\ 4v_D - 3w_D = 125 \frac{Pa}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_D = \frac{4}{3}v_D + \frac{125}{9} \frac{Pa}{EA} = -\frac{1}{3} \frac{Pa}{EA} \approx \underline{\underline{-0,33 \frac{Pa}{EA}}} \\ v_D = -\frac{32}{3} \frac{Pa}{EA} \approx \underline{\underline{-10,67 \frac{Pa}{EA}}} \\ w_D = \frac{4}{3}v_D - \frac{125}{3} \frac{Pa}{EA} = -\frac{503}{9} \frac{Pa}{EA} \approx \underline{\underline{-55,89 \frac{Pa}{EA}}} \end{cases}$$

Ristikön siirtymäkuvio: (Siirtymämittakaava epärealistisen suuri.)



2.2 Palkin taipumien ja kiertymien määrittäminen momenttipintamenetelmällä

2.21 Johdantoa

Rakenteiden lujuusopin kurssissa tutustuimme palkin taiputukseen liittyviin peruskäsitteisiin ja taipuman differentiaaliyhtälöihin. Niiden avulla voitiin määrittää taipuman $v(x)$ lausekkeita tasajäykille uloke- ja kaksitukisille sekä staattisesti määräytyille että myös määräämättömille palkeille. Joitain tuloksia on koottuna luentomonisteen osan II taulukossa 8.1. Edelleen tutustuimme superpositioperiaatteeseen, jota käyttäen esimerkiksi mainitun taulukon tulosten avulla voidaan ratkaista monimutkaisempia kuormitustapauksia.

Palkin taipuman määrittäminen lähtien liikkeelle palkin differentiaaliyhtälöstä muodostuu kuitenkin monissa tapauksissa varsin hankalaksi. Tällaisia ovat esimerkiksi palkit, joiden taivutusjäykkyys vaihtelee, palkit, joiden tuet eivät ole palkin päissä, nivelpalkit, jne.

Seuraavassa esitellään ns. **momenttipintamenetelmä**, joka soveltuu staattisesti määrättyjen palkkien taipumien ja kiertymien määrittämiseen halutuissa pisteissä. Sen käyttö on varsin havainnollista ja tehokasta kaikenlaisten staattisesti määrättyjen palkkien yhteydessä.

Yhtälöt, joihin palkin taipuman määrittäminen perustuu, ovat **kiertymän ja taipuman yhteys**

$$\varphi = v', \quad (2.12)$$

käyrityksen ja taipuman yhteys $\kappa = -v''$, joka voidaan esittää myös **käyrityksen ja kiertymän yhteytenä** muodossa

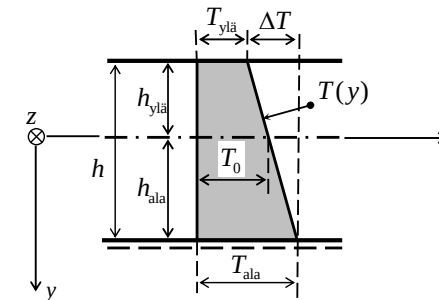
$$\kappa = -\varphi' \quad (2.13)$$

sekä lineaarisesti kimmoisen palkin **käyrityksen ja taivutusmomentin yhteys**

$$\kappa = \frac{M}{EI}. \quad (2.14)$$

Palkin käyritystä näyttelee momenttipintamenetelmässä tärkeää osaa. Jos staattisesti määrättyyn palkkiin vaikuttaa **mekaaninen kuormitus** ja siitä aiheutuu taivutusmomenttijakauma $M(x)$, palkin käyrityksen jakauma saadaan tällöin kaavasta (2.14).

Palkki voi saada käyrityksen myös muusta syystä kuin sillä vaikuttavasta taivutusmomentista. Eräs tärkeä tapaus on **lämpötilan muutos**¹. Tarkastellaan palkkia, joka saa lämpötilan muutoksen, joka vaihtelee palkin korkeussuunnassa. Tiettyssä poikkileikkauksessa lämpötilan muutos on siis funktio koordinaatista y , eli $T(y)$ (vrt. kuva 2.4). Otaksutaan, että palkki on homogeeninen, jolloin pituuden lämpötila-kerroin α on vakio.



Kuva 2.4 Lämpötilan muutoksen jakauma $T(y)$ sauvan korkeussuunnassa

Otaksutaan, että palkin yläpinta saa lämpötilan muutoksen $T_{ylä}$ ja alapinta saa lämpötilan muutoksen T_{ala} . Otaksutaan edelleen, että lämpötilan muutos jakautuu palkin korkeussuunnassa lineaarisesti. Tämä otaksuma edellyttää sen lisäksi, että palkin poikkileikkaus on homogeeninen, myös sen, että lämmön virtaus on stationaarista. Lämpötilan muutoksen lineaariselle jakaumalle $T(y)$ palkin korkeussuunnassa saadaan (kuva 2.4).

$$T(y) = T_0 + \frac{\Delta T}{h} y, \quad (2.15)$$

missä

¹ Lämpötilan muutos ei aiheuta staattisesti määrättyyn palkkiin taivutusmomenttia.

$$T_0 = \frac{h_{\text{ala}} T_{\text{ylä}} + h_{\text{ylä}} T_{\text{ala}}}{h}, \quad \Delta T = T_{\text{ala}} - T_{\text{ylä}}. \quad (2.16)$$

ovat **lämpötilan muutos palkin akselin kohdalla sekä ala- ja yläpinnan lämpötilan muutosten erotus**². Lämpötilan muutoksesta aiheutuva venymä $\varepsilon(y)$ on nyt

$$\varepsilon(y) = \alpha T(y) = \alpha T_0 + \frac{\alpha \Delta T}{h} y \quad (2.17)$$

eli

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + \kappa y, \quad (2.18)$$

missä $\varepsilon_0 = \alpha T_0$, on lämpötilan muutoksesta aiheutuva palkin akselin venymä ja

$$\boxed{\kappa = \frac{\alpha \Delta T}{h}} \quad (2.19)$$

on **lämpötilan muutoksesta aiheutuva palkin käyristymä**.

2.22 Momenttipintamenetelmän yhtälöt

Tarkastellaan deformoituvan palkin osaa AB (kuva 2.5). Integroimalla kiertymän ja käyristymän yhteys

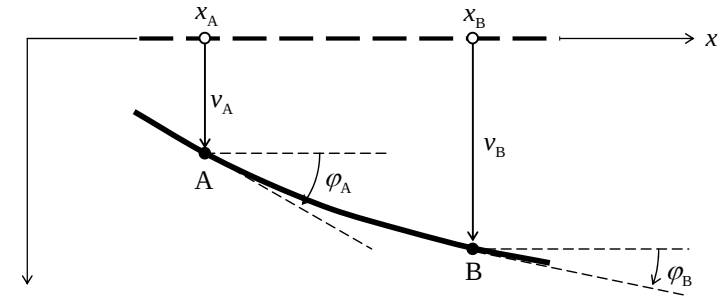
$$\varphi'(x) = -\kappa(x) \quad (2.20)$$

puolittain pisteestä x_A pisteeseen x_B saadaan

$$\int_{x_A}^{x_B} \varphi'(x) dx = - \int_{x_A}^{x_B} \kappa(x) dx \Rightarrow \varphi(x_B) - \varphi(x_A) = - \int_{x_A}^{x_B} \kappa(x) dx, \quad (2.21)$$

eli

² Tässä siis T merkitsee lämpötilan muutosta ja ΔT ala- ja yläpinnan lämpötilan muutosten erotusta.



Kuva 2.5: Deformoituvan palkin osa AB.

$$\boxed{\varphi_B - \varphi_A = -\mathcal{A}_{AB}}, \quad (2.22)$$

missä

$$\boxed{\mathcal{A}_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \kappa(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI(x)} dx} \quad (2.23)$$

voidaan ymmärtää **käyristymäpinnan** $\kappa(x)$ pisteiden x_A ja x_B väliseksi **pinta-alaksi** (vrt. kuva 2.7 jäljempänä). Kaavan (2.23) viimeinen yhtäsuuruus on voimassa, kun kyseessä on mekaanisesti kuormitettu, lineaarisesti kimmoinen, homogeeninen palkki. Tällöin voidaan siis myös puhua M/EI –pinnan pinta-alasta.

Tarkastellaan seuraavaa johtoa varten tilannetta, jossa $x_B = x$ ja käytetään edellistä tulosta, jolloin saadaan

$$\varphi(x) - \varphi_A = -\mathcal{A}_{Ax}(x), \quad (2.24)$$

missä

$$\mathcal{A}_{Ax}(x) = \int_{x_A}^x \kappa(x) dx \quad (2.25)$$

voidaan nyt ymmärtää käyristymäkuvion $\kappa(x)$ pisteiden x_A ja x väliseksi pinta-alaksi. Sijoitetaan tulos (2.25) taipuman ja kiertymän yhteyteen

$$v'(x) = \varphi(x), \quad (2.26)$$

jolloin saadaan

$$v'(x) = \varphi_A - \mathcal{A}_{Ax}(x). \quad (2.27)$$

Integroimalla tämä lauseke puolittain pisteestä x_A pisteeseen x_B saadaan

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} v'(x) dx &= \int_{x_A}^{x_B} [\varphi_A - \mathcal{A}_{Ax}(x)] dx \\ \Rightarrow v(x_B) - v(x_A) &= \varphi_A \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{A}_{Ax}(x) dx \\ &= \varphi_A (x_B - x_A) - \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{A}_{Ax}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Soveltamalla saadun lausekkeen viimeiseen integraaliin osittaisintegrointia saadaan

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{A}_{Ax}(x) dx &= \int_{x_A}^{x_B} 1 \cdot \mathcal{A}_{Ax}(x) dx = \Big|_{x_A}^{x_B} x \cdot \mathcal{A}_{Ax}(x) - \int_{x_A}^{x_B} x \cdot \mathcal{A}'_{Ax}(x) dx \\ &= x_B \cdot \underbrace{\mathcal{A}_{Ax}(x_B)}_{\int_{x_A}^{x_B} \kappa(x) dx} - x_A \cdot \underbrace{\mathcal{A}_{Ax}(x_A)}_0 - \int_{x_A}^{x_B} x \cdot \underbrace{\mathcal{A}'_{Ax}(x)}_{\kappa(x)} dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sijoittamalla tämä tulos lausekkeeseen (2.28) saadaan lopulta

$$v(x_B) - v(x_A) = \varphi_A (x_B - x_A) - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx \quad (2.30)$$

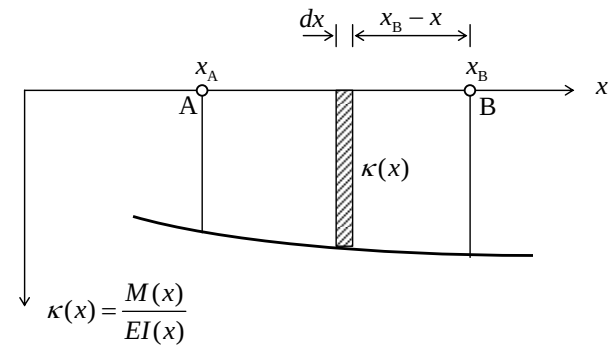
eli

$$v_B - v_A = \varphi_A (x_B - x_A) - \mathcal{M}_{AB}, \quad (2.31)$$

missä

$$\mathcal{M}_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \frac{M(x)}{EI(x)} dx \quad (2.32)$$

voidaan ymmärtää **käyritysmäpinnan** $\kappa(x)$ pisteiden x_A ja x_B välisen osan **momentiksi** pisteen B suhteen (vrt. kuva 2.6). Kaavan (2.32) viimeinen yhtäsuuruus on voimassa, kun kyseessä on mekaanisesti kuormitettu, lineaarisesti kimmoinen, homogeeninen palkki. Tällöin voidaan myös puhua M/EI -pinnan momentista.



$$d\mathcal{M}_{AB} = (x_B - x) \kappa(x) dx \Rightarrow \mathcal{M}_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx$$

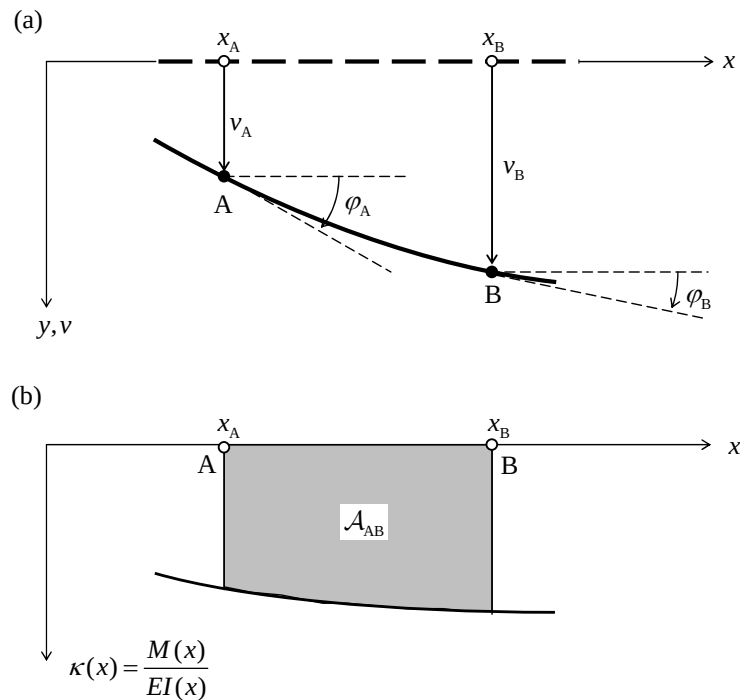
Kuva 2.6: Käyritysmäpinnan momentin $\mathcal{M}_{AB}$ muodostuminen.

Kaavat (2.22) ja (2.31) muodostavat momenttipintamenetelmän peruskaavaparin. Ne ovat siis

$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_A &= -\mathcal{A}_{AB}, \\ v_B - v_A &= \varphi_A (x_B - x_A) - \mathcal{M}_{AB}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Kuva 2.7 esittelee näissä kaavoissa esiintyviä suureita.

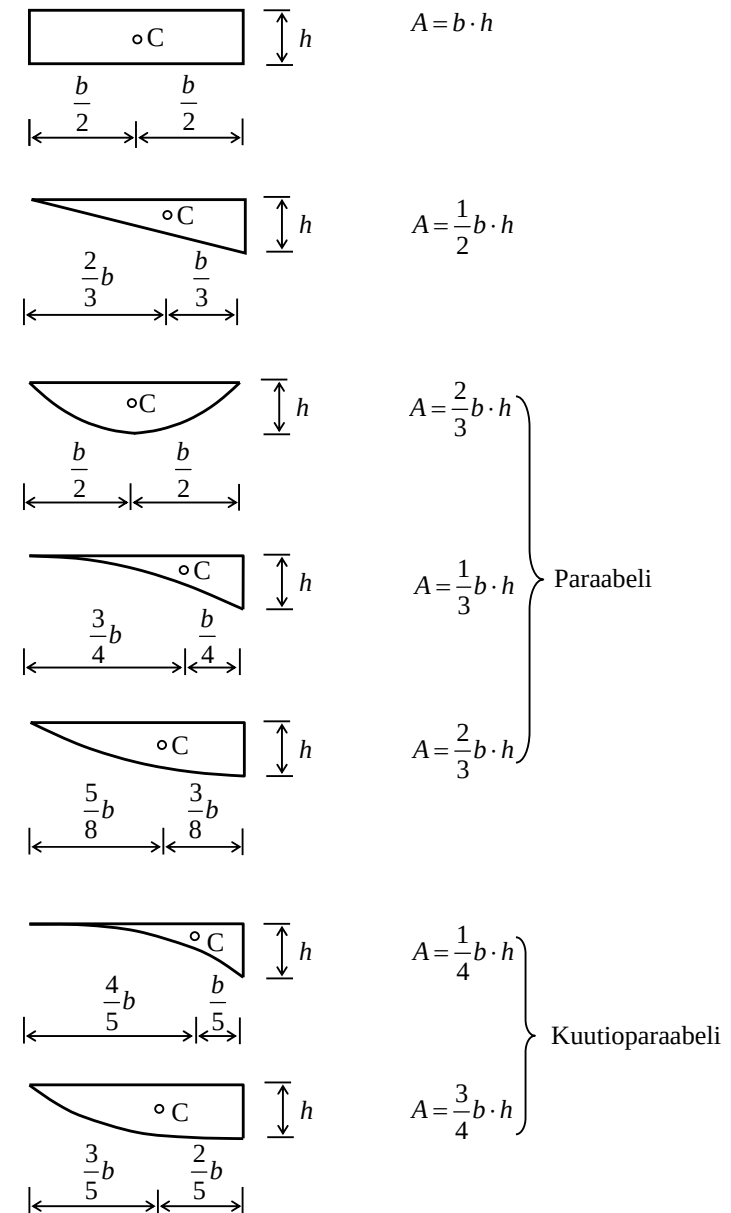
Käyritysmäpinnan pinta-alan $\mathcal{A}_{AB}$ ja momentin $\mathcal{M}_{AB}$ määrittäminen helpottuu huomattavasti, jos se voidaan jakaa osapintoihin, joiden pinta-alat ja niiden pintakeskiöt tunnetaan. Myös tätä tarkoitusta varten voidaan



Kuva 2.7: Momenttipintamenetelmä: (a) palkin deformaatio välillä AB ja (b) palkin käristymäpinta välillä AB.

käyttää kuvaa 2.8, jossa on tyypillisten pintojen pinta-aloja ja pintakeskiöitä.

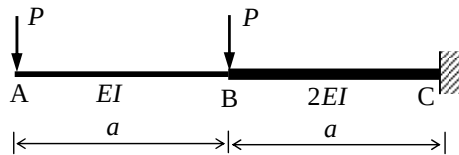
Huomautus: Luontevin nimi esitetylle menetelmälle olisi ”**käristymäpintamenetelmä**”, koska siinä operoidaan nimenomaan käristymäkuvion $\kappa = \kappa(x)$ määrittelemillä pinnoilla. Koska lineaarisesti kimmoisen, tasajäykän palkin ($EI = \text{vakio}$) tapauksessa, mekaanisesti kuormitetun palkin käristymä $\kappa(x) = M(x)/EI$ on suoraan verrannollinen taivutusmomenttiin, menetelmän nimeksi on kuitenkin vakiintunut ”**momenttipintamenetelmä**”. Menetelmä soveltuu kuitenkin myös staattisesti määrättyihin palkkeihin, joiden materiaalilaki on epälineaarinen ja käristymän ja taivutusmomentin yhteys siten muotoa $\kappa = \kappa(M)$. Tässä yhteydessä puhe momenttipintamenetelmästä ei ole enää kovin mielekästä.



Kuva 2.8: Pinta-aloja ja pintakeskiöitä.

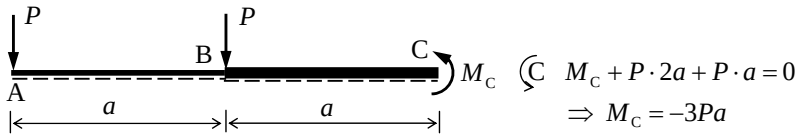
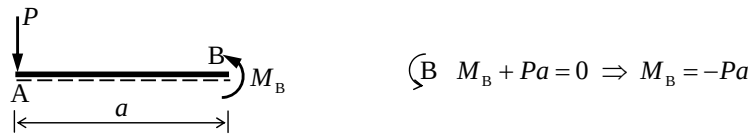
2.23 Esimerkkejä

Esimerkki 2.4: Määritetään momenttipintamenetelmällä oheisen ulokepalkin kiertymä ja taipuma päässä A.



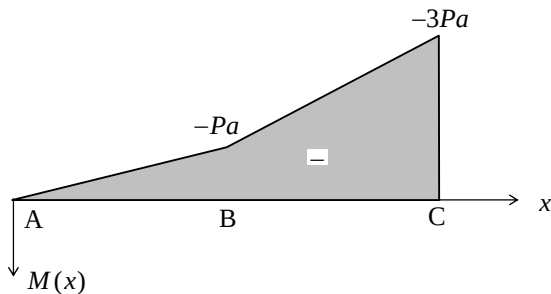
Ratkaisu:

Taivutusmomentin arvot pisteissä B ja C:

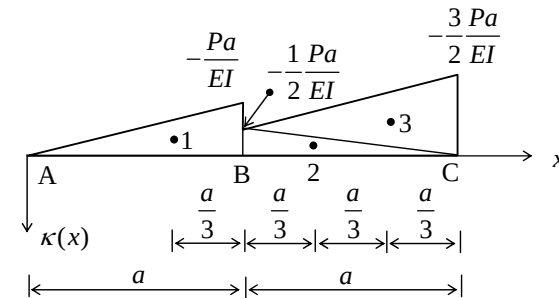
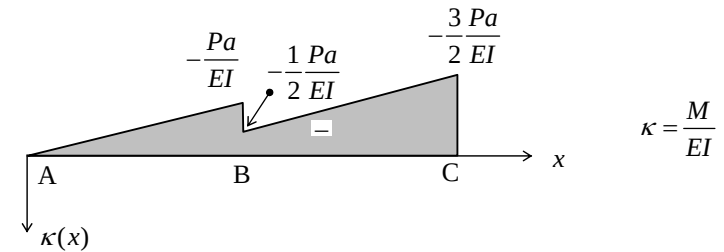


Koska palkilla ei ole jakautunutta kuormaa, jakautuu taivutusmomentti pisteiden A, B ja C välillä lineaarisesti.

M-kuvio:



κ – kuvio:



Osapintojen alat:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{Pa}{EI}\right) = -\frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{Pa}{EI}\right) = -\frac{1}{4} \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{3}{2} \frac{Pa}{EI}\right) = -\frac{3}{4} \frac{Pa^2}{EI}$$

Pisteiden A ja C välisen κ -pinnan ala ja momentti pisteen C suhteen:

$$\mathcal{A}_{AC} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = -\frac{3}{2} \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\mathcal{M}_{AC} = \mathcal{A}_1 \cdot \frac{4}{3}a + \mathcal{A}_2 \cdot \frac{2}{3}a + \mathcal{A}_3 \cdot \frac{1}{3}a = -\frac{13}{12} \frac{Pa^3}{EI}$$

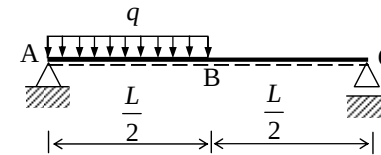
Soveltamalla momenttipintamenetelmän yhtälöitä välillä AC ja ottamalla huomioon tukiehdot, saadaan:

$$\overset{0}{\varphi}_C - \varphi_A = -\mathcal{A}_{AC} \Rightarrow \varphi_A = \mathcal{A}_{AC} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

$$\overset{0}{v}_C - v_A = \varphi_A \overbrace{(x_C - x_A)}^{2a} - \mathcal{M}_{AC} \Rightarrow v_A = -2a\varphi_A + \mathcal{M}_{AC}$$

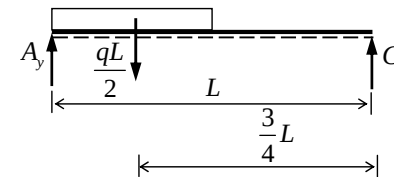
$$\Rightarrow v_A = -2a \cdot \left(-\frac{3Pa^2}{2EI}\right) + \left(-\frac{13Pa^3}{12EI}\right) = \frac{23Pa^3}{12EI}$$

Esimerkki 2.5: Määritetään momenttipintamenetelmällä oheisen palkin kiertymät pisteissä A ja C sekä taipuma pisteessä B. Palkin taivutusjäykkyys on $EI = \text{vakio}$.



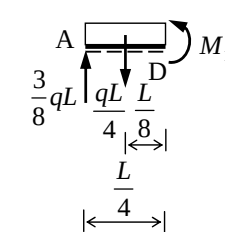
Ratkaisu:

Tukireaktio A_y :



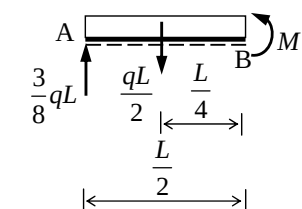
$$\curvearrowleft \quad A_y \cdot L - \frac{qL}{2} \cdot \frac{3}{2}L = 0 \Rightarrow A_y = \frac{3}{4}qL$$

Taivutusmomentin arvoja:



$$\curvearrowleft \text{D} \quad M_D - \frac{3}{8}qL \cdot \frac{L}{4} + \frac{qL}{4} \cdot \frac{L}{8} = 0$$

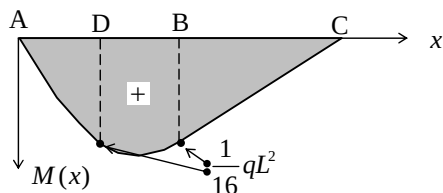
$$\Rightarrow M_D = \frac{1}{16}qL^2$$



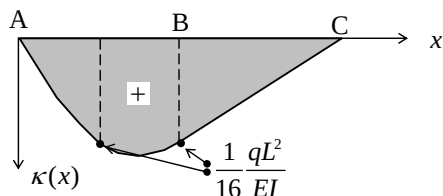
$$\curvearrowleft \text{B} \quad M_B - \frac{3}{8}qL \cdot \frac{L}{2} + \frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{1}{16}qL^2$$

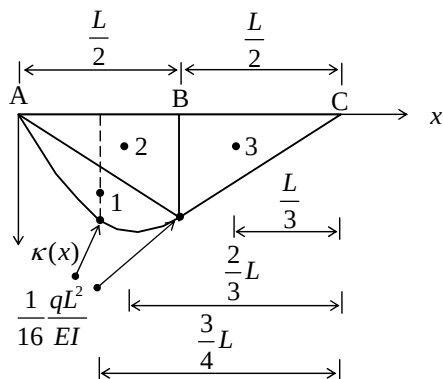
M-kuvio:



κ -kuvio:



$$\kappa = \frac{M}{EI}$$



Osapintojen alat sekä pisteiden A ja C välisen κ – pinnan ala:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{32} \frac{qL^2}{EI} = \frac{1}{96} \frac{qL^3}{EI}$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{16} \frac{qL^2}{EI} = \frac{1}{64} \frac{qL^3}{EI}$$

$$\mathcal{A}_{AC} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \frac{1}{96} \frac{qL^3}{EI} + 2 \frac{1}{64} \frac{qL^3}{EI} = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI}$$

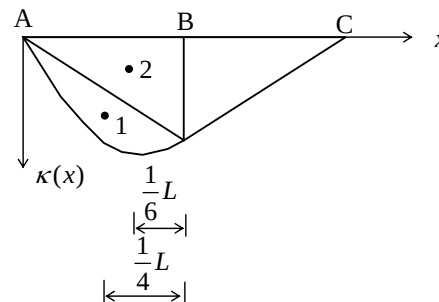
Pisteiden A ja C välisen κ -pinnan momentti pisteen C suhteen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{AC} &= \mathcal{A}_1 \cdot \frac{3}{4} L + \mathcal{A}_2 \cdot \frac{2}{3} L + \mathcal{A}_3 \cdot \frac{1}{3} L = \frac{1}{96} \frac{qL^3}{EI} \cdot \frac{3}{4} L + \frac{1}{64} \frac{qL^3}{EI} \cdot \left(\frac{2}{3} L + \frac{1}{3} L \right) \\ &= \frac{3}{128} \frac{qL^4}{EI} \end{aligned}$$

Sovelletaan momenttipintamenetelmän yhtälöitä välillä AC:

$$\frac{0}{v_C} - \frac{0}{v_A} = \varphi_A \overbrace{(x_C - x_A)}^L - \mathcal{M}_{AC} \Rightarrow \varphi_A = \frac{\mathcal{M}_{AC}}{L} = \frac{3}{128} \frac{qL^3}{EI}$$

$$\varphi_C - \varphi_A = -\mathcal{A}_{AC} \Rightarrow \varphi_C = \varphi_A - \mathcal{A}_{AC} = \frac{3}{128} \frac{qL^3}{EI} - \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI} = \frac{7}{384} \frac{qL^3}{EI}$$



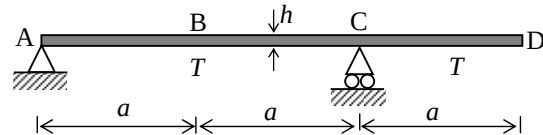
Pisteiden A ja B välisen κ -pinnan momentti pisteen B suhteen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{AB} &= \mathcal{A}_1 \cdot \frac{1}{4} L + \mathcal{A}_2 \cdot \frac{1}{6} L = \frac{1}{96} \frac{qL^3}{EI} \cdot \frac{1}{4} L + \frac{1}{64} \frac{qL^3}{EI} \cdot \frac{1}{6} L \\ &= \frac{1}{192} \frac{qL^4}{EI} \end{aligned}$$

Sovelletaan momenttipintamenetelmää välillä AB:

$$\begin{aligned} \frac{0}{v_B} - \frac{0}{v_A} &= \varphi_A \overbrace{(x_B - x_A)}^{L/2} - \mathcal{M}_{AB} \\ \Rightarrow v_B &= \frac{1}{2} \varphi_A L - \mathcal{M}_{AB} = \frac{1}{2} \frac{3}{128} \frac{qL^3}{EI} L - \frac{1}{192} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5}{768} \frac{qL^4}{EI} \end{aligned}$$

Esimerkki 2.6: Oheisen palkin alapinta saa lämpötilan muutoksen T yläpinnan lämpötilan pysyessä ennallaan. Palkin korkeus on h , taivutusjäykkyys on EI ja pituuden lämpötilakerroin on α . Määritä pisteiden B ja D taipumat.

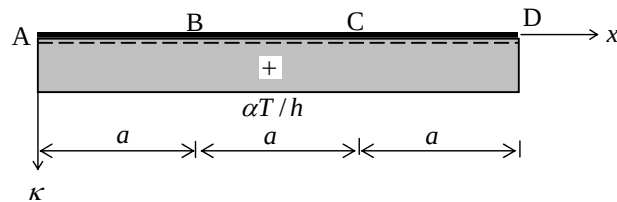


Ratkaisu:

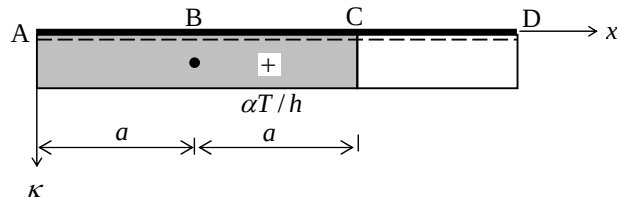
Palkin käyristymä:

$$\kappa = \frac{\alpha \Delta T}{h} = \frac{\alpha(T-0)}{h} = \frac{\alpha T}{h}$$

κ -kuvio:



Tukiväli AC:



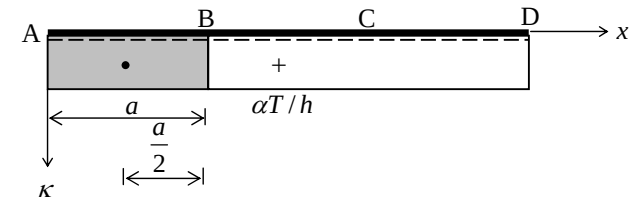
$$\mathcal{A}_{AC} = 2a \cdot \frac{\alpha T}{h} = \frac{2\alpha Ta}{h}, \quad \mathcal{M}_{AC} = \mathcal{A}_{AC} \cdot a = \frac{2\alpha Ta^2}{h}$$

Sovelletaan momenttimenetelmän yhtälöitä välillä AC ja huomioidaan tukiehdot:

$$\begin{aligned} \overbrace{v_C}^0 - \overbrace{v_A}^0 &= \varphi_A \overbrace{(x_C - x_A)}^{2a} - \mathcal{M}_{AC} \Rightarrow \varphi_A = \frac{\mathcal{M}_{AC}}{2a} = \frac{\alpha Ta}{h} \\ \varphi_C - \varphi_A &= -\mathcal{A}_{AC} \Rightarrow \varphi_C = \varphi_A - \mathcal{A}_{AC} = \frac{\alpha Ta}{h} - 2 \frac{\alpha Ta}{h} = -\frac{\alpha Ta}{h} \end{aligned}$$

Saatiin siis tukien A ja C kiertymät.

Väli AB:

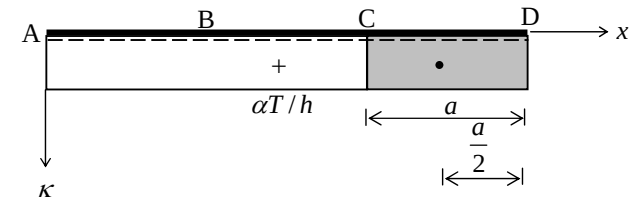


$$\mathcal{A}_{AB} = a \cdot \frac{\alpha T}{h} = \frac{\alpha Ta}{h}, \quad \mathcal{M}_{AB} = \mathcal{A}_{AB} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\alpha Ta^2}{2h}$$

Sovelletaan momenttipintamenetelmän yhtälöä välillä AB ja huomioidaan tukiehdot:

$$\overbrace{v_B}^0 - \overbrace{v_A}^0 = \varphi_A \overbrace{(x_B - x_A)}^a - \mathcal{M}_{AB} \Rightarrow v_B = \varphi_A a - \mathcal{M}_{AB} = \frac{\alpha Ta}{h} \cdot a - \frac{\alpha Ta^2}{2h} = \frac{\alpha Ta^2}{2h}$$

Väli CD:



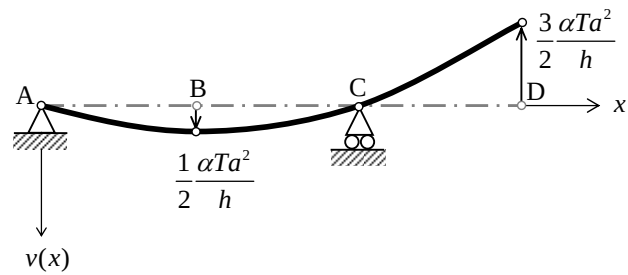
$$\mathcal{A}_{CD} = a \cdot \frac{\alpha T}{h} = \frac{\alpha Ta}{h}, \quad \mathcal{M}_{CD} = \mathcal{A}_{CD} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\alpha Ta^2}{2h}$$

Sovelletaan momenttipintamenetelmän yhtälöä välillä CD ja huomioidaan tukiehdot:

$$v_D - \overbrace{v_C}^0 = \varphi_C \overbrace{(x_D - x_C)}^a - \mathcal{M}_{CD} \Rightarrow v_D = \varphi_C a - \mathcal{M}_{CD} = -\frac{\alpha T a}{h} \cdot a - \frac{\alpha T a^2}{2h}$$

$$\Rightarrow v_D = -\frac{3 \alpha T a^2}{2 h}$$

Palkin taipuma:



3. Staattisesti määräämättömien rakenteiden statiikan perusteita

3.1 Johdanto

Seuraavassa tarkastellaan staattisesti määräämättömien rakenteiden ratkaisemista käyttäen ns. **voimamenetelmää**. Voimamenetelmässä **tuntemattomina** ovat **yleistetyt voimat** (voimat, momentit, jne.) ja **yhtälöt** tuntemattomien määrittämiseksi saadaan soveltamalla ns. **yhteensopivuusehtoja**, jotka estävät vastaavien **yleistettyjen siirtymien** (siirtymät, kiertymät, jne.) tapahtumisen. Koska tässä kurssissa ei käsitellä rakenteiden mekaniikan energiaperiaatteita ja niihin perustuvaa ns. yksikkövoimamenetelmää rakenteiden yleistettyjen siirtymien määrittämiseksi, tarkastelumme rajoittuu tässä ristikoihin ja palkkeihin. Tämä rajoitus ei kuitenkaan estä meitä käsittelemästä voimamenetelmän periaatteita ja sen soveltamista eräisiin rakennustekniikassa kaikkein yleisimmin esiintyviin staattisesti määräämättömiin rakenteisiin.

3.2 Staattisesti määrätty perusmuoto ja staattisesti määräämättömät suureet

Staattisesti määräämättömän rakenteen ns. **staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM)** saadaan alkuperäisestä rakenteesta esimerkiksi seuraavasti:

- **Poistetaan** rakenteesta (yksiarvoisia) **tukia**, kunnes rakenteesta tulee staattisesti määrätty, ja varustetaan tuet **tukiraeaktioilla**, jotka estävät vastaavien yleistettyjen siirtymien syntymisen tuilla.
- **Lisätään** rakenteeseen **liitoksia** (tavallisimmin niveliä), kunnes siitä tulee staattisesti määrätty, ja varustetaan liitokset **rajoitevoimilla**, jotka estävät vastaavien yleistettyjen siirtymien syntymisen liitoksissa.

Mainitut tukireaktiot tai rajoitevoimat ovat probleeman **tuntemattomat** suureet, ja niitä kutsutaan **staattisesti määräämättömiksi suureiksi**. Jotta ne erottuisivat muista vastaavista suureista, niille käytetään usein erityistä merkintätapaa. Varsin yleinen käytäntö on merkitä staattisesti määräämättömiä suureita tehtävässä, jonka staattisen määräämättömyyden kertaluku on n_s , symboleilla X_i , $i=1, \dots, n_s$. (Jos $n_s=1$ alaindeksi 1 voidaan jättää pois.)

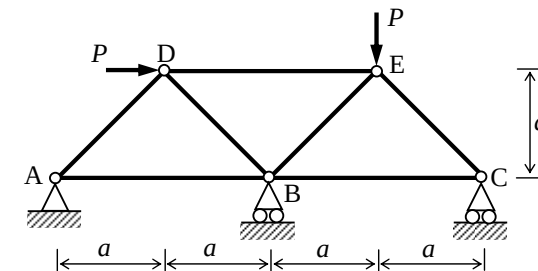
Yhtälöt staattisesti määräämättömien suureiden ratkaisemiseksi saadaan määrittämällä niitä vastaavien yleistettyjen siirtymien lausekkeet

(staattisesti määräämättömien suureiden X_i funktiona) ja kirjoittamalla niille asianomaiset **yhteensopivuusehdot**.

3.3 Staattisesti määräämätön ristikko

Tarkastellaan staattisesti määräämättömän ristikon ratkaisemista seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 3.1: Määritetään oheisen staattisesti määräämättömän tasoristikon sauvavoimat. Vaakasuorien sauvojen aksiaalijäykkyys on EA ja kaltevien $EA/\sqrt{2}$.



Ratkaisu:

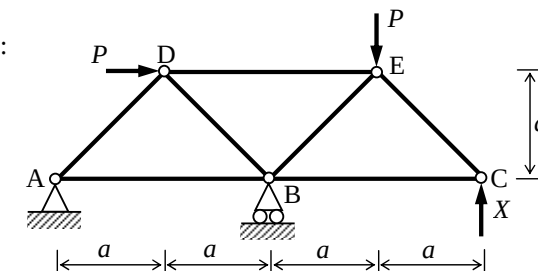
Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$$n_s = t + s - 2k = 4 + 7 - 2 \cdot 5 = 1 \Rightarrow \text{Staattisesti määräämätön}$$

Staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM):

Ajatellaan tuki C poistetuksi, ja otetaan staattisesti määräämättömäksi suureeksi tukireaktio B_y , eli $X = C_y$.

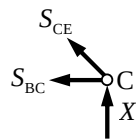
SMPM:



Nyt tulisi määrittää tuntemattoman voiman X suuruus siten, että rakenne ei irtoa tuesta C. Toisin sanoen rakenteen pystysiirtymän tuella C tulisi hävitä, eli $v_C = 0$. Tämä ehtoa kutsutaan rakenteen yhteensopivuusehdoksi tuella C. Kun voima X on määritetty, SMPM on staattisesti määrätty rakenne, johon vaikuttaa tunnettu kuormitus. Näin alkuperäinen staattisesti määräämätön rakenne on saatu palautetuksi staattisesti määrättyksi. Jotta voisimme muodostaa yhteensopivuusehdon, joudumme ratkaisemaan SMPM:n nivelen C pystysiirtymän, pitäen ratkaisussa staattisesti määräämätöntä suuretta X parametrina. Sitä varten joudumme ristikon tapauksessa ensin määrittämään sauvavoimat ja sen jälkeen siirtymän v_C .

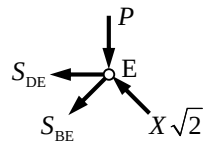
SMPM:n sauvavoimat:

Määritetään sauvavoimat pitäen staattisesti määräämätöntä suuretta X parametrina. Lähdetään liikkeelle nivelestä C.



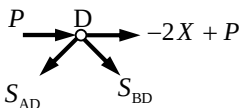
$$\uparrow \frac{S_{CE}}{\sqrt{2}} + X = 0 \Rightarrow S_{CE} = -X\sqrt{2}$$

$$\leftarrow \frac{S_{CE}}{\sqrt{2}} + S_{BC} = 0 \Rightarrow S_{BC} = -\frac{S_{CE}}{\sqrt{2}} = X$$



$$\downarrow P + \frac{S_{BE}}{\sqrt{2}} - \frac{X\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_{BE} = (X - P)\sqrt{2}$$

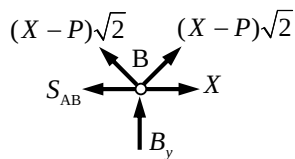
$$\leftarrow S_{DE} + \frac{S_{BE}}{\sqrt{2}} + \frac{X\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_{DE} = -2X + P$$



$$\downarrow \frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} + \frac{S_{BD}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_{AD} = -S_{BD}$$

$$\rightarrow -\frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} + \frac{S_{BD}}{\sqrt{2}} + P - 2X + P = 0$$

$$\Rightarrow S_{BD} = (X - P)\sqrt{2}, S_{AD} = -(X - P)\sqrt{2}$$

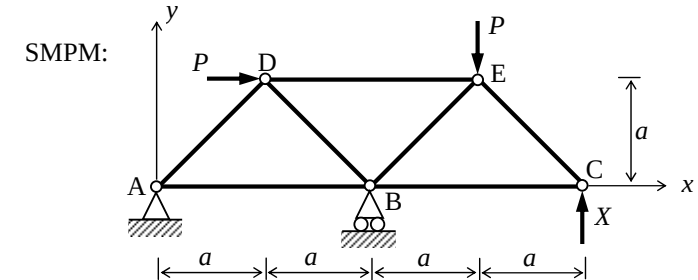


$$\rightarrow -S_{AB} + X - \frac{(X - P)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{(X - P)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow S_{AB} = X$$

Kun sauvavoimat parametrin X avulla lausuttuina tunnetaan, määritetään ristikon nivelen C pystysiirtymä v_C kaavaan (2.8) perustuvalla menettelyllä. Menettely antaa sivutuotteena myös muiden nivelten siirtymät¹.

Sauvojen pituudet, sauvavoimat ja venymät:



Sauva	$x_j - x_i$	$y_j - y_i$	L_{ij}	S_{ij}	ε_{ij}
AB	$2a$	0	$2a$	X	X / EA
AD	a	a	$a\sqrt{2}$	$-(X - P)\sqrt{2}$	$-2(X - P) / EA$
DB	a	$-a$	$a\sqrt{2}$	$(X - P)\sqrt{2}$	$2(X - P) / EA$
BE	a	a	$a\sqrt{2}$	$(X - P)\sqrt{2}$	$2(X - P) / EA$
DE	$2a$	0	$2a$	$-2X + P$	$(-2X + P) / EA$
BC	$2a$	0	$2a$	X	X / EA
EC	a	$-a$	$a\sqrt{2}$	$-X\sqrt{2}$	$-2X / EA$

Nivelten siirtymät:

Yhtälö:

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2$$

¹ Ns. yksikkövoimamenetelmällä, jota tarkastellaan Rakenteiden mekaniikka I kurssissa, voidaan ristikon nivelen yksittäinen siirtymäkomponentti ratkaista jonkin verran pienemmällä työllä.

Sauvat AB, AD ja DB:

$$\begin{cases} 2a(u_B - \overset{0}{u_A}) + 0(v_B - \overset{0}{v_A}) = X \frac{(2a)^2}{EA} \\ a(u_D - \overset{0}{u_A}) + a(v_D - \overset{0}{v_A}) = -2(X - P) \frac{(a\sqrt{2})^2}{EA} \\ a(u_B - u_D) - a(\overset{0}{v_B} - v_D) = 2(X - P) \frac{(a\sqrt{2})^2}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_B = \frac{a}{EA} 2X \\ u_D = \frac{a}{EA} (-3X + 4P) \\ v_D = -\frac{a}{EA} X \end{cases}$$

Sauvat BE ja DE:

$$\begin{cases} a(u_E - \overset{\frac{a}{EA} 2X}{u_B}) + a(v_E - \overset{0}{v_B}) = 2(X - P) \frac{(a\sqrt{2})^2}{EA} \\ 2a(u_E - \overset{\frac{a}{EA} (-3X + 4P)}{u_D}) + 0 \cdot (v_E - \overset{-\frac{a}{EA} X}{v_D}) = (-2X + P) \frac{(2a)^2}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_E = \frac{a}{EA} (-7X + 6P) \\ v_E = \frac{a}{EA} (13X - 10P) \end{cases}$$

Sauvat BC ja EC:

$$\begin{cases} 2a(u_C - \overset{\frac{a}{EA} 2X}{u_B}) + 0(v_C - \overset{0}{v_B}) = X \frac{(2a)^2}{EA} \\ a(u_C - \overset{\frac{a}{EA} (-7X + 6P)}{u_E}) - a(v_C - \overset{\frac{a}{EA} (13X - 10P)}{v_E}) = -2X \frac{(a\sqrt{2})^2}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_C = \frac{a}{EA} 4X \\ v_C = \frac{a}{EA} (28X - 16P) \end{cases}$$

Näin saatiin nivelen C siirtymä.

Yhteensopivuusehto:

$$v_C = 0 \Rightarrow \frac{a}{EA} (28X - 16P) \Rightarrow \underline{X = \frac{4}{7}P}$$

Sauvavoimat:

Koska sauvavoimat oli jo laskettu staattisesti määräämättömän suureen X funktiona, ja esitetty edellä esitetyssä taulukossa, saadaan lopulliset sauvavoimat helposti.

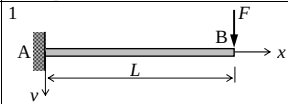
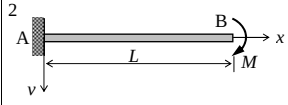
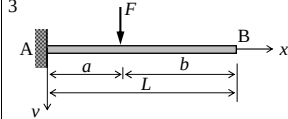
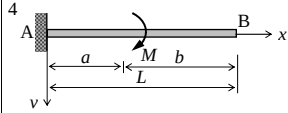
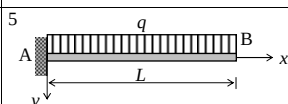
Sauva	S_{ij}
AB	$4P/7 \approx 0,571P$
AD	$3P\sqrt{2}/7 \approx 0,606P$
DB	$-3P\sqrt{2}/7 \approx -0,606P$
BE	$-3P\sqrt{2}/7 \approx -0,606P$
DE	$-P/7 \approx -0,143P$
BC	$4P/7 \approx 0,571P$
EC	$-4P\sqrt{2}/7 \approx -0,808P$

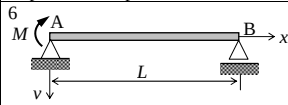
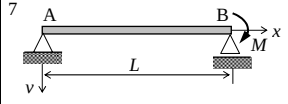
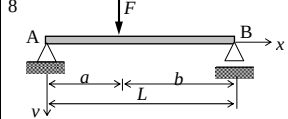
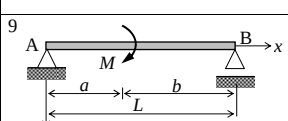
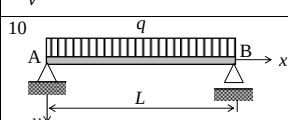
Nivelten siirtymät:

Haluttaessa ristikon nivelten siirtymät voidaan määrittää vastaavaan tapaan.

Nivel	u_i	v_i
A	0	0
B	$\frac{8}{7} \frac{Pa}{EA} \approx 1,14 \frac{Pa}{EA}$	0
C	$\frac{16}{7} \frac{Pa}{EA} \approx 2,29 \frac{Pa}{EA}$	0
D	$\frac{16}{7} \frac{Pa}{EA} \approx 2,29 \frac{Pa}{EA}$	$-\frac{4}{7} \frac{Pa}{EA} \approx -0,57 \frac{Pa}{EA}$
E	$2 \frac{Pa}{EA}$	$-\frac{18}{7} \frac{Pa}{EA} \approx -2,57 \frac{Pa}{EA}$

Taulukko 3.1: Uloke- ja vapaasti tuetun palkin taipumia ja kiertymiä

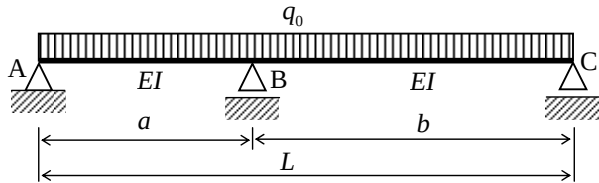
Ulokepalkki	Taipuma	Taipuma ja kiertymä päässä B
1 	$v(x) = \frac{F}{6EI} (3Lx^2 - x^3)$	$v_B = \frac{FL^3}{3EI}$ $\varphi_B = \frac{FL^2}{2EI}$
2 	$v(x) = \frac{M}{2EI} x^2$	$v_B = \frac{ML^2}{2EI}$ $\varphi_B = \frac{ML}{EI}$
3 	$v(x) = \frac{F}{6EI} (3ax^2 - x^3 + \langle x-a \rangle^3)$ $v(a) = \frac{Fa^3}{3EI}$	$v_B = \frac{Fa^3}{6EI} (3\frac{L}{a} - 1)$ $\varphi_B = \frac{Fa^2}{2EI}$
4 	$v(x) = \frac{M}{2EI} (x^2 - \langle x-a \rangle^2)$	$v_B = \frac{Ma}{2EI} (2L - a)$ $\varphi_B = \frac{Ma}{EI}$
5 	$v(x) = \frac{qL^4}{24EI} [6(\frac{x}{L})^2 - 4(\frac{x}{L})^3 + (\frac{x}{L})^4]$	$v_B = \frac{qL^4}{8EI}$ $\varphi_B = \frac{qL^3}{6EI}$

Vapaasti tuettu palkki	Taipuma	Kiertymät tuilla
6 	$v(x) = \frac{ML^2}{6EI} [2\frac{x}{L} + (\frac{x}{L})^3 - 3(\frac{x}{L})^2]$	$\varphi_A = \frac{ML}{3EI}$ $\varphi_B = -\frac{ML}{6EI}$
7 	$v(x) = \frac{ML^2}{6EI} [-\frac{x}{L} + (\frac{x}{L})^3]$	$\varphi_A = -\frac{ML}{6EI}$ $\varphi_B = \frac{ML}{3EI}$
8 	$v(x) = \frac{FL^2}{6EI} [\frac{ab}{L^2} (L+b)\frac{x}{L} - b(\frac{x}{L})^3 + \frac{\langle x-a \rangle^3}{L^2}]$ $v(a) = \frac{Fa^2b^2}{3LEI}$	$\varphi_A = \frac{Fab(L+b)}{6LEI}$ $\varphi_B = -\frac{Fab(L+a)}{6LEI}$
9 	$v(x) = \frac{ML^2}{6EI} [(3\frac{b^2}{L^2} - 1)\frac{x}{L} + (\frac{x}{L})^3 - \frac{3}{L^2} \langle x-a \rangle^2]$ $v(a) = -\frac{Mab(b-a)}{3LEI}$	$\varphi_A = \frac{ML}{6EI} (3\frac{b^2}{L^2} - 1)$ $\varphi_B = \frac{ML}{6EI} (3\frac{a^2}{L^2} - 1)$
10 	$v(x) = \frac{qL^4}{24EI} [\frac{x}{L} - 2(\frac{x}{L})^3 + (\frac{x}{L})^4]$ $v(\frac{L}{2}) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$	$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{qL^3}{24EI}$

3.4 Staattisesti määräämätön palkki

Staattisesti määräämättömän palkin ratkaisemista tarkastellaan seuraavien esimerkkien avulla. Niissä käytetään apuna taulukkoa 3.1, jossa on esitetty tuloksia ulokepalkin ja vapaasti tuetun palkin taipumille ja kiertymille. Taulukkojen käyttö nopeuttaa laskelmia ja auttaa siten keskittymään ratkaisun keskeiseen problematiikkaan.

Esimerkki 3.2: Määritetään lauseke oheisen kaksiaukkoisen, tasajäykän, tasaisen kuorman kuormittaman palkin taivutusmomentille keskituen B kohdalla.



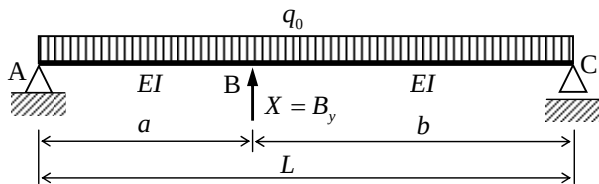
Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$$n_s = t - c - 3 = 4 - 0 - 3 = 1$$

(a) Ajatellaan tuki B poistetuksi ja valitaan staattisesti määräämättömäksi suureeksi tukireaktio B_y , joka estää palkin taipuman pisteessä B:

Staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM):



Pisteen B taipuma:

Tasaisesta kuormasta q_0 (Taulukko 3.1, kohta 10):

$$v_{B0} = v(a) = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\frac{a}{L} - 2\left(\frac{a}{L}\right)^3 - \left(\frac{a}{L}\right)^4 \right] = \frac{q_0 ab}{24EI} (a^2 + b^2 + 3ab)$$

(Välivaiheet, kuinka saadaan lausekkeen oikean puoleinen muoto, joka on tässä käyttökelpoisempi, sivuutetaan.)

Pistekuormasta X (Taulukko 3.1, kohta 8):

$$v_{B1} = v(a) = \frac{-Xa^2b^2}{3LEI}$$

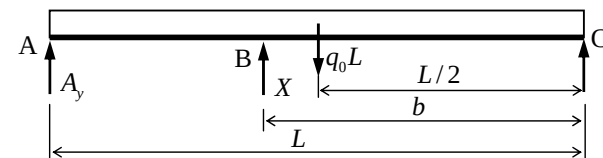
Soveltamalla superpositioperiaatetta saadaan:

$$v_B = v_{B0} + v_{B1} = \frac{q_0 ab}{24EI} (a^2 + b^2 + 3ab) - \frac{a^2b^2}{3LEI} X$$

Staattisesti määräämättömän suureen X ratkaiseminen yhteensopivuusehdosta:

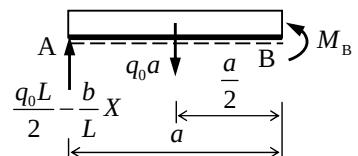
$$v_B = 0 \Leftrightarrow \frac{q_0 ab}{24EI} (a^2 + b^2 + 3ab) - \frac{a^2b^2}{3LEI} X \Rightarrow X = \frac{q_0 L}{8ab} (a^2 + b^2 + 3ab)$$

Tukireaktio pisteessä A:



$$\sum \zeta A_y \cdot L + X \cdot b - q_0 L \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{q_0 L}{2} - \frac{b}{L} X$$

Taivutusmomentti pisteessä B:



$$\sum \bar{M}_B = M_B + q_0 a \cdot \frac{a}{2} - \left(\frac{q_0 L}{2} - \frac{b}{L} X \right) a = 0$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{q_0 ab}{2} - \frac{ab}{L} X$$

Saadaan

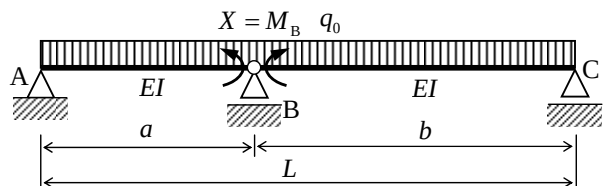
$$M_B = \frac{q_0 ab}{2} - \frac{ab}{L} X = \frac{q_0 ab}{2} - \frac{ab}{L} \frac{q_0 L}{8ab} (a^2 + b^2 + 3ab) = -\frac{q_0}{8} (a^2 - ab + b^2)$$

$$= -\frac{q_0}{8} (a^2 + b^2 - ab) = -\frac{q_0 (a^3 + b^3)}{8(a+b)} = -\frac{q_0 (a^3 + b^3)}{8L}$$

Käytettiin yhteyttä: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

(b) Ajatellaan tuelle B nivel ja valitaan staattisesti määräämättömäksi suureeksi taivutusmomentti M_B , joka pakottaa kiertymät nivelen vasemmalla ja oikealla puolella yhtäsuuriksi.

Staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM):



Huom: Kuvassa vasemman ja oikean puoleinen taivutusmomenttinuoli kohdistuvat vastaavasti nivelen vasemman ja oikean puoleiseen palkkin osaan.

Pisteen B kiertymät palkin osissa:

Tasaisesta kuormasta q_0 (Taulukko 3.1, kohta 10):

$$\varphi_{B0}^{\text{vas}} = -\frac{q_0 a^3}{24EI}, \quad \varphi_{B0}^{\text{oik}} = \frac{q_0 b^3}{24EI}$$

Momentista X (Taulukko 3.1, kohdat 7 ja 6):

$$\varphi_{B1}^{\text{vas}} = \frac{(-X)a}{3EI}, \quad \varphi_{B1}^{\text{oik}} = \frac{Xb}{3EI}$$

Soveltamalla superpositioperiaatetta saadaan:

$$\varphi_B^{\text{vas}} = \varphi_{B0}^{\text{vas}} + \varphi_{B1}^{\text{vas}} = -\frac{q_0 a^3}{24EI} - \frac{a}{3EI} X, \quad \varphi_B^{\text{oik}} = \varphi_{B0}^{\text{oik}} + \varphi_{B1}^{\text{oik}} = \frac{q_0 b^3}{24EI} + \frac{b}{3EI} X$$

Staattisesti määräämättömän suureen X ratkaiseminen yhteensopivuusehdosta:

$$\varphi_B^{\text{vas}} = \varphi_B^{\text{oik}} \Leftrightarrow -\frac{q_0 a^3}{24EI} - \frac{a}{3EI} X = \frac{q_0 b^3}{24EI} + \frac{b}{3EI} X$$

$$\Rightarrow X = -\frac{q_0 (a^3 + b^3)}{8(a+b)} = -\frac{q_0 (a^3 + b^3)}{8L}$$

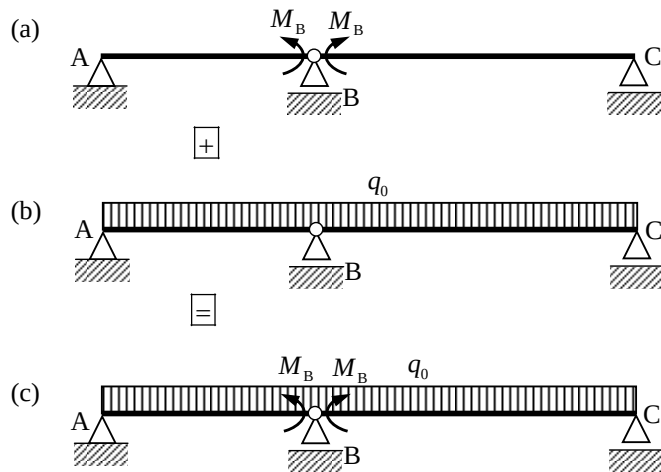
Taivutusmomentti pisteessä B:

$$M_B = X = -\frac{q_0 (a^3 + b^3)}{8L}$$

Määritetään lopuksi taivutusmomenttikuvio, kun $a = 0,4L$ ja $b = 0,6L$:

$$M_B = -\frac{q_0 (a^3 + b^3)}{8L} = -\frac{q_0 (0,4^3 + 0,6^3)L^3}{8L} = -0,035q_0 L^2$$

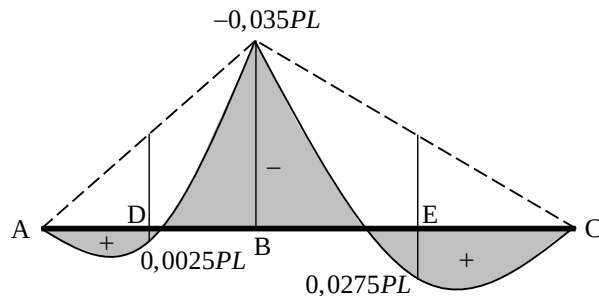
Huomautus: Kun taivutusmomenttien arvot tuilla A, B ja C tunnetaan (tässä tapauksessa $M_A = M_C = 0$), saadaan palkin (seuraavan sivun kuva (c)) taivutusmomenttijakautuma $M(x)$ mukavimmin ajattelemalla sen muodostuvan superpositioperiaatteen mukaan seuraavan sivun kuvien (a) ja (b) taivutusmomenttien summasta. Palkin osat kuissa (a) ja (b) ovat kaksitukisia vapaasti tuettuja palkkeja. Tapauksessa (a) palkin osien taivutusmomentit ovat lineaarisia tukiarvojen M_A , M_B ja M_C välillä. Tapauksessa (b) palkin osien taivutusmomentit ovat kaksitukisen vapaasti tuetun tasaisen kuorman kuormittaman palkin taivutusmomentit, jotka on helppo määrittää.



Taivutusmomenttikuvion piirtämistä varten ne määritetään tässä vain välien keskipisteissä D ja E²:

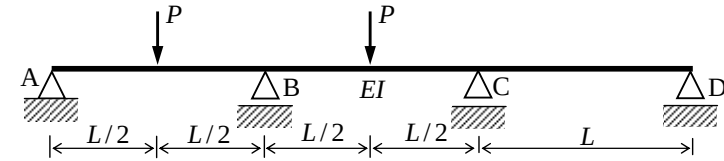
$$M_D = \frac{q_0(0,4L)^2}{8} + \frac{M_B}{2} = 0,02PL - 0,0175PL = 0,0025PL$$

$$M_E = \frac{q_0(0,6L)^2}{8} + \frac{M_B}{2} = 0,045PL - 0,0175PL = 0,0275PL$$



² Kaksitukisen vapaasti tuetun tasaisen kuorman q kuormittaman palkin taivutusmomentin arvo palkin keskipisteessä on $M = qL^2/8$, missä L on palkin pituus.

Esimerkki 3.3: Määritetään oheisen kolmiaukkoisen tasajäykän jatkuvan palkin taivutusmomenttikuvio.



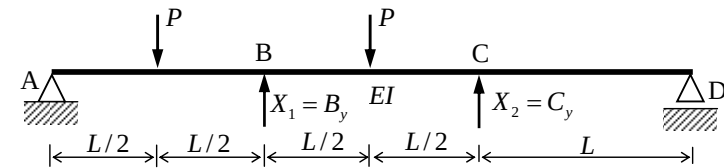
Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$$n_s = t - c - 3 = 5 - 0 - 3 = 2$$

(a) Ajatellaan tuet B ja C poistetuiksi ja valitaan staattisesti määräämättömiksi suureiksi tukireaktiot B_y ja C_y , joka estävät palkin taipumat pisteissä B ja C:

Staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM):



Pisteiden B ja C taipumat: (Taulukko 3.1, kohta 8):

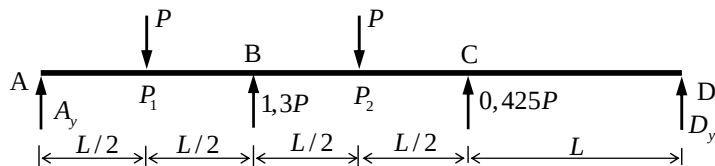
$$\begin{aligned} v_B = v(L) &= \frac{P(3L)^2}{6EI} \left[\frac{L/2 \cdot 5L/2}{(3L)^2} (3L + \frac{5L}{2}) \frac{L}{3L} - \frac{5L}{2} \left(\frac{L}{3L} \right)^3 + \frac{(L/2)^3}{(3L)^2} \right] \\ &+ \frac{P(3L)^2}{6EI} \left[\frac{3L/2 \cdot 3L/2}{(3L)^2} (3L + \frac{3L}{2}) \frac{L}{3L} - \frac{3L}{2} \left(\frac{L}{3L} \right)^3 \right] \\ &+ \frac{(-X_1)(3L)^2}{6EI} \left[\frac{L \cdot 2L}{(3L)^2} (3L + 2L) \frac{L}{3L} - 2L \left(\frac{L}{3L} \right)^3 \right] \\ &+ \frac{(-X_2)(3L)^2}{6EI} \left[\frac{2L \cdot L}{(3L)^2} (3L + L) \frac{L}{3L} - L \left(\frac{L}{3L} \right)^3 \right] \\ &= \frac{107 PL^3}{144 EI} - \frac{4 L^3}{9 EI} X_1 - \frac{7 L^3}{18 EI} X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_C = v(2L) &= \frac{P(3L)^2}{6EI} \left[\frac{L/2 \cdot 5L/2}{(3L)^2} (3L + \frac{5L}{2}) \frac{2L}{3L} - \frac{5L}{2} \left(\frac{2L}{3L} \right)^3 + \frac{(3L/2)^3}{(3L)^2} \right] \\
 &+ \frac{P(3L)^2}{6EI} \left[\frac{3L/2 \cdot 3L/2}{(3L)^2} (3L + \frac{3L}{2}) \frac{2L}{3L} - \frac{3L}{2} \left(\frac{2L}{3L} \right)^3 + \frac{(L/2)^3}{(3L)^2} \right] \\
 &+ \frac{(-X_1)(3L)^2}{6EI} \left[\frac{L \cdot 2L}{(3L)^2} (3L + 2L) \frac{2L}{3L} - 2L \left(\frac{2L}{3L} \right)^3 + \frac{L^3}{(3L)^2} \right] \\
 &+ \frac{(-X_2)(3L)^2}{6EI} \left[\frac{2L \cdot L}{(3L)^2} (3L + L) \frac{2L}{3L} - L \left(\frac{2L}{3L} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{25 PL^3}{36 EI} - \frac{7 L^3}{18 EI} X_1 - \frac{4 L^3}{9 EI} X_2
 \end{aligned}$$

Yhteensopivuusehdot, yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{aligned}
 v_B = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{107 PL^3}{144 EI} - \frac{4 L^3}{9 EI} X_1 - \frac{7 L^3}{18 EI} X_2 &= 0 \\ \frac{25 PL^3}{36 EI} - \frac{7 L^3}{18 EI} X_1 - \frac{4 L^3}{9 EI} X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{9} X_1 + \frac{7}{18} X_2 &= \frac{107}{144} P \\ \frac{7}{18} X_1 + \frac{4}{9} X_2 &= \frac{25}{36} P \end{aligned} \right. \\
 v_C = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{107 PL^3}{144 EI} - \frac{4 L^3}{9 EI} X_1 - \frac{7 L^3}{18 EI} X_2 &= 0 \\ \frac{25 PL^3}{36 EI} - \frac{7 L^3}{18 EI} X_1 - \frac{4 L^3}{9 EI} X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 8X_1 + 7X_2 &= \frac{107}{8} P \\ 7X_1 + 8X_2 &= \frac{25}{2} P \end{aligned} \right. \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{P}{8} \begin{Bmatrix} 107 \\ 100 \end{Bmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8^2 - 7^2} \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \frac{P}{8} \begin{Bmatrix} 107 \\ 100 \end{Bmatrix} = \frac{P}{40} \begin{Bmatrix} 52 \\ 17 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,3P \\ 0,425P \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tukireaktiot:



$$\begin{aligned}
 \sum \mathcal{D} \quad A_y \cdot 3L - P \cdot \frac{5}{2}L + 1,3P \cdot 2L - P \cdot \frac{3}{2}L + 0,425P \cdot L &= 0 \Rightarrow A_y = \underline{0,325P} \\
 \sum \mathcal{A} \quad D_y \cdot 3L + 0,425 \cdot 2L - P \cdot \frac{3}{2}L + 1,3P \cdot L - P \cdot \frac{1}{2}L &= 0 \Rightarrow D_y = \underline{-0,05P}
 \end{aligned}$$

Taivutusmomentin arvot pistekuormien kohdalla:

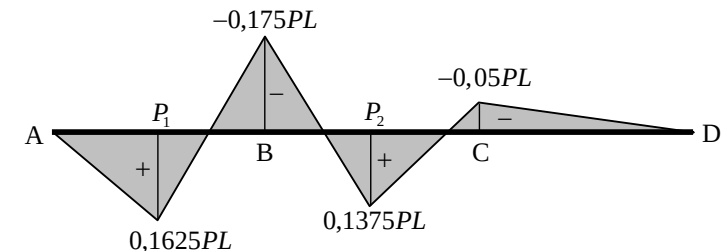
$$\begin{aligned}
 \sum \mathcal{P}_1 \quad M_{P_1} - 0,325P \cdot \frac{L}{2} &= 0 \\
 \Rightarrow M_{P_1} &= \underline{0,1625PL}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum \mathcal{B} \quad M_B + P \cdot \frac{L}{2} - 0,325 \cdot L &= 0 \\
 \Rightarrow M_B &= \underline{-0,175PL}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum \mathcal{P}_2 \quad M_{P_2} - 0,425P \cdot L/2 + 0,05P \cdot \frac{3}{2}L &= 0 \\
 \Rightarrow M_{P_2} &= \underline{0,1375PL}
 \end{aligned}$$

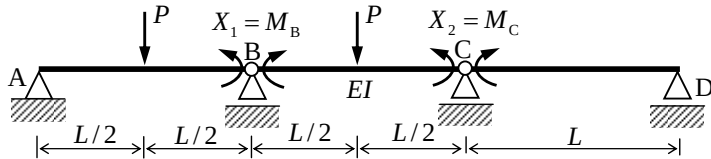
$$\begin{aligned}
 \sum \mathcal{C} \quad M_C + 0,05P \cdot L &= 0 \\
 \Rightarrow M_C &= \underline{-0,05PL}
 \end{aligned}$$

Taivutusmomenttikuvio:



(b) Ajatellaan tuille B ja C nivelet ja valitaan staattisesti määräämättömiksi suureiksi taivutusmomentit M_B ja M_C , joka pakottavat kiertymät nivelten vasemmalla ja oikealla puolella yhtäsuuriksi.

Staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM):



Pisteiden B ja C kiertymät palkin osissa:

Ulkoisesta kuormasta (Taulukko 3.1, kohta 8):

$$\varphi_{B0}^{\text{vas}} = -\frac{P \frac{L}{2} \frac{L}{2} (L + \frac{L}{2})}{6LEI} = -\frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI}, \quad \varphi_{B0}^{\text{oik}} = \frac{P \frac{L}{2} \frac{L}{2} (L + \frac{L}{2})}{6LEI} = \frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI}$$

$$\varphi_{C0}^{\text{vas}} = -\frac{P \frac{L}{2} \frac{L}{2} (L + \frac{L}{2})}{6LEI} = -\frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI}, \quad \varphi_{C0}^{\text{oik}} = 0$$

Momentista X_1 (Taulukko 3.1, kohdat 6 ja 7):

$$\varphi_{B1}^{\text{vas}} = \frac{(-X_1)L}{3EI} = -\frac{X_1 L}{3EI}, \quad \varphi_{B1}^{\text{oik}} = \frac{X_1 L}{3EI}, \quad \varphi_{C1}^{\text{vas}} = -\frac{X_1 L}{6EI}, \quad \varphi_{C1}^{\text{oik}} = 0$$

Momentista X_2 (Taulukko 3.1, kohdat 6 ja 7):

$$\varphi_{B2}^{\text{vas}} = 0, \quad \varphi_{B2}^{\text{oik}} = -\frac{X_2 L}{6EI} = \frac{X_2 L}{6EI}, \quad \varphi_{C2}^{\text{vas}} = -\frac{X_2 L}{3EI} = -\frac{X_2 L}{3EI}, \quad \varphi_{C2}^{\text{oik}} = \frac{X_2 L}{3EI}$$

Soveltamalla superpositioperiaatetta saadaan:

$$\varphi_B^{\text{vas}} = \varphi_{B0}^{\text{vas}} + \varphi_{B1}^{\text{vas}} + \varphi_{B2}^{\text{vas}} = -\frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI} - \frac{L}{3EI} X_1$$

$$\varphi_B^{\text{oik}} = \varphi_{B0}^{\text{oik}} + \varphi_{B1}^{\text{oik}} + \varphi_{B2}^{\text{oik}} = \frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI} + \frac{L}{3EI} X_1 + \frac{L}{6EI} X_2$$

$$\varphi_C^{\text{vas}} = \varphi_{C0}^{\text{vas}} + \varphi_{C1}^{\text{vas}} + \varphi_{C2}^{\text{vas}} = -\frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI} - \frac{L}{6EI} X_1 - \frac{L}{3EI} X_2$$

$$\varphi_C^{\text{oik}} = \varphi_{C0}^{\text{oik}} + \varphi_{C1}^{\text{oik}} + \varphi_{C2}^{\text{oik}} = \frac{L}{3EI} X_2$$

Yhteensopivuusehdot, yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\varphi_B^{\text{vas}} = \varphi_B^{\text{oik}} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI} - \frac{L}{3EI} X_1 = \frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI} + \frac{L}{3EI} X_1 + \frac{L}{6EI} X_2$$

$$\varphi_C^{\text{vas}} = \varphi_C^{\text{oik}} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} \frac{PL^2}{EI} - \frac{L}{6EI} X_1 - \frac{L}{3EI} X_2 = \frac{L}{3EI} X_2$$

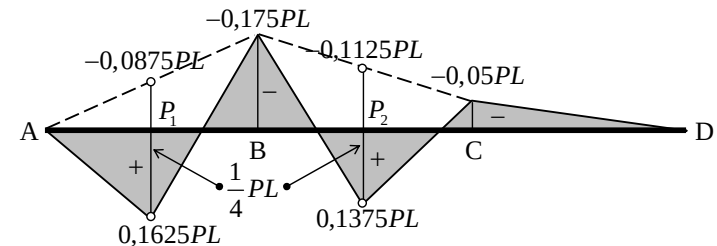
$$\Rightarrow \begin{cases} 4X_1 + X_2 = -\frac{3}{4} PL \\ X_1 + 4X_2 = -\frac{3}{8} \frac{PL^2}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\frac{3}{8} PL \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\frac{3}{8} PL \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{40} PL \begin{Bmatrix} 7 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Taivutusmomentit tuilla B ja C:

$$M_B = X_1 = -\frac{7}{40} PL = -0,175PL, \quad M_C = -\frac{1}{20} PL = -0,05PL$$

Taivutusmomenttikuvio:



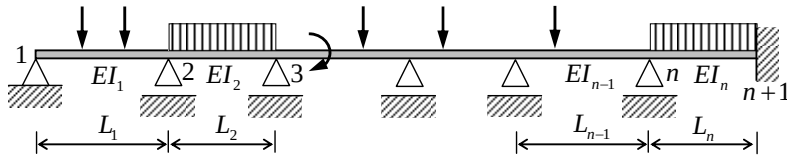
Taivutusmomentit pisteissä P_1 ja P_2 ³:

$$M_{P_1} = -0,0875PL + \frac{1}{4} PL = 0,1625PL, \quad M_{P_2} = -0,1125PL + \frac{1}{4} PL = 0,1375PL$$

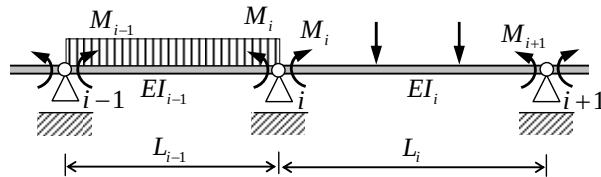
³ Kaksitukisen vapaasti tuetun palkin taivutusmomentti sen keskipisteessä, jossa vaikuttaa pistekuorma P , on $M = PL/4$.

3.5 Kolmen momentin yhtälö jatkuvan palkin ratkaisemiseksi

Johdetaan lopuksi ns. **kolmen momentin yhtälö**, jota voidaan käyttää jatkuvan palkin **tukimomenttien** (taivutusmomenttien arvot palkin tukien kohdilla) määrittämiseen. Otaksutaan palkin tukien välisten osien olevan tasajäykkiä. Tarkastellaan jatkuvaa palkkia, jossa on n jännettä ja $n+1$ tukea (kuva 3.1). Sen ensimmäisellä tuella 1 ja viimeisellä tuella $n+1$ on joko kiinteä nivel tai jäykkä kiinnitys. Palkin SMPM muodostetaan lisäämällä palkkiin tukien kohdille nivelet, jolloin staattisesti määräämättömät suureet ovat taivutusmomentit M_i tukien kohdalla. Näin SMPM:n kukin jänne toimii kuten vapaasti tuettu kaksitukinen palkki.



Kuva 3.1: Jatkuva palkki, jossa on n jännettä ja $n+1$ tukea.



Kuva 3.2: Jatkuvan palkin SMPM tuen i lähellä.

Kuva 3.2 esittää palkin SMPM:toa tuen i lähellä. Kiertymälle tuen i vasemmalla ja oikealla puolella saadaan (Taulukko 3.1, kohdat 6 ja 7)

$$\varphi_i^{\text{vas}} = -\frac{M_{i-1}L_{i-1}}{6EI_{i-1}} + \frac{-M_iL_{i-1}}{3EI_{i-1}} + \varphi_{0i}^{\text{vas}} = -\frac{L_{i-1}}{6EI_{i-1}}M_{i-1} - \frac{L_{i-1}}{3EI_{i-1}}M_i + \varphi_{0i}^{\text{vas}},$$

$$\varphi_i^{\text{oik}} = \frac{M_iL_i}{3EI_i} - \frac{-M_{i+1}L_i}{6EI_i} + \varphi_{0i}^{\text{oik}} = \frac{L_i}{3EI_i}M_i + \frac{L_i}{6EI_i}M_{i+1} + \varphi_{0i}^{\text{oik}},$$

missä $\varphi_{0i}^{\text{vas}}$ ja $\varphi_{0i}^{\text{oik}}$ ovat ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvat kertymät. Yhteensopivuusehdosta tuen i kohdalla saadaan nyt

$$\varphi_i^{\text{vas}} = \varphi_i^{\text{oik}} \Leftrightarrow -\frac{L_{i-1}}{6EI_{i-1}}M_{i-1} - \frac{L_{i-1}}{3EI_{i-1}}M_i + \varphi_{0i}^{\text{vas}} = \frac{M_iL_i}{3EI_i} + \frac{M_{i+1}L_i}{6EI_i} + \varphi_{0i}^{\text{oik}}$$

ja edelleen

$$\frac{L_{i-1}}{6EI_{i-1}}M_{i-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{L_i}{EI_i} + \frac{L_{i-1}}{EI_{i-1}}\right)M_i + \frac{L_i}{6EI_i}M_{i+1} = \varphi_{0i}^{\text{vas}} - \varphi_{0i}^{\text{oik}}, \quad i = 2, \dots, n \quad (3.1)$$

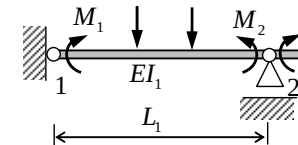
Tämä on jatkuvan palkin **kolmen momentin yhtälö**, jollainen voidaan kirjoittaa palkin kaikilla sisätuilla $2, \dots, n$. Näitä yhtälöitä on $n-1$ kappaletta ja niissä on $n+1$ tuntematonta $M_1, \dots, M_{n+1}$. Puuttuvat kaksi lisäyhtälöä saadaan tukiehdoista palkin päissä.

Jos palkin päässä 1 on nivel, sitä vastaa lisäehto on

$$M_1 = 0. \quad (3.2)$$

Jos palkin päässä $n+1$ on nivel, sitä vastaa lisäehto on

$$M_{n+1} = 0. \quad (3.3)$$



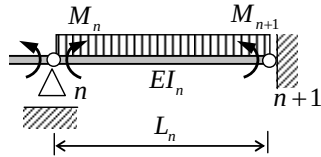
Kuva 3.3: Jatkuvan palkin SMPM jäykästi kiinnitetyn tuen 1 lähellä

Jos tuki 1 on jäykästi kiinnitetty, SMPM:n (kuva 3.3) kiertymälle saadaan lauseke

$$\varphi_1 = \frac{M_1L_1}{3EI_1} - \frac{-M_2L_1}{6EI_1} + \varphi_{01}$$

ja yhteensopivuusehdon $\varphi_1 = 0$ perusteella seuraa lisäyhtälö

$$M_1 = -\frac{1}{2}M_2 - \frac{3EI_1}{L_1}\varphi_{01}. \quad (3.4)$$



Kuva 3.4: Jatkuvan palkin SMPM jäykästi kiinnitetyn tuen $n+1$ lähellä.

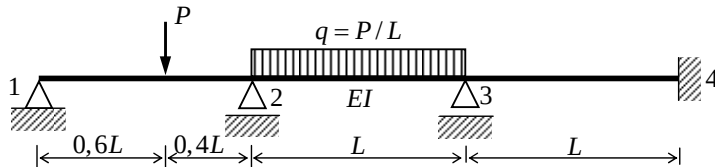
Jos tuki $n+1$ on jäykästi kiinnitetty, SMPM:n (kuva 3.4) kiertymälle saadaan lauseke

$$\varphi_{n+1} = -\frac{M_n L_n}{6EI_n} + \frac{-M_{n+1} L_n}{3EI_n} + \varphi_{0n+1}$$

ja yhteensopivuusehdon $\varphi_{n+1} = 0$ perusteella lisäyhtälö

$$M_{n+1} = -\frac{1}{2}M_n + \frac{3EI_n}{L_n}\varphi_{0n+1}. \quad (3.5)$$

Esimerkki 3.5: Määritetään kolmen momentin yhtälöä käyttäen oheisen jatkuvan palkin taivutusmomentin arvot tuilla 1, 2, 3 ja 4.



Ratkaisu:

Staatteisesti määrätyn perusmuodon kiertymät ulkoisesta kuormasta:

$$\varphi_{02}^{\text{vas}} = -\frac{P \cdot 0,6L \cdot 0,4L \cdot (L + 0,6L)}{6LEI} = -\frac{8}{125} \frac{PL^2}{EI}, \quad \varphi_{02}^{\text{oik}} = \frac{(P/L)L^3}{24EI} = \frac{1}{24} \frac{PL^2}{EI}$$

$$\varphi_{03}^{\text{vas}} = -\frac{(P/L)L^3}{24EI} = -\frac{1}{24} \frac{PL^2}{EI}, \quad \varphi_{03}^{\text{oik}} = 0$$

$$\varphi_{04} = 0$$

Yhtälöt:

$$\text{Tuki 1: } M_1 = 0$$

$$\text{Tuki 2: } \frac{L}{6EI}M_1 + \frac{2}{3} \frac{L}{EI}M_2 + \frac{L}{6EI}M_3 = -\frac{8}{125}PL^2 - \frac{1}{24}PL^2 \equiv -\frac{317}{3000}PL^2$$

$$\text{Tuki 3: } \frac{L}{6EI}M_2 + \frac{2}{3} \frac{L}{EI}M_3 + \frac{L}{6EI}M_4 = -\frac{1}{24}PL^2$$

$$\text{Tuki 4: } M_4 = -\frac{1}{2}M_3$$

Ratkaisu:

Eliminoidaan M_1 ja M_4 :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}M_2 + \frac{1}{6}M_3 = -\frac{317}{3000}PL \\ \frac{1}{6}M_2 + \frac{7}{12}M_3 = -\frac{1}{24}PL \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8M_2 + 2M_3 = -\frac{317}{250}PL \\ 2M_2 + 7M_3 = -\frac{1}{2}PL \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{250} \begin{Bmatrix} 317 \\ 125 \end{Bmatrix} PL$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä:

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{52 \cdot 250} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 317 \\ 125 \end{Bmatrix} PL = -\frac{1}{13000} \begin{Bmatrix} 1969 \\ 366 \end{Bmatrix} PL = \begin{Bmatrix} -0,1515 \\ -0,0282 \end{Bmatrix} PL$$

Vastaus:

$$\underline{M_1 = 0}, \quad \underline{M_2 = -0,1515PL}, \quad \underline{M_3 = -0,0282PL}, \quad \underline{M_4 = -\frac{1}{2}M_3 = 0,0141PL}$$

4. Sauvarakenteiden elementtimenetelmä

4.1 Johdanto

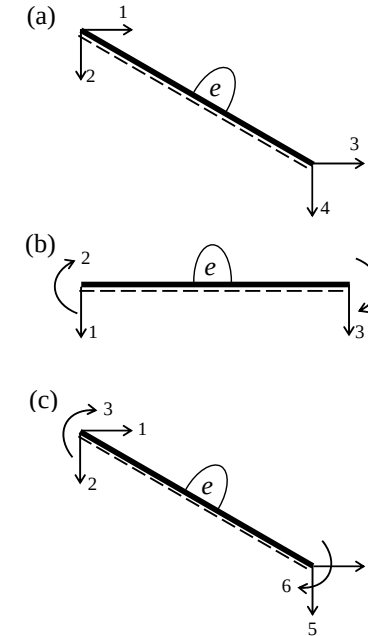
Sauvarakenteiden elementtimenetelmällä tarkoitetaan tässä **siirtymämenetelmää**¹, joka on systematisoitu siten, että se on helppo ohjelmoida tietokoneelle. Nimityksen elementtimenetelmä käyttö tässä yhteydessä perustuu siihen, että näin formuloidussa siirtymämenetelmässä syntyvän yhtälöryhmän kokoamisprosessi on samanlainen kuin **elementtimenetelmässä**, joka on tietokoneiden kehittymisen myötä viime vuosikymmeninä kehittynyt yleinen numeerinen menetelmä, jolla voidaan ratkaista erilaisia mekaniikan ja laajemmin matemaattisen fysiikan reuna-arvoprobleemia. Elementtimenetelmän kehittyminen on ollut yksi viimeaikojen suurimmista edistysaskelista numeerisen analyysin alalla. Elementtimenetelmä on **likimenetelmä**, jolla voidaan saada tarkka ratkaisu vain hyvin yksinkertaisissa erikoistapauksissa. Sauvarakenteiden elementtimenetelmä sen sijaan on, kun sitä sovelletaan tyypillisten sauvarakenteiden **staattiseen analyysiin, tarkka menetelmä**.

Rakenteiden mekaniikan alueella on lukuisia probleemia, joille ei kyetä löytämään analyttistä (tarkkaa) ratkaisua. Tällöin joudutaan turvautumaan numeeriseen käsittelyyn. Ylivoimaisesti eniten rakenteiden mekaniikan tehtävien ratkaisemiseen käytetään nykyisin juuri elementtimenetelmää ja sen eniten käytetty formulaatio on sellainen, jossa tuntemattomina ovat siirtymäsuureet, siis siirtymämenetelmä. Tämän vuoksi tässä esitettävä sauvarakenteiden siirtymämenetelmän systematiikka ei rajoitu pelkästään käsillä olevaan problemaan, vaan se toimii myös johdatuksena yleiseen elementtimenetelmään perustuvaan käsittelyyn, joka tulee vastaan myöhemmissä rakenteiden mekaniikan kursseissa. Samanlainen systematiikka, esiintyy myös kaikessa elementtimenetelmään perustuvassa numeerisessa käsittelyssä.

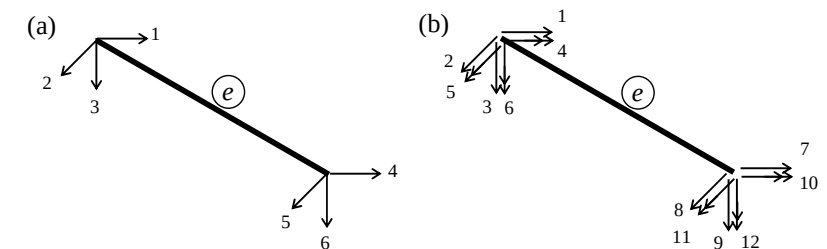
Sauvarakenteiden elementtimenetelmässä rakenteen osia kutsutaan **elementeiksi**, ne liittyvät toisiinsa **solmujen** välityksellä. Sauvanpäiden yleistettyjä siirtymämahdollisuuksia kutsutaan **elementtivapausasteiksi** ja solmuihin liittyviä yleistettyjä siirtymiä vastaavasti **vapausaste-siirtymiksi**. Lähtökohta siirtymämenetelmän elementtimenetelmän mukaiselle systematisoinnille on elementti- ja systeemivapausasteiden juokseva numerointi.

¹ Sauvarakenteiden siirtymämenetelmää käsitellään varsinaisesti Rakenteiden mekaniikka I kurssissa.

Kuvassa 4.1 on esitetty tavalliset tasosauvaelementit: nivelsauva-, palkki- ja kehäelementti vapausastenumeroineen. Kuvassa 4.2 on vastaavasti esitetty tavalliset avaruussauvaelementit: nivelsauva- ja kehäelementti vapausastenumeroineen.



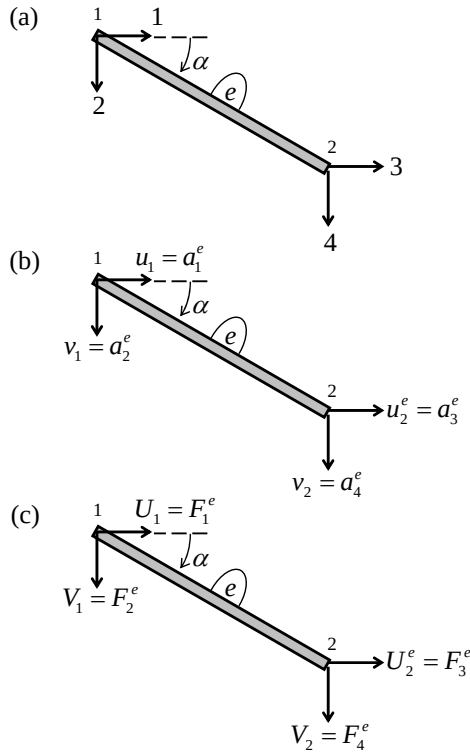
Kuva 4.1: Tasosauvaelementtejä vapausastenumeroineen: (a) nivelsauva, (b) palkki- ja (c) kehäelementti



Kuva 4.2: Avaruussauvaelementtejä vapausastenumeroineen: (a) nivelsauva- ja (b) kehäelementti

4.2 Nivelsauvaelementti tasotapauksessa

4.21 Merkinnöistä

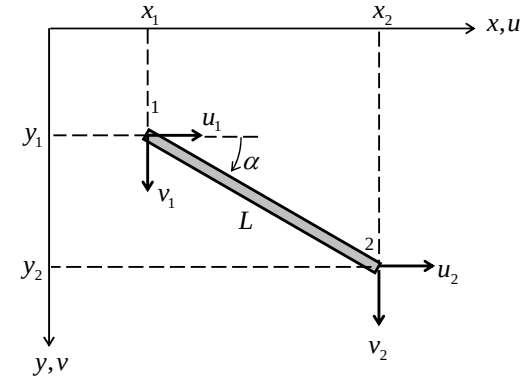


Kuva 4.3: Nivelsauvaelementin (a) vapausastenumerointi, (b) vapausastesiirtymät ja (c) vapausastevoimat tasotapauksessa

Kuvassa 4.3 on esitetty (a) nivelsauvaelementin vapausastenumerointi, (a) vapausastesiirtymät ja (c) vapausastevoimat. Vapausastesiirtymät ovat sauvan päiden siirtymien x, y -komponentit u_1, v_1, u_2 , ja v_2 eli lyhyesti **sauvanpääsiirtymät**. Menettelyn systematisointia silmälläpitäen elementin vapausastesiirtymille käytetään myös juoksevilla indeksillä varustettuja symboleja $a_i^e, i = 1, \dots, 4$. Vapausastevoimat ovat sauvan päihin vaikuttavien voimien x, y -komponentit U_1, V_1, U_2 , ja V_2 eli lyhyesti **sauvanpäävoimat**. Menettelyn systematisointia silmälläpitäen

elementin vapausastevoimille käytetään myös juoksevilla indeksillä varustettuja symboleja $F_i^e, i = 1, \dots, 4$.

4.22 Nivelsauvaelementin yhtälöiden johtaminen



Kuva 4.4: Nivelsauva ja sen päiden siirtymäkomponentit.

Tarkastellaan kuvan 4.4 nivelsauvaa². Käytetään sen kaltevuuskulman α kosinille ja sinille lyhennysmerkintöjä $c = \cos \alpha$ ja $s = \sin \alpha$. Jos sauvan päiden koordinaatit tunnetaan, ne on käytännöllistä laskea kaavoilla

$$c = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad s = \frac{y_2 - y_1}{L}. \quad (4.1)$$

Luvun 2 kaavan (2.8) perusteella sen päiden siirtymien välille on yhtälö

$$(x_2 - x_1)(u_2 - u_1) + (y_2 - y_1)(v_2 - v_1) = \varepsilon L^2. \quad (4.2)$$

Jos rakennetta kuormittaa mekaaninen kuormitus, sauvan venymä on

$$\varepsilon = \frac{S}{EA}, \quad (4.3)$$

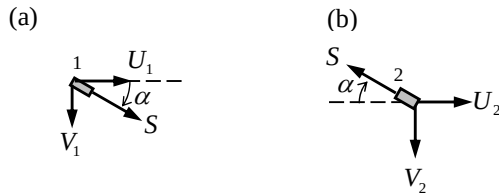
missä S on sauvan sauvavoima. Yhtälöstä (4.2) saadaan nyt helposti lauseke

² Elementtimenetelmän yhteydessä myös nivelsauvaa käsitellään koordinaatistossa, jonka y - akseli on alaspäin.

$$S = \frac{EA}{L}(-cu_1 - sv_1 + cu_2 + sv_2), \quad (4.4)$$

joka esittää sauvavoiman sauvan päiden siirtymien funktiona. Kuvat 4.5a ja 4.5b esittävät sauvan päiden 1 ja 2 pienten osien vapaakappalekuvioita, joissa U_1 , V_1 , U_2 ja V_2 ovat nivelsauvan **sauvanpäävoimat** eli nivelistä sauvan päihin kohdistuvat voimakomponentit. Niiden vaaka- ja pystysuuntaiset tasapainoehdot antavat

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow U_1 + S \cos \alpha &= 0 \Rightarrow U_1 = -S c \\ \uparrow V_1 + S \sin \alpha &= 0 \Rightarrow V_1 = -S s \\ \rightarrow U_2 - S \cos \alpha &= 0 \Rightarrow U_2 = S c \\ \uparrow V_2 - S \sin \alpha &= 0 \Rightarrow V_2 = S s \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$



Kuva 4.5: Nivelsauvan päiden pienten osien vapaakappalekuviot.

Sijoittamalla näihin lausekkeisiin sauvavoiman lauseke (4.4) saadaan

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{EA}{L}(c^2u_1 + scv_1 - c^2u_2 - scv_2), \\ V_1 &= \frac{EA}{L}(scu_1 + s^2v_1 - scu_2 - s^2v_2), \\ U_2 &= \frac{EA}{L}(-c^2u_1 - scv_1 + c^2u_2 + scv_2), \\ V_2 &= \frac{EA}{L}(-scu_1 - s^2v_1 + scu_2 + s^2v_2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nämä lausekkeet ovat **nivelsauvan sauvanpäävoimien ja sauvanpääsiirtymien väliset yhteydet**. Ne voidaan ilmaista matriisimuodossa seuraavasti

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e + \{FK\}^e, \quad (4.7)$$

missä

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

ovat elementin sauvanpäävoimien ja sauvanpääsiirtymien muodostamat pystyvektorit,

$$[K]^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

on **elementin jäykkyysmatriisi** ja

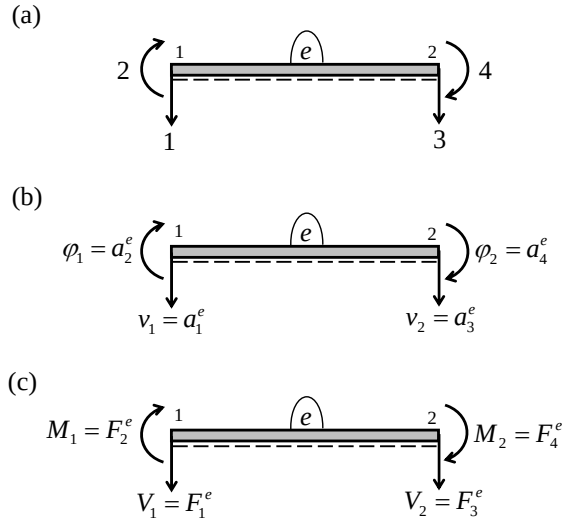
$$\{FK\}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

on **elementin kuormitustermivektori** (joka mekaanisen kuormituksen kuormittaman nivelsauvan tapauksessa häviää). Lausekkeissa esiintyvä yläindeksi e viittaa kysymyksessä olevan elementin numeroon. Tarkasti ottaen yläindeksi e kuuluisi liittää myös suureisiin E , A , L , c ja s , mutta se on jätetty selkeyden vuoksi pois.

Lausekkeissa (4.8) on otettu käyttöön vapausastesiirtymäiden ja vapausastevoimien merkintätapa pystyvektorien $\{F\}^e$ ja $\{a\}^e$ alkioina F_i^e ja a_i^e , joilla on juokseva numerointi.

4.3 Palkkielementti

4.31 Palkkielementin merkinnöistä

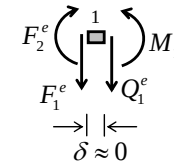


Kuva 4.6: Palkkielementin (a) vapausastenumerointi, (b) vapausaste-siirtymät ja (c) vapausastevoimat

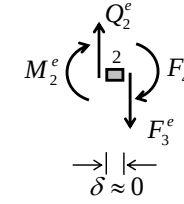
Kuvassa 4.6 on esitetty (a) palkkielementin vapausastenumerointi, (b) vapausastesiirtymät ja (c) vapausastevoimat. Vapausastesiirtymät ovat sauvan päiden taipumat ja kiertymät v_1 , φ_1 , v_2 ja φ_2 eli **sauvanpäätaipumat** ja **-kiertymät**. Menettelyn systematisointia silmälläpitäen elementin vapausastesiirtymille käytetään myös juoksevilla indeksillä varustettuja symboleja a_i^e , $i=1, \dots, 4$. Vapausastevoimat ovat sauvan päihin vaikuttavat voimat ja momentit V_1 , M_1 , V_2 ja M_2 eli lyhyesti **sauvanpäävoimat** ja **-momentit**. Menettelyn systematisointia silmälläpitäen elementin vapausastevoimille käytetään myös juoksevilla indeksillä varustettuja symboleja F_i^e , $i=1, \dots, 4$.

Elementtimenetelmän käyttämistä silmälläpitäen on tärkeitä tiedostaa mitkä ovat sauvan päiden leikkausrasitusten ja vapausastevoimien väliset yhteydet. Kuvan 8 vapaakappalekuvioiden perusteella saadaan helposti tasapainoyhtälöt

Vasen pää 1:



Oikea pää 2:



Kuva 4.7: Palkkielementin päiden vapaakappalekuviot

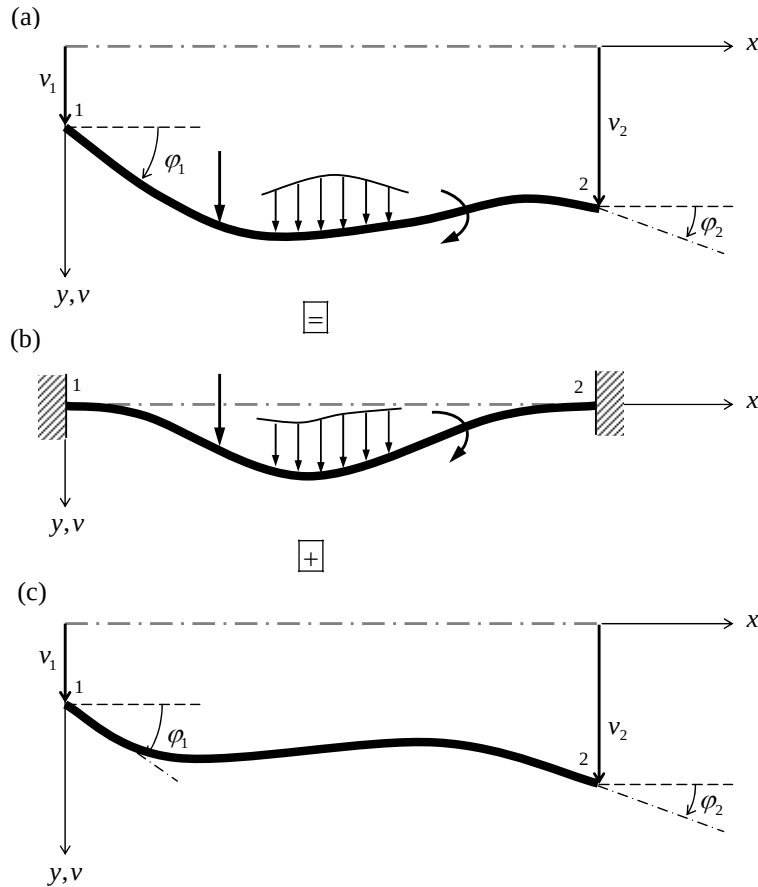
$$\begin{cases} Q_1^e = -F_1^e, \\ M_1^e = F_2^e, \end{cases} \begin{cases} Q_2^e = F_3^e \\ M_2^e = -F_4^e \end{cases} \quad (4.11)$$

Näissä yhtälöissä M_1^e ja M_2^e merkitsevät siis taivutusmomentin arvoja elementin päissä 1 ja 2. Niitä ei pidä sekoittaa edellä esillä olleisiin elementin sauvanpäämomenteihin, joille käytetään merkintöjä M_1 ja M_2 ilman yläindeksiä.

4.32 Palkkielementin yhtälöiden johtaminen

Tarkastellaan kuvan 4.8a palkkia, jota kuormittaa palkilla oleva ulkoinen kuormitus ja jonka päät 1 ja 2 saavat **sauvanpäätaipumat** v_1 ja v_2 sekä **sauvanpääkiertymät** φ_1 ja φ_2 . Pyritään määrittämään tästä kuormituksesta ja näistä siirtymäsuureista aiheutuvat vastaavat voimasuureet eli **sauvanpäävoimat** V_1 ja V_2 sekä **sauvanpäämomentit** M_1 ja M_2 . Superpositioperiaatteen mukaan nämä voimasuureet saadaan määrittämällä ensin palkilla olevan ulkoisen kuorman vaikutus päistään jäykästi kiinnitettyyn palkkiin (kuva 4.8b) ja sitten palkin päiden siirtymien ja kiertymien vaikutus (kuva 4.8c) sekä laskemalla tulokset yhteen.

Seuraavassa käytetään päistään jäykästi kiinnitetyn palkin sauvanpäävoimille ja sauvanpäämomenteille palkilla vaikuttavasta **ulkoisesta kuormituksesta** merkintöjä VK_1 , VK_2 , MK_1 , MK_2 ja niitä kutsutaan palkin **kuormitustermeiksi**. (Myös palkin ylä- ja alapinnan lämpötilaerosta aiheutuu vastaavat kuormitustermit.) Rajoitumme tasajäykkään palkkiin, joka voidaan erilaisissa kuormitustapauksissa ratkaista taipuman differentiaaliyhtälöä käyttäen. Rakenteiden lujuusopin luentomonisteen osan II luvussa 8 tarkastelimme tätä asiaa. Tiettyä



Kuva 4.8: (a) Palkin deformaatio, (b) ulkoisen kuormituksen osuus, (c) yleistettyjen sauvanpäsiirtymien osuus.

kuormitustapausta vastaavat kuormitustermit saadaan ratkaisemalla kyseisen kuormituksen alainen päistään jäykästi kiinnitetty palkki ja määrittämällä sen leikkausvoiman ja taivutusmomentin arvot palkin päissä, ts. $Q(0)$, $Q(L)$, $M(0)$ ja $M(L)$. Kuormitustermit ovat tällöin

$$VK_1 = -Q(0), VK_2 = Q(L), MK_1 = M(0), MK_2 = -M(L) \quad (4.12)$$

Taulukossa 4.2 on esitetty tasajäykän palkin kuormitustermejä tavallisimmissa kuormitustapauksissa.

Seuraavassa määritetään palkin päiden siirtymistä ja kiertymistä aiheuttavat sauvanpäävoimat ja momentit. Koska tarkasteltavalla palkilla ei vaikuta ulkoista kuormitusta, supistuu sen differentiaaliyhtälö (Rakenteiden lujuusoppi osa II kaava (8.17)) muotoon

$$v^{(4)} = 0. \quad (4.13)$$

Se voidaan ratkaista seuraavasti:

$$\begin{aligned} v^{(4)} = 0 &\Rightarrow v''' = C_1 \Rightarrow v'' = C_1 x + C_2 \Rightarrow v' = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \\ &\Rightarrow v = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Taipuma, kiertymä $\varphi = v'$, taivutusmomentti $M = -EIv''$ ja leikkausvoima $Q = -EIv'''$ integrointivakioiden avulla lausuttuina ovat nyt

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4, \\ \varphi(x) &= \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3, \\ M(x) &= -EI(C_1 x + C_2), \\ Q &= -EIC_1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Reunaehdot palkin päissä ovat $v(0) = v_1$, $\varphi(0) = \varphi_1$, $v(L) = v_2$ ja $\varphi(L) = \varphi_2$, joista seuraa integrointivakioille yhtälöt

$$\begin{cases} C_4 = v_1, \\ C_3 = \varphi_1, \\ \frac{C_1}{6} L^3 + \frac{C_2}{2} L^2 + C_3 L + C_4 = v_2, \\ \frac{C_1}{2} L^2 + C_2 L + C_3 = \varphi_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{L^2}{3} C_1 + LC_2 = 2 \frac{v_2 - v_1}{L} - 2\varphi_1, \\ \frac{L^2}{2} C_1 + LC_2 = \varphi_2 - \varphi_1. \end{cases} \quad (4.16)$$

joiden ratkaisuna saadaan

$$\begin{cases} C_1 = \frac{12}{L^3}v_1 + \frac{6}{L^2}\varphi_1 - \frac{12}{L^3}v_2 + \frac{6}{L^2}\varphi_2, \\ C_2 = -\frac{6}{L^2}v_1 - \frac{4}{L}\varphi_1 + \frac{6}{L^2}v_2 - \frac{2}{L}\varphi_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Sijoittamalla saadut integrointivakiot C_1 ja C_2 taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeisiin saadaan

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{EI}{L^2} \left[(-6 + 12\frac{x}{L})v_1 + (-4 + 6\frac{x}{L})L\varphi_1 + (6 - 12\frac{x}{L})v_2 + (-2 + 6\frac{x}{L})L\varphi_2 \right], \\ Q &= -\frac{EI}{L^3} (12v_1 + 6L\varphi_1 - 12v_2 + 6L\varphi_2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Näiden avulla saadaan sauvanpääsiirtymistä ja kiertymistä aiheutuville sauvanpäävoimille lausekkeet

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv -Q(0) = \frac{EI}{L^3} (12v_1 + 6L\varphi_1 - 12v_2 + 6L\varphi_2), \\ M_1 &\equiv M(0) = \frac{EI}{L^2} (6v_1 + 4L\varphi_1 - 6v_2 + 2L\varphi_2), \\ V_2 &\equiv Q(L) = \frac{EI}{L^3} (-12v_1 - 6L\varphi_1 + 12v_2 - 6L\varphi_2), \\ M_2 &\equiv -M(L) = \frac{EI}{L^2} (6v_1 + 2L\varphi_1 - 6v_2 + 4L\varphi_2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Lopulliset sauvanpäävoimien ja momenttien lausekkeet saadaan lisäämällä näihin ulkoisen kuormituksen osuus, eli kuormitustermit. Näin saadaan haettu tulos

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{EI}{L^3} (12v_1 + 6L\varphi_1 - 12v_2 + 6L\varphi_2) + VK_1, \\ M_1 &= \frac{EI}{L^2} (6v_1 + 4L\varphi_1 - 6v_2 + 2L\varphi_2) + MK_1, \\ V_2 &= \frac{EI}{L^3} (-12v_1 - 6L\varphi_1 + 12v_2 - 6L\varphi_2) + VK_2, \\ M_2 &= \frac{EI}{L^2} (6v_1 + 2L\varphi_1 - 6v_2 + 4L\varphi_2) + MK_2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nämä lausekkeet ovat **palkin yleistettyjen sauvanpäävoimien ja siirtymien väliset yhteydet**. Ne voidaan ilmaista matriisimuodossa seuraavasti

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e + \{FK\}^e, \quad (4.21)$$

missä

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

ovat elementin yleistettyjen sauvanpäävoimien ja sauvanpääsiirtymien muodostamat pystyvektorit,

$$[K]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

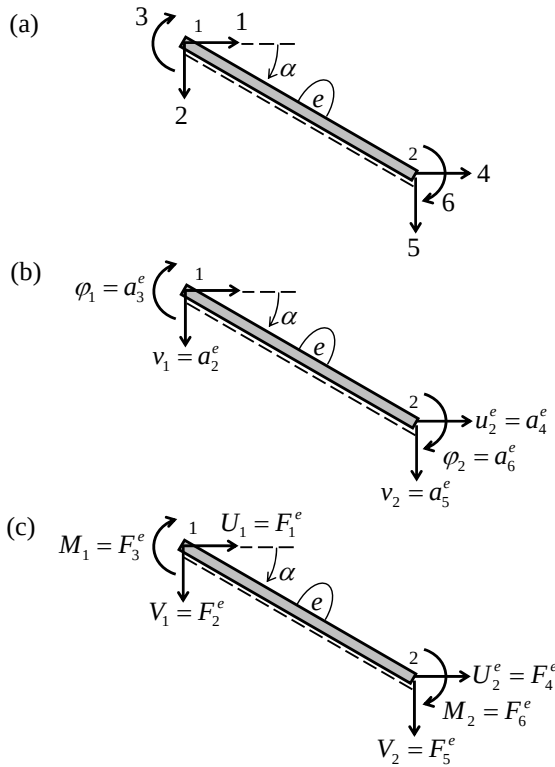
on **elementin jäykkymatriisi** ja

$$\{FK\}^e = \begin{Bmatrix} FK_1^e \\ FK_2^e \\ FK_3^e \\ FK_4^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} VK_1 \\ MK_1 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

on **elementin kuormitustermivektori**. Lausekkeissa esiintyvä yläindeksi e viittaa kysymyksessä olevan elementin numeroon. Tarkasti ottaen yläindeksi e kuuluisi liittää myös suureisiin E , I ja L , mutta se on jätetty selkeyden vuoksi pois.

Lausekkeissa (4.22) on otettu käyttöön vapausasteisiirtymien ja vapausastevoimien merkintätapa pystyvektorien $\{F\}^e$ ja $\{a\}^e$ alkioina F_i^e ja a_i^e , joilla on juokseva numerointi.

4.4 Tasokehäelementti



Kuva 4.9: Tasokehäelementin (a) vapausastenumerointi, (b) vapausastesiirtymät ja (c) vapausastevoimat

4.41 Tasokehäelementin merkinnöistä

Laajennetaan tarkastelu koskemaan myös **tasokehäelementtiä**, joka on käytännössä yleisimmin käytetty sauvaelementti. Kuvassa 4.9 on esitetty (a) tasokehäelementin vapausastenumerointi, (b) vapausastesiirtymät ja (c) vapausastevoimat. Vapausastesiirtymät ovat sauvan päiden siirtymien x, y -komponentit ja kiertymät $u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2$ ja φ_2 eli **sauvanpääsiirtymät** ja **-kiertymät**. Menettelyn systematisointia silmälläpitäen elementin vapausastesiirtymille käytetään myös juoksevilla indeksillä varustettuja symboleja $a_i^e, i=1, \dots, 6$.

Vapausastevoimat ovat sauvan päihin vaikuttavien voimien x, y -komponentit ja momentit U_1, V_1, M_1, U_2, V_2 ja M_2 eli lyhyesti **sauvanpäävoimat** ja **-momentit**. Menettelyn systematisointia silmälläpitäen elementin vapausastevoimille käytetään myös juoksevilla indeksillä varustettuja symboleja $F_i^e, i=1, \dots, 6$.

4.42 Tasokehäelementin yhtälöiden johtaminen

Tasokehäelementin yhtälöt saadaan konstruoiduksi käyttäen hyväksi toisaalta aksiaalisesti kuormitetun sauvan ja toisaalta palkin vapausastevoimien ja -siirtymien välisiä yhteyksiä. Nämä yhdessä muodostavat tasokehäsauvan yleistetty voima-siirtymäyhteydet ns. **sauvakoordinaatistossa**, jonka x -akseli yhtyy sauvan akseliin. Kun nämä yhteyden muunnetaan globaaliin ns. **rakennekoordinaatistoon** saadaan tasokehäsauvan vapausastevoimien ja -siirtymien yhteydet haluttuun muotoon. Esittämällä tulos matriisimuodossa, saadaan tasokehäelementin jäykkyyismatriisi ja kuormitustermivektori.

4.43 Aksiaalisesti kuormitetun sauvan sauvanpäävoimien ja -siirtymien väliset yhteydet

Edellä ei ole vielä johdettu aksiaalisesti kuormitetun sauvan sauvanpäävoimien ja -siirtymien välisiä yhteyksiä. Ne saadaan superpositio-periaatteella laskemalla yhteen sauvanpääsiirtymistä u_1 ja u_2 aiheutuvat sauvanpäävoimat sekä päistään siirtymättömän sauvan ulkoisesta kuormituksesta $p(x)$ aiheutuvat sauvanpäävoimat, eli kuormitustermit UK_1 ja UK_2 .

Käytetään hyväksi aksiaalisesti kuormitetun, tasajäykän sauvan differentiaaliyhtälöä (Rakenteiden lujuusoppi, osa II, kaava (6.20))

$$u'' = -\frac{p}{EA}. \quad (4.25)$$

Määritetään aluksi sauvanpääsiirtymistä aiheutuvat sauvanpäävoimat. Tällöin kuormitus $p(x) = 0$ ja differentiaaliyhtälön ratkaisuksi tulee

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = C_1 \Rightarrow u = C_1 x + C_2$$

ja normaalivoima integrointivakion C_1 avulla lausuttuna on

$$N \equiv EAu' = EAC_1.$$

Reunaehdot sauvan päissä antavat integrointivakioille:

$$\begin{cases} u(0) = u_1 \\ u(L) = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = u_1 \\ C_1L + C_2 = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{u_2 - u_1}{L} \\ C_2 = u_1 \end{cases}$$

Normaalivoimalle saadaan näin

$$N(x) = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1)$$

ja sauvanpäävoimille

$$U_1 \equiv -N(0) = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2), \quad U_2 \equiv N(L) = \frac{EA}{L}(-u_1 + u_2)$$

Lisäämällä näihin ulkoisen aksiaalisen kuormituksen osuus saadaan

$$\boxed{U_1 = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2) + UK_1, \quad U_2 = \frac{EA}{L}(-u_1 + u_2) + UK_2.} \quad (4.26)$$

Nämä ovat aksiaalisesti kuormitetun sauvan sauvanpäävoimien ja -siirtymien yhteydet.

Määritetään vielä kuormitustermit tasaiselle kuormalle ($p = \text{vakio}$) ja aksiaaliselle pistekuormalle F , joka vaikuttaa etäisyyksillä a ja b sauvan päistä.

Tasaisen kuorman tapauksessa differentiaaliyhtälöstä saadaan

$$u'' = -\frac{p}{EA} \Rightarrow u' = -\frac{p}{EA}x + C_1 \Rightarrow u = -\frac{p}{2EA}x^2 + C_1x + C_2$$

ja normaalivoima on

$$N \equiv EAu' = -px + EAC_1.$$

Reunaehdoista seuraa

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ -\frac{p}{2EA}L^2 + C_1L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{pL}{2EA} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

ja normaalivoiman lauseke saa muodon

$$N(x) = pL\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right).$$

Nyt saadaan kuormitustermeiksi

$$\boxed{UK_1 \equiv -N(0) = -\frac{pL}{2}, \quad UK_2 \equiv N(L) = -\frac{pL}{2}.} \quad (4.27)$$

Pistekuorman tapauksessa differentiaaliyhtälöstä saadaan

$$u'' = -\frac{F \langle x - a \rangle^{-1}}{EA} \Rightarrow u' = -\frac{F}{EA} \langle x - a \rangle^0 + C_1$$

$$\Rightarrow u = -\frac{F}{EA} \langle x - a \rangle^1 + C_1x + C_2$$

ja normaalivoima on

$$N \equiv EAu' = -F \langle x - a \rangle^0 + EAC_1$$

Reunaehdoista seuraa

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ -\frac{F}{EA}b + C_1L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{Fb}{EAL} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

ja normaalivoiman lauseke saa muodon

$$N(x) = -F \langle x - a \rangle^0 + \frac{Fb}{L}.$$

Nyt saadaan kuormitustermeiksi

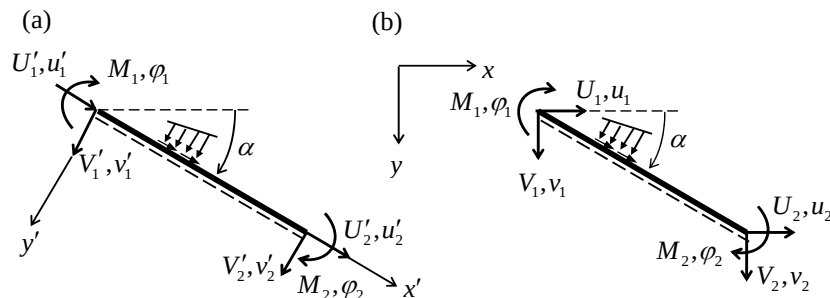
$$UK_1 \equiv -N(0) = -\frac{Fb}{L}, \quad UK_2 \equiv N(L) = -\frac{Fa}{L}. \quad (4.28)$$

4.44 Kehäsauvan yleistettyjen sauvanpäävoimien ja -siirtymien väliset yhteydet

Yhtälöt (4.26) ja (4.20) muodostavat yleistettyjen sauvanpäävoimien ja -siirtymien väliset yhteydet vaakasuoralle palkille, jonka aksiaali jäykkyys on EA ja taivutusjäykkyys on EI ja johon vaikuttaa myös palkin akselin suuntaista kuormitusta. Koottuna yhteen nämä yhteydet ovat

$$\begin{cases} U_1 = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2) + UK_1 \\ V_1 = \frac{EI}{L^3}(12v_1 + 6L\varphi_1 - 12v_2 + 6L\varphi_2) + VK_1 \\ M_1 = \frac{EI}{L^2}(6v_1 + 4L\varphi_1 - 6v_2 + 2L\varphi_2) + MK_1 \\ U_2 = \frac{EA}{L}(-u_1 + u_2) + UK_2 \\ V_2 = \frac{EI}{L^3}(-12v_1 - 6L\varphi_1 + 12v_2 - 6L\varphi_2) + VK_2 \\ M_2 = \frac{EI}{L^2}(6v_1 + 2L\varphi_1 - 6v_2 + 4L\varphi_2) + MK_2 \end{cases} \quad (4.29)$$

Nämä yhteydet pätevät myös kehäsaualle, kun sitä tarkastellaan ns. **sauvakoordinaatistossa**, jonka x -akseli yhtyy sauvan akseliin.



Kuva 4.10: Tasokehäsauva (a) sauvakoordinaatistossa (b) rakennekoordinaatistossa.

Merkitään seuraavassa sauvakoordinaatteja (kuva 4.9a) symbolein x', y' ja sauvanpäävoimia ja siirtymiä vastaavasti $U'_i, V'_i, (i=1,2)$ ja $u'_i, v'_i, (i=1,2)$. Näin kehäsauvan yleistettyjen sauvanpäävoimien ja -siirtymien yhteydet sauvakoordinaatistossa ovat

$$\begin{cases} U'_1 = \frac{EA}{L}(u'_1 - u'_2) + UK_1 \\ V'_1 = \frac{EI}{L^3}(12v'_1 + 6L\varphi_1 - 12v'_2 + 6L\varphi_2) + VK_1 \\ M_1 = \frac{EI}{L^2}(6v'_1 + 4L\varphi_1 - 6v'_2 + 2L\varphi_2) + MK_1 \\ U'_2 = \frac{EA}{L}(-u'_1 + u'_2) + UK'_2 \\ V'_2 = \frac{EI}{L^3}(-12v'_1 - 6L\varphi_1 + 12v'_2 - 6L\varphi_2) + VK_2 \\ M_2 = \frac{EI}{L^2}(6v'_1 + 2L\varphi_1 - 6v'_2 + 4L\varphi_2) + MK_2 \end{cases} \quad (4.30)$$

Jotta nämä yhteydet voitaisiin esittää rakennekoordinaatistossa x, y (kuva 4.9b), joudumme selvittämään, kuinka voima- ja siirtymäkomponentit muuttuvat koordinaatiston kierrossa. Tarkastellaan esimerkkinä siirtymävektoria $\mathbf{u}$, jonka komponentit rakenne- ja sauvakoordinaatistossa ovat vastaavasti u, v ja u', v' . Tällöin sille voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = u'\mathbf{l} + v'\mathbf{m}, \quad (4.31)$$

missä $\mathbf{l}$ ja $\mathbf{m}$ ovat sauvakoordinaatiston kantavektorit, joille voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} = c\mathbf{i} + s\mathbf{j}, \\ \mathbf{m} &= -\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j} = -s\mathbf{i} + c\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sijoittamalla nämä lausekkeet kaavan (4.31) jälkimmäiseen yhtälöön saadaan

$$u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = (cu' - sv')\mathbf{i} + (su' + cv')\mathbf{j} \quad (4.33)$$

ja merkitsemällä yhtälössä kantavektorien $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ kertoimet yhtäsuuriksi, tulos

$$\begin{cases} u = cu' - sv' \\ v = su' + cv' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = cu + sv \\ v' = -su + cv \end{cases} \quad (4.34)$$

Kaavaan (4.34) merkitty jälkimmäinen käänteinen yhteys saadaan helposti, kun otetaan huomioon, että $c^2 + s^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Samanlainen yhteys on voimassa voimavektorin komponenteille.

Näin voidaan kirjoittaa seuraavat sauva- ja rakennekoordinaatiston sauvanpäävoimien ja -siirtymien yhteydet:

$$\begin{cases} U_i = U'_i c - V'_i s, \\ V_i = U'_i s + V'_i c, \end{cases} \quad \begin{cases} u'_i = u_i c + v_i s, \\ v'_i = -u_i s + v_i c. \end{cases} \quad (4.35)$$

Niitä soveltamalla saadaan sauvanpään 1 yleistetyille sauvanpäävoimille rakennekoordinaatistossa

$$\begin{aligned} U_1 &= U'_1 c - V'_1 s \\ &= \frac{EA}{L}(cu'_1 - cu'_2) + cUK_1 - \frac{EI}{L^3}(12sv'_1 + 6sL\varphi_1 - 12sv'_2 + 6sL\varphi_2) - sVK_1 \\ &= \left(\frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2\right)u_1 + \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)scv_1 - \frac{6EI}{L^2}s\varphi_1 \\ &\quad - \left(\frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2\right)u_2 - \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)scv_2 - \frac{6EI}{L^2}s\varphi_2 + cUK_1 - sVK_1 \\ &= Au_1 + Bv_1 + C\varphi_1 - Au_2 - Bv_2 + C\varphi_2 + cUK_1 - cVK_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= sU'_1 + cV'_1 \\ &= \frac{EA}{L}(su'_1 - su'_2) + sUK_1 + \frac{EI}{L^3}(12cv'_1 + 6cL\varphi_1 - 12cv'_2 + 6cL\varphi_2) + cVK_1 \\ &= \left(\frac{EA}{L} - 12\frac{EI}{L^3}\right)scu_1 + \left(\frac{EA}{L}s^2 + 12\frac{EI}{L^3}c^2\right)v_1 + 6\frac{EI}{L^2}c\varphi_1 \\ &\quad - \left(\frac{EA}{L} - 12\frac{EI}{L^3}\right)scu_2 - \left(\frac{EA}{L}s^2 + 12\frac{EI}{L^3}c^2\right)v_2 + 6\frac{EI}{L^2}c\varphi_2 + sUK_1 + cVK_1 \\ &= Bu_1 + Dv_1 + E\varphi_1 - Bu_2 - Dv_2 + E\varphi_2 + sUK_1 + cVK_1 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{EI}{L^2}(6v'_1 + 4L\varphi_1 - 6v'_2 + 2L\varphi_2) + MK' \\ &= -\frac{6EI}{L^2}su_1 + \frac{6EI}{L^2}cv_1 + \frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{6EI}{L^2}su_2 - \frac{6EI}{L^2}cv_2 + \frac{2EI}{L}\varphi_2 + MK_1 \\ &= Cu_1 + Ev_1 + F\varphi_1 - Cu_2 - Ev_2 + G\varphi_2 + MK_1 \end{aligned}$$

Sauvanpään 2 yleistetyille sauvanpäävoimille rakennekoordinaatistossa saadaan vastaavantyyppiset lausekkeet. Tulos yhdistettynä antaa **kehäsauvan yleistettyjen sauvanpäävoimien ja -siirtymien yhteydet rakennekoordinaatistossa** ja ne ovat

$$\begin{cases} U_1 = Au_1 + Bv_1 + C\varphi_1 - Au_2 - Bv_2 + C\varphi_2 + cUK_1 - sVK_1 \\ V_1 = Bu_1 + Dv_1 + E\varphi_1 - Bu_2 - Dv_2 + E\varphi_2 + sUK_1 + cVK_1 \\ M_1 = Cu_1 + Ev_1 + F\varphi_1 - Cu_2 - Ev_2 + G\varphi_2 + MK_1 \\ U_2 = -Au_1 - Bv_1 - C\varphi_1 + Au_2 + Bv_2 - C\varphi_2 + cUK_2 - sVK_2 \\ V_2 = -Bu_1 - Dv_1 - E\varphi_1 + Bu_2 + Dv_2 - E\varphi_2 + sUK_2 + cVK_2 \\ M_2 = Cu_1 + Ev_1 + G\varphi_1 - Cu_2 - Ev_2 + F\varphi_2 + MK_2 \end{cases} \quad (4.36)$$

Niissä on käytetty seuraavia lyhennysmerkintöjä

$$\begin{aligned} A &= \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2, \quad B = \frac{EA}{L}sc - \frac{12EI}{L^3}sc, \quad C = -\frac{6EI}{L^2}s \\ D &= \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2, \quad E = \frac{6EI}{L^2}c, \quad F = \frac{4EI}{L}, \quad G = \frac{2EI}{L}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nämä yhteydet voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e + \{FK\}^e, \quad (4.38)$$

missä

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.39)$$

ovat elementin yleistettyjen sauvanpäävoimien ja sauvanpääsiirtymien muodostamat pystyvektorit,

$$[K]^e = \begin{bmatrix} A & B & C & -A & -B & C \\ B & D & E & -B & -D & E \\ C & E & F & -C & -E & G \\ -A & -B & -C & A & B & -C \\ -B & -D & -E & B & D & -E \\ C & E & G & -C & -E & F \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

on **elementin jäykkyyismatriisi** ja

$$\{FK\}^e = \begin{Bmatrix} FK_1^e \\ FK_2^e \\ FK_3^e \\ FK_4^e \\ FK_5^e \\ FK_6^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} cUK_1 - sVK_1 \\ sUK_1 + cVK_1 \\ MK_1 \\ cUK_2 - sVK_2 \\ sUK_2 + cVK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

on **elementin kuormitustermivektori**. Lausekkeissa esiintyvä yläindeksi e viittaa kysymyksessä olevan elementin numeroon.

4.5 Tasosauvaelementtien yhteenvetotaulukko

Taulukossa 4.1 on esitetty kompaktissa muodossa tasosauvaelementtien jäykkyyismatriisit ja kuormitustermivektorit. Viimeisessä sarakkeessa on myös esitetty kaavat, joita apuna käyttäen voidaan mukavasti määrittää leikkausrasitukset elementin alueella. Taulukossa 4.2 on esitetty laskelmissa tarvittavat kuormitustermit.

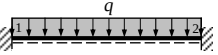
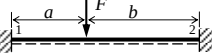
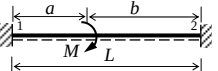
Taulukko 4.1: Tasosauvaelementtien jäykkyyismetriiseja ja kuormitustermivektoreita

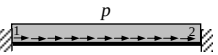
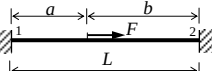
Nivelsauvaelementti:	$[K]^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}, \{FK\}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	Sauvavoima: $S^e = \frac{EA}{L} (-ca_1^e - sa_2^e + ca_3^e + sa_4^e)$
Palkkielementti:	$[K]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \{FK\}^e = \begin{Bmatrix} VK_1 \\ MK_1 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}$	Solmleikkausvoimat ja -taivutusmomentit: $Q_1^e = -F_1^e, M_1^e = F_2^e, Q_2^e = F_3^e, M_2^e = -F_4^e$
Tasokehäelementti:	$[K]^e = \begin{bmatrix} A & B & C & -A & -B & C \\ B & D & E & -B & -D & E \\ C & E & F & -C & -E & G \\ -A & -B & -C & A & B & -C \\ -B & -D & -E & B & D & -E \\ C & E & G & -C & -E & F \end{bmatrix}, \{FK\}^e = \begin{Bmatrix} cUK_1 - sVK_1 \\ sUK_1 + cVK_1 \\ MK_1 \\ cUK_2 - sVK_2 \\ sUK_2 + cVK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}$ $A = \frac{EA}{L} c^2 + \frac{12EI}{L^3} s^2, B = \frac{EA}{L} sc - \frac{12EI}{L^3} sc, C = -\frac{6EI}{L^2} s$ $D = \frac{EA}{L} s^2 + \frac{12EI}{L^3} c^2, E = \frac{6EI}{L^2} c, F = \frac{4EI}{L}, G = \frac{2EI}{L}$	Solmunormaalivoimat, -leikkausvoimat ja -taivutusmomentit: $N_1^e = -cF_1^e - sF_2^e, Q_1^e = sF_1^e - cF_2^e, M_1^e = F_3^e, N_2^e = cF_4^e + sF_5^e, Q_2^e = -sF_4^e + cF_5^e, M_2^e = -F_6^e$

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, luennot

140

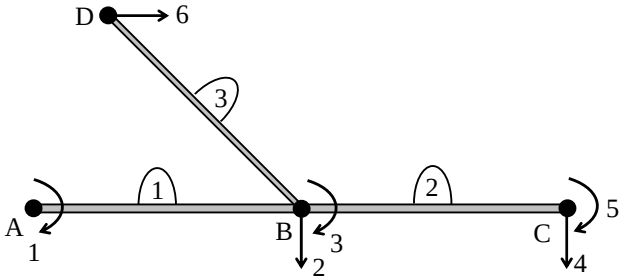
Taulukko 4.2: Palkin ja tasokehän kuormitustermejä

Palkin ja tasokehän poikittaisen kuormituksen kuormitustermejä:		
	$VK_1 = -\frac{qL}{2}, VK_2 = -\frac{qL}{2}$	$MK_1 = -\frac{qL^2}{12}, MK_2 = \frac{qL^2}{12}$
	$VK_1 = -\frac{Fb}{L}[1 + \frac{a(b-a)}{L^2}], VK_2 = -\frac{Fa}{L}[1 + \frac{b(a-b)}{L^2}]$	$MK_1 = -\frac{Fab^2}{L^2}, MK_2 = \frac{Fa^2b}{L^2}$
	$VK_1 = \frac{M}{L}(2 - 3\frac{a^2}{L^2} + \frac{b^2}{L^2}), VK_2 = -\frac{M}{L}(2 - 3\frac{a^2}{L^2} + \frac{b^2}{L^2})$	$MK_1 = \frac{Mb}{L}(2 - 3\frac{b}{L}), MK_2 = \frac{Ma}{L}(2 - 3\frac{a}{L})$

Tasokehän aksiaalisen kuormituksen kuormitustermejä:	
	$UK_1 = -\frac{pL}{2}, UK_2 = -\frac{pL}{2}$
	$UK_1 = -\frac{Fb}{L}, UK_2 = -\frac{Fa}{L}$

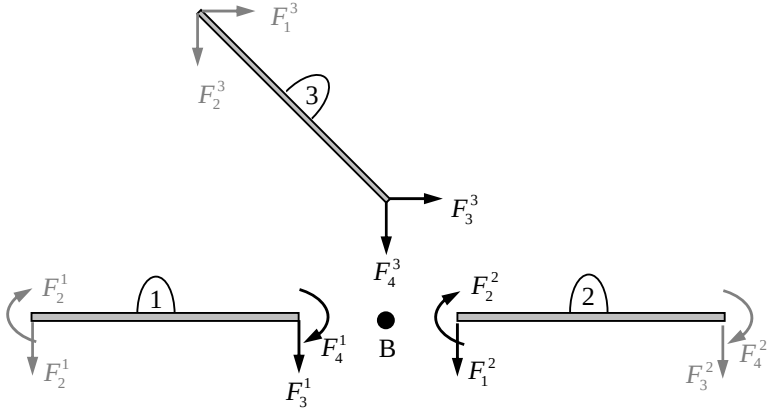
4.6 Elementtimenetelmän kokoamismenettely

Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 4.11 rakennemallia (tai rakennemallin osaa), joka muodostuu kahdesta palkkielementistä 1 ja 2 sekä nivelsauvaelementistä 3. Kuvassa on myös esitetty sen systeemivapausasteet, jotka on numeroitu yhdestä kuuteen. Tarkastellaan solmua B, johon liittyvät systeemivapausasteet 2 ja 3 ja määritetään solmuun liittyvien elementtien 1, 2 ja 3 vapausasteita vastaavien sauvanpäävoimien summat.



Kuva 4.11: Kolmen elementin ja viiden vapausasteen rakennemalli

Solmuun B liittyvät elementtien yleistetyt sauvanpäävoimat on esitetty kuvassa 4.12.



Kuva 4.12: Solmuun B liittyvät elementtien 1, 2 ja 3 yleistetyt sauvanpäävoimat

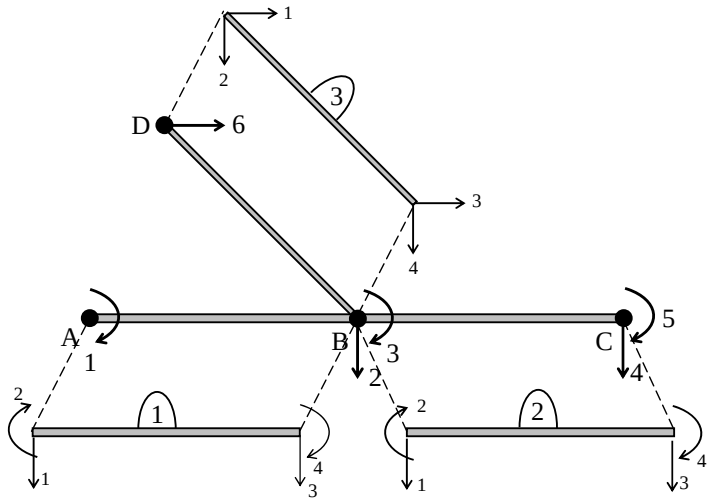
Solmuun B liittyvien elementtien yleistettyjen sauvanpäävoimien summille saadaan

$$\Sigma F_2 = F_3^1 + F_1^2 + F_4^3$$

$$\Sigma F_3 = F_4^1 + F_2^2$$

Käyttäen elementtien sauvanpäävoimien ja -siirtymien yhteyksiä, saadaan nämä muotoon

$$\begin{aligned}\Sigma F_2 &= K_{31}^1 a_1^1 + K_{32}^1 a_2^1 + K_{33}^1 a_3^1 + K_{34}^1 a_4^1 + FK_3^1 \\ &\quad + K_{11}^2 a_1^2 + K_{12}^2 a_2^2 + K_{13}^2 a_3^2 + K_{14}^2 a_4^2 + FK_1^2 \\ &\quad + K_{41}^3 a_1^3 + K_{42}^3 a_2^3 + K_{43}^3 a_3^3 + K_{44}^3 a_4^3 + FK_4^3 \\ \Sigma F_3 &= K_{41}^1 a_1^1 + K_{42}^1 a_2^1 + K_{43}^1 a_3^1 + K_{44}^1 a_4^1 + FK_4^1 \\ &\quad + K_{21}^2 a_1^2 + K_{22}^2 a_2^2 + K_{23}^2 a_3^2 + K_{24}^2 a_4^2 + FK_2^2\end{aligned}$$



Kuva 4.13: Elementtien ja rakenteen vapausastesiirtymien yhteyksiä valaiseva kuva.

Ottamalla huomioon vapausastesiirtymien yhteensopivuusehdot sauvojen päissä (kuva 4.13) saadaan edelleen

$$\begin{aligned}\Sigma F_2 &= K_{31}^1 a_1^1 + K_{32}^1 a_2^1 + K_{33}^1 a_3^1 + K_{34}^1 a_4^1 + FK_3^1 \\ &\quad + K_{11}^2 a_1^2 + K_{12}^2 a_2^2 + K_{13}^2 a_3^2 + K_{14}^2 a_4^2 + FK_1^2 \\ &\quad + K_{41}^3 a_1^3 + K_{42}^3 a_2^3 + K_{43}^3 a_3^3 + K_{44}^3 a_4^3 + FK_4^3 \\ \Sigma F_3 &= K_{41}^1 a_1^1 + K_{42}^1 a_2^1 + K_{43}^1 a_3^1 + K_{44}^1 a_4^1 + FK_4^1 \\ &\quad + K_{21}^2 a_1^2 + K_{22}^2 a_2^2 + K_{23}^2 a_3^2 + K_{24}^2 a_4^2 + FK_2^2\end{aligned}$$

ja järjestämällä termejä

$$\begin{aligned}\Sigma F_2 &= K_{32}^1 a_1 + (K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{44}^3) a_2 + (K_{34}^1 + K_{12}^2) a_3 + K_{13}^2 a_4 + K_{14}^2 a_5 + K_{41}^3 a_6 \\ &\quad + FK_3^1 + FK_1^2 + FK_4^3 \\ \Sigma F_3 &= K_{42}^1 a_1 + (K_{43}^1 + K_{21}^2) a_2 + (K_{44}^1 + K_{22}^2) a_3 + K_{23}^2 a_4 + K_{24}^2 a_5 + 0 \cdot a_6 \\ &\quad + FK_4^1 + FK_2^2\end{aligned}$$

Näin solmuun B liittyviä vapausastesiirtymiä 2 ja 3 vastaavat elementtien yleistettyjen sauvanpäävoimien summat voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}\Sigma F_2 &= K_{21} a_1 + K_{22} a_2 + K_{23} a_3 + K_{24} a_4 + K_{25} a_5 + K_{26} a_6 + FK_2, \\ \Sigma F_3 &= K_{31} a_1 + K_{32} a_2 + K_{33} a_3 + K_{34} a_4 + K_{35} a_5 + K_{36} a_6 + FK_3,\end{aligned}$$

missä on otettu käyttöön lyhennysmerkinnät

$$\begin{aligned}K_{21} &= K_{32}^1, K_{22} = K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{44}^3, K_{23} = K_{34}^1 + K_{12}^2, K_{24} = K_{13}^2, \\ K_{25} &= K_{14}^2, K_{26} = K_{41}^3, FK_2 = FK_3^1 + FK_1^2 + FK_4^3, \\ K_{31} &= K_{42}^1, K_{32} = K_{43}^1 + K_{21}^2, K_{33} = K_{44}^1 + K_{22}^2, K_{34} = K_{23}^2, \\ K_{35} &= K_{24}^2, K_{36} = 0, FK_3 = FK_4^1 + FK_2^2.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Näin on esimerkkimäisesti osoitettu, että rakenteen vapausasteeseen i liittyvien elementtien yleistettyjen sauvanpäävoimien summa on muotoa

$$\Sigma F_i = K_{i1}a_1 + \dots + K_{iM}a_M + FK_i, \quad (4.43)$$

missä M on rakenteen systeemivapausasteiden lukumäärä. Vapausasteeseen i liittyvän solmun vastaava tasapainoyhtälö voidaan esittää muodossa

$$\Sigma F_i = P_i \quad (4.44)$$

missä P_i on vapausasteeseen (mahdollisesti) liittyvä ulkoinen vapausastekuorma (pistevoima tai momentti). Näin vapausasteeseen i liittyvä tasapainoyhtälö saa muodon

$$K_{i1}a_1 + \dots + K_{iM}a_M + FK_i = P_i. \quad (4.45)$$

Tällainen yhtälö voidaan kirjoittaa rakenteen kutakin vapausastetta kohti, jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\}, \quad (4.46)$$

missä

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{M1} & \dots & K_{MM} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

on **rakenteen jäykkyyssmatriisi**,

$$\{FK\} = \begin{Bmatrix} FK_1 \\ \vdots \\ FK_M \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_M \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

ovat **rakenteen kuormitustermivektori** ja **vapausastekuormien muodostama pystyvektori**. Yhtälöryhmä (4.46) lopullisessa muodossaan on

$$[K]\{a\} = \{R\}, \quad (4.49)$$

missä vakiovektoria

$$\{R\} = \{P\} - \{FK\} \quad (4.50)$$

kutsutaan **rakenteen kuormitusvektoriksi**, koska siihen sisältyy rakenteeseen kohdistuvan ulkoisen kuormituksen vaikutus.

Edellä suoritettussa esimerkkimäisessä tarkastelussa päädyimme kaavoihin (4.42), joilla rakenteen jäykkyyssmatriisin ja kuormitustermivektorin alkiot K_{ij} ja FK_i saatiin summuna tietyistä elementtien jäykkyyssmatriisien ja kuormitustermivektorien alkioista K_{ij}^e ja FK_i^e .

Seuraavassa esitetään niin sanottu **elementtimenetelmän kokoamismenettely**, jonka avulla rakenteen jäykkyyssmatriisin ja kuormitustermivektorin alkiot K_{ij} ja FK_{ij} voidaan **koota** elementtien jäykkyyssmatriisien ja kuormitustermivektorien alkioista K_{ij}^e ja FK_i^e **alkio kerrallaan**.

Rakenteen jäykkyyssmatriisin kokoamiskaava on

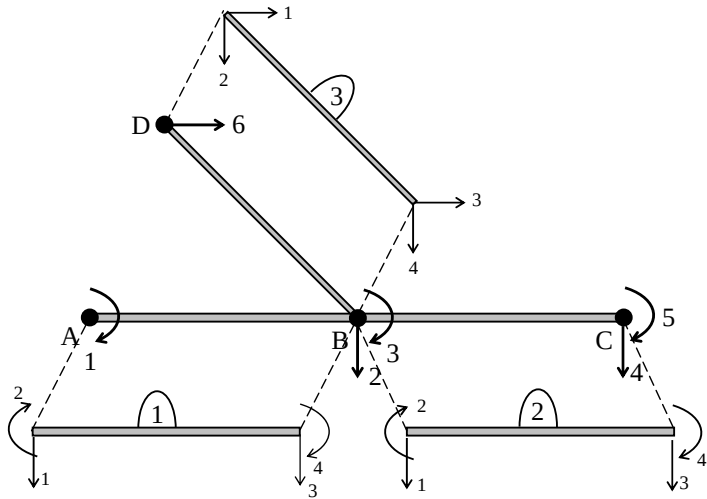
$$K_{ij} = \sum_e K_{rs}^e. \quad (4.51)$$

Kaavassa summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteisiin i ja j (jos tällaisia elementtejä ei ole K_{ij} :stä tulee nolla-alkio) sekä r ja s ovat elementin e systeemivapausasteita i ja j vastaavat elementtivapausastenumero. **Rakenteen kuormitustermivektorin kokoamiskaava** on

$$FK_i = \sum_e FK_r^e. \quad (4.52)$$

Kaavassa summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteeseen i , sekä r on elementin e systeemivapausastetta i vastaava elementtivapausastenumero.

Elementtimenetelmän kokoamismenettelyn kaavoja ei tässä yleisesti johdeta. Niiden toimivuus osoitetaan vain esimerkkimäisesti esillä olleen esimerkkirakenteen yhteydessä. Kootaan siis kuvan 4.10 rakenteen vapausasteisiin 2 ja 3 liittyviin yhtälöihin tulevat rakenteen jäykkyyssmatriisin ja kuormitustermivektorin alkiot. Kokoamisessa on tarkoituksen mukaista käyttää apuna kuvaa 4.14.



Kuva 4.14: Elementti- ja systeemivapausteiden yhteydet.

Rakenteen jäykkyyismatriisiin alkioille K_{2j} , $j=1, \dots, 6$ ja kuormitustermi-vektorin alkioille FK_2 saadaan

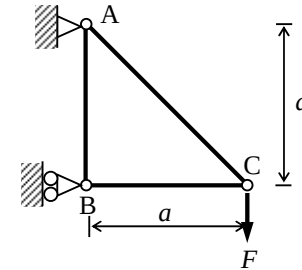
$$K_{21} = K_{32}^1, K_{22} = K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{44}^3, K_{23} = K_{34}^1 + K_{12}^2, K_{24} = K_{13}^2, \\ K_{25} = K_{14}^2, K_{26} = K_{41}^3, FK_2 = FK_3^1 + FK_1^2 + FK_4^3.$$

Rakenteen jäykkyyismatriisiin alkioille K_{3j} , $j=1, \dots, 6$ ja kuormitustermi-vektorin alkioille FK_3 saadaan

$$K_{31} = K_{42}^1, K_{32} = K_{43}^1 + K_{21}^2, K_{33} = K_{44}^1 + K_{22}^2, K_{34} = K_{23}^2, \\ K_{35} = K_{24}^2, K_{36} = 0, FK_{31} = FK_4^1 + FK_2^2.$$

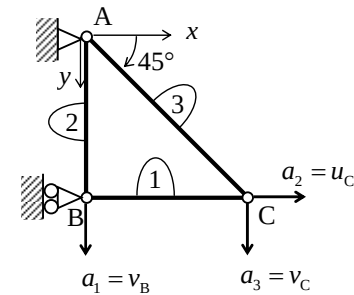
Saatiin samat tulokset, kuin edellä kaavoissa (4.42).

Esimerkki 4.1: Määritetään elementtimenetelmällä oheisen tasoristikon nivelten siirtymät ja sauvavoimat. Ristikön sauvojen poikkipinta-ala A ja kimmomoduuli E ovat vakioita.



Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausteet:



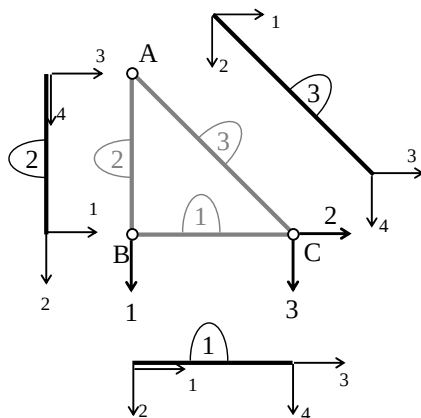
Elementtien pituudet ja kaltevuuskulmien sinit ja kosinit:

e	α	L	c	s
1	0	a	1	0
2	-90°	a	0	-1
3	45°	$a\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha$$

Vapausastekuvio:



Rakenteen jäykkyyssmatriisin alkiot:

Kootaan alkio kerrallaan:

$$K_{11} = K_{22}^1 + K_{22}^2 = \frac{EA}{a} \cdot 0^2 + \frac{EA}{a} \cdot (-1)^2 = \frac{EA}{a}$$

$$K_{12} = K_{23}^1 = -\frac{EA}{a} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$K_{13} = K_{24}^1 = \frac{EA}{a} \cdot 0^2 = 0$$

$$K_{21} = K_{12} = 0 \text{ (Jäykkyyssmatriisin symmetria)}$$

$$K_{22} = K_{33}^1 + K_{33}^2 = \frac{EA}{a} \cdot 1^2 + \frac{EA}{a\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{4} \frac{EA}{a}$$

$$K_{23} = K_{34}^1 + K_{34}^2 = \frac{EA}{a} \cdot 0 \cdot 1 + \frac{EA}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{a}$$

$$K_{31} = K_{13} = 0 \text{ (Jäykkyyssmatriisin symmetria)}$$

$$K_{32} = K_{23} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{a} \text{ (Jäykkyyssmatriisin symmetria)}$$

$$K_{33} = K_{44}^1 + K_{44}^2 = \frac{EA}{a} \cdot 0^2 + \frac{EA}{a\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{a}$$

Rakenteen jäykkyyssmatriisi:

$$[K] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Rakenteen kuormitustermivektori:

Koska ristikkoelementeillä $\{FK\}^e = \{0\}$, saadaan

$$\{FK\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Vapausastekuormien muodostama pystyvektori:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Rakenteen kuormitusvektori:

$$\{R\} = \{P\} - \{FK\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$[K]\{a\} = \{R\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{4Fa}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (4 + \sqrt{2})a_2 + \sqrt{2}a_3 = 0 \\ \sqrt{2}a_2 + \sqrt{2}a_3 = 4\frac{Fa}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -\frac{Fa}{EA} \\ a_3 = (1 + 2\sqrt{2})\frac{Fa}{EA} \end{cases}$$

Nivelten siirtymät:

$$v_B = a_1 = \underline{0}, \quad u_C = a_2 = -\frac{Fa}{EA}, \quad v_C = a_3 = (1 + 2\sqrt{2})\frac{Fa}{EA}$$

Sauvavoimat:

$$S^e = \frac{EA}{L^e}(-ca_1^e - sa_2^e + ca_3^e + ca_4^e)$$

Elementti 1:

$$S^1 = \frac{EA}{a}(-1 \cdot \overset{0}{a_1^1} - 0 \cdot \overset{a_1}{a_2^1} + 1 \cdot \overset{a_2}{a_3^1} + 0 \cdot \overset{a_3}{a_4^1}) = \frac{EA}{a}a_2 = \underline{\underline{-F}}$$

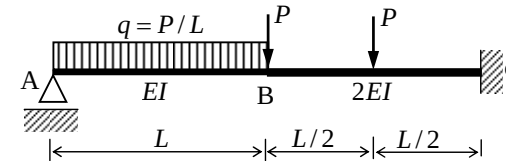
Elementti 2:

$$S^2 = \frac{EA}{a}(-0 \cdot \overset{0}{a_1^2} + 1 \cdot \overset{a_1}{a_2^2} + 0 \cdot \overset{0}{a_3^2} - 1 \cdot \overset{0}{a_4^2}) = \frac{EA}{a}a_1 = \underline{0}$$

Elementti 3:

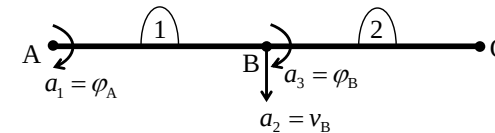
$$S^3 = \frac{EA}{a\sqrt{2}}[-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overset{0}{a_1^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overset{0}{a_2^3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overset{a_2}{a_3^3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overset{a_3}{a_4^3}] = \frac{EA}{2a}(a_2 + a_3) = \underline{\underline{F\sqrt{2}}}$$

Esimerkki 4.2: Määritetään elementtimenetelmällä oheisen palkin kiertymä pisteessä A, taipuma ja kiertymä pisteessä B sekä taivutusmomentit pisteissä B ja C.

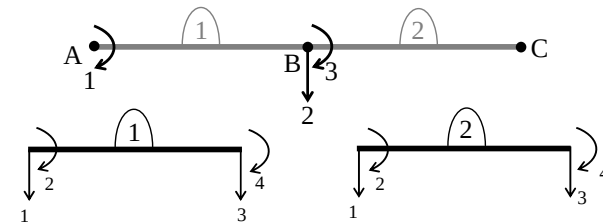


Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausasteet:



Vapausastekuvio:



Rakenteen jäykkyyismatriisin alkiot:

Kootaan alkio kerrallaan:

$$K_{11} = K_{22}^1 = \frac{EI}{L^3} \cdot 4L^2$$

$$K_{12} = K_{23}^1 = \frac{EI}{L^3} \cdot (-6L) = K_{21}$$

$$K_{13} = K_{24}^1 = \frac{EI}{L^3} \cdot 2L^2 = K_{31}$$

$$K_{22} = K_{33}^1 + K_{11}^2 = \frac{EI}{L^3} \cdot 12 + \frac{2EL}{L^3} \cdot 12 = \frac{EI}{L^3} \cdot 36$$

$$K_{23} = K_{34}^1 + K_{12}^2 = \frac{EI}{L^3} \cdot (-6L) + \frac{2EI}{L^3} \cdot 6L = \frac{EI}{L^3} \cdot 6L = K_{32}$$

$$K_{33} = K_{44}^1 + K_{22}^2 = \frac{EI}{L^3} \cdot 4L^2 + \frac{2EI}{L^3} \cdot 4L^2 = \frac{EI}{L^3} \cdot 12L^2$$

Rakenteen jäykkymatriisi:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 36 & 6L \\ 2L^2 & 6L & 12L^2 \end{bmatrix}$$

Rakenteen kuormitustermivektorin alkio:

$$FK_1 = FK_2^1 = MK_1^1 = -\frac{\frac{P}{L} \cdot L^2}{12} = -\frac{PL}{12}$$

$$FK_2 = FK_3^1 + FK_1^2 = VK_2^1 + VK_1^2 = -\frac{\frac{P}{L} \cdot L}{2} - \frac{P \cdot (L/2)}{L} \left[1 + \frac{L/2(L/2 - L/2)}{L^2} \right]$$

$$= -P$$

$$FK_3 = FK_4^1 + FK_3^2 = MK_2^1 + MK_1^2 = \frac{\frac{P}{L} \cdot L^2}{12} - \frac{P \cdot L/2 \cdot (L/2)^2}{L^2} = -\frac{PL}{24}$$

Rakenteen kuormitustermivektori:

$$\{FK\} = -\frac{P}{24} \begin{Bmatrix} 2L \\ 24 \\ L \end{Bmatrix}$$

Vapausastekuormien muodostama pystyvektori:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rakenteen kuormitusvektori:

$$\{R\} = \{P\} - \{FK\} = \frac{P}{24} \begin{Bmatrix} 2L \\ 48 \\ L \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä:

$$[K]\{a\} = \{R\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 36 & 6L \\ 2L^2 & 6L & 12L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{P}{24} \begin{Bmatrix} 2L \\ 48 \\ L \end{Bmatrix}$$

Muokataan yhtälöryhmää siten, että se on helppo ratkaista taskulaskimella tai matematiikkaohjelmalla:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{EI}{L^3} (4L^2 a_1 - 6La_2 + 2L^2 a_3) = \frac{P}{24} \cdot 2L \\ \frac{EI}{L^3} (-6La_1 + 36a_2 + 6La_3) = \frac{P}{24} \cdot 48 \\ \frac{EI}{L^3} (2L^2 a_1 + 6La_2 + 12L^2 a_3) = \frac{P}{24} \cdot L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4La_1 - 6a_2 + 2La_3 = \frac{PL^3}{24EI} \cdot 2 \\ -6La_1 + 36a_2 + 6La_3 = \frac{PL^3}{24EI} \cdot 48 \\ 2La_1 + 6a_2 + 12La_3 = \frac{PL^3}{24EI} \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 36 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} La_1 \\ a_2 \\ La_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL^3}{24EI} \begin{Bmatrix} 2 \\ 48 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ratkaisu:

$$\begin{Bmatrix} La_1 \\ a_2 \\ La_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0,2274 \\ 0,1082 \\ -0,0885 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 = \\ a_2 = \\ a_3 = \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi_A = a_1 = 0,2274 \frac{PL^2}{EI}}}, \underline{\underline{v_B = a_2 = 0,1082 \frac{PL^3}{EI}}}, \underline{\underline{\varphi_B = a_3 = -0,0885 \frac{PL^2}{EI}}},$$

Taivutusmomentit:

$$M_B = M_1^2 = F_2^2 = K_{21}^2 \overbrace{a_1^2}^{a_2} + K_{22}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_3} + K_{23}^2 \overbrace{a_3^2}^0 + K_{24}^2 \overbrace{a_4^2}^0 + \overbrace{FK_2^2}^{MK_1^2} =$$

$$= \frac{2EI}{L^3} (6La_2 + 4L^2a_3) + \overbrace{MK_1^2}^{\frac{P(L/2)^3}{L^2}} = \frac{EI}{L^2} (12a_2 + 8La_3) - \frac{1}{8} PL$$

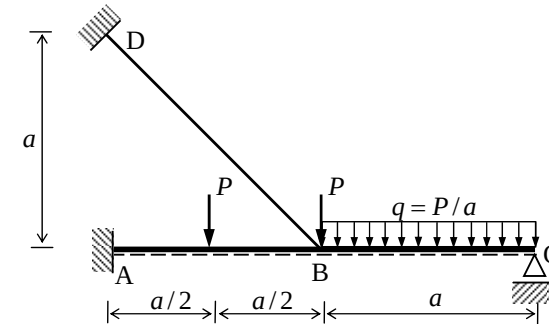
$$= \underline{\underline{0,4654PL}}$$

$$M_C = -M_2^2 = -F_4^2 = -(K_{41}^2 \overbrace{a_1^2}^{a_2} + K_{42}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_3} + K_{43}^2 \overbrace{a_3^2}^0 + K_{44}^2 \overbrace{a_4^2}^0 + \overbrace{FK_4^2}^{MK_3^2})$$

$$= -\frac{2EI}{L^3} (6La_1^2 + 2L^2a_2^2) - \overbrace{MK_2^2}^{\frac{P(L/2)^3}{L^2}} = -\frac{EI}{L^2} (12a_2 + 4La_3) - \frac{PL}{8}$$

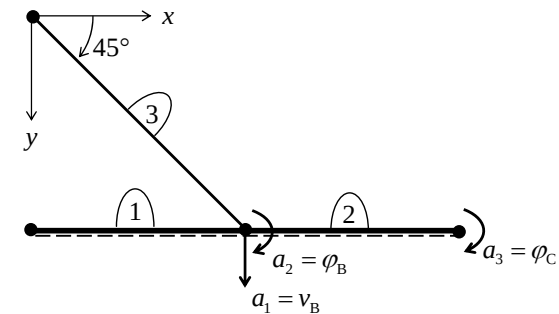
$$= \underline{\underline{-1,069PL}}$$

Esimerkki 4.3: Ratkaise sauvarakenteiden elementtimenetelmällä oheisen köydellä vahvistetun palkin kiertymä ja taipuma pisteessä B sekä kiertymä pisteessä C. Määritä lisäksi köyden BD normaalivoima (köysivoima) ja palkin AC leikkausvoimien ja taivutusmomenttien arvot pisteissä A, B ja C. Palkki AC on aksiaalisesti jäykkä ja sen taivutusjäykkyys on vakio EI . Köysi BD kuvataan ristikkoelementtinä, jonka aksiaalijäykkyys on $EA = 2EI/a^2$.



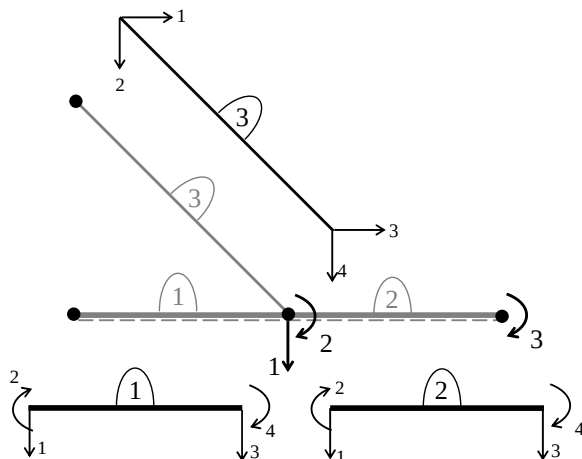
Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausasteet:



Elementit 1 ja 2 ovat palkkielementtejä ja elementti 3 on nivelsauva-elementti. Valittiin yhteinen koordinaatisto, jonka y -akseli on alaspäin. Näin ristikkoelementin 3 kaltevuuskulma on $\alpha = +45^\circ$, jolloin $c = 1/\sqrt{2}$ ja $s = 1/\sqrt{2}$.

Vapausastekuvio:



Rakenteen jäykkyyssmatriisin alkiot:

$$K_{11} = K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{44}^3 = \frac{12EI}{a^3} + \frac{12EI}{a^3} + \frac{\overbrace{EA}^{2EI/a^2}}{a\sqrt{2}} \overbrace{\sin^2 45^\circ}^{1/2} = \left(24 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{EI}{a^3}$$

$$K_{12} = K_{34}^1 + K_{12}^2 = -\frac{6EI}{a^2} + \frac{6EI}{a^2} = 0$$

$$K_{13} = K_{14}^2 = \frac{6EI}{a^2}$$

$$K_{21} = K_{43}^1 + K_{21}^2 = -\frac{6EI}{a^2} + \frac{6EI}{a^2} = 0$$

$$K_{22} = K_{44}^1 + K_{22}^2 = \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{8EI}{a}$$

$$K_{23} = K_{24}^2 = \frac{2EI}{a}$$

$$K_{31} = K_{41}^2 = \frac{6EI}{a^2}$$

$$K_{32} = K_{42}^2 = \frac{2EI}{a}$$

$$K_{33} = K_{44}^2 = \frac{4EI}{a}$$

Rakenteen jäykkyyssmatriisi:

$$[K] = \begin{bmatrix} \left(24 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{EI}{a^3} & 0 & 6 \frac{EI}{a^2} \\ 0 & 8 \frac{EI}{a} & 2 \frac{EI}{a} \\ 6 \frac{EI}{a^2} & 2 \frac{EI}{a} & 4 \frac{EI}{a} \end{bmatrix}$$

Rakenteen kuormitustermivektorin alkiot:

$$FK_1 = FK_3^1 + FK_1^2 + \overbrace{FK_4^3}^0 = VK_2^1 + VK_1^2 = -\frac{P \cdot a/2}{a}(1+0) - \frac{P/a \cdot a}{2} = -P$$

$$FK_2 = FK_4^1 + FK_2^2 = MK_2^1 + MK_1^2 = \frac{P(a/2)^3}{a^2} - \frac{P/a \cdot a^2}{12} = \frac{Pa}{24}$$

$$FK_3 = FK_4^2 = MK_2^2 = \frac{P/a \cdot a^2}{12} = \frac{Pa}{12}$$

Rakenteen kuormitustermivektori:

$$\{FK\} = \begin{Bmatrix} -P \\ \frac{Pa}{24} \\ \frac{Pa}{12} \end{Bmatrix}$$

Rakenteen kuormitusvektori:

$$\{R\} = \{P\} - \{FK\} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -P \\ \frac{Pa}{24} \\ \frac{Pa}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ -\frac{Pa}{24} \\ -\frac{Pa}{12} \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä:

$$\begin{bmatrix} (24 + \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{EI}{a^3} & 0 & 6\frac{EI}{a^2} \\ 0 & 8\frac{EI}{a} & 2\frac{EI}{a} \\ 6\frac{EI}{a^2} & 2\frac{EI}{a} & 4\frac{EI}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ -\frac{Pa}{24} \\ -\frac{Pa}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 24 + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ aa_2 \\ aa_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \frac{Pa^3}{EI} \begin{Bmatrix} 48 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Ratkaisu:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ aa_2 \\ aa_3 \end{Bmatrix} = \frac{Pa^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0,14735 \\ 0,06315 \\ -0,27343 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_B = a_1 = 0,14735 \frac{Pa^3}{EI}, \varphi_B = a_2 = 0,06315 \frac{Pa^2}{EI}, \varphi_C = a_3 = -0,27343 \frac{Pa^2}{EI}$$

Köyden normaalivoima (sauvaelementin 3 sauvavoima):

$$S^3 = \frac{\overbrace{EA}^{2EI/a^2}}{a\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{a_1^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{a_2^3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{a_3^3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{a_1}{a_3^3} \right) = \frac{EI}{a^3} a_1 = \underline{\underline{0,14735P}}$$

Leikkausvoimat ja taivutusmomentit pisteissä A, B ja C:

Piste A:

$$Q_A = Q_1^1 = -F_1^1 = -\left(\sum_{i=1}^4 K_{1i}^1 a_i^1 + FK_1^1 \right) = -\frac{EI}{a^3} (12 \overset{0}{a_1^1} + 6a \overset{0}{a_2^1} - 12 \overset{a_1}{a_3^1} + 6a \overset{a_2}{a_4^1}) - VK_1^1$$

$$= \frac{EI}{a^3} (12a_1 - 6aa_2) + \frac{P(a/2)}{a} (1+0) = \underline{\underline{1,8893P}}$$

$$M_A = M_1^1 = F_2^1 = \sum_{i=1}^4 K_{2i}^1 a_i^1 + FK_1^1 = \frac{EI}{a^3} (6a \overset{0}{a_1^1} + 4a^2 \overset{0}{a_2^1} - 6a \overset{a_1}{a_3^1} + 2a^2 \overset{a_2}{a_4^1}) + MK_1^1$$

$$= \frac{EI}{a^2} (-6a_1 + 2aa_2) - \frac{P(a/2)^3}{a^2} = \underline{\underline{-0,8828Pa}}$$

Piste B:

$$Q_B^{\text{vas}} = Q_2^1 = F_3^1 = \sum_{i=1}^4 K_{3i}^1 a_i^1 + FK_3^1 = \frac{EI}{a^3} (-12 \overset{0}{a_1^1} - 6a \overset{0}{a_2^1} + 12 \overset{a_1}{a_3^1} - 6a \overset{a_2}{a_4^1}) + VK_3^1$$

$$= \frac{EI}{a^3} (12a_1 - 6aa_2) - \frac{P(a/2)}{a} (1+0) = \underline{\underline{0,8893P}}$$

$$Q_B^{\text{oik}} = Q_1^2 = -F_1^2 = -\left(\sum_{i=1}^4 K_{1i}^2 a_i^2 + FK_1^2 \right) = -\frac{EI}{a^3} (12 \overset{a_1}{a_1^2} + 6a \overset{a_2}{a_2^2} - 12 \overset{0}{a_3^2} + 6a \overset{a_3}{a_4^2}) - VK_1^2$$

$$= \frac{EI}{a^3} (-12a_1 - 6aa_2 - 6aa_3) + \frac{P/a \cdot a}{2} = \underline{\underline{-0,0065P}}$$

$$M_B = M_2^1 = -F_4^1 = -\left(\sum_{i=1}^4 K_{4i}^1 a_i^1 + FK_4^1 \right) = -\frac{EI}{a^3} (6a \overset{0}{a_1^1} + 2a^2 \overset{0}{a_2^1} - 6a \overset{a_1}{a_3^1} + 4a^2 \overset{a_2}{a_4^1}) - MK_2^1$$

$$= \frac{EI}{a^2} (6a_1 - 4aa_2) - \frac{P(a/2)^3}{a^2} = \underline{\underline{0,5065Pa}}$$

Piste C:

$$Q_C = Q_2^2 = F_3^2 = \sum_{i=1}^4 K_{3i}^2 a_i^2 + FK_3^2 = \frac{EI}{a^3} (-12 \overset{a_1}{a_1^2} - 6a \overset{a_2}{a_2^2} + 12 \overset{0}{a_3^2} - 6a \overset{a_3}{a_4^2}) + VK_3^2$$

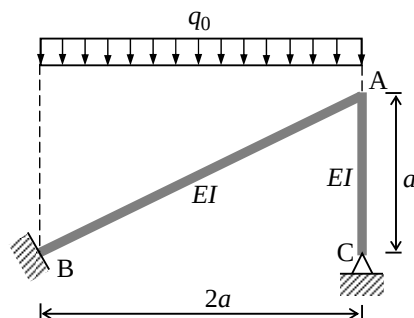
$$= \frac{EI}{a^3} (-12a_1 - 6aa_2 - 6aa_3) - \frac{P/a \cdot a}{2} = \underline{\underline{-1,00649P}}$$

$$M_C = M_2^2 = -F_4^2 = -\left(\sum_{i=1}^4 K_{4i}^2 a_i^2 + FK_4^2 \right) = -\frac{EI}{a^3} (6a \overset{a_1}{a_1^2} + 2a^2 \overset{a_2}{a_2^2} - 6a \overset{0}{a_3^2} + 4a^2 \overset{a_3}{a_4^2}) - MK_2^2$$

$$= \frac{EI}{a^2} (-6a_1 - 2aa_2 - 4aa_3) - \frac{P/a \cdot a}{12} = \underline{\underline{0}}$$

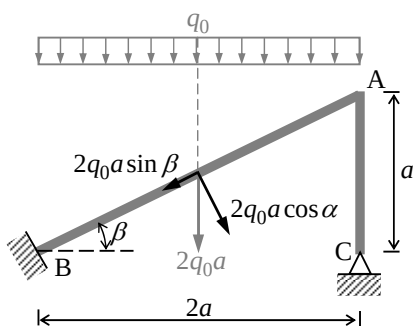
Esimerkki 4.2:

Ohesta tasokehää kuormittaa kuvan (vaakatason pituutta kohti) tasan jakautunut lumikuorma q_0 . Määritä elementtimenelmällä kehän pisteiden A ja C kiertymät, taivutusmomentin arvot pisteissä A ja B sekä taivutusmomenttikuvio. Palkin aksiaalijäykkyydelle käytetään arvoa arvo $EA = 100EI / a^2$.



Ratkaisu:

Sauvan AB tasainen kuormitus:



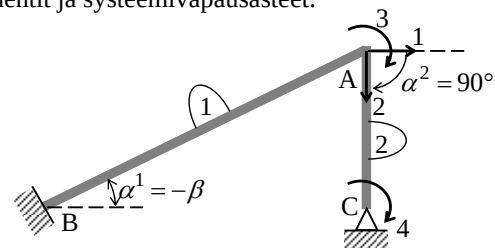
$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Saadaan:

$$p = -\frac{2q_0a \sin \beta}{2a / \cos \beta} = -q_0 \sin \beta \cos \beta = -\frac{2}{5}q_0$$

$$q = \frac{2q_0a \cos \beta}{2a / \cos \beta} = q_0 \cos^2 \beta = \frac{4}{5}q_0$$

Elementit ja systeemivapausasteet:



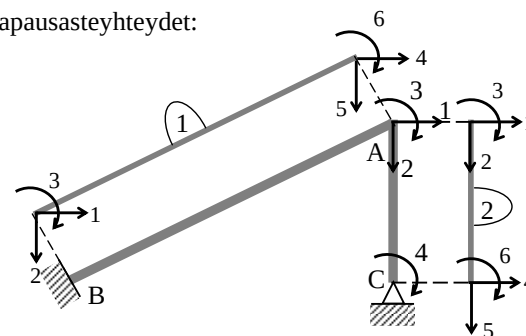
$$c^1 = \cos \alpha^1 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$s^1 = \sin \alpha^1 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$c^2 = \cos 90^\circ = 0,$$

$$s^2 = \sin 90^\circ = 1.$$

Vapausaste yhteydet:



Rakenteen jäykkymatriisin alkiot:

$$K_{11} = K_{44}^1 + K_{11}^2 = A^1 + A^2 = \frac{EA}{a\sqrt{5}}(c^1)^2 + \frac{12EI}{(a\sqrt{5})^3}(s^1)^2 + \frac{EA}{a}(c^2)^2 + \frac{12EI}{a^3}(s^2)^2$$

$$= \frac{100EI}{a^3\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{12EI}{(a\sqrt{5})^3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{100EI}{a^3} \cdot 0 + \frac{12EI}{a^3} \cdot 1 = \left(\frac{400}{5\sqrt{5}} + \frac{12}{25\sqrt{5}} + 12\right) \frac{EI}{a^3} = 47,992 \frac{EI}{a^3}$$

$$K_{12} = K_{45}^1 + K_{12}^2 = B^1 + B^2 = \frac{EA}{a\sqrt{5}}s^1c^1 - \frac{12EI}{(a\sqrt{5})^3}s^1c^1 + \frac{EA}{a}s^2c^2 - \frac{12EI}{a^3}s^2c^2$$

$$= \frac{100EI}{a^3\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{12EI}{(a\sqrt{5})^3} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \frac{2}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{200}{5\sqrt{5}} + \frac{24}{25\sqrt{5}}\right) \frac{EI}{a^3} = -17,459 \frac{EI}{a^3} = K_{21}$$

$$K_{13} = K_{46}^1 + K_{13}^2 = -C^1 + C^2 = \frac{6EI}{(a\sqrt{5})^2}s^1 - \frac{6EI}{a^2}s^2 = \frac{6EI}{5a^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{6EI}{a^2}s^2$$

$$= -6,5367 \frac{EI}{a^2} = K_{31}$$

$$K_{14} = K_{16}^2 = C^2 = -\frac{6EI}{a^2}s^2 = -\frac{6EI}{a^2} = K_{41}$$

$$\begin{aligned}\underline{K_{22}} &= K_{55}^1 + K_{22}^2 = D^1 + D^2 = \frac{EA}{a\sqrt{5}}(s^1)^2 + \frac{12EI}{(a\sqrt{5})^3}(c^1)^2 + \frac{EA}{a}(s^2)^2 + \frac{12EI}{a^3}(c^2)^2 \\ &= \left(\frac{100}{5\sqrt{5}} + \frac{48}{25\sqrt{5}} + 100\right) \frac{EI}{a^3} = 109,803 \frac{EI}{a^3} \\ \underline{K_{23}} &= K_{56}^1 + K_{23}^2 = -E^1 + E^2 = -\frac{6EI}{(a\sqrt{5})^2}c^1 + \frac{6EI}{a^2}c^2 = -\frac{12}{5\sqrt{5}} \frac{EI}{a^2} \approx -1,073 \frac{EI}{a^2} = K_{32} \\ \underline{K_{24}} &= K_{26}^2 = E^2 = \frac{6EI}{a^2}c^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{K_{33}} &= K_{66}^1 + K_{33}^2 = F^1 + F^2 = \frac{4EI}{a\sqrt{5}} + \frac{4EI}{a} = \frac{4EI}{a} \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} \approx 5,789 \frac{EI}{a} \\ \underline{K_{34}} &= K_{36}^2 = G^2 = 2 \frac{EI}{a} = K_{43}\end{aligned}$$

$$\underline{K_{44}} = K_{66}^2 = F^2 = \frac{4EI}{a}$$

Rakenteen kuormitustermivektorin alkiot:

$$\begin{aligned}\underline{FK_1} &= FK_4^1 + \overbrace{FK_1^2}^0 = cUK_2^1 - sVK_2^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\ddot{p}}{2} \frac{a\sqrt{5}}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\ddot{q}}{2} \frac{a\sqrt{5}}{2} \right) = 0 \\ \underline{FK_2} &= FK_5^1 + \overbrace{FK_2^2}^0 = sUK_2^1 + cVK_2^1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\ddot{p}}{2} \frac{a\sqrt{5}}{2} \right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\ddot{q}}{2} \frac{a\sqrt{5}}{2} \right) = -q_0 a \\ \underline{FK_3} &= FK_6^1 + \overbrace{FK_3^2}^0 = MK_2^1 = \frac{\ddot{q}}{12} \frac{(a\sqrt{5})^2}{12} = \frac{1}{3} q_0 a^2 \\ \underline{FK_4} &= \overbrace{FK_6^2}^0 = 0.\end{aligned}$$

Rakenteen jäykkyyismatriisi:

$$[K] = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 47,992 & -17,459 & -6,537a & -6a \\ -17,459 & 109,803 & -1,073a & 0 \\ -6,537a & -1,073a & 5,789a^2 & 2a^2 \\ -6a & 0 & 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix}$$

Rakenteen kuormitustermivektori:

$$\{FK\} = q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ a^2/3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmän vakiovektori:

$$\{R\} = \overbrace{\{P\}}^0 - \{FK\} = q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ -a^2/3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä:

$$\begin{aligned}[K]\{a\} &= \{R\} \\ \Rightarrow \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 47,992 & -17,459 & -6,5367a & -6a \\ -17,459 & 109,803 & -1,073a & 0 \\ -6,5367a & -1,073a & 5,789a^2 & 2a^2 \\ -6a & 0 & 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} &= q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ -a^2/3 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 47,992 & -17,459 & -6,5367a & -6a \\ -17,459 & 109,803 & -1,073a & 0 \\ -6,5367a & -1,073a & 5,789a^2 & 2a^2 \\ -6a & 0 & 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} &= \frac{q_0 a^4}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a/3 \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Jotta yhtälöryhmän ratkaiseminen onnistuisi jollakin matematiikka-ohjelmalla, pitää se kirjoittaa muotoon, jossa tuntemattomilla on sama

dimensio ja kerroinmatriisin alkiot ovat dimensiottomat. Jos uusiksi tuntemattomiksi otetaan a_1 , a_2 , aa_3 ja aa_4 , niillä on pituuden dimensio. Yhtälöryhmä on auki kirjoitettuna

$$\begin{cases} 47,992a_1 - 17,459a_2 - 6,5367aa_3 - 6aa_4 = 0 \\ -17,459a_1 + 109,803a_2 - 1,073aa_3 + 0 \cdot a_4 = \frac{q_0a^4}{EI} \\ -6,5367aa_1 - 1,073aa_2 + 5,789a^2a_3 + 2a^2a_4 = -\frac{q_0a^5}{3EI} \\ -6aa_1 + 0 \cdot a_2 + 2a^2a_3 + 4a^2a_4 = 0 \end{cases}$$

ja se saadaan helposti muotoon

$$\begin{cases} 47,992a_1 - 17,459a_2 - 6,5367(aa_3) - 6(aa_4) = 0 \\ -17,459a_1 + 109,803a_2 - 1,073(aa_3) + 0 \cdot (aa_4) = \frac{q_0a^4}{EI} \\ -6,5367a_1 - 1,073a_2 + 5,789(aa_3) + 2(aa_4) = -\frac{q_0a^4}{3EI} \\ -6a_1 + 0 \cdot a_2 + 2(aa_3) + 4(aa_4) = 0 \end{cases}$$

ja takaisin matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 47,992 & -17,459 & -6,5367 & -6 \\ -17,459 & 109,803 & -1,073 & 0 \\ -6,5367 & -1,073 & 5,789 & 2 \\ -6 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ aa_3 \\ aa_4 \end{bmatrix} = \frac{q_0a^4}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä yhtälöryhmä saadaan ratkaistua esimerkiksi jollakin matemaatiikkaohjelmalla. Sen ratkaisu on

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ aa_3 \\ aa_4 \end{bmatrix} = \frac{q_0a^4}{EI} \begin{bmatrix} -0,00276 \\ 0,00799 \\ -0,06985 \\ 0,03079 \end{bmatrix},$$

joten vapausasteesiirtymät ovat

$$a_1 = -0,00276 \frac{q_0a^4}{EI}, \quad a_2 = 0,00799 \frac{q_0a^4}{EI}, \quad a_3 = -0,06985 \frac{q_0a^3}{EI}, \quad a_4 = 0,03079 \frac{q_0a^3}{EI}.$$

Tulokset kiertymille pisteissä A ja C ovat nyt

$$\varphi_A = a_3 = -0,06985 \frac{q_0a^3}{EI}, \quad \varphi_C = a_4 = 0,03079 \frac{q_0a^3}{EI}.$$

Taivutusmomentin arvot pisteissä B ja C saadaan tarkastelemalla elementtiä 1. Vapausastevoimille F_3^1 ja F_6^1 saadaan

$$\begin{aligned} F_3^1 &= K_{31}^1 \frac{0}{a_1^1} + K_{32}^1 \frac{0}{a_2^1} + K_{33}^1 \frac{0}{a_3^1} + K_{34}^1 \frac{-C^1}{a_4^1} + K_{35}^1 \frac{-E^1}{a_5^1} + K_{36}^1 \frac{G^1}{a_6^1} + FK_3^1 \\ &= -C^1 a_1 - E^1 a_2 + G^1 a_3 + MK_1^1 \\ &= \frac{6EI}{(a\sqrt{5})^2} \frac{1}{\sqrt{5}} 0,00276 \frac{q_0a^4}{EI} - \frac{6EI}{(a\sqrt{5})^2} \frac{2}{\sqrt{5}} 0,00799 \frac{q_0a^4}{EI} \\ &\quad - \frac{2EI}{a\sqrt{5}} 0,06985 \frac{q_0a^3}{EI} - \frac{q(a\sqrt{5})^2}{12} \\ &= \left(\frac{6}{5} \frac{1}{\sqrt{5}} 0,00276 - \frac{6}{5} \frac{2}{\sqrt{5}} 0,00799 - \frac{2}{\sqrt{5}} 0,06985 - \frac{1}{3} \right) q_0a^2 \\ &\approx -0,4029 q_0a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_6^1 &= K_{61}^1 \frac{0}{a_1^1} + K_{62}^1 \frac{0}{a_2^1} + K_{63}^1 \frac{0}{a_3^1} + K_{64}^1 \frac{-C^1}{a_4^1} + K_{65}^1 \frac{-E^1}{a_5^1} + K_{66}^1 \frac{F^1}{a_6^1} + FK_6^1 \\ &= -C^1 a_1 - E^1 a_2 + F^1 a_3 + MK_2^1 \\ &= \frac{6EI}{(a\sqrt{5})^2} \frac{1}{\sqrt{5}} 0,00276 \frac{q_0a^4}{EI} - \frac{6EI}{(a\sqrt{5})^2} \frac{2}{\sqrt{5}} 0,00799 \frac{q_0a^4}{EI} \\ &\quad - \frac{4EI}{a\sqrt{5}} 0,06985 \frac{q_0a^3}{EI} + \frac{q(a\sqrt{5})^2}{12} \\ &= \left(\frac{6}{5} \frac{1}{\sqrt{5}} 0,00276 - \frac{6}{5} \frac{2}{\sqrt{5}} 0,00799 - \frac{4}{\sqrt{5}} 0,06985 + \frac{1}{3} \right) q_0a^2 \approx 0,2013 q_0a^2 \end{aligned}$$

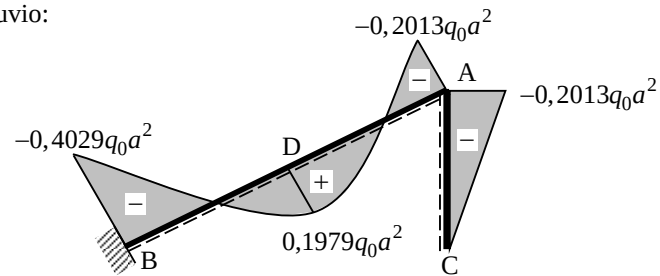
Taivutusmomenteille pisteissä A ja B saadaan

$$\underline{M_B = F_3^1 \approx -0,4029q_0a^2, \quad M_A = -F_6^1 \approx -0,2013q_0a^2}$$

Taivutusmomentin arvo välin AB keskipisteessä:

$$M_D = \frac{M_A + M_B}{2} + \frac{\frac{4}{5}q_0}{8} (a\sqrt{5})^2 = \frac{-0,2013q_0a^2 - 0,4029q_0a^2}{2} + \frac{\frac{4}{5}q_0}{8} (a\sqrt{5})^2 \approx \underline{0,1979q_0a^2}$$

M –kuvio:



5. Kaksiakselinen taivutus

5.1 Palkin poikkileikkauksen venymäjakautuma

Rakenteiden lujuusopin monisteen osan II luvussa 7 käsitelimme yksiakselista taivutusta. Siellä johdettiin teknistä taivutusteoriaa noudattavan samanaikaisesti vedetyn tai puristetun ja x, y -tasossa taivutetun palkin poikkileikkauksen venymälle lauseke

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon + \kappa_y,$$

missä ε on palkin akselin venymä ja κ on palkin käyritymä, joka on toisaalta palkin akselin tarkasteltavassa pisteessä olevan kaarevuussäteen ρ käänteisarvo.

Jos palkkia taivutetaan siten, että se käyristyy sekä x, y -tasossa käyristymän ollessa κ_z että x, z -tasossa käyristymän ollessa κ_y sen poikkileikkauksen venymä on

$$\varepsilon_x(y, z) = \varepsilon + \kappa_z y + \kappa_y z. \quad (5.1)$$

Poikkipinnan normaalijännitykselle $\sigma = \sigma_x$ saadaan nyt Hooken lain perusteella

$$\sigma(y, z) = E\varepsilon_x(y, z) = E\varepsilon + E\kappa_z y + E\kappa_y z. \quad (5.2)$$

Sijoittamalla tämä normaalivoiman N ja taivutusmomenttien M_z ja M_y määrittelykaavoihin

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_z = \int_A \sigma y dA, \quad M_y = \int_A \sigma z dA \quad (5.3)$$

saadaan

$$\begin{aligned} N &= E\varepsilon \int_A dA + E\kappa_z \int_A y dA + E\kappa_y \int_A z dA, \\ M_z &= E\varepsilon \int_A y dA + E\kappa_z \int_A y^2 dA + E\kappa_y \int_A yz dA, \\ M_y &= E\varepsilon \int_A z dA + E\kappa_z \int_A zy dA + E\kappa_y \int_A z^2 dA. \end{aligned} \quad (5.4)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon + ES_z\kappa_z + ES_y\kappa_y, \\ M_z &= ES_z\varepsilon + EI_z\kappa_z + EI_{zy}\kappa_y, \\ M_y &= ES_y\varepsilon + EI_{zy}\kappa_z + EI_y\kappa_y, \end{aligned} \quad (5.5)$$

missä A , S_z , S_y , I_z , I_y ja I_{zy} ovat poikkipinnan poikkileikkaussuureet. Jos nyt koordinaatisto y, z asetetaan **pintakeskiöön**, staattiset momentit S_z ja S_y häviävät ja lausekkeet (5.5) yksinkertaistuvat muotoon

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon, \\ M_z &= EI_z\kappa_z + EI_{zy}\kappa_y, \\ M_y &= EI_{zy}\kappa_z + EI_y\kappa_y. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ratkaisemalla näistä yhtälöistä akselin venymä ja käyritymät, saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EA}, \\ \kappa_z &= \frac{1}{E} \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2}, \\ \kappa_y &= \frac{1}{E} \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nämä ovat kaksiakselisesti taivutetun palkin poikkileikkauksen **akselin venymän ja normaalivoiman** sekä **käyritymien ja taivutusmomenttien yhteydet**. Ne ovat siis voimassa poikkipinnan pintakeskiöön asetetussa koordinaatistossa.

5.2 Normaalijännityksen jakauma

Sijoittamalla akselin venymän ja käyritymien lausekkeet (5.7) normaalijännityksen lausekkeeseen (5.2) saadaan

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} z. \quad (5.8)$$

Tämä lauseke ilmaisee normaalivoiman N ja taivutusmomenttien M_z ja M_y aiheuttaman poikkileikkauksen normaalijännityksen jakauman $\sigma(y, z)$. Tämä jakauma on **lineaarinen** ja siis tasopinta. Jos **koordinaattiakselit** asetetaan **yhtymään poikkileikkauksen pääjäyhysakseleihin**, tulomomentti I_{zy} häviää ja lauseke (5.8) saa muodon

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (5.9)$$

Tämä lauseke on soveltuva erityisesti tapauksiin, jossa poikkileikkauksella on **symmetria-akseli**. Tällöin toinen koordinaattiakseli asetetaan, yhtymään symmetria-akseliin. Useimmiten käytännössä esiintyvät poikkileikkaukset ovat symmetrisiä tai kaksoissymmetrisiä, josta syystä kaavaa (5.9) on tällöin hyvä käyttää. Jos poikkileikkaus on epäsymmetrinen, palkin taivutustehtävän ratkaiseminen käy suoraviivaisemmin kaavaa (5.8) käyttäen¹.

Jos kyseessä on **puhdas taivutus**, jolloin $N = 0$, lausekkeiden (5.8) ja (5.9) oikean puolen ensimmäinen termi jää pois. Esimerkiksi symmetrisen poikkileikkauksen normaalijännityksen lauseke (5.9) on tällöin

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (5.10)$$

Poikkileikkauksen **neutraaliakselilla** (NA) tarkoitetaan suoraa, jolla venymä on nolla eli $\varepsilon = 0$. Koska homogeenisen poikkileikkauksen tapauksessa $\varepsilon = \sigma / E$, neutraaliakselin yhtälö voidaan ilmaista yhtälönä

$$\sigma(y, z) \equiv \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} z = 0. \quad (5.11)$$

Se voidaan helposti saattaa muotoon

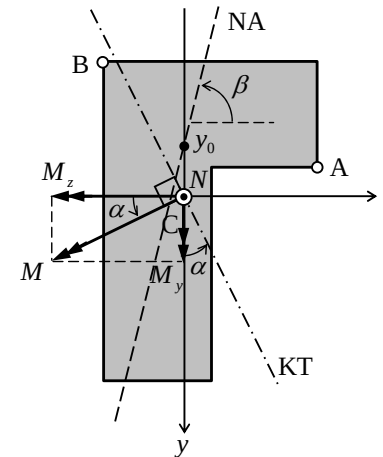
$$y = y_0 - z \tan \beta, \quad (5.12)$$

¹ Useissa lujuusopin perusteita käsittelevissä oppikirjoissa kaavaa (5.8) ei esitetä, vaan kaavaa (5.9) käytetään myös epäsymmetristen poikkileikkauksen tapauksessa. Käsitely on kuitenkin tällöin kirjoittajan mielestä työläämpää ja johtaa helpommin virheisiin.

missä

$$y_0 = -\frac{I_y I_z - I_{zy}^2}{M_z I_y - M_y I_{zy}} \frac{N}{A}, \quad \beta = \arctan \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{M_z I_y - M_y I_{zy}}. \quad (5.13)$$

Neutraaliakseli (NA) leikkaa siis y -akselin pisteessä y_0 ja sen positiivisesta z -akselista vastapäivään mitattu suuntakulma on β (vrt. kuva 5.1). Havaitaan, että puhtaan taivutuksen ($N = 0$) tapauksessa $y_0 = 0$ ja neutraaliakseli kulkee origon kautta.



Kuva 5.1: Vino taivutus.

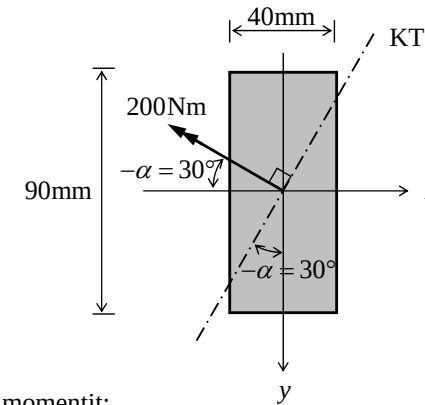
Merkitään poikkileikkauksen **resultoivan taivutusmomentin** M negatiivisesta z -akselista vastapäivään mitattua **suuntakulmaa** symbolilla α .

Usein kaksiakselisesti taivutetun palkin kuormitus tapahtuu yhdessä ns. **kuormitustasossa** (KT). Tällöin puhutaan **vinosta taivutuksesta**. Koska tällöin resultoiva taivutusmomentti M on kohtisuorassa kuormitustasoa vastaan, on kulma α myös positiivisesta y -akselista vastapäivään mitattu **kuormitustason kaltevuuskulma** (vrt. kuva 5.1). Tyypillisessä normaalijännitysten määrittämistehtävässä normaalivoima N ja resultoiva taivutusmomentti M tarkasteltavassa poikkileikkauksessa määritetään ensin. Tämän jälkeen normaalijännityksen kaavassa (5.8) tarvittavat taivutusmomentit M_z ja M_y saadaan kuvan 5.1 perusteella kaavoista

$$\begin{aligned} M_z &= M \cos \alpha, \\ M_y &= M \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Neutraaliakselin tunteminen on tärkeää siksi, että ne poikkileikkauksen pisteet, joissa normaalijännitys saa suurimman ja pienimmän arvonsa voidaan helposti paikantaa sen avulla. Tämä perustuu siihen, että normaalijännityksen (5.8) kuvaaja on tasopinta, joka saa arvon nolla neutraaliakselilla. Jos nyt neutraaliakseli **leikkaa poikkipinnan**, suurin ja pienin normaalijännitys ovat **eri puolilla** neutraaliakselia pisteissä, joiden **etäisyys neutraaliakselista on suurin** (vrt. pisteet A ja B kuvassa 5.1). Jos taas neutraaliakseli ei leikkaa poikkipintaa, suurin ja pienin normaalijännitys ovat luonnollisesti **samalla puolella** neutraaliakselia pisteissä, joiden **etäisyys neutraaliakselista on suurin ja pienin**.

Esimerkki 5.1: Puista palkkia kuormitetaan tasossa, joka muodostaa 30° kulman pystytason suhteen. Kuormitus aiheuttaa tarkasteltavaan poikkileikkaukseen taivutusmomentin 200Nm kuvan mukaisesti. Palkin poikkileikkaus on suorakaide, jonka leveys ja korkeus ovat 40mm ja 90mm . Määritä (a) neutraaliakseli sekä (b) suurin ja pienin normaalijännitys tarkasteltavassa poikkileikkauksessa.



Jäyhyysmomentit:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,04\text{m} \cdot (0,09\text{m})^3}{12} = 2,43 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{(0,04\text{m})^3 \cdot 0,09\text{m}}{12} = 0,480 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

$$I_{yz} = 0$$

Kuormitustason suuntakulma α :

$$\alpha = -30^\circ$$

Taivutusmomentit:

$$M_z = M \cos \alpha = 200\text{Nm} \cdot \cos(-30^\circ) = 100\sqrt{3}\text{Nm}$$

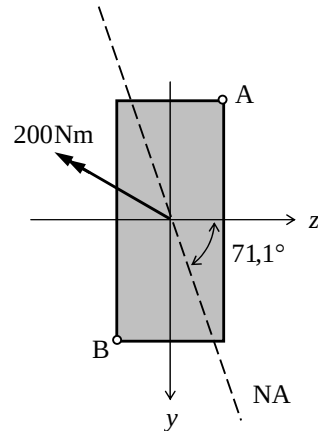
$$M_y = M \sin \alpha = 200\text{Nm} \cdot \sin(-30^\circ) = -100\text{Nm}$$

Koordinaatti y_0 ja kulma β :

$$y_0 = 0$$

$$\beta = \arctan \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{M_z I_y - M_y I_{zy}} = \arctan \frac{-100 \text{ Nm} \cdot 2,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{100\sqrt{3} \text{ Nm} \cdot 0,480 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = -71,1^\circ$$

Oheiseen kuvaan on piirretty neutraaliakseli (NA). Sen avulla nähdään, että suurin ja pienin normaalijännitys saadaan pisteissä A ja B, joiden koordinaatit ovat $y_A = -45 \text{ mm}$, $z_A = 20 \text{ mm}$ ja $y_B = 45 \text{ mm}$, $z_B = -20 \text{ mm}$.

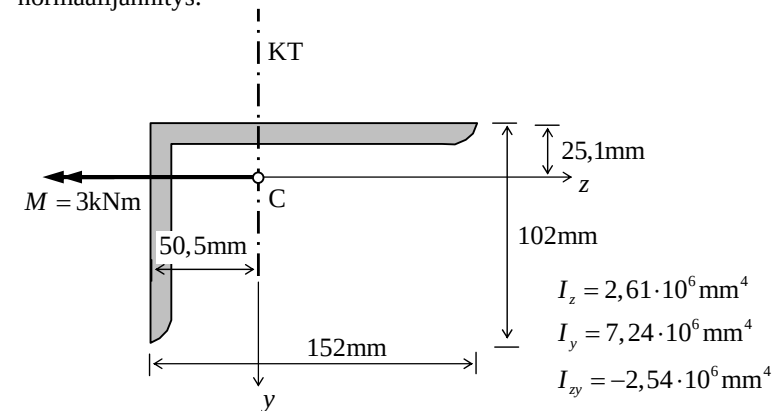


Suurin ja pienin normaalijännitys:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A \\ &= \frac{100 \cdot \sqrt{3} \text{ Nm}}{2,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot (-0,045 \text{ m}) + \frac{-100 \text{ Nm}}{0,480 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot 0,020 \text{ m} \\ &= -7,66 \text{ MPa} = \underline{\underline{\sigma_{\min}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B \\ &= \frac{100 \cdot \sqrt{3} \text{ Nm}}{2,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot 0,045 \text{ m} + \frac{-100 \text{ Nm}}{0,480 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot (-0,020 \text{ m}) \\ &= 7,66 \text{ MPa} = \underline{\underline{\sigma_{\max}}} \end{aligned}$$

Esimerkki 5.2: Palkkia, jonka poikkileikkaus on kuvan mukainen, kuormitetaan pystytasossa siten, että taivutusmomentilla tarkasteltavassa poikkileikkauksessa on arvo $M = 3 \text{ kNm}$. Määritetään suurin ja pienin normaalijännitys.



Taivutusmomentit:

$$M_z = \underline{3 \text{ kNm}}$$

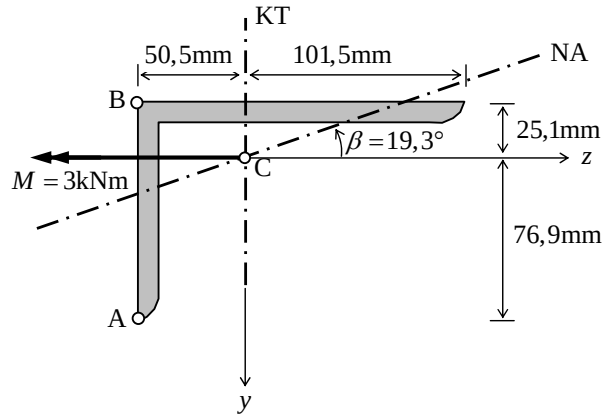
$$M_y = \underline{0}$$

Koordinaatti y_0 ja kulma β :

$$y_0 = -\frac{I_y I_z - I_{zy}^2}{M_z I_y - M_y I_{zy}} \frac{\bar{N}}{A} = 0$$

$$\beta = \arctan \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{M_z I_y - M_y I_{zy}} = \arctan \frac{-3 \text{ kNm} \cdot (-2,54) \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{3 \text{ kNm} \cdot 7,24 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = 19,3^\circ$$

Seuraavan sivun kuvaan on piirretty neutraaliakseli (NA). Sen avulla nähdään, että suurin ja pienin normaalijännitys saadaan pisteissä A ja B, joiden koordinaatit ovat $y_A = 76,9 \text{ mm}$, $z_A = -50,5 \text{ mm}$ ja $y_B = -25,1 \text{ mm}$, $z_B = -50,5 \text{ mm}$.



Normaalijännityksen lauseke:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} z \\ &= \frac{3 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 7,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{7,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cdot 2,61 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 - (-2,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4)^2} \cdot y \\ &\quad + \frac{-3 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot (-2,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4)}{7,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cdot 2,61 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 - (-2,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4)^2} \cdot z \\ &= (1,745y + 0,612z) \frac{\text{N}}{\text{mm}^3}\end{aligned}$$

Normaalijännitykset pisteissä A ja B:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= (1,745y_A + 0,612z_A) \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} = [1,745 \cdot 76,9 + 0,612 \cdot (-50,5)] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= \underline{\underline{103,3 \text{ MPa} = \sigma_{\max}}} \\ \sigma_B &= (1,745y_B + 0,612z_B) \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} = [1,745 \cdot (-25,1) + 0,612 \cdot (-50,5)] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= \underline{\underline{-74,7 \text{ MPa} = \sigma_{\min}}}\end{aligned}$$

5.3 Poikkileikkauksen sydänavalue

Tarkastellaan pilaria (vrt. kuva 5.2), johon vaikuttaa **epäkeskinen puristusvoima** P . Kysytään, missä alueessa P voi sijaita, ettei poikkileikkaukseen tulisi vetorasituksia. Kuvan 5.2a mukaisen pilarin osan x-akselin suuntaiseksi voimatasapainoyhtälöksi sekä momenttitasapainoyhtälöiksi z- ja y-akselien suhteen saadaan

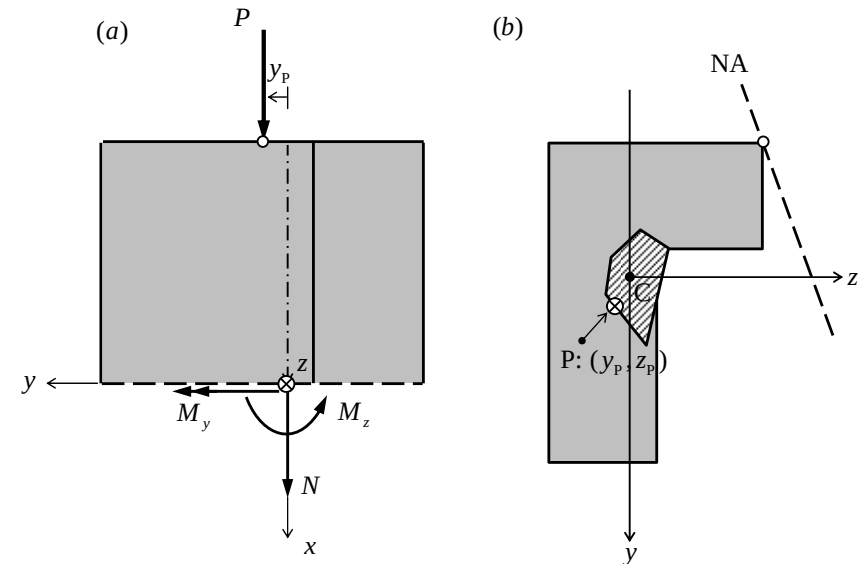
$$N + P = 0, \quad M_z + P y_p = 0, \quad M_y + P z_p = 0, \quad (5.15)$$

joista seuraa poikkileikkauksen jännitysresultanteille tulokset

$$N = -P, \quad M_z = -P y_p, \quad M_y = -P z_p. \quad (5.16)$$

Kaavan (5.8) perusteella poikkileikkauksen normaalijännitys on

$$\sigma(y, z) = -\frac{P}{A} \left(1 + A \frac{I_y y_p - I_{zy} z_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + A \frac{I_z z_p - I_{zy} y_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} z \right). \quad (5.17)$$



Kuva 5.2: Epäkeskisesti puristettu pilari ja sen sydänavalue.

Asettamalla σ nolaksi saadaan neutraaliakselin yhtälö, joka voidaan saattaa muotoon

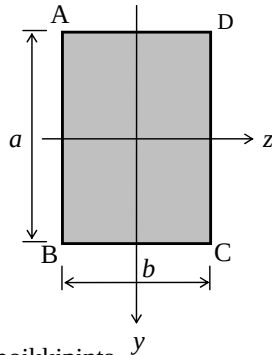
$$1 + A \frac{I_y y_p - I_{zy} z_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + A \frac{I_z z_p - I_{zy} y_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} z = 0, \quad 1 + \frac{y_p y}{I_z / A} + \frac{z_p z}{I_y / A} = 0 \quad (I_{zy} = 0) \quad (5.18)$$

Jos neutraaliakseli sivuaa poikkileikkauksen reunaa leikkaamatta sitä missään kohden, poikkileikkaus on pelkästään puristettu. Vetävän normaalivoiman tapauksessa poikkileikkaus olisi vastaavasti pelkästään vedetty.

Ne normaalivoiman vaikutuspisteet, joita vastaavat neutraaliakselit sivuavat poikkileikkauksen pintaa, muodostavat suljetun käyrän. Sen rajoittamaa aluetta kutsutaan **poikkileikkauksen sydänelueeksi**. Sydänelueen määritelmästä seuraa:

- Sydänelueen sisällä tai reunalla sijaitseva normaalivoima aiheuttaa poikkileikkaukseen vain yhdenmerkkisiä jännityksiä.
- Poikkipinnan pintakeskiö on sydänelueen sisällä.

Sydänelueen nurkkapisteet voidaan konstruoida määrittämällä vuorotellen koordinaatit y_p, z_p siten, että neutraaliakseli kulkee poikkileikkauksen kahden nurkkapisteen kautta leikkaamatta poikkipintaa. Tämä tapahtuu sijoittamalla kyseisten nurkkapisteen koordinaatit neutraaliakselin yhtälöön ja ratkaisemalla saadusta yhtälöparista koordinaatit y_p, z_p .



Kuva 5.3: Suorakaidepoikkipinta

Esimerkiksi kuvan 5.3 suorakaidepoikkipinnan tapauksessa, kun pinta-ala, jäyhyysmomentit ja tulomomentti ovat

$$A = ab, \quad I_z = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_y = \frac{ab^3}{12}, \quad I_{yz} = 0 \quad (5.19)$$

ja neutraaliakselin yhtälö (5.18) saa aluksi muodon

$$1 + \frac{12 y_p}{a^2} y + \frac{12 z_p}{b^2} z = 0. \quad (5.20)$$

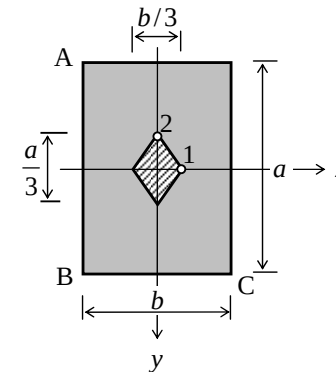
Kun nurkkapisteiksi valitaan A: $(-a/2, -b/2)$ ja B: $(+a/2, -b/2)$, saadaan

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{6 y_p}{a} - \frac{6 z_p}{b} &= 0 \\ 1 + \frac{6 y_p}{a} - \frac{6 z_p}{b} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y_p = 0 \\ z_p = \frac{b}{6} \end{cases} \Rightarrow \text{Piste 1} \quad (5.21)$$

Kun nurkkapisteiksi valitaan B: $(+a/2, -b/2)$ ja C: $(+a/2, +b/2)$, saadaan

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{6 y_p}{a} - \frac{6 z_p}{b} &= 0 \\ 1 + \frac{6 y_p}{a} + \frac{6 z_p}{b} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y_p = -\frac{a}{6} \\ z_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Piste 2} \quad (5.22)$$

Näin saimme kuvan 5.4 sydänelueen kaksi nurkkapistettä 1 ja 2. Jatkamalla samaan tapaan saadaan muut nurkkapisteet.



Kuva 5.4: Suorakaidepoikkipinnan sydänelue.

6. Useasta materiaalista koostuva sauva

6.1 Vedetty tai puristettu suora sauva

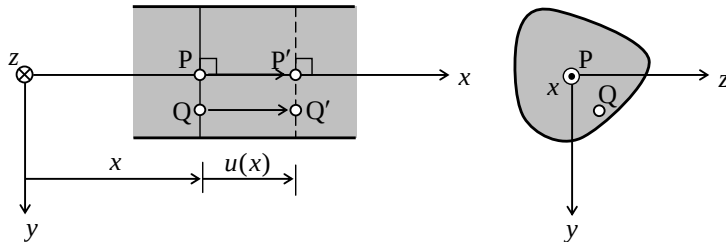
Suoran sauvan sanotaan olevan **puhtaan vedon tai puristuksen** alainen, jos siihen vaikuttava kuormitus aiheuttaa sauvan deformaation siten, että sauva **pysyy suorana** myös deformaation jälkeen¹. Tällöin sauvan **poikkileikkauksen jokainen piste siirtyy** palkin akselin suunnassa **yhtä paljon**. Sauvan yleisen pisteen Q: (x, y, z) siirtymä u on tällöin

$$u = u(x). \quad (6.1)$$

Tämä on myös sauvan akselin pisteen P siirtymä (kuva 6.1). Myös venymä $\varepsilon = \varepsilon_x$ on sauvan poikkileikkauksessa vakio ja sille on voimassa

$$\varepsilon(x) = u'(x) \quad (6.2)$$

Tämä on sauvan venymän ja siirtymän yhteys.



Kuva 6.1: Puhtaan vedon tai puristuksen alaisen sauvan poikkileikkauksen deformaation

Poikkileikkauksen mittojen ollessa sauvan pituuteen nähden pienet, voidaan jännityskomponenttien σ_y , σ_z ja τ_{yz} otaksua häviävän, jolloin yleistetystä Hookein laista poikkileikkauksen tarkasteltavassa pisteessä seuraa

¹ Vedetyn ja puristetun suoran sauvan deformaation tarkasteltiin yksityiskohtaisemmin Rakenteiden lujuusopin osan II luvussa 6.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x$$

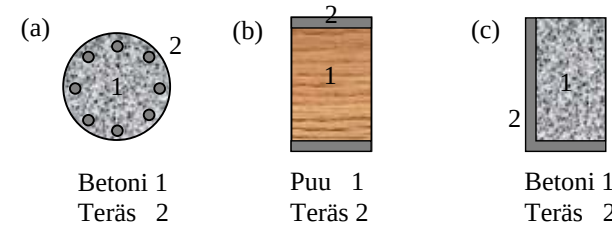
ja **normaalijännityksen ja venymän** yhteys on

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6.3)$$

Tarkastellaan sauva, joka koostuu kahdesta tai useammasta **homogeenisestä osasauvasta** i , jotka ovat eri materiaalia. Tällaista sauvaan kutsutaan usein **liittosauvaksi**. Tällöin jokaisen osasauvan i poikkileikkauksessa on voimassa Hookein laki

$$\sigma_i = E_i\varepsilon_i. \quad (6.4)$$

Jos osasauvat on liitetty toisiinsa siten, että niiden välillä ei tapahdu liukumista, sanotaan **sauvan osien toimivan yhdessä**. Tässä tapauksessa sauvalle voidaan käyttää edellä tehtyä siirtymäotaksumaa.



Kuva 6.2: Kahdesta materiaalista koostuvia poikkileikkauksia: (a) ja (b) kaksoissymmetrisiä (c) epäsymmetrisiä.

Koska käytännössä liittosauvat koostuvat tavallisesti kahdesta materiaalista, rajoitamme tarkastelun tässä kahden materiaalin tapaukseen. Useammasta materiaalista koostuvien poikkileikkausten käsittely ei tuo periaatteessa mitään uutta. Tyypillisiä kahdesta materiaalista 1 ja 2 koostuvia poikkileikkauksia on esitetty kuvissa 6.2. Materiaalit ovat lineaarisesti kimmoisia ja niiden kimmomoduulit ovat E_1 ja E_2 .

Koko poikkileikkauksen ja osapoikkileikkausten normaalivoimilla ja venymillä on tällöin yhteydet

$$N = N_1 + N_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (6.5)$$

Edellisen mukaan koko poikkileikkauksen normaalivoima on osapoikkileikkausten normaalivoimien summa ja jälkimmäisen mukaan poikkileikkausten venymät ovat yhtäsuuret.

Hooken laista ja kaavasta (6.5) seuraa osien 1 ja 2 normaalijännityksille

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1 = E_1 \varepsilon \quad \text{osapinnalla } A_1, \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_2 = E_2 \varepsilon \quad \text{osapinnalla } A_2.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Normaalivoimalle ja taivutusmomenteille saadaan nyt

$$\begin{aligned}N &= N_1 + N_2 = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = (E_1 A_1 + E_2 A_2) \varepsilon, \\ M_y &= N_1 z_{c1} + N_2 z_{c2} = \sigma_1 A_1 z_{c1} + \sigma_2 A_2 z_{c2} = (E_1 A_1 z_{c1} + E_2 A_2 z_{c2}) \varepsilon, \\ M_z &= N_1 y_{c1} + N_2 y_{c2} = \sigma_1 A_1 y_{c1} + \sigma_2 A_2 y_{c2} = (E_1 A_1 y_{c1} + E_2 A_2 y_{c2}) \varepsilon.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Käyttämällä kimmomoduulien suhteelle merkintää

$$n = \frac{E_2}{E_1}, \quad (6.8)$$

voidaan normaalivoiman ja taivutusmomenttien lausekkeet saattaa muotoon

$$\begin{aligned}N &= E_1 A_r \varepsilon, \\ M_y &= E_1 A_r z_{cr} \varepsilon, \\ M_z &= E_1 A_r y_{cr} \varepsilon,\end{aligned}\quad (6.9)$$

missä

$$y_{cr} = \frac{A_1 y_{c1} + n A_2 y_{c2}}{A_r}, \quad z_{cr} = \frac{A_1 z_{c1} + n A_2 z_{c2}}{A_r} \quad (6.10)$$

ja

$$A_r = A_1 + n A_2. \quad (6.11)$$

Pinta-ala A_r saadaan siis pinta-alan A_1 ja kimmomoduulien suhteella n kerrotun pinta-alan A_2 summana. Sitä kutsutaan tässä materiaalin 1 suhteen **redusoidun poikkipinnan pinta-alaksi**. Vastaavasti koordinaatit y_{rc} ja z_{cr} ovat **redusoidun poikkipinnan pintakeskiön** koordinaatit.

Jotta normaalijännityksen redusointituloksena olisi pelkkä voima, tulee taivutusmomenttien M_y ja M_z hävitä. Saamme redusoidun poikkipinnan pintakeskiön koordinaateille ehdot $y_{rc} = 0$ ja $z_{rc} = 0$. Näin koordinaatisto tulee asettaa materiaalin 1 suhteen redusoidun poikkipinnan pintakeskiöön. Päädyimme siis tulokseen, että liittosauvan **normaalivoiman vaikutuspiste** on materiaalin 1 suhteen **redusoidun poikkipinnan pintakeskiö** ja sauvan akseliksi valitaan siten **redusoidun poikkipinnan pintakeskiöakseli**.

Tavallisimmin vedetyn tai puristetun aksiaalisesti kuormitetun liittosauvan poikkileikkaus on **kaksoissymmetrinen**, jolloin redusoidun poikkipinnan pintakeskiö yhtyy symmetria-akselien leikkauspisteeseen.

Aksiaalisesti kuormitetun **liittosauvan normaalivoiman ja venymän yhteydeksi** saatiin siis

$$N = E_1 A_r \varepsilon, \quad (6.12)$$

missä tuloa $E_1 A_r$ kutsutaan **liittosauvan aksiaalijäykkyydeksi**.

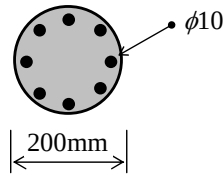
Kaavojen (6.6) ja (6.12) perusteella saadaan **liittosauvan** osasauvojen 1 ja 2 **normaalijännityksille** lausekkeet

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_r}, \quad \sigma_2 = n \frac{N}{A_r}. \quad (6.13)$$

Osapoikkipintojen 1 ja 2 normaalijännitykset σ_1 ja σ_2 ovat siis **vakioita**.

Vedetyn tai puristetun **liittosauvan** keskeiset yhtälöt ovat venymän ja siirtymän yhteys (6.3), normaalivoiman ja venymän yhteys (6.12) normaalijännityksen ja normaalivoiman yhteydet (6.13). Muussa suhteessa vedetyn tai puristetun **liittosauvan** yhtälöt ovat samanlaista kuin homogeenisen sauvan. Erona on vain se, että homogeenisen sauvan aksiaalijäykkyyden EA sijasta käytetään liittosauvan aksiaalijäykkyyttä $E_1 A_r$.

Esimerkki 6.1: Oheista betonipilaria kuormittaa keskeinen normaali-voima, jonka suuruus on 400kN. Määritä normaalijännitys betonissa ja teräksissä, kun teräksen kimmomoduuli on $E_s = 200\text{GPa}$ ja kimmo-
moduulien suhde on $E_s / E_c = 15$.



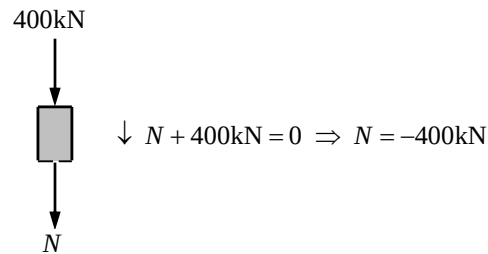
Koska poikkipinta ja raudoitus ovat symmetriset, yhtyy betonin suhteen redusoidun poikkipinnan pintakeskiö poikkileikkauksen keskipisteeseen. Poikkileikkaus on siis puhtaasti puristettu.

$$n = E_s / E_c = 15$$

$$A_s = 8 \cdot \pi \cdot 5^2 = 628,3\text{mm}^2$$

$$A_c = A - A_s = \pi \cdot 100^2 - 628,3 = 30787,6\text{mm}^2$$

$$A_r = A_c + nA_s = 30787,6 + 15 \cdot 628,3 = 40212,1\text{mm}^2$$



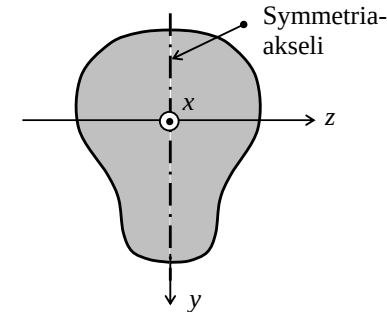
Saadaan:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_r} = \frac{-400 \cdot 10^3 \text{ N}}{40212,1\text{mm}^2} = \underline{\underline{-9,95\text{MPa}}}$$

$$\sigma_s = n \frac{N}{A_r} = 15 \cdot (-9,95\text{MPa}) = \underline{\underline{-149,2\text{MPa}}}$$

6.2 Taivutettu palkki

Tarkastellaan palkkia, jonka poikkileikkaus on symmetrinen ja jonka koordinaatisto x, y, z on valittu siten, että x, y -taso yhtyy symmetriatasoon (kuva 6.3). Otaksutaan, että palkki on samanaikaisen vedon tai puristuksen sekä taivutuksen alainen, jolloin saatavat tulokset soveltuvat myös tasokehäsaavaan.

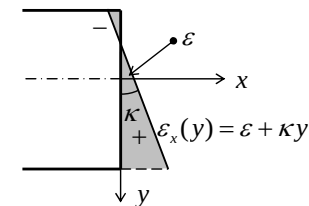


Kuva 6.3: Symmetrinen poikkileikkaus.

Palkin **poikkileikkauksen venymällä** on lauseke²

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon + \kappa y, \quad (6.13)$$

missä ε on palkin **akselin venymä** ja κ on palkin **käyristymä**. Käyristymä on palkin akselin kaarevuussäteen ρ käänteisarvo. Venymä ε_x jakautuu siis palkin korkeussuunnassa y suoraviivaisesti (kuva 6.4). Käyristymä on siis tämän suoran kulmakerroin.



Kuva 6.4: Samanaikaisen vedon ja taivutuksen alaisen poikkileikkauksen venymäjakautuma

² Taivutetun sauvan deformatumista tarkasteltiin yksityiskohtaisemmin Rakenteiden lujuusopin osan II luvussa 6.

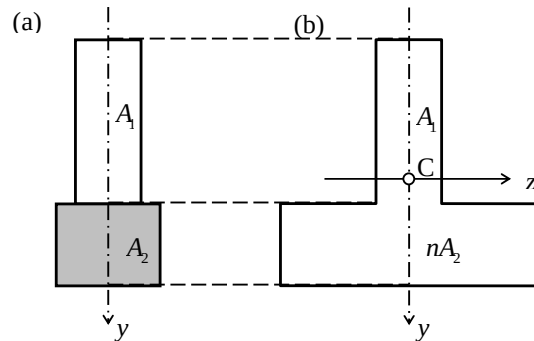
Tarkastellaan kahdesta homogeenisesta osapalkista muodostuvaa **liittopalkkia**. Palkin osapalkkien otaksutaan **toimivan yhdessä**, mikä merkitsee sitä, että niiden välillä ei tapahdu liukumista. Tässä tapauksessa palkin poikkileikkauksen venymä ε_x siis jakautuu korkeussuunnassa suoraviivaisesti (kuva 6.4) ja sen lauseke on yhtälön (6.13) mukainen.

Tarkastellaan kuvan 6.5a mukaista kahdesta materiaalista 1 ja 2 koostuvaa poikkileikkausta. Materiaalit ovat lineaarisesti kimmoisia ja niiden kimmomoduulit ovat E_1 ja E_2 .

Hooken laista saadaan osien 1 ja 2 normaalijännitykselle

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1 \varepsilon_x = E_1 (\varepsilon + \kappa y) \quad \text{osapinnalla } A_1, \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_x = E_2 (\varepsilon + \kappa y) \quad \text{osapinnalla } A_2.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Normaalivoimalle N ja taivutusmomentille M saadaan nyt



Kuva 6.5: Kahdesta materiaalista koostuva palkki: (a) poikkileikkaus, (b) osapoikkipinnan 1 suhteen redusoitu poikkileikkaus.

$$\begin{aligned}N &= \int_A \sigma dA = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA \\ &= (E_1 \int_{A_1} dA + E_2 \int_{A_2} dA) \varepsilon + (E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA) \kappa \\ &= (E_1 A_1 + E_2 A_2) \varepsilon + (E_1 S_1 + E_2 S_2) \kappa,\end{aligned}\quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}M &= \int_A \sigma y dA = \int_{A_1} \sigma_1 y dA + \int_{A_2} \sigma_2 y dA \\ &= (E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA) \varepsilon + (E_1 \int_{A_1} y^2 dA + E_2 \int_{A_2} y^2 dA) \kappa \\ &= (E_1 S_1 + E_2 S_2) \varepsilon + (E_1 I_1 + E_2 I_2) \kappa,\end{aligned}\quad (6.16)$$

missä A_1 ja A_2 ovat osapoikkipintojen pinta-alat, S_1 ja S_2 ovat niiden staattiset momentit sekä I_1 ja I_2 ovat niiden jäyhyysmomentit z-akselin suhteen.

Käyttämällä kimmomoduulien suhteelle merkintää

$$n = \frac{E_2}{E_1}, \quad (6.17)$$

normaalivoiman ja taivutusmomentin lausekkeet saadaan muotoon

$$N = E_1 A_r \varepsilon + E_1 S_r \kappa, \quad (6.18)$$

$$M = E_1 S_r \varepsilon + E_1 I_r \kappa, \quad (6.19)$$

missä

$$A_r = A_1 + nA_2, \quad S_r = S_1 + nS_2, \quad I_r = I_1 + nI_2 \quad (6.20)$$

ovat **materiaalin 1 suhteen redusoidun poikkipinnan** (vrt. kuva 6.5b), **pinta-ala**, **staattinen momentti** ja **jäyhyysmomentti** z-akselin suhteen.

Jos poikkileikkauksikoordinaatiston **origo** asetetaan **redusoidun poikkipinnan pintakeskiöön** C_r , staattinen momentti S_r häviää. Tällöin palkin akseli (x-akseli) on **redusoidun poikkipinnan pintakeskiöakseli**. Palkin **normaalivoiman ja akselin venymän** sekä **taivutusmomentin ja käyristymän** yhteyksiksi näin valitussa koordinaatistossa saadaan

$$N = E_1 A_r \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{M}{E_1 A_r} \quad (6.21)$$

ja

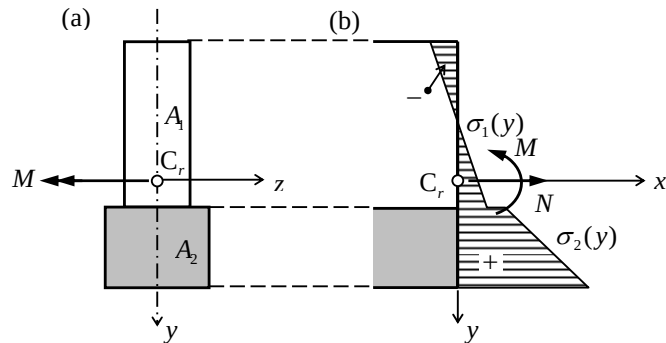
$$M = E_1 I_r \kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{E_1 I_r}. \quad (6.22)$$

missä tuloja $E_1 A_r$ ja $E_1 I_r$ kutsutaan liittopalkin **aksiaalijäykkyydeksi** ja **taivutusjäykkyydeksi**.

Sijoittamalla kaavoista (6.21) ja (6.22) ratkaistut akselin venymän ja käyristymän lausekkeet yhtälöihin (6.14) saadaan normaalivoimaa ja taivutusmomenttia M vastaaville osien 1 ja 2 **normaalijännityksille** lausekkeet

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_r} + \frac{M}{I_r} y, \quad \sigma_2 = n \left(\frac{N}{A_r} + \frac{M}{I_r} y \right) = n \sigma_1. \quad (6.23)$$

Normaalijännitys σ jakautuu siis **osapoikkipinnoilla** palkin **korkeussuunnassa** y **suoraviivaisesti** (kuva 6.6). Suorien kulmakertoimet osapoikkipinnoilla 1 ja 2 ovat vastaavasti M/I_r ja nM/I_r .

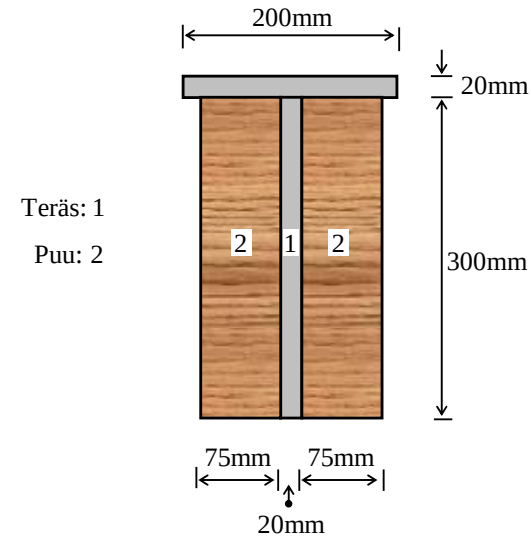


Kuva 6.6: Kahdesta materiaalista koostuva palkki: (a) poikkileikkaus, (b) poikkileikkauksen normaalijännityksen jakautuma

Jos kysymyksessä on puhdas taivutus, kuten poikittaisen kourman kuormittaman palkin tapauksessa $N=0$ ja osien 1 ja 2 normaalijännityksen lausekkeet saavat muodon

$$\sigma_1 = \frac{M}{I_r} y, \quad \sigma_2 = n \frac{M}{I_r} y = n \sigma_1. \quad (6.24)$$

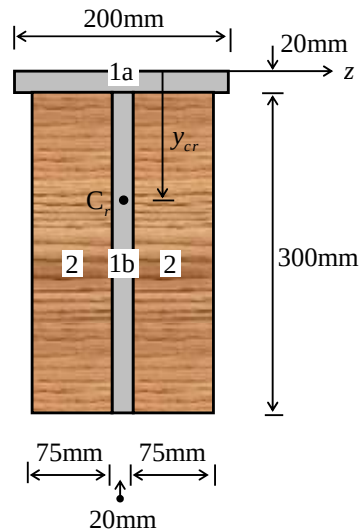
Esimerkki 6.2: Teräksistä T:n muotoista palkkia on vahvistettu pulttaamalla siihen kaksi tammilautaa. Puun ja teräksen kimmomoduulit ovat 12,5GPa ja 200GPa. Määritä suurin ja pienin normaalijännitys sekä puussa että teräksessä, kun liittopalkkiin vaikuttaa taivutusmomentti $M = 50 \text{ kNm}$.



Ratkaisu:

Kimmomoduulisuhde:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{12,5 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}} = \frac{1}{16}$$



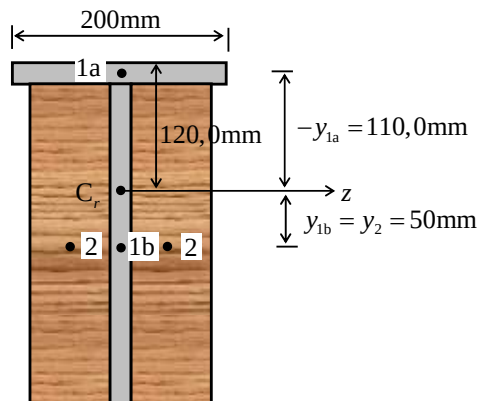
Muunnetun poikkipinnan pinta-ala ja pintakeskiö:

$$A_{1a} = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2, A_{1b} = 20 \cdot 300 = 6000 \text{ mm}^2, A_2 = 2 \cdot 75 \cdot 300 = 45000 \text{ mm}^2$$

$$A_r = A_{1a} + A_{1b} + nA_2 = 4000 + 6000 + 1/16 \cdot 45000 = 12812,5 \text{ mm}^2$$

$$y_{cr} = \frac{A_{1a}y_{1a} + A_{1b}y_{1b} + nA_2y_2}{A_r} = \frac{4000 \cdot 10 + 6000 \cdot 170 + 1/16 \cdot 45000 \cdot 170}{12812,5} = 120,0 \text{ mm}$$

Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti:
(Siirrytään pintakeskiökoordinaatistoon!)



Osapoikkipintojen jäyhyysmomentit z – akselin suhteen:

$$I_{z1a} = I_{z1a} + y_{1a}^2 A_{1a} = \frac{200 \cdot 20^3}{12} + (-110)^2 \cdot 4000 = 48,53 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z1b} = I_{z1b} + y_{1b}^2 A_{1b} = \frac{20 \cdot 300^3}{12} + 50^2 \cdot 6000 = 60,00 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

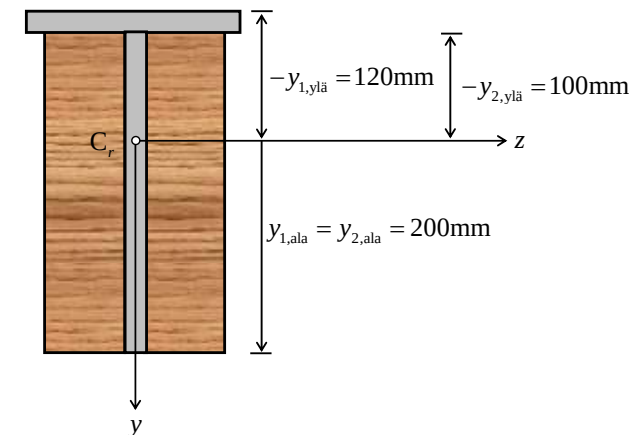
$$I_{z2} = I_{z2} + y_2^2 A_2 = 2 \cdot \frac{75 \cdot 300^3}{12} + 50^2 \cdot 45000 = 450,00 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti:

$$I_z \equiv I_{rz} = I_{z1a} + I_{z1b} + nI_{z2} = (48,53 + 60,00 + 1/16 \cdot 450,00) \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$= 136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Teräksen jännitykset laipan yläreunassa ja uuman alareunassa:



$$\sigma_{1,ylä} = \frac{M}{I_r} y_{ylä} = \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot (-120 \text{ mm}) = \underline{\underline{-43,9 \text{ MPa}}}$$

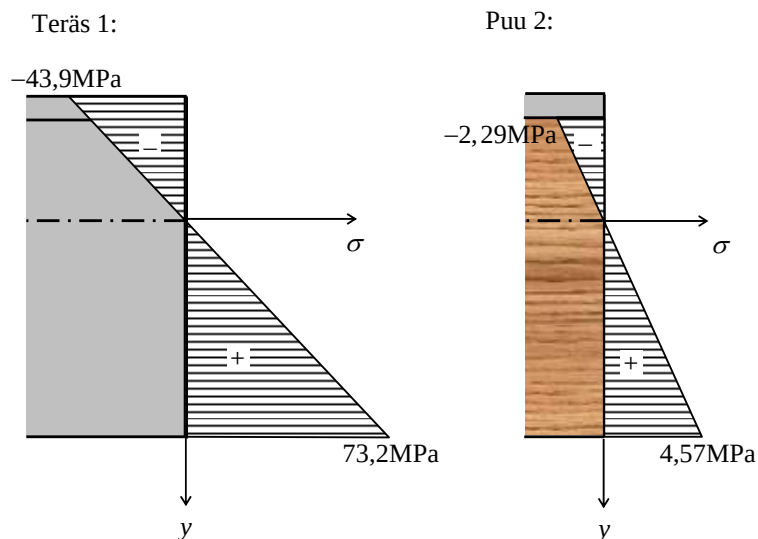
$$\sigma_{1,ala} = \frac{M}{I_r} y_{ala} = \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 200 \text{ mm} = \underline{\underline{73,2 \text{ MPa}}}$$

Puun jännitykset sen ylä- ja alareunassa:

$$\sigma_{2,ylä} = n \frac{M}{I_r} y_{2,ylä} = \frac{1}{16} \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot (-100 \text{ mm}) = \underline{\underline{-2,29 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{2,ala} = n \frac{M}{I_r} y_{2,ala} = \frac{1}{16} \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 200 \text{ mm} = \underline{\underline{4,57 \text{ MPa}}}$$

Jännitysjaakaumat:



Huomautus: Muunnetun poikkipinnan poikkileikkaussuureet voidaan myös määrittää siten, että konstruoidaan kokonaan materiaalista 1 koostuva muunnettu poikkipinta kertomalla materiaalia 2 olevan poikkileikkauksen osan vaakamitat kimmomoduulisuhteella n . Muunnetun poikkipinnan poikkileikkaussuureet saadaan määrittämällä tämän poikkipinnan tavanomaiset poikkileikkaussuureet. Laskelma on seuraavanlainen:

Kerrotaan puuosan vaakamitat kertoimella $n = 1/16$.

Havaitaan, että muunnetun poikkipinnan uuma on vain 9,38mm teräs-poikkileikkauksen uumaa (20mm) leveämpi. Vahvistuksen vaikutus tulee siis tässä tapauksessa olemaan melko pieni.

Osapintojen poikkileikkaussuureita:

$$A_1 = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2,$$

$$A_2 = 29,38 \cdot 300 = 8814 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 12814 \text{ mm}^2,$$

Pintakeskiö:

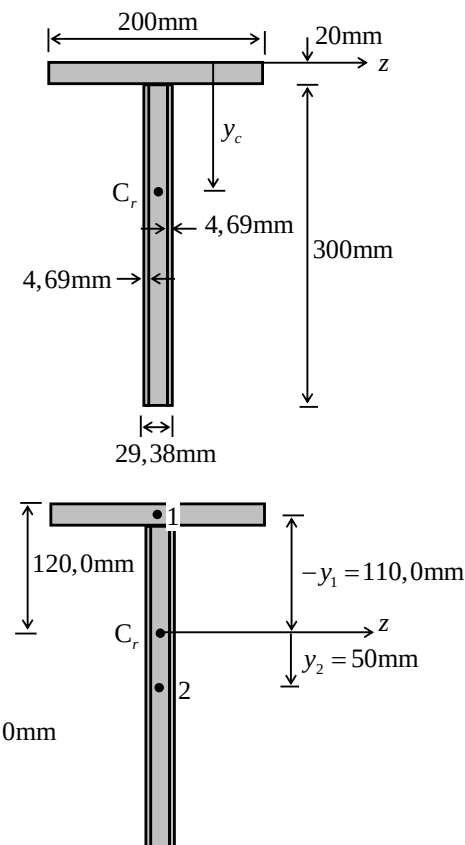
$$\begin{aligned} y_c &= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} \\ &= \frac{4000 \cdot 10 + 8814 \cdot 170}{12814} \text{ mm} \approx 120,0 \text{ mm} \end{aligned}$$

Jäyhyysmomentti:

(Pintakeskiökoordinaatisto!)

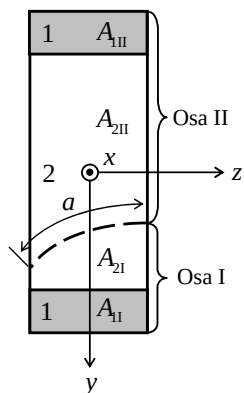
$$\begin{aligned} I_z &= I_{z1} + y_1^2 A_1 + I_{z2} + y_2^2 A_2 \\ &= \left[\frac{200 \cdot 20^3}{12} + (-110)^2 \cdot 4000 + \frac{29,38 \cdot 300^3}{12} + 50^2 \cdot 8814 \right] \text{ mm}^4 = \underline{\underline{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}} \end{aligned}$$

Tästä laskelma jatkuu kuten edellä.



6.3 Taivutetun palkin leikkausjännitykset

Tarkastellaan liittopalkkia, jonka poikkileikkaus muodostuu materiaaleista 1 ja 2 ja jonka poikkileikkaus on kuvan 6.7 mukainen. Ajatellaan palkki halkaistuksi sen pituussuunnassa kahteen osaan I ja II. Palkin **pituutta kohti laskettua leikkausvoimaa**, jolla osa II vaikuttaa osaan I, kutsutaan osien I ja II väliseksi **leikkausvuoksi** $q(x)$.



Kuva 6.7: Palkin poikkileikkaus ja sen osat I ja II

Leikkausvuolle saatiin Rakenteiden lujuusopin osan II luvussa 7 lauseke

$$q = \int_{A_I} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dA, \quad (6.25)$$

missä A_I on poikkipinnan osa I. Suorittamalla pinnan A_I yli tapahtuva integrointi kahdessa osassa ensin sen materiaalia 1 olevan osan A_{1I} ja sitten materiaalia 2 olevan osan A_{2I} yli saadaan

$$q = \int_{A_{1I}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dA + \int_{A_{2I}} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} dA. \quad (6.26)$$

Sijoittamalla tähän normaalijännityksen lausekkeet (6.24) saadaan

$$q = \int_{A_{1I}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{I_r} y \right) dA + \int_{A_{2I}} \frac{\partial}{\partial x} \left(n \frac{M}{I_r} y \right) dA = \frac{\overbrace{M'(x)}^{Q(x)}}{I_r} \left(\overbrace{\int_{A_{1I}} y dA}^{S_{1I}} + n \overbrace{\int_{A_{2I}} y dA}^{S_{2I}} \right) = \frac{Q(x)}{I_r} (S_{1I} + nS_{2I}) \quad (6.27)$$

Käytettiin hyväksi palkin momenttitasapainoyhtälöä $Q(x) = M'(x)$ ja staattisen momentin määrittelykaavaa.

Näin **lineaarisesti kimmoisen liittopalkin leikkausvuolle** poikkipinnan osan A_I määrittelemän palkin osan I ja palkin toisen osan II välisellä (ajatellulla) leikkauspinnalla saatiin lauseke

$$q(x) = \frac{Q(x)S_{rI}}{I_r}, \quad (6.28)$$

missä

$$S_{rI} = S_{1I} + nS_{2I} \quad (6.29)$$

on leikkauksen alapuoleisen poikkipinnan osan I redusoitu staattinen momentti z-akselin suhteen. Sen lausekkeessa (6.29) S_{1I} ja S_{2I} ovat poikkipinnan osan I materiaaleista 1 ja 2 koostuvien osapintojen staattiset momentit.

Ottamalla huomioon, että koko redusoidun poikkipinnan staattinen momentti S_r on osapintojen I ja II staattisten momenttien S_{rI} ja S_{rII} summa ja että se redusoidun poikkipinnan pintakeskiöön asetetussa koordinaatistossa häviää, saadaan

$$S_{rI} = -S_{rII}. \quad (6.30)$$

Näin osien I ja II välisen leikkausvuon lausekkeessa (6.28) voidaan staattisen momentin S_{rI} sijasta käyttää myös staattista momenttia S_{rII} , tällöin on kuitenkin vaihdettava myös etumerkki.

Tarkastellaan vielä kuvan 6.7 poikkileikkausta, joka on ajateltu leikatuksi kahteen osaan I ja II. Leikkauspinnalla vaikuttavalle keskimääräiselle leikkausjännitykselle saadaan

$$\bar{\tau} = \frac{q}{a}, \quad (6.31)$$

missä q on leikkausvuo ja a on leikkausviivan pituus poikkipinnalla (ks. kuva 6.7). **Keskimääräiselle leikkausjännitykselle** saadaan näin kaava

$$\bar{\tau} = \frac{QS_{rl}}{I_r a}. \quad (6.32)$$

Vastaavaan tapaan kuin homogeenisen palkin tapauksessa voidaan myös liittopalkin tapauksessa määrittää leikkausvoimasta Q aiheutuvalle leikkausjännitykselle τ_{xy} likiarvo, merkitsemällä se yhtä suureksi kuin tasolla y vaikuttava keskimääräinen leikkausjännitys. Toisin sanoen

$$\tau_{xy}(y) \approx \bar{\tau}(y) = \frac{q(y)}{b(y)}, \quad (6.33)$$

missä $q(y)$ on leikkausvuo ko. tasolla y ja $b(y)$ on sen leveys. Edellisen perusteella **palkin leikkausjännityksen** τ_{xy} likilauseke saa nyt muodon

$$\tau_{xy}(y) \approx \frac{QS_r(y)}{I_r b(y)}, \quad (6.34)$$

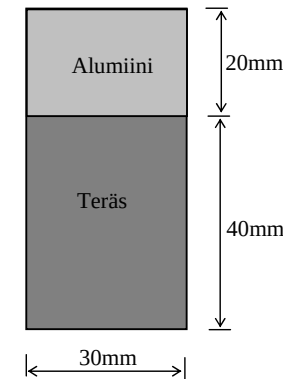
missä

$$S_r(y) = S_1(y) + nS_2(y) \quad (6.35)$$

on tason y alapuoleisen (y -akselin positiivisen suunnan puoleiselle) poikkipinnan osan muunnettu staattinen momentti z -akselin suhteen. Sen lausekkeessa (6.35) $S_1(y)$ ja $S_2(y)$ ovat tason y alapuoleisen poikkipinnan osan materiaaleista 1 ja 2 koostuvien osapintojen staattiset momentit z -akselin suhteen.

Huomautus: Leikkausjännityksen $\tau_{xy}(y)$ (itseisarvoltaan) suurimman arvon määrittämistä silmälläpitäen on hyvä pitää mielessä, että staattinen momentti $S_r(y)$ saa ääriarvon redusoidun poikkipinnan pintakeskiö-akselilla, ts. $S_{r,\max} = S_r(0)$.

Esimerkki 6.3: Terässauva ($E_s = 200\text{GPa}$) ja alumiinisauva ($E_a = 70\text{GPa}$) on liitetty yhteen siten, että ne muodostavat liittopalkin. Palkin poikkileikkauksessa vaikuttaa 20kN :n leikkausvoima. Määritä (a) keskimääräinen leikkausjännitys liitospinnalla ja (b) poikkileikkauksen suuri leikkausjännitys.



Ratkaisu:

Kimmoduulisuhde:

$$E_1 = E_s = 200\text{GPa},$$

$$E_2 = E_a = 70\text{GPa}.$$

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{70}{200} = 0,35$$

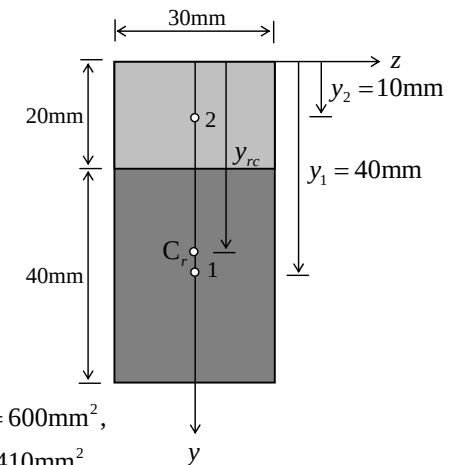
Muunnnetun poikkipinnan pinta-ala:

$$A_1 = 30 \cdot 40 = 1200\text{mm}^2, \quad A_2 = 30 \cdot 20 = 600\text{mm}^2,$$

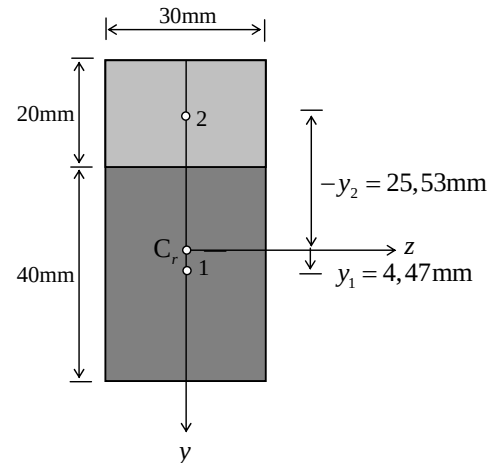
$$A_r = A_1 + nA_2 = 10200 + 0,35 \cdot 600 = 1410\text{mm}^2$$

Muunnnetun poikkipinnan pintakeskiö:

$$y_{cr} = \frac{A_1 y_1 + nA_2 y_2}{A_r} = \frac{1200\text{mm} \cdot 40\text{mm} + 0,35 \cdot 600\text{mm} \cdot 10\text{mm}}{1410\text{mm}^2} = 35,53\text{mm}$$



Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti:



$$S_{\text{liitos}} = 30 \cdot 40 \cdot 4,47 = 5364 \text{mm}^3, \quad S(0) = 30 \cdot 24,47 \cdot 12,24 = 8982 \text{mm}^3$$

$$\tau_{\text{liitos}} = \frac{QS_{r,\text{liitos}}}{I_r b} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{N} \cdot 5364 \text{mm}^3}{327851 \text{mm}^4 \cdot 30 \text{mm}} = \underline{\underline{10,90 \text{MPa}}}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_r(0)}{I_r b} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{N} \cdot 8982 \text{mm}^3}{327851 \text{mm}^4 \cdot 30 \text{mm}} = \underline{\underline{18,26 \text{MPa}}}$$

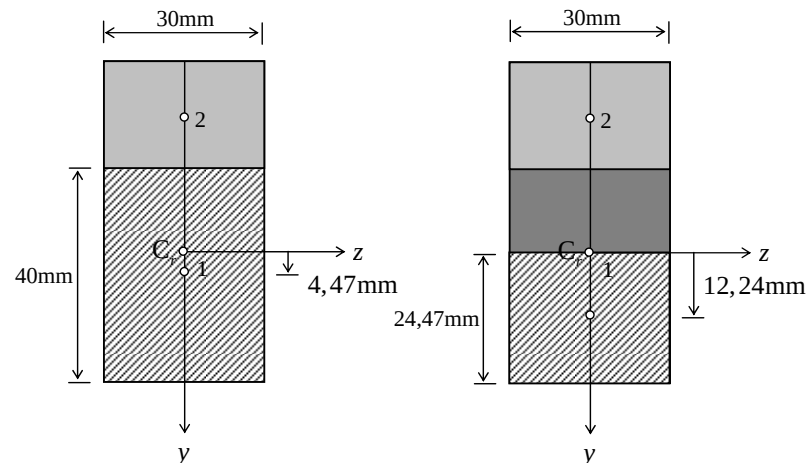
Osapintojen jäyhyysmomentit z – akselin suhteen:

$$I_{z1} = I_{z1} + y_1^2 A_1 = \frac{30 \cdot 40^3}{12} + 4,47^2 \cdot 1200 = 183977 \text{mm}^4$$

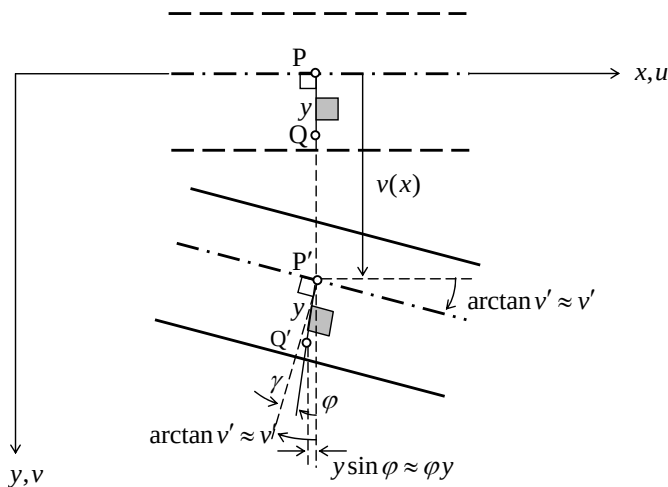
$$I_{z2} = I_{z2} + y_2^2 A_2 = \frac{30 \cdot 20^3}{12} + (-25,53)^2 \cdot 600 = 411069 \text{mm}^4$$

Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti z – akselin suhteen:

$$I_z = I_{z1} + n I_{z2} = 183977 + 0,35 \cdot 411069 = 327851 \text{mm}^4$$



7. Leikkausvoiman aiheuttama taipuma



Kuva 7.1: Palkin deformaatio Timoshenkon palkkiteoriassa.

7.1 Timoshenkon palkkiteorian perusteita

Teknisessä taivutusteoriassa eli Bernoullin palkkiteoriassa otaksuttiin, että palkin akselia vastaan kohtisuora materiaalijana PQ säilyy suorana ja palkin deformatiunutta akselia vastaan kohtisuorana jana P'Q' deformaation jälkeen.

Niin kutsutussa Timoshenkon palkkiteoriassa otaksutaan, että palkin akselia vastaan kohtisuora materiaalijana PQ säilyy edelleen suorana jana P'Q'. Tämä jana ei kuitenkaan enää pysy kohtisuorassa palkin deformatiunutta akselia vastaan, vaan poikkeaa tästä suunnasta kulman γ verran (vrt. kuva 7.1). Tätä kulmaa kutsutaan palkin **liukumakulmaksi** (shear angle), koska sen edustaa likiarvoa palkin todelliselle leikkausmuodonmuutokselle γ_{xy} (vrt. kuvan 7.1 harmaa deformatiuton neliö ja deformatiunut vinoneliö).

Kuvan 7.1 perusteella saadaan yhteys

$$v'(x) = \varphi(x) + \gamma(x) \quad (7.1)$$

ja edelleen palkin yleisen pisteen Q aksiaaliselle siirtymälle lauseke

$$u(x, y) = -\varphi(x)y \quad (7.2)$$

Pisteen Q venymälle saadaan nyt

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) = -\varphi'(x)y. \quad (7.3)$$

eli

$$\varepsilon_x(x, y) = \kappa(x)y, \quad (7.4)$$

missä $\kappa(x)$ käyristymä, jolla on nyt lauseke

$$\kappa(x) = -\varphi'(x). \quad (7.5)$$

Timoshenkon palkille pätevät luonnollisesti palkkialkion tasapainoyhtälöt $Q' + q = 0$ ja $Q = M'$ sekä myös taivutusmomentin ja käyristymän yhteys

$$M = EI\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{EI}, \quad (7.6)$$

jonka johto perustui venymän lausekkeeseen (7.4), Hooken lakiin ja taivutusmomentin määrittelykaavaan.

Lisäksi Timoshenkon palkkiteoriassa otaksutaan, että **leikkausvoiman** Q ja **liukumakulman** γ välillä on **yhteys**

$$Q = \frac{1}{\zeta}GA\gamma \Leftrightarrow \gamma = \zeta \frac{Q}{GA}, \quad (7.7)$$

missä G on leikkausmoduuli, tuloa GA kutsutaan palkin **leikkausjäykkydeksi** ja ζ on poikkileikkauksen ns. **siirtymäkerroin**. Jälkimmäisellä pyritään korjaamaan virhe, joka aiheutuu siitä, että leikkausmuodonmuutokselle $\gamma_{xy}(y)$ joudutaan käyttämään palkin korkeussuunnassa vakiota approksimaatiota γ . Poikkileikkauksen siirtymäkertoimen sijasta käytetään usein myös sen käänteislukua $k = 1/\zeta$, jota kutsutaan **leikkauskorjauskertoimeksi**.

7.2 Poikkileikkauksen siirtymäkerroin

Seuraavassa johdetaan kaava, jolla poikkileikkauksen siirtymäkerroin voidaan määrittää. Muodostetaan Δx pituisen palkin osan virtuaalinen työ toisaalta leikkausvoiman ja virtuaalisen liukumakulman avulla ja toisaalta leikkausjännityksen ja virtuaalisen liukuman avulla. Poikkileikkauksen siirtymäkerroin saadaan ehdosta, että näiden tulee olla yhtä suuria.

Palkin osan virtuaalinen työ¹ leikkausvoiman Q ja virtuaalisen liukumakulman $\bar{\gamma}$ avulla lausuttuna on

$$\Delta \bar{W} = Q \bar{\Delta x}. \quad (7.8)$$

Leikkausjännityksen τ_{xy} ja virtuaalisen liukuman $\bar{\gamma}_{xy}$ avulla lausuttuna se on vastaavasti

$$\Delta \bar{W} = \int_A \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy} dA \Delta x. \quad (7.9)$$

Merkitsemällä yhtälöiden oikeat puolet yhtä suuriksi saadaan yhtälö

$$Q \bar{\gamma} = \int_A \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy} dA. \quad (7.10)$$

Otaksumalla virtuaalisen muodonmuutostilan aiheutuvan virtuaalisesta leikkausvoimasta $\bar{Q}$ ja ilmaisemalla virtuaalinen liukuma sen avulla käyttäen yhteyttä (7.7) sekä otaksumalla sekä leikkausjännitykselle τ_{xy} että virtuaaliselle liukumalle $\bar{\gamma}_{xy}$ teknisen taivutusteorian mukaiset jakaumat

$$\tau_{xy} = \frac{QS(y)}{Ib(y)}, \quad \bar{\gamma}_{xy} \equiv \frac{\bar{\tau}_{xy}}{G} = \frac{\bar{Q}S(y)}{Ib(y)}, \quad (7.11)$$

saadaan yhtälöstä (7.10)

¹ Koska rakenteiden mekaniikan energiaperiaatteita käsitellään vasta Rakenteiden mekaniikka I:ssä, virtuaalisen työn lausekkeet (7.8) ja (7.9) esitetään tässä ilman johtoa.

$$\zeta \frac{Q\bar{Q}}{GA} = \frac{\bar{Q}Q}{GI^2} \int_A \frac{S(y)^2}{b(y)^2} dA, \quad (7.12)$$

josta seuraa poikkileikkauksen siirtymäkertoimelle kaava

$$\zeta = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S(y)^2}{b(y)^2} dA = \frac{A}{I^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{S(y)^2}{b(y)} dy, \quad (7.13)$$

missä jälkimmäinen muoto on saatu valitsemalla integrointialueksi $dA = b(y)dy$.

Esimerkki 7.1: Määritetään suorakaidepoikkileikkauksen siirtymäkerroin

Pinta-ala, jäyhyysmomentti ja osapoikkipinnan staattinen momentti:

$$\begin{aligned} A &= bh, \\ I &= \frac{bh^3}{12}, \\ S(y) &= b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) \\ &= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \end{aligned}$$

Poikkileikkauksen siirtymäkerroin:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{A}{I^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{S(y)^2}{b} dy = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy \\ &= \frac{36}{h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} y^2 + y^4\right) dy = \frac{36}{h^5} \left[\left(\frac{h^4}{16} y - \frac{h^2}{6} y^3 + \frac{y^5}{5}\right) \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{36}{h^5} \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{48} + \frac{1}{160} + \frac{1}{32} - \frac{1}{48} + \frac{1}{160} \right) = \underline{\underline{\frac{6}{5} = 1,2}} \end{aligned}$$

7.3 Taipuman ja kiertymän differentiaaliyhtälöt

Lausekkeista (7.5) ja (7.6) saadaan

$$\boxed{\varphi' = -\frac{M}{EI}} \quad (7.14)$$

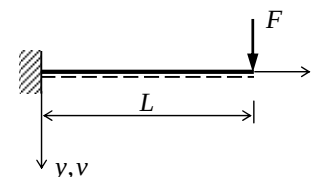
sekä lausekkeista (7.1) ja (7.7) saadaan

$$\boxed{v' = \varphi + \zeta \frac{Q}{GA}} \quad (7.15)$$

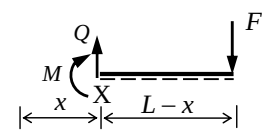
Jos kysymyksessä on **staattisesti määrätty tehtävä**, jolloin taivutusmomentti $M(x)$ ja leikkausvoima $Q(x)$ voidaan määrittää etukäteen ja ovat siis tunnettuja funktioita, nämä yhtälöt muodostavat ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöparin taipuman $v(x)$ ja kiertymän $\varphi(x)$ määrittämiseksi.

Yhtälöparin (7.14) ja (7.15) yleiseen ratkaisuun tulee kaksi integrointivakiota, jotka määräytyvät taipumalle $v(x)$ ja/tai kiertymälle $\varphi(x)$ asetettavista reunaehdoista.

Esimerkki 7.2: Määritetään oheisen ulokepalkin taipuman lauseke $v(x)$, kun leikkausvoiman vaikutus otetaan huomioon. Palkin taivutusjäykkyys on EI , leikkausjäykkyys on GA ja poikkileikkauksen siirtymäkerroin on ζ .



Leikkausvoima ja taivutusmomentti:



$$\begin{aligned} \uparrow \quad Q - F &= 0 \Rightarrow Q = F \\ \searrow \quad M + F(L-x) &= 0 \\ \Rightarrow M &= -F(L-x) \end{aligned}$$

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö (7.14):

$$\varphi' = -\frac{M}{EI} = \frac{F}{EI}(L-x) \Rightarrow \varphi = \frac{F}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

Huomioidaan reunaehto $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi(0) \equiv C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Kiertymän lauseke on siis:

$$\underline{\varphi(x) = \frac{F}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)}$$

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö (7.15):

$$\begin{aligned} v' &= \varphi + \zeta \frac{Q}{GA} = \frac{F}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + \zeta \frac{F}{GA} \\ \Rightarrow v &= \frac{F}{EI}\left(\frac{L}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right) + \zeta \frac{F}{GA}x + C_2 \end{aligned}$$

Huomioidaan reunaehto $v(0) = 0$:

$$v(0) \equiv C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Taipuman lauseke on siis:

$$v = \frac{F}{EI} \left(\frac{L}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right) + \zeta \frac{F}{GA} x$$

7.4 Momenttipintamenetelmä Timoshenko palkille

Momenttipintamenetelmää voidaan helposti laajentaa siten, että sitä voidaan käyttää myös Timoshenko palkin kiertymien ja taipumien määrittämiseen. Näin myös staattisesti määräämättömien Timoshenko palkkien ratkaiseminen tulee mahdolliseksi.

Lähtökohtana momenttipintamenetelmän ensimmäisen yhtälön (2.22) johtamisessa (vrt. kohta 2.22) oli käyrityksen ja kiertymän yhteys (2.13). Koska Timoshenko palkkiteoriassa on voimassa sama yhtälö² (7.5), saadaan Timoshenko palkkiin soveltuvan momenttipintamenetelmän ensimmäiseksi yhtälöksi sama yhtälö

$$\varphi_B - \varphi_A = -\mathcal{A}_{AB}^\kappa. \quad (7.16)$$

Tässä käyrityspinnan pisteiden A ja B väliselle pinta-alalle on käytetty symbolia $\mathcal{A}_{AB}^\kappa$, mihin on lisätty yläindeksi κ .

Lähtökohtana momenttipintamenetelmän toisen yhtälön (2.31) johtamisessa oli kiertymän ja taipuman yhteys (2.12), jota Timoshenkon palkkiteoriassa vastaa yhteys (7.1). Se on

$$v'(x) = \varphi(x) + \gamma(x) \quad (7.17)$$

Menetellään vastaavaan tapaan kuin kohdassa 2.22 ja integroidaan yhteys (7.17) puolittain pisteestä A pisteeseen B. Tulokseksi saadaan yhtälö, jossa on samat termit kuin yhtälössä (2.31). Lisäksi oikeaan puoleen tulee liukumakulman $\gamma(x)$ integraali eli

$$\mathcal{A}_{AB}^\gamma = \int_{x_A}^{x_B} \gamma(x) dx. \quad (7.18)$$

Näin saadaan tulos

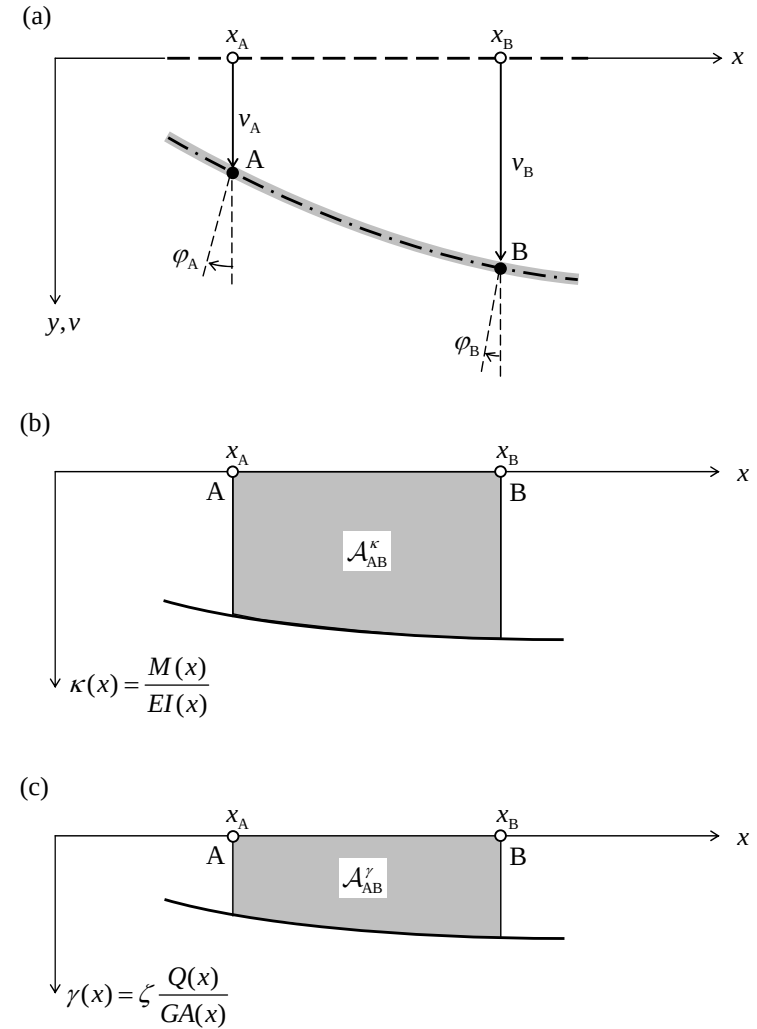
$$v_B - v_A = \varphi_A (x_B - x_A) - \mathcal{M}_{AB}^\kappa + \mathcal{A}_{AB}^\gamma. \quad (7.19)$$

² Kiertymällä φ ymmärretään tässä poikkileikkaustason kiertymää, joka teknisessä taivutusteoriassa on myös palkin akselin kiertymä.

Kaavat (7.16) ja (7.19) muodostavat Timoshenko palkkiin soveltuvan **momenttipintamenetelmän peruskaavaparin**. Ne ovat siis

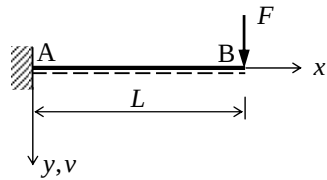
$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_A &= -\mathcal{A}_{AB}^{\kappa}, \\ v_B - v_A &= \varphi_A(x_B - x_A) - \mathcal{M}_{AB}^{\kappa} + \mathcal{A}_{AB}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Kuva 7.4 esittelee näissä kaavoissa esiintyviä suureita.

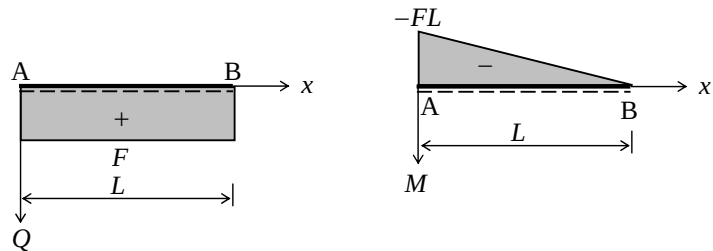


Kuva 7.7: Momenttipintamenetelmä Timoshenko palkille: (a) palkin deformaatio välillä AB, (b) palkin käyrästymäpinta välillä AB ja (c) palkin liukumakulmapinta välillä AB.

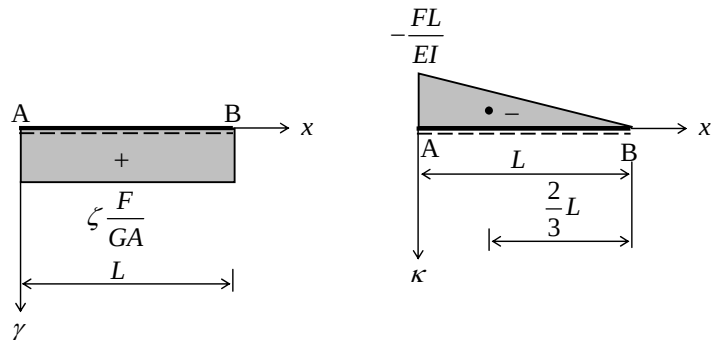
Esimerkki 7.3: Määritetään momenttipintamenetelmällä esimerkin 7.2 ulokepalkin taipuma ja kiertymä ulokkeen päässä.



Leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuvio:



Liukumakulma ja käyrästymäkuvio:



Pinta-alat ja momentti:

$$\mathcal{A}_{AB}^{\gamma} = L \cdot \zeta \frac{F}{GA} = \zeta \frac{FL}{GA}, \quad \mathcal{A}_{AB}^{\kappa} = \frac{1}{2} L \cdot \left(-\frac{FL}{EI}\right) = -\frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI}$$

$$\mathcal{M}_{AB}^{\kappa} = \frac{1}{2} L \cdot \left(-\frac{FL}{EI}\right) \cdot \frac{2}{3} L = -\frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI}$$

Momenttipintamenetelmä:

$$\varphi_B = \varphi_A^0 - \mathcal{A}_{AB}^{\kappa} = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI}$$

$$v_B = v_A^0 + \varphi_A^0 (x_B - x_A) - \mathcal{M}_{AB}^{\kappa} + \mathcal{A}_{AB}^{\gamma} = -\left(-\frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI}\right) \zeta \frac{FL}{GA} = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI} + \zeta \frac{FL}{GA}$$

Verrataan esimerkin 7.2 tulokseen:

$$\varphi_B = \varphi(L) = \frac{F}{EI} \left(L \cdot L - \frac{L^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI}$$

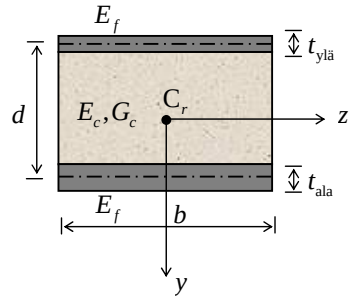
$$v_B \equiv v(L) = \frac{F}{EI} \left(\frac{L}{2} \cdot L^2 - \frac{L^3}{6}\right) + \zeta \frac{F}{GA} \cdot L = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI} + \zeta \frac{FL}{GA}$$

Saatiin sama tulos.

7.5 Sandwich palkki

Tyypillinen rakenne, jossa leikkausmuodonmuutoksen osuus taipumasta on merkittävä, on sandwich palkki.

Sandwich palkki koostuu pehmeästä ydinkerroksesta (c core) ja sen ylä- ja alapintaan kiinnitetyistä ohuista jäykistä pintakerroksista (f flange).



Kuva 7.8: Sandwich palkin poikkileikkaus

Seuraavassa määritämme Sandwich palkin taivutus- ja leikkausjäykkyyden. Sandwich palkin poikkileikkaus koostuu kahdesta materiaalista ja sen taivutusjäykkyyden määrittäminen tapahtuu luvussa 8 esitetyllä tavalla. Otetaan referenssimateriaaliksi pintakerroksen materiaali, jolloin kimmomoduulisuhde on

$$n = \frac{E_c}{E_f} \quad (7.21)$$

ja muunnetun poikkileikkauksen jähyysmomentti on

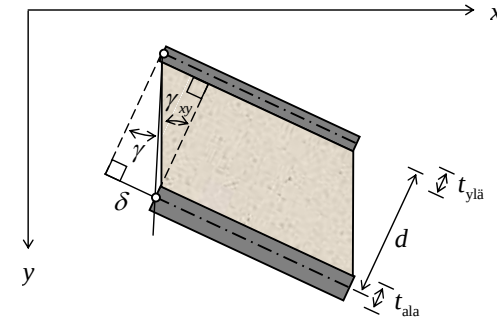
$$I_r = I_f + nI_c, \quad (7.22)$$

missä I_f ja I_c ovat pintakerrosten ja ydinkerroksen jähyysmomentit muunnetun poikkipinnan pintakeskiön C_r kautta kulkevan akselin (z – akselin) suhteen. **Sandwich palkin taivutusjäykkyys** on nyt

$$B = E_f I_r. \quad (7.23)$$

Käytetään tässä alan kirjallisuudessa usein esiintyvää lyhennysmerkintää B , joka viittaa sanaan ”bending stiffness”.

Sandwich palkin pintakerrosten otaksutaan noudattavan teknistä taivutusteoriaa, joten niissä ei tapahdu leikkausmuodonmuutosta. Kuva 7.9 esittää sandwich palkin leikkausmuodonmuutosta.



Kuva 7.9: Sandwich palkin leikkausmuodonmuutos.

Ydinkerroksen liukuman γ_{xy} otaksutaan vakioksi. Palkin pintakerrosten väliselle siirtymälle (kuvan 7.9) saadaan sen avulla lauseke

$$\delta = \left(d - \frac{t_{ylä} + t_{ala}}{2}\right) \tan \gamma_{xy} \approx \left(d - \frac{t_{ylä} + t_{ala}}{2}\right) \gamma_{xy}, \quad (7.24)$$

Palkin liukumakulma γ määritellään kuvan 7.9 mukaisesti. Palkin pintakerrosten väliselle siirtymälle saadaan sen avulla lauseke

$$\delta = d \tan \gamma \approx d \cdot \gamma. \quad (7.25)$$

Merkitsemällä lausekkeiden (7.24) ja (7.25) oikeat puolet yhtä suuriksi, saadaan liukuman γ_{xy} ja liukumakulman γ välille yhteys

$$\gamma_{xy} = \frac{d}{d - \frac{t_{ylä} + t_{ala}}{2}} \gamma. \quad (7.26)$$

Ydinkerroksen leikkausjännitykselle saadaan

$$\tau_{xy} = G_c \gamma_{xy} = G_c \frac{d}{d - \frac{t_{ylä} + t_{ala}}{2}} \gamma. \quad (7.27)$$

Koska pintakerrosten otaksutaan noudattavan teknistä taivutusteoriaa, niissä liukuma γ_{xy} ja myös leikkausjännitys $\tau_{xy} = G_f \gamma_{xy}$ häviävät. Näin Leikkausvoimalle saadaan

$$Q = \int_A \tau_{xy} dA = \int_{A_c} \tau_{xy} dA + \int_{A_f} \tau_{xy} dA = G_c \frac{d}{d - \frac{t_{ylä} + t_{ala}}{2}} \gamma \int_{A_c} dA$$

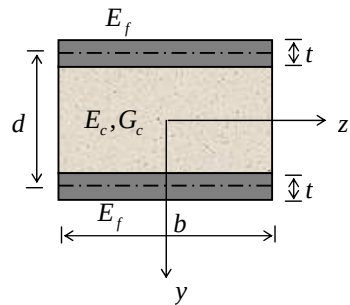
$$= G_c \frac{d}{d - \frac{t_{ylä} + t_{ala}}{2}} \gamma \cdot b \left(d - \frac{t_{ylä} + t_{ala}}{2} \right) = G_c b d \gamma. \quad (7.28)$$

Näin **sandwich palkin leikkausjäykkyys** on

$$S = G_c b d. \quad (7.29)$$

Alan kirjallisuudessa usein esiintyvä lyhennysmerkintä S viittaa sanaan ”shearing stiffness”. Sitä on varottava sekoittamasta staattiseen momenttiin.

Usein sandwich palkin pintakerrokset ovat samanlaiset (kuva 7.10).



Kuva 7.10: Sandwich palkin poikkileikkaus, kun pintakerrokset ovat samanlaiset

Tällöin poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen ja muunnetun poikkipinnan pintakeskiö yhtyy symmetria-akseleiden leikkauspisteeseen. Pintakerrosten jäyhyysmomentiksi saadaan

$$I_f = 2 \cdot \frac{bt^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 bt = \frac{bt^3}{6} + \frac{btd^2}{2} = \frac{btd^2}{2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{t}{d}\right)^2 \right] \quad (7.30)$$

ja ydinkerroksen jäyhyysmomentti on

$$I_c = \frac{b(d-t)^3}{12}. \quad (7.31)$$

Näin muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentille saadaan kaavan (7.22) avulla tulos

$$I_r = \frac{btd^2}{2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{t}{d}\right)^2 \right] + n \frac{b(d-t)^3}{12}. \quad (7.32)$$

Usein sandwich palkin pintakerros on ydinkerrokseen nähden ohut. Lisäksi ydinkerroksen kimmomoduuli on pintakerroksen kimmomoduuliin nähden pieni. Monissa käytännön sovellutuksissa voidaan tehdä olettamukset $t/d \ll 1$ ja $n \ll 1$. Tällöin muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti on

$$I_r = \frac{btd^2}{2} \quad (7.33)$$

ja palkin **taivutusjäykkyys** on

$$B = \frac{E_f btd^2}{2}. \quad (7.34)$$

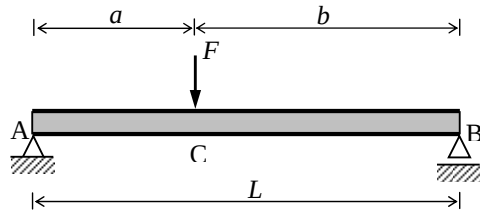
Sandwich palkin analysointi tapahtuu samaan tapaan kuin homogeenisen Timoshenko palkin. Käyrityksen ja taivutusmomentin sekä liukumakulman ja leikkausvoiman yhteydet ovat nyt

$$\kappa = \frac{M}{B}, \quad \gamma = \frac{Q}{S}. \quad (7.35)$$

Kiertymän ja taipuman differentiaaliyhtälöt (7.14) ja (7.15) saavat muodon

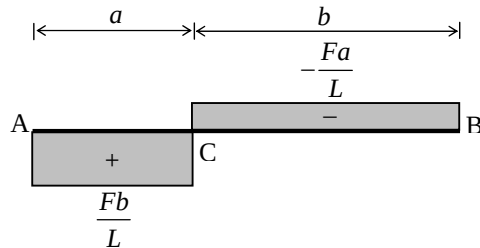
$$\boxed{\varphi' = -\frac{M}{B}, \quad v' = \varphi + \frac{Q}{S}} \quad (7.36)$$

Esimerkki 7.4: Määritä oheisen sandwich palkin taipuma pisteessä C. Palkin taivutus- ja leikkausjäykkyydet ovat B ja S.

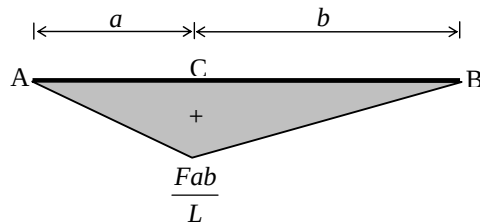


Ratkaisu:

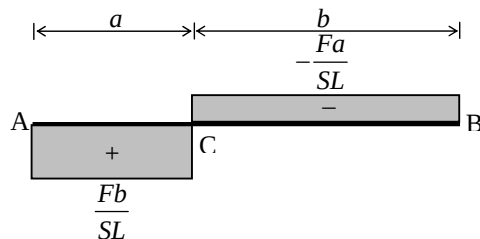
Leikkausvoimakuvio:



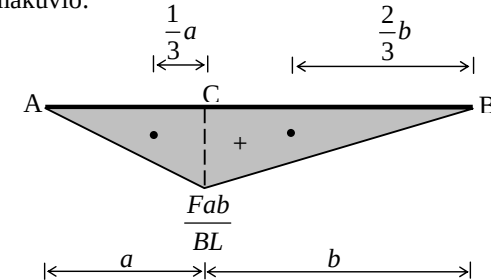
Taivutusmomenttikuvio:



Liukumakulmakuvio:



Käristymäkuvio:



Väli AB:

$$\mathcal{A}_{AB}^{\gamma} = a \cdot \frac{Fb}{SL} + b \cdot \left(-\frac{Fa}{SL}\right) = 0,$$

$$\mathcal{M}_{AB}^{\kappa} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Fb}{BL} \cdot \left(b + \frac{1}{3}a\right) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{Fa}{BL} \cdot \frac{2}{3}b = \frac{Fb}{BL} \left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{6}a^2 + \frac{2}{3}b^2\right).$$

Kiertymä pisteessä A:

$$\overset{0}{v}_B = \overset{0}{v}_A + \varphi_A \overbrace{(x_B - x_A)}^L - \mathcal{M}_{AB}^{\kappa} + \mathcal{A}_{AB}^{\gamma} \Rightarrow \varphi_A = \frac{\mathcal{M}_{AB}^{\kappa}}{L} = \frac{Fb}{BL^2} \cdot \left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{6}a^2 + \frac{2}{3}b^2\right)$$

Väli AC:

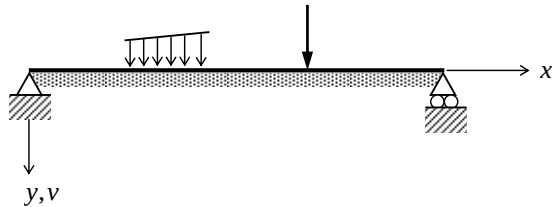
$$\mathcal{A}_{AC}^{\gamma} = a \cdot \frac{Fb}{SL} = \frac{Fb}{SL}, \quad \mathcal{M}_{AC}^{\kappa} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Fb}{BL} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{1}{6} \frac{Fa^3b}{BL}.$$

Taipuma pisteessä C:

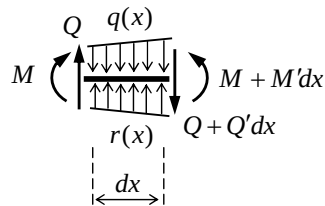
$$\begin{aligned} \overset{0}{v}_C &= \overset{0}{v}_A + \varphi_A \overbrace{(x_C - x_A)}^a - \mathcal{M}_{AC}^{\kappa} + \mathcal{A}_{AC}^{\gamma} = \frac{Fa^2b}{BL^2} \cdot \left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{3}b^2\right) - \frac{1}{6} \frac{Fa^3b}{BL} + \frac{Fb}{SL} \\ &= \underline{\underline{\frac{Fa^2b^2}{3BL} + \frac{Fb}{SL}}}. \end{aligned}$$

8. Kimmoisalla alustalla oleva palkki

8.1 Kimmoisalla alustalla olevan palkin yhtälöt



Kuva 8.1: Kimmoisalla alustalla oleva palkki.



Kuva 8.2: Kimmoisalla alustalla olevan palkkialkion vapaakappalekuvio

Kimmoisalla alustalla olevaan palkkia (kuva 8.1) kuormittaa jakautuneen kuorman $q(x)$ lisäksi **alustapaine** $r(x)$. Kuvan 8.2 palkkialkion pystysuuntaiseksi tasapainoehdoksi saadaan

$$Q + Q'dx - Q + qdx - rdx = 0 \Rightarrow (Q' + q - r)dx = 0 \quad (8.1)$$

$$\Rightarrow Q' = -q + r.$$

ja sen momenttitasapainoehdoksi saadaan

$$M - M - M'dx + Qdx + (q - r)dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow [-M' + Q + (q - r)\frac{dx}{2}]dx = 0 \Rightarrow -M' + Q + (q - r)\frac{dx}{2} \stackrel{\approx 0}{=} 0$$

$$\Rightarrow Q = M'. \quad (8.2)$$

Yhdistämällä tulokset (8.1) ja (8.2) saadaan kimmoisella alustalla olevan palkkialkion tasapainoyhtälöksi

$$M'' = -q + r. \quad (8.3)$$

Tämä poikkeaa tavallisen palkin yhtälöstä $M'' = -q$ alustapaineen r osalta. Muut tavallisen palkin yhtälöt soveltuvat sellaisenaan kimmoisalla alustalla olevalle palkille. Tässä rajoitutaan tekniseen taivutusteoriaan ja lineaarisesti kimmoiseen palkkiin, jolloin tärkeimmät muut yhtälöt ovat kiertymän ja taipuman yhteys

$$\varphi = v', \quad (8.4)$$

käyristymän ja taipuman yhteys

$$\kappa = -v'', \quad (8.5)$$

taivutusmomentin ja käyristymän yhteys

$$M = EI\kappa \quad (8.6)$$

sekä leikkausvoiman ja taivutusmomentin yhteys

$$Q = M'. \quad (8.7)$$

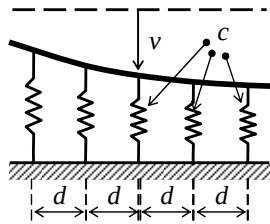
8.2 Alustamalleja

Edellä esitettyjen yhtälöiden lisäksi tarvitaan ns. alustamalli, joka ilmaisee palkin taipuman $v(x)$ ja alustapaineen $r(x)$ välisen riippuvuuden.

Yksinkertaisin ja yleisin alustamalli on ns. **Winklerin alusta** (Winkler 1867). Siinä otaksutaan, että alustapaine on suoraan verrannollinen taipumaan eli

$$r(x) = kv(x), \quad (8.8)$$

missä k on ns. **alustaluku**.



Kuva 8.3: Winklerin alustan mekaaninen malli.

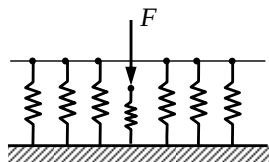
Winklerin alustan voidaan ajatella muodostuvan kuvan 8.3 tasavälein sijaitsevista jousista. Yksi jousi vaikuttaa palkkiin voimalla $R = cv$, missä c on jousen jousivakio. Keskimääräiselle alustapaineelle saadaan näin

$$r = \frac{R}{d} = \frac{\overbrace{c}^k}{d} v, \quad (8.9)$$

joten alustaluku on

$$k = \frac{c}{d}. \quad (8.10)$$

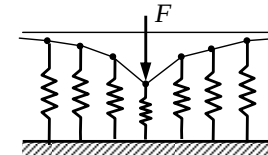
Kuva 8.4 havainnollistaa pistekuorman F vaikutusta Winklerin alustaan. Vain voiman F vaikutuspisteessä oleva jousi puristuu kokoon.



Kuva 8.4: Pistekuorman vaikutus Winklerin alustaan.

Vaikka Winklerin alusta on äärimmäisen yksinkertainen malli todelliselle alustalle, esim. maalle, sitä käytetään yksinkertaisuutensa vuoksi paljon. Arkimedeen lain perusteella nähdään helposti, että vesi toimii Winklerin alustana vedessä kelluville rakenteille.

Jos pyritään realistisemmin kuvaamaan alustan todellista käyttäytymistä päädytään monimutkaisempiin alustamalleihin. Seuraava askel Winklerin alustasta voisi olla **Wieghartin** alusta (Wieghart 1922, Pasternak 1026). Siinä Winklerin alustan ajatellut erilliset jouset liitetään toisiinsa venymätöntä köyttä hyväksi käyttäen (vrt. kuva 8.5).



Kuva 8.5: Pistekuorman vaikutus Wieghartin alustaan.

Seuraavassa rajoitutaan Winklerin alustaan.

8.3 Kimmoisalla alustalla olevan palkin differentiaaliyhtälö

Lausekkeista (8.5) ja (8.6) seuraa (tuttu) taivutusmomentin ja taipuman yhteys

$$M = -EIv''. \quad (8.11)$$

Sijoittamalla tämä ja Winklerin alustan alustapaineen ja taipuman yhteys (8.3) tasapainoyhtälöön (8.8) saadaan

$$(EIv'')'' + kv = q. \quad (8.12)$$

Tämä on kimmolisalla alustalla olevan palkin differentiaaliyhtälö. Tasajäykän palkin ($EI = \text{vakio}$) tapauksessa se saa muodon

$$EIv^{(4)} + kv = q \quad (8.13)$$

eli

$$v^{(4)} + 4\beta^4 v = \frac{q}{EI}, \quad (8.14)$$

missä

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}. \quad (8.15)$$

Differentiaaliyhtälön (8.14) yleinen ratkaisu on

$$v(x) = \bar{v}(x) + v_0(x), \quad (8.16)$$

missä $\bar{v}(x)$ on yhtälön homogeenisen osan

$$v^{(4)} + 4\beta^4 v = 0 \quad (8.17)$$

yleinen ratkaisu ja $v_0(x)$ on eräs yksityisratkaisu.

Yhtälön (8.17) yleinen ratkaisu voidaan esittää seuraavissa kahdessa vaihtoehtoisessa muodossa (Vrt. Mikkola Martti: Kimmoisalla alustalla oleva palkki, TKK, Rakennetekniikan laitos, julkaisu 36, Otaniemi 1981):

$$\bar{v} = e^{-\beta x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x), \quad (8.18)$$

ja

$$\bar{v}(x) = C_1 Y_1(\beta x) + C_2 Y_2(\beta x) + C_3 Y_3(\beta x) + C_4 Y_4(\beta x), \quad (8.19)$$

missä apufunktiot Y_i ovat

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \cosh \xi \cos \xi, \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} (\cosh \xi \sin \xi + \sinh \xi \cos \xi), \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \sinh \xi \sin \xi, \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} (\cosh \xi \sin \xi - \sinh \xi \cos \xi). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Apufunktiot (8.20) derivoituvat taulukon 8.1 mukaisesti ja niille pätee

$$Y_1(0) = 1, \quad Y_2(0) = Y_3(0) = Y_4(0) = 0. \quad (8.21)$$

Taulukko 8.1: Apufunktioiden $Y_i(\xi)$ derivaatat.

i	Y_i	Y_i'	Y_i''	Y_i'''	$Y_i^{(4)}$
1	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$	$-4Y_1$
2	Y_2	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$
3	Y_3	Y_2	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$
4	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	$-4Y_4$

Yksityisratkaisu $v_0(x)$ aiheutuu jakautuneesta kuormasta $q(x)$. Palkin **kuormittamattomalla osalla** pätee täten $v_0(x) = 0$. Jos jakautunut kuorma $q(x)$ on polynomimuotoinen ja korkeintaan kolmatta astetta voidaan myös yksityisratkaisulle ottaa samanasteinen yrite $v_0(x)$. Tällöin $v^{(4)}(x) = 0$ ja sijoitus differentiaaliyhtälöön (8.14) antaa

$$4\beta^4 v_0(x) = \frac{q(x)}{EI}, \quad (8.22)$$

josta seuraa yksityisratkaisulle välittömästi tulos

$$v_0(x) = \frac{q(x)}{4\beta^4 EI} = \frac{q(x)}{k}. \quad (8.23)$$

Tämä yksinkertainen yksityisratkaisun lauseke pätee siis, jos **jakautunut kuormitus** $q(x)$ on **polynomimuotoinen ja korkeintaan kolmatta astetta**.

8.4 Kimmoisalla alustalla olevan palkin puoliääretön ratkaisu

Kun kimmoisalla alustalla olevan palkin pituus L on riittävä eli se toteuttaa ehdon

$$\beta L > 5, \quad (8.24)$$

palkin päiden tuennasta tai niissä vaikuttavista pistevoimista (ja/tai momenteista) aiheutuvat **reunahäiriöt** ovat niin paikallisia, että niihin liittyvät ratkaisut voidaan muodostaa toisistaan rippumatta. Tällöin

voidaan käyttää kimmoisalla alustalla olevan palkin ns. **puoliääretöntä** ratkaisua.

Kimmoisalla alustalla olevan palkin puoliääretön ratkaisu saadaan homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun (8.18) ja yksityisratkaisun $v_0(x)$ summana. Sijoitetaan koordinaatiston origo $x=0$ tarkasteltavaan palkin päähän. Tällöin palkki jää joko positiivisen tai negatiivisen x -akselin puolelle.

Jos palkki jää positiivisen x -akselin puolelle ($x \geq 0$), yleisen ratkaisun (8.18) tulee hävitä, kun $x \rightarrow \infty$. Saamme integroimisvakioille ehdot $B_3 = 0$ ja $B_4 = 0$. Jos palkki jää negatiivisen x -akselin puolelle ($x \leq 0$), yleisen ratkaisun (8.18) tulee hävitä, kun $x \rightarrow -\infty$. Saamme integroimisvakioille ehdot $B_1 = 0$ ja $B_2 = 0$. Voimme yhdistää tuloksen yhdeksi kaavaksi

$$\bar{v} = e^{\mp \beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (8.25)$$

missä ylempi merkki vastaa positiivista x -akselia ($x \geq 0$) ja alempi merkki negatiivista x -akselia ($x \leq 0$). Näin saamme probleeman integroimisvakioiden avulla lausutulle ratkaisulle

$$v(x) = e^{\mp \beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + v_0(x). \quad (8.26)$$

Integroimisvakiot C_1 ja C_2 määräytyvät reunaehdoista. Niiden huomioon ottaminen tapahtuu samaan tapaan kuin tavallisen palkin taipuman differentiaaliyhtälön yhteydessä.

8.5 Kimmoisalla alustalla olevan palkin äärellinen ratkaisu

Kun kimmoisalla alustalla olevan palkin pituus L toteuttaa ehdon

$$\beta L < 5, \quad (8.27)$$

käytetään kimmoisalla alustalla olevan palkin ns. **äärellistä** ratkaisua.

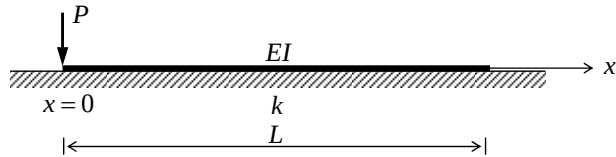
Kimmoisalla alustalla olevan palkin äärellinen ratkaisu saadaan homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun (8.19) ja yksityisratkaisun $v_0(x)$ summana. Ratkaisu on siis

$$v(x) = C_1 Y_1(\beta x) + C_2 Y_2(\beta x) + C_3 Y_3(\beta x) + C_4 Y_4(\beta x) + v_0(x). \quad (8.28)$$

Integroimisvakiot C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 määräytyvät reunaehdoista. Niiden huomioon ottaminen tapahtuu samaan tapaan kuin tavallisen palkin taipuman differentiaaliyhtälön yhteydessä.

8.6 Esimerkkejä

Esimerkki 8.1: Oheinen kimmoisalla alustalla oleva palkki on vasemmasta päästään vapaa ja siinä vaikuttaa pistekuorma P . Palkin oikea pää on niin kaukana ($\beta L > 5$), että voidaan käyttää puoliäärettömän palkin teoriaa. Määritetään taipuman, taivutusmomentin ja leikkausvoiman jakaumat.



Ratkaisu:

Taipuma, taivutusmomentti ja leikkausvoima integrointivakioiden avulla:

(Koska palkilla ei ole jakautunutta kuormaa, on yksityisratkaisu $v_0(x) = 0$.)

$$v(x) = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$v'(x) = -\beta e^{-\beta x} [(C_1 - C_2) \cos \beta x + (C_1 + C_2) \sin \beta x]$$

$$M(x) \equiv -EI v''(x) = 2EI \beta^2 e^{-\beta x} (C_2 \cos \beta x - C_1 \sin \beta x)$$

$$Q(x) \equiv M'(x) = 2EI \beta^3 e^{-\beta x} [-(C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_1 - C_2) \sin \beta x]$$

Taivutusmomentti ja leikkausvoima palkin vasemmassa päässä:

$$\left(\frac{D}{\delta} \right) M(\delta) + P \cdot \delta - kv \left(\frac{\delta}{2} \right) \delta \cdot \frac{\delta}{2} = 0$$

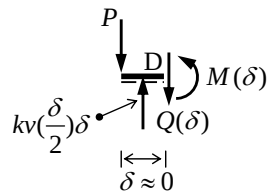
$$\Rightarrow M(\delta) = -P\delta + \frac{1}{2} kv \left(\frac{\delta}{2} \right) \delta^2$$

$$\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{M(0) = 0}$$

$$\downarrow Q(\delta) + P - kv \left(\frac{\delta}{2} \right) \delta = 0$$

$$\Rightarrow Q(\delta) = -P + \frac{kv}{2} \delta^2$$

$$\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{Q(0) = -P}$$



Huomautus: Nähdään, että reunaehdot ovat samat, kuin tavallisen palkin vapaassa päässä, jossa vaikuttaa pistekuorma. Yleensäkin kimmoisalla alustalla olevan palkin reunaehdot ovat samanlaisia kuin tavallisen palkin (vrt. Rakenteiden lujuusoppi, kohta 4.3).

Reunaehdot sauvan vasemmassa päässä:

$$M(0) = 0, \quad Q(0) = -P$$

Integrointivakioiden määrittäminen:

$$M(0) \equiv 2EI \beta^2 C_2 = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

$$Q(0) \equiv -2EI \beta^3 (C_1 + C_2) = -P \Rightarrow \underline{C_1 = \frac{P}{2EI \beta^3}}$$

Taipuma, taivutusmomentti ja leikkausvoima:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{P}{2EI \beta^3} e^{-\beta x} \cos \beta x \\ M(x) &= -\frac{P}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x \\ Q(x) &= P e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) \end{aligned}$$

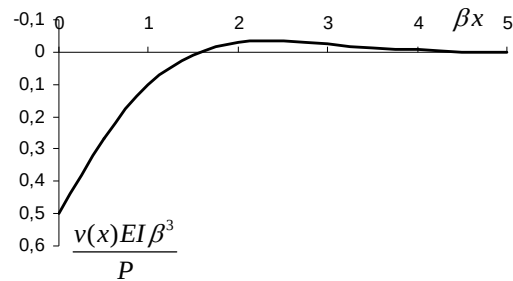
Dimensiottomat lausekkeet:

$$\frac{v(x) EI \beta^3}{P} = \frac{1}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x$$

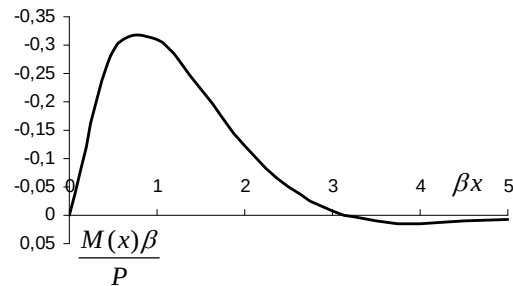
$$\frac{M(x) \beta}{P} = -e^{-\beta x} \sin \beta x$$

$$\frac{Q(x)}{P} = e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x)$$

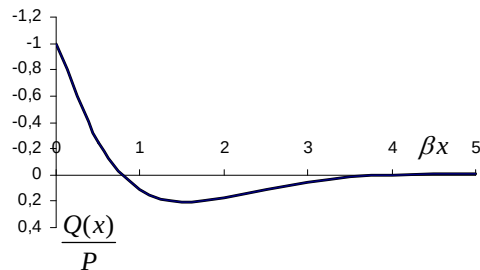
Taipuma:



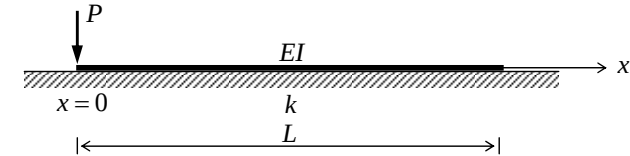
Taivutusmomentti:



Leikkausvoima:



Esimerkki 8.2: Oheinen kimmoisalla alustalla oleva palkki on päistään vapaa ja sen vasemmassa päässä vaikuttaa pistekuorma P . Määritetään taipuman, taivutusmomentin ja leikkausvoiman jakaumat, kun $k = 64EI/L^4$.



Ratkaisu:

Vakio β :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{64EI/L^4}{4EI}} = \frac{2}{L} \Rightarrow \beta L = 2 < 5 \Rightarrow \text{Äärellinen palkki.}$$

Määritetään funktioiden Y_i arvot argumentin arvolla $\beta L = 2$ ja merkitään niitä $\bar{Y}_i \equiv Y_i(\beta L)$:

$$\bar{Y}_1 \equiv Y_1(\beta L) = \cosh 2 \cos 2 = -1,5656$$

$$\bar{Y}_2 \equiv Y_2(\beta L) = \frac{1}{2}(\cosh 2 \sin 2 + \sinh 2 \cos 2) = 0,9558$$

$$\bar{Y}_3 \equiv Y_3(\beta L) = \frac{1}{2} \sinh 2 \sin 2 = 1,6489$$

$$\bar{Y}_4 \equiv Y_4(\beta L) = \frac{1}{2}(\cosh 2 \sin 2 - \sinh 2 \cos 2) = 1,2326$$

Taipuma, taivutusmomentti ja leikkausvoima integrointivakioiden avulla:

(Koska palkilla ei ole jakautunutta kuormaa, on yksityisratkaisu $v_0(x) = 0$.)

$$v(x) = C_1 Y_1(\beta x) + C_2 Y_2(\beta x) + C_3 Y_3(\beta x) + C_4 Y_4(\beta x)$$

$$M(x) \equiv -EI v''(x) = EI \beta^2 [4C_1 Y_3(\beta x) + 4C_2 Y_4(\beta x) - C_3 Y_1(\beta x) - C_4 Y_2(\beta x)]$$

$$Q(x) \equiv M'(x) = EI \beta^3 [4C_1 Y_2(\beta x) + 4C_2 Y_3(\beta x) + 4C_3 Y_4(\beta x) - C_4 Y_1(\beta x)]$$

Reunaehdot:

$$M(0)=0, \quad Q(0)=-P, \quad M(L)=0, \quad Q(L)=0$$

Integroitivakioiden määrittäminen:

$$M(0) \equiv EI\beta^2[4C_1 \overbrace{Y_3(0)}^0 + 4C_2 \overbrace{Y_4(0)}^0 - C_3 \overbrace{Y_1(0)}^1 - C_4 \overbrace{Y_2(0)}^0] = 0$$

$$\Rightarrow -EI\beta^2 C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$Q(0) \equiv EI\beta^3[4C_1 \overbrace{Y_2(0)}^0 + 4C_2 \overbrace{Y_3(0)}^0 + 4C_3 \overbrace{Y_4(0)}^0 - C_4 \overbrace{Y_1(0)}^1] = -P$$

$$\Rightarrow -EI\beta^3 C_4 = -P \Rightarrow C_4 = \frac{P}{EI\beta^3}$$

$$M(L) \equiv EI\beta^2[4C_1 Y_3(\beta L) + 4C_2 Y_4(\beta L) - \overbrace{C_3 Y_1(\beta L)}^0 - \overbrace{C_4 Y_2(\beta L)}^{P/(EI\beta^3)}] = 0$$

$$\Rightarrow 4C_1 \overline{Y}_3 + 4C_2 \overline{Y}_4 = \overline{Y}_2 \frac{P}{EI\beta^3} = 0$$

$$\Rightarrow 1,6489C_1 + 1,2326C_2 = 0,9558 \frac{P}{4EI\beta^3}$$

$$Q(L) \equiv EI\beta^3[4C_1 Y_2(\beta L) + 4C_2 Y_3(\beta L) + 4\overbrace{C_3 Y_4(\beta L)}^0 - \overbrace{C_4 Y_1(\beta L)}^{P/(EI\beta^3)}] = 0$$

$$\Rightarrow \overline{Y}_2 C_1 + \overline{Y}_3 C_2 = \overline{Y}_1 \frac{P}{4EI\beta^3}$$

$$\Rightarrow 0,9558C_1 + 1,6489C_2 = -1,5656 \frac{P}{4EI\beta^3}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1,6489 & 1,2326 \\ 0,9558 & 1,6489 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \frac{P}{4EI\beta^3} \begin{Bmatrix} 0,9558 \\ -1,5656 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5688 \\ -0,5671 \end{Bmatrix} \frac{P}{EI\beta^3}$$

Tulos on:

$$\underline{C_1 = 0,5688 \frac{P}{EI\beta^3}}, \quad \underline{C_2 = -0,5671 \frac{P}{EI\beta^3}}, \quad \underline{C_3 = 0}, \quad \underline{C_4 = \frac{P}{EI\beta^3}},$$

Taipuma, taivutusmomentti ja leikkausvoima:

$$v(x) = [0,5688Y_1(\beta x) - 0,5671Y_2(\beta x) + Y_4(\beta x)] \frac{P}{EI\beta^3}$$

$$= \frac{PL^3}{EI} [0,0711Y_1(2\frac{x}{L}) - 0,0709Y_2(2\frac{x}{L}) + 0,125Y_4(2\frac{x}{L})]$$

$$M(x) = EI\beta^2 \cdot [4 \cdot 0,5688Y_3(\beta x) - 4 \cdot 0,5671Y_4(\beta x) - Y_2(\beta x)] \frac{P}{EI\beta^3}$$

$$= \frac{PL}{EI} [1,1376Y_3(2\frac{x}{L}) - 1,1342Y_4(2\frac{x}{L}) - 0,5Y_2(2\frac{x}{L})]$$

$$Q(x) \equiv M'(x) = EI\beta^3 [4 \cdot 0,5688Y_2(\beta x) - 4 \cdot 0,5671Y_3(\beta x) - Y_1(\beta x)] \frac{P}{EI\beta^3}$$

$$= \frac{P}{EI\beta^3} [2,2752Y_2(2\frac{x}{L}) - 2,2684Y_3(2\frac{x}{L}) - Y_1(2\frac{x}{L})]$$

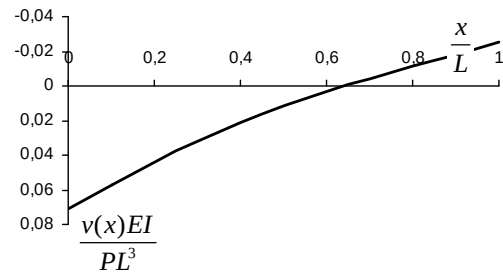
Dimensiottomat lausekkeet:

$$\frac{v(x)EI}{PL^3} = 0,0711Y_1(2\frac{x}{L}) - 0,0709Y_2(2\frac{x}{L}) + 0,125Y_4(2\frac{x}{L})$$

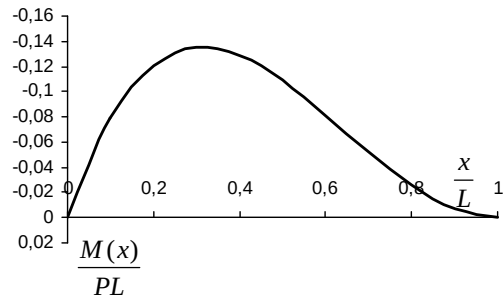
$$\frac{M(x)}{PL} = 1,1376Y_3(2\frac{x}{L}) - 1,1342Y_4(2\frac{x}{L}) - 0,5Y_2(2\frac{x}{L})$$

$$\frac{Q(x)}{P} = 2,2752Y_2(2\frac{x}{L}) - 2,2684Y_3(2\frac{x}{L}) - Y_1(2\frac{x}{L})$$

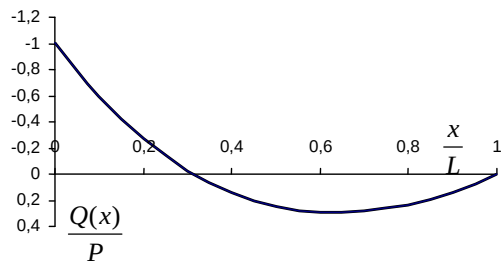
Taipuma:



Taivutusmomentti:



Leikkausvoima:



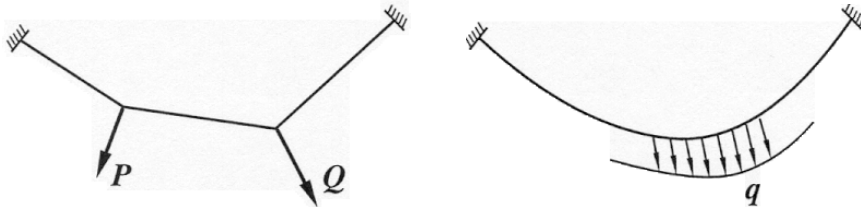
9. Köysi

9.1 Peruskäsitteitä

Köysi (cable) on äärettömän taipuisaksi otaksuttu hoikka rakenneosä. Se pystyy vastaanottamaan vain **vetävän** normaalivoiman T , jota kutsutaan **köysi-** tai **lankavoimaksi** (string force, tension).

Köydellä ei siis ole leikkausvoimaa eikä taivutusmomenttia ja sen kussakin poikkileikkauksessa vallitseva köysivoima on köyden tangentin suuntainen. Köydelle on ominaista, että sen **tasapainoasema on** etukäteen **tuntematon**.

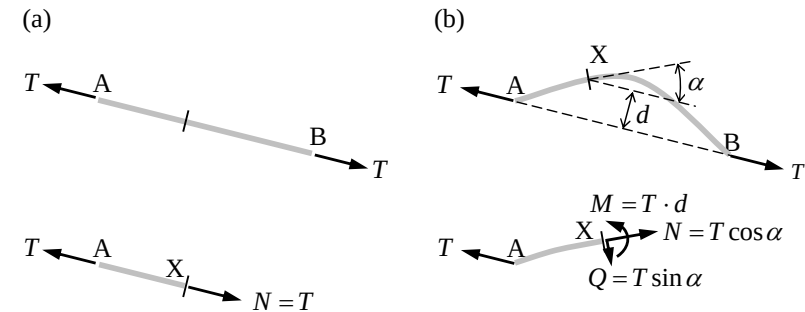
Kuva 9.1 (a) esittää painotonta köyttä, jota kuormittaa kaksi pistekuormaa P ja Q sekä kuva 9.1 (b) köyttä, jota kuormittaa jakautunut kuorma q .



Kuva 9.1: Köysi, jota kuormittaa (a) pistevoimat ja (b) jakautunut kuorma.

Helposti voidaan osoittaa, että **ilman kuormitusta** oleva köyden osa on **suora**¹ ja köysivoima on vakio. Tämä tapahtuu seuraavasti: Ajatellaan tästä köyden osasta irroitetuksi osa AB. Koska osaan vaikuttaa vain sen päissä vaikuttavat köysivoimat T_A ja T_B , täytyy niiden statiikan kahden voiman säännön perusteella olla samalla suoralla, yhtä suuret $T_A = T_B = T$ ja vastakkaissuuntaiset. Kuvassa 9.2 (a) köyden osa AB on otaksuttu suoraksi ja kuvassa 9.2 (b) kaarevaksi. Edellisessä tapauksessa poikkileikkauksessa X vaikuttaa pelkkä normaalivoima $N = T$ mutta jälkimmäisessä tapauksessa normaalivoiman $N = T \cos \alpha$ lisäksi leikkausvoima $Q = T \sin \alpha$ ja taivutusmomentti $M = T \cdot d$. Näin kuvan 9.2 (b) tapaus olisi mahdollinen vain, jos köysi olisi jäykkä, jota se kuitenkin ei ole.

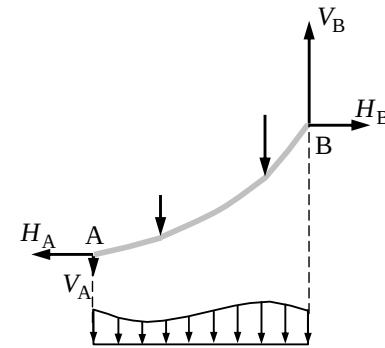
¹ Tämä edellyttää, että köysivoima on nollasta eroava (positiivinen). Jos köysivoima on nolla, voi köysi luonnollisesti olla on minkä muotoinen tahansa.



Kuva 9.2: Kuormittamaton köyden osa AB, joka on (a) otaksuttu suoraksi ja (b) kaarevaksi.

9.2 Pystysuoran kuormituksen kuormittama köysi

Seuraavassa rajoitutaan tarkastelemaan **pystysuoran kuormituksen** kuormittamaa köyttä. Osoitetaan aluksi, että pystysuoran kuormituksen kuormittaman köyden **köysivoiman vaakakomponentti on vakio**. Kuvan 9.3 köyden osan vaakasuoraksi

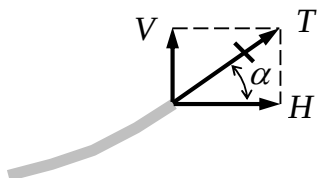


Kuva 9.3: Pystysuoran kuormituksen kuormittama köyden osan AB vapaakappalekuvio.

tasapainoyhtälöksi saadaan $-H_A + H_B = 0$, josta seuraa $H_A = H_B = H$. Tälle köysivoiman vakiosuuruiselle vaakakomponentille H käytetään nimitystä **vaakakiristys**.

Koska köysivoima on köyden tangentin suuntainen, nähdään kuvan 9.4 perusteella helposti, että köysivoiman pystykomponentti V ja köysivoima T voidaan lausua vaakakiristyksen avulla kaavoilla

$$\begin{aligned} V &= H \tan \alpha, \\ T &= \sqrt{H^2 + V^2} = H \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

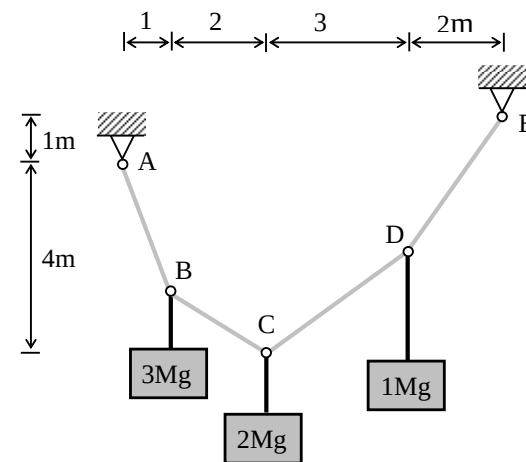


$$\begin{aligned} V &= H \tan \alpha, \\ T &= \sqrt{H^2 + V^2} \end{aligned}$$

Kuva 9.4: Köysivoiman komponentit.

9.3 Köyden ratkaisemisesta tasapainoehtoja käyttäen

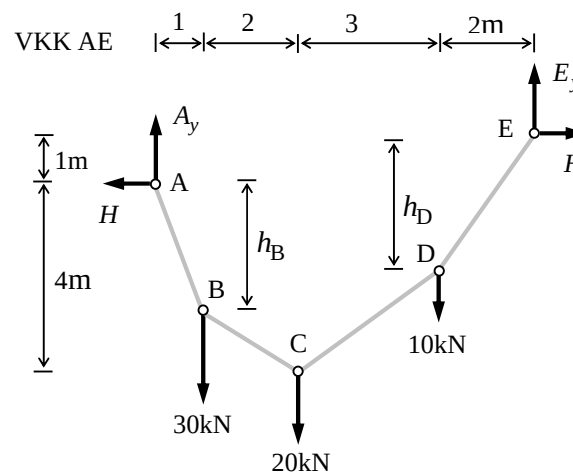
Esimerkki 9.1: Määritä oheisen painottoman köyden pisteiden B ja D asema sekä pienin ja suurin köysivoima. Käytetään gravitaatiovakioille arvoa $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Ratkaisu:

Tukireaktiot ja vaakakiristys:

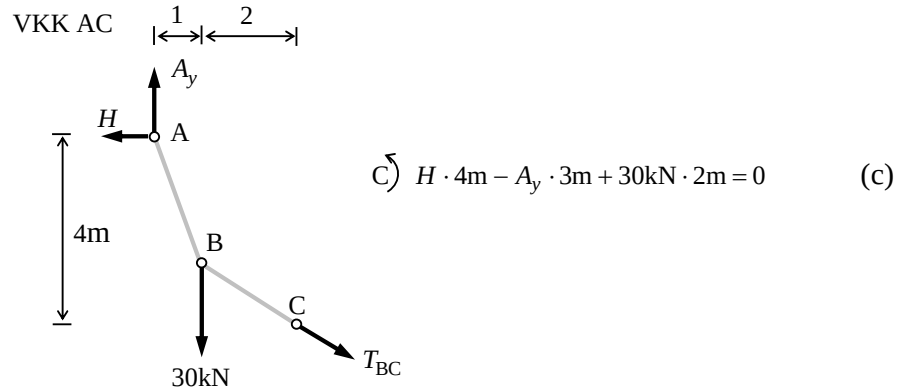
Kirjoitetaan ensin kaksi tasapainoyhtälöä koko köydelle. (Kolmatta tasapainoyhtälöä ei voida kirjoittaa, sillä vaakasuora tasapainoyhtälö on jo huomioitu, kun on otaksuttu vaakakiristys vakioksi.) Saadaan



$$\uparrow A_y + E_y - 30\text{kN} - 20\text{kN} - 10\text{kN} = 0 \quad (\text{a})$$

$$E \curvearrowright -H \cdot 1\text{m} - A_y \cdot 8\text{m} + 30\text{kN} \cdot 7\text{m} + 20\text{kN} \cdot 5\text{m} + 10\text{kN} \cdot 2\text{m} = 0 \quad (\text{b})$$

Kirjoitetaan sitten tasapainoyhtälö köyden sellaiselle osalle, jonka päiden korkeusasemat tunnetaan. Tällainen köyden osa on AC. Saadaan



Huomautus: Köyden osan AC vapaakappalekuviassa katkaisu on ajateltu tehdyksi juuri ennen pistettä C, jolloin leikkauksessa vaikuttaa köyden osan AC köysivoima, mutta ei 20kN:n pystysuuntaista kuormaa.

Nyt saadaan tukireaktiot ratkaistuksi:

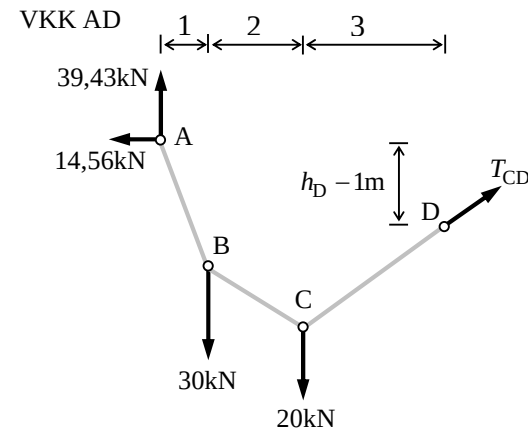
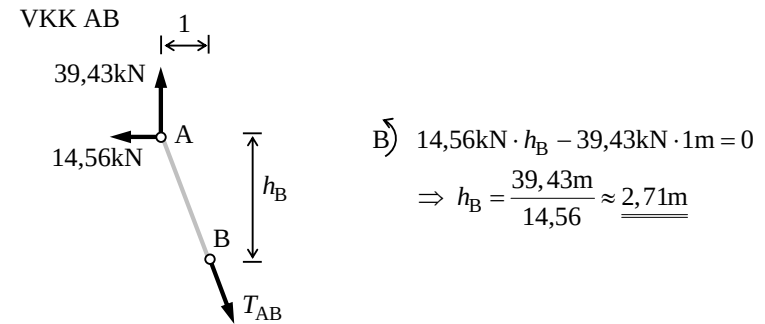
$$(\text{b}) \& (\text{c}) \Rightarrow \begin{cases} H + 8A_y = 330\text{kN} \\ -4H + 3A_y = 60\text{kN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4H + 32A_y = 1320\text{kN} \\ -4H + 3A_y = 60\text{kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 35A_y = 1380\text{kN} \Rightarrow \underline{A_y = 39,43\text{kN}}$$

$$\Rightarrow H = 330\text{kN} - 8 \cdot 39,43\text{kN} = \underline{14,56\text{kN}}$$

$$(\text{a}) \Rightarrow E_y = 60\text{kN} - A_y = 60\text{kN} - 39,43\text{kN} = \underline{20,57\text{kN}}$$

Määritetään pisteiden B ja D korkeusasemat:



$$D \curvearrowright 14,56\text{kN} \cdot (h_D - 1\text{m}) - 39,43\text{kN} \cdot 6\text{m} + 30\text{kN} \cdot 5\text{m} + 20\text{kN} \cdot 3\text{m} = 0$$

$$\Rightarrow h_D = \frac{41,14\text{m}}{14,56} \approx \underline{\underline{2,83\text{m}}}$$

Lasketaan köyden kaltevuudet:

$$\tan \alpha_{AB} = \frac{h_B}{1\text{m}} = \frac{2,71}{1} = 2,71 \quad (\text{suurin})$$

$$\tan \alpha_{BC} = \frac{4\text{m} - h_B}{2\text{m}} = \frac{1,29}{2} = 0,645 \quad (\text{pienin})$$

$$\tan \alpha_{CD} = \frac{5\text{m} - h_D}{3\text{m}} = \frac{2,17}{3} = 0,723$$

$$\tan \alpha_{DE} = \frac{h_D}{2\text{m}} = \frac{2,83}{2} = 1,42$$

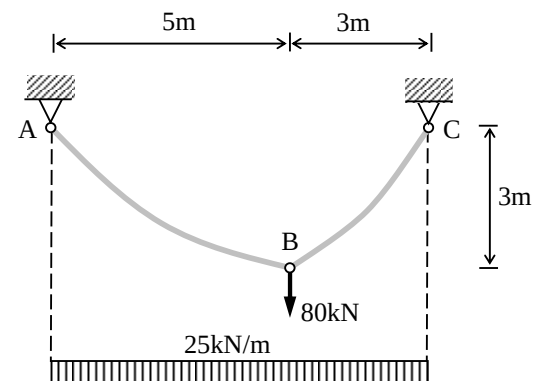
Suurin köysivoima on välillä AB:

$$T_{\max} = T_{AB} = H \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_{AB}} = 14,56\text{kN} \cdot \sqrt{1 + 2,71^2} \approx \underline{\underline{42,1\text{kN}}}$$

Pienin köysivoima on välillä BC:

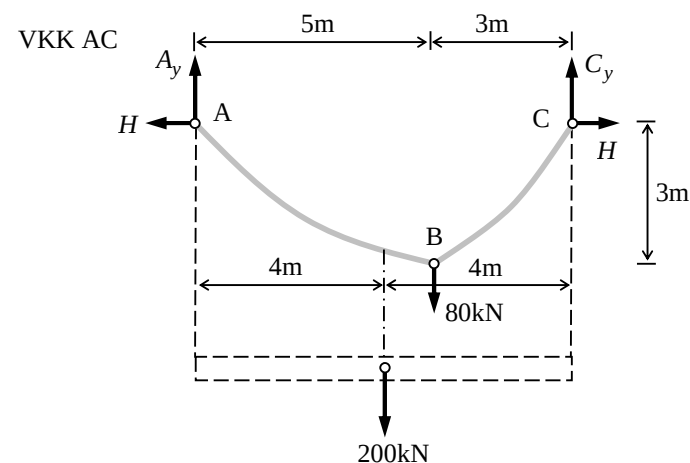
$$T_{\min} = T_{BC} = H \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_{BC}} = 14,56\text{kN} \cdot \sqrt{1 + 0,645^2} \approx \underline{\underline{17,3\text{kN}}}$$

Esimerkki 9.2: Oheista painotonta köyttä kuormittaa 80kN suuruinen pistekuorma sekä vaakatason pituusyksikköä kohti tasan jakautunut kuormitus, jonka intensiteetti on 25kN/m. Määritä köyden muoto sekä suurin köysivoima.



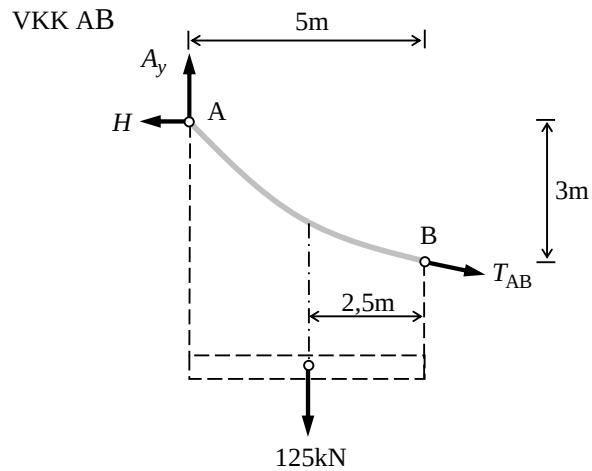
Ratkaisu:

Tukireaktiot ja vaakakiristys:



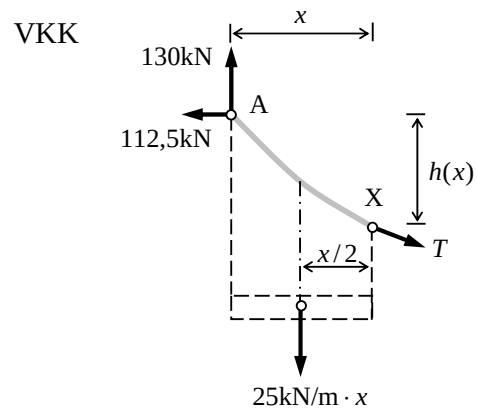
$$\curvearrowleft_C - A_y \cdot 8\text{m} + 200\text{kN} \cdot 4\text{m} + 80\text{kN} \cdot 3\text{m} = 0 \Rightarrow \underline{A_y = 130\text{kN}}$$

$$\curvearrowleft_A C_y \cdot 8\text{m} - 200\text{kN} \cdot 4\text{m} - 80\text{kN} \cdot 5\text{m} = 0 \Rightarrow \underline{C_y = 150\text{kN}}$$



$$\sum B) H \cdot 3\text{m} - A_y \cdot 5\text{m} + 125\text{kN} \cdot 2,5\text{m} = 0 \Rightarrow \underline{H = 112,5\text{kN}}$$

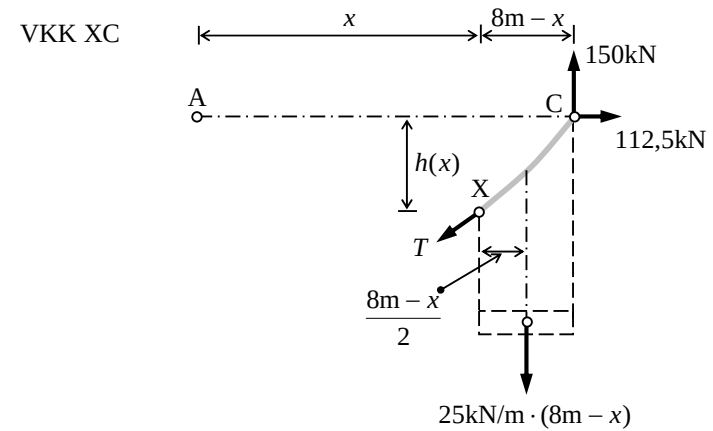
Köyden yhtälö välillä AB:



$$\sum X) 112,5\text{kN} \cdot h - 130\text{kN} \cdot x + 25\text{kN/m} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{h(x) = 1,156 \cdot x - 0,111/\text{m} \cdot x^2}$$

Köyden yhtälö välillä BC:



$$\sum X) -112,5\text{kN} \cdot h + 150\text{kN} \cdot (8\text{m} - x) - 25\text{kN/m} \cdot (8\text{m} - x) \cdot \frac{8\text{m} - x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{h(x) = 3,556\text{m} + 0,444 \cdot x - 0,111/\text{m} \cdot x^2}$$

Suurin köysivoima:

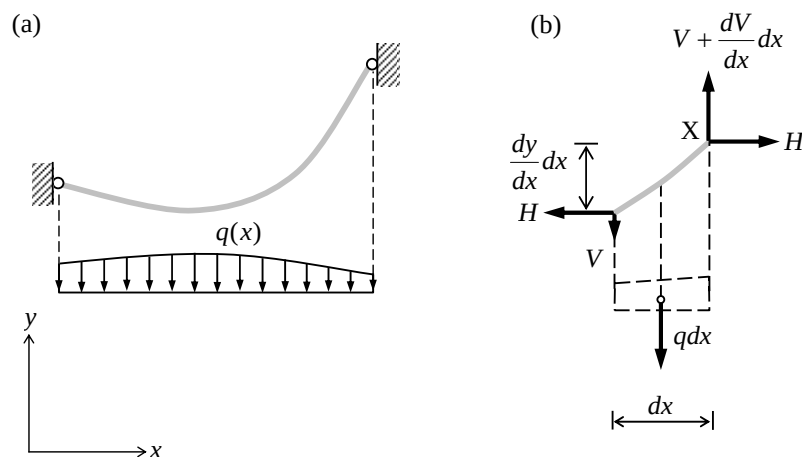
Köyden kaltevuus on suurimmillaan pisteessä C. Tässä pisteessä köysivoiman vertikaalikomponentti on $V_C = C_y$.

$$T_{\max} = T_C = \sqrt{H^2 + V_C^2} = \sqrt{H^2 + C_y^2} = \sqrt{112,5^2 + 150^2} = \underline{\underline{187,5\text{kN}}}$$

9.4 Köyden differentiaaliyhtälöt

Seuraavassa johdetaan köyden differentiaaliyhtälöt. Tarkastellaan erikseen tapaukset, joissa köyteen kohdistuva kuorma on vaakatason pituutta kohti jakautunut ja köyden pituutta kohti jakautunut. Saadaan eri tyyppiset differentiaaliyhtälöt ja ratkaisut.

9.41 Vaakatason pituutta kohti jakautunut kuorma $q(x)$



Kuva 9.5: (a) Köysi, johon vaikuttaa vaakatason pituutta kohti jakautunut kuorma, ja (b) sen differentiaalisen osan vapaakappalekuvio

Köyden differentiaalisen osan (kuva 9.5 (b)) tasapainoyhtälöistä seuraa

$$\begin{aligned} \uparrow V + \frac{dV}{dx} dx - V - q \cdot dx &= 0 \Rightarrow \left(\frac{dV}{dx} - q \right) dx = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = q \\ \sum \vec{M} - H \cdot \frac{dy}{dx} dx + V \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} &= 0 \Rightarrow \left(-H \frac{dy}{dx} + V + q \cdot \frac{dx}{2} \right) dx = 0 \\ \Rightarrow -H \frac{dy}{dx} + V + q \cdot \frac{\cancel{dx}}{2} &= 0 \Rightarrow \underline{H \frac{dy}{dx} = V} \end{aligned}$$

ja edelleen

$$V' = q, \quad V = Hy'. \quad (9.2)$$

Näistä seuraa yhtälö

$$y'' = \frac{q}{H}. \quad (9.3)$$

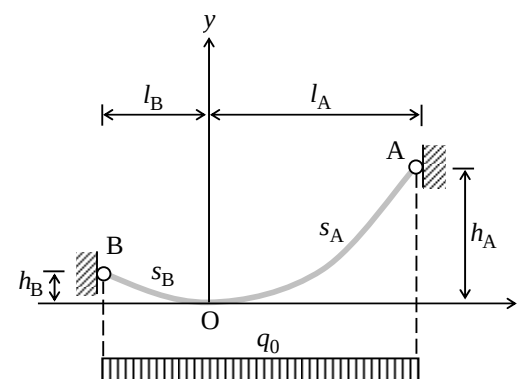
Tämä on vakatason pituutta kohti jakautuneen kuorman $q(x)$ kuormittaman köyden korkeusaseman $y(x)$ differentiaaliyhtälö.

9.42 Vaakatason pituutta kohti tasan jakautunut kuorma $q = q_0 = \text{vakio}$

Kun kuorma on tasan jakautunut $q = q_0 = \text{vakio}$ saadaan yhtälö (9.3) ratkaistua helposti:

$$y'' = \frac{q_0}{H} \Rightarrow y' = \frac{q_0}{H} x + C_1 \Rightarrow y(x) = \frac{q_0}{2H} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (9.4)$$

Köysi on siis **paraabelin** muotoinen.



Kuva 9.6: Vaakatason pituutta kohti tasaisen kuorman kuormittama köysi

Etsitään tehtävän ratkaisu kuvan 9.6 mukaisessa koordinaatistossa, jonka origo on asetettu köyden alimpaan pisteeseen. Koska köyden tulee kulkea koordinaatiston origon kautta ja sen tangentin tulee olla siinä vaakasuora, saadaan

$$y(0) \equiv C_2 = 0, \quad y'(0) \equiv C_1 = 0 \quad (9.5)$$

Sijoittamalla saadut integrointivakioiden arvot lausekkeeseen (9.4) saadaan köyden korkeusaseman yhtälöksi

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{q_0}{H} x^2. \quad (9.6)$$

Ratkaisua voidaan nimittää tasaisen kuorman kuormittaman köyden **paraabeli-ratkaisuksi**.

Köysivoiman lausekkeeksi saadaan

$$T = H \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = H \sqrt{1 + (y')^2} = H \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{H} x\right)^2} \quad (9.7)$$

$$\Rightarrow T(x) = \sqrt{H^2 + q_0^2 x^2}$$

Differentiaalisen köyden osan pituus on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 x}{H}\right)^2}. \quad (9.8)$$

Köyden välin OA pituudelle saadaan

$$s_A = \int_0^{l_A} ds = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 x}{H}\right)^2} dx \quad (9.9)$$

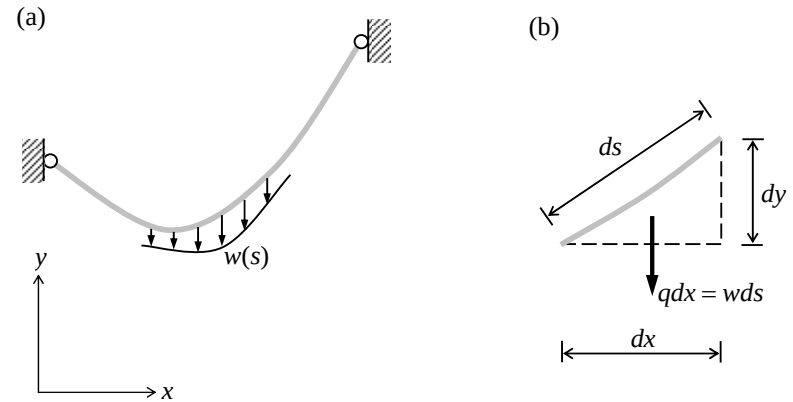
ja suorittamalla integrointi² tulos

$$s_A = \frac{l_A}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 l_A}{H}\right)^2} + \frac{H}{2q_0} \ln \left(\frac{q_0 l_A}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 l_A}{H}\right)^2} \right). \quad (9.10)$$

Huomautus: Saatuja kaavoja (9.6), (9.7) ja (9.10) voidaan soveltaa myös välillä OB, kun x-akselin suunta- ja alaindeksit A ja B vaihdetaan.

² Integroinnin yksityiskohtia ei tässä esitetä.

9.43 Köyden pituutta kohti jakautunut kuorma $w(s)$



Kuva 9.7: (a) Köysi, johon vaikuttaa sen pituutta kohti jakautunut kuorma, ja (b) köyden differentiaalinen osa

Kuvan 9.7 (b) perusteella saadaan köysialkioon vaikuttavaksi kuormaresultantiksi saadaan

$$q dx = w ds \Rightarrow q = w \frac{ds}{dx} = w \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = w \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = w \sqrt{1 + (y')^2}, \quad (9.11)$$

joten kuormaa w vastaava vaakatason pituutta kohti laskettu kuorma q on

$$q = w \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (9.12)$$

Sijoittamalla tämä differentiaaliyhtälöön (9.3) saadaan

$$y'' = \frac{w}{H} \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (9.13)$$

Tämä on köyden pituutta kohti jakautuneen kuorman w kuormittaman köyden korkeusaseman $y(x)$ differentiaaliyhtälö.

9.44 Oman painon $w = w_0 = \text{vakio}$ kuormittama köysi

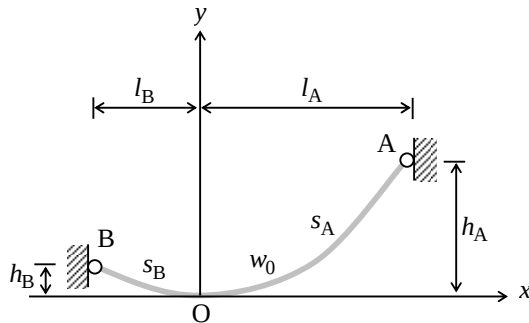
Määritetään differentiaaliyhtälön (9.13) ratkaisu, kun kuorma w on tasan jakautunut. Tavallisimmin tällöin on kysymyksessä köyden **oma paino**. Otetaan uudeksi muuttujaksi $z(x)$ siten, että $\sinh z = y'$. Tällöin yhtälö (9.13) muokkautuu seuraavasti

$$\begin{aligned} (\sinh z)' &= \frac{w_0}{H} \sqrt{1 + (\sinh z)^2} \Rightarrow \cosh z \cdot z' = \frac{w_0}{H} \cosh z \\ \Rightarrow z' &= \frac{w_0}{H} \Rightarrow z = \frac{w_0}{H} x + C_1 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Nyt saadaan

$$y' = \sinh z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{w_0}{H} x + C_1\right) \Rightarrow y(x) = \frac{H}{w_0} \cosh\left(\frac{w_0}{H} x + C_1\right) + C_2. \quad (9.15)$$

Köyden muodon kuvaa siis **hyperbolinen kosinifunktio**. Ratkaisua kutsutaan **ketjukäyräksi**.



Kuva 9.8: Oman painon kuormittama köysi

Etsitään tehtävän ratkaisu kuvan 9.8 mukaisessa koordinaatistossa, jonka origo on asetettu köyden alimpaan pisteeseen. Koska köyden tulee kulkea koordinaatiston origon kautta ja sen tangentin tulee olla siinä vaakasuora, saadaan

$$y(0) = \frac{H}{w_0} \cosh C_1 + C_2 = 0, \quad y'(0) = \sinh C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{H}{w_0} \quad (9.16)$$

Sijoittamalla saadut integrointivakioiden arvot lausekkeeseen (9.15) saadaan köyden korkeusaseman lausekkeeksi

$$y(x) = \frac{H}{w_0} \left(\cosh \frac{w_0 x}{H} - 1 \right). \quad (9.17)$$

Köysivoiman lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} T &= H \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = H \sqrt{1 + (y')^2} = H \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{w_0}{H} x \right)} \\ \Rightarrow T(x) &= H \cosh \left(\frac{w_0 x}{H} \right) \end{aligned} \quad (9.18)$$

Differentiaalisen köyden osan pituus on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = dx \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{w_0}{H} x \right)} = \cosh \left(\frac{w_0}{H} x \right) dx \quad (9.19)$$

Köyden välin OA pituudelle saadaan

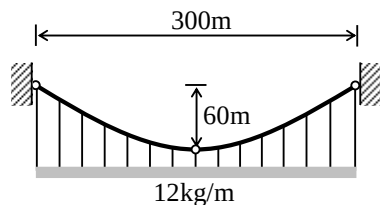
$$s_A = \int_0^{s_A} ds = \int_0^{l_A} \cosh \left(\frac{w_0}{H} x \right) dx = \frac{H}{w_0} \sinh \left(\frac{w_0 l_A}{H} \right). \quad (9.20)$$

Huomautus: Saatuja kaavoja (9.17), (9.18) ja (9.20) voidaan soveltaa myös välillä OB, kun x-akselin suunta- ja alaindeksit A ja B vaihdetaan.

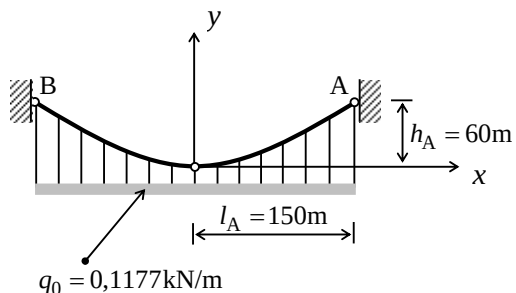
Huomautus: Jos köysi on **laakea**, eli riippuman suhde pituuteen on pieni, voidaan oman painon w_0 kuormittama köysi ratkaista likimain käyttäen köyden paraabeliteoriaa ottamalla tasaisen kuorman q_0 arvoksi $q_0 = w_0$.

Esimerkki 9.3: Ohut kaapeli (otaksuttu painottomaksi) on tuettu kahdesta pisteestä, jotka ovat samalla korkeudella ja 300m:n etäisyydellä toisistaan. Se kannattaa

vaakatason pituutta kohti tasan jakautunutta massaa 12kg/m. Jos kaapelin riippuma on 60m, määritä pienin ja suuri köysivoima sekä kaapelin kokonaispituus.



Ratkaisu:



Kuorma: $q_0 = 12 \cdot 9,81 = 117,7 \text{ N/m} = 0,1177 \text{ kN/m}$

Vaakakiristys:

$$y(l_A) \equiv \frac{q_0 l_A^2}{2H} = h_A \Rightarrow H = \frac{q_0 l_A^2}{2h_A} = \frac{0,1177 \cdot 150^2}{2 \cdot 60} = 22,07 \text{ kN}$$

Pienin ja suurin köysivoima:

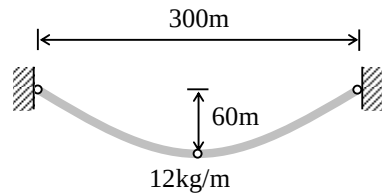
$$T_{\min} = T(0) = \sqrt{H^2 + (q_0 \cdot 0)^2} = H = \underline{\underline{22,07 \text{ kN}}}$$

$$T_{\max} = T(l_A) = \sqrt{H^2 + (q_0 l_A)^2} = \sqrt{22,07^2 + (0,1177 \cdot 150)^2} = \underline{\underline{28,27 \text{ kN}}}$$

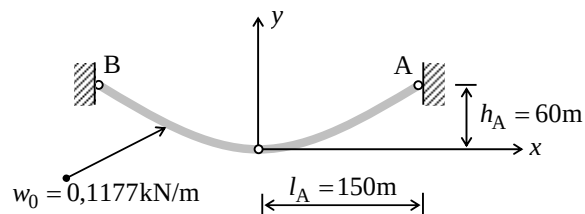
Kaapelin pituus:

$$\begin{aligned} s &= 2 \cdot s_A = 2 \cdot \left\{ \frac{l_A}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 l_A}{H} \right)^2} + \frac{H}{2q_0} \ln \left(\frac{q_0 l_A}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 l_A}{H} \right)^2} \right) \right\} \\ &= 150 \sqrt{1 + \left(\frac{0,1177 \cdot 150}{22,07} \right)^2} + \frac{22,07}{0,1177} \ln \left[\frac{0,1177 \cdot 150}{22,07} + \sqrt{1 + \left(\frac{0,1177 \cdot 150}{22,07} \right)^2} \right] \\ &= 150 \cdot 1,2806 + 187,51 \cdot \ln(0,79995 + 1,2806) \approx \underline{\underline{329,5 \text{ m}}} \end{aligned}$$

Esimerkki 9.4: Edellisen esimerkin kaapelin massa sen pituutta kohti on 12kg/m ja sitä kuormittaa vain oma paino. Määritä pienin ja suuri köysivoima sekä kaapelin kokonaispituus.



Ratkaisu:



Oma paino: $w_0 = 12 \cdot 9,81 = 117,7\text{N/m} = 0,1177\text{kN/m}$

Vaakakiristys:

$$y(l_A) \equiv \frac{H}{w_0} \left(\cosh \frac{w_0 l_A}{H} - 1 \right) = h_A \Rightarrow \frac{H}{0,1177} \left(\cosh \frac{0,1177 \cdot 150}{H} - 1 \right) = 60$$

$$\Rightarrow \cosh \frac{17,655}{H} - 1 - \frac{7,062}{H} = 0$$

Tämä yhtälö H :n määrittämiseksi on epälineaarinen. Sille saadaan likiratkaisu määrittämällä kokeilemalla funktion

$$f(H) \equiv \cosh \frac{17,655}{H} - 1 - \frac{7,062}{H}$$

nollakohta:

H	21	22	23	24	23,1	23,2
$f(H)$	0,0384	0,0187	0,0023	-0,0113	0,0008	-0,0006

Tulos on:

$$H = 23,2\text{kN}$$

Pienin ja suurin köysivoima:

$$T_{\min} = T(0) = H \cosh \frac{w_0 \cdot 0}{H} = H = \underline{\underline{23,2\text{kN}}}$$

$$T_{\max} = T(l_A) = H \cosh \frac{w_0 \cdot l_A}{H} = 23,2 \cdot \cosh \frac{0,1177 \cdot 60}{23,2} = \underline{\underline{30,2\text{kN}}}$$

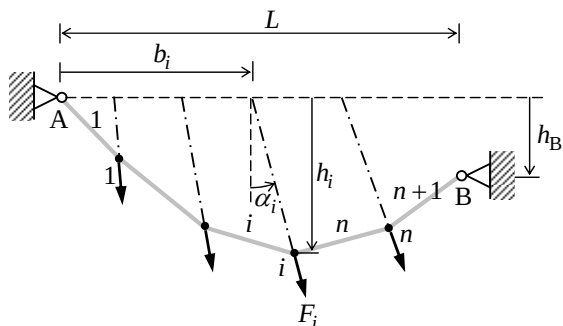
Köyden pituus:

$$s = 2 \cdot s_A = 2 \cdot \frac{H}{w_0} \sinh \frac{w_0 l_A}{H} = 2 \cdot \frac{23,2}{0,1177} \sinh \frac{0,1177 \cdot 150}{23,2} = \underline{\underline{330\text{m}}}$$

Huomautus: Tehtävän 9.3 ratkaisu, jota voidaan pitää laakean kaaren likiratkaisuna tehtävälle 9.4, on melko tarkka, vaikka köyden riippuman suhde pituuteen $60\text{m}/300\text{m} = 0,2$ on meko suuri. Pienemmillä suhteilla tulos luonnollisesti paranee.

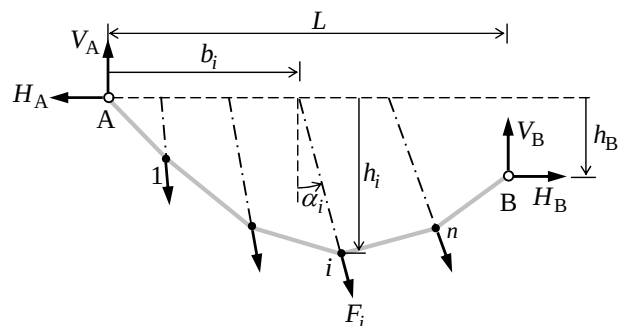
9.5* Vinon kuormituksen kuormittama köysi

Seuraavassa tarkastellaan köyttä, johon kohdistuu **kuormitus ei ole pystysuora**. Rajoitutaan tapaukseen, jossa kuormitus muodostuu pistekuormista³, joiden suuruudet ja vaikutussuorat tunnetaan. Formuloidaan tehtävä tässä siten, että kehitettyjen yhtälöiden pohjalta on mahdollista laatia tietokoneohjelma, jolla voidaan ratkaista köysi, jota kuormittaa annettu määrä (n) pistekuormia.



Kuva 9.9: Köysi, johon kohdistuu vinoja pistekuormia

Tarkastellaan kuvan 9.9 köyttä, johon kohdistuu n pistekuormaa F_i , joiden vaikutussuorien vaakaetäisyydet b_i ja niiden kaltevuuskulmat α_i tunnetaan. Kuormien vaikutuspisteiden i korkeusasemat h_i ovat yhtä lukuunottamatta tuntemattomia.



Kuva 9.10: Köyden vapaakappalekuviio

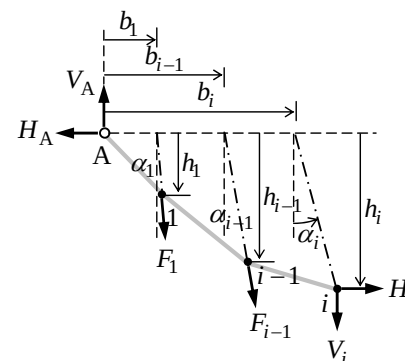
³ Jakautuneen kuorman kuormittamalle köydelle voidaan saada likiratkaisu korvaamalla kuorma riittävällä määrällä sen kanssa ekvivalentteja pistekuormia.

Kirjoitetaan ensin kuvan 9.10 vapaakappalekuviota hyväksi käyttäen köyden momenttitasapainoyhtälö pisteen B suhteen⁴:

$$\begin{aligned} \sum B) H_A \cdot h_B - V_A \cdot L + F_1 \cos \alpha_1 \cdot (L - b_1) + \dots + F_n \cos \alpha_n \cdot (L - b_n) \\ - F_1 \sin \alpha_1 \cdot h_B - \dots - F_n \sin \alpha_n \cdot h_B = 0. \end{aligned}$$

Se saadaan helposti muotoon

$$-h_B \cdot H_A + L \cdot V_A = \sum_{i=1}^n F_i [(L - b_i) \cos \alpha_i - h_B \sin \alpha_i]. \quad (9.21)$$



Kuva 9.11: Pisteen i vasemman puoleisen köyden osan vapaakappalekuviio

Kirjoitetaan sitten vuorotellen köyden vasemman puolen momenttitasapainoyhtälöt pisteiden $1, 2, \dots, n$ suhteen. Yhtälö pisteen i suhteen on

$$\begin{aligned} \sum i) H_A \cdot h_i - V_A (b_i + h_i \tan \alpha_i) + F_1 \cos \alpha_1 \cdot (b_i + h_i \tan \alpha_i - b_1) + \dots \\ + F_{i-1} \cos \alpha_{i-1} \cdot (b_i + h_i \tan \alpha_i - b_{i-1}) + F_1 \sin \alpha_1 \cdot h_i + \dots + F_{i-1} \sin \alpha_{i-1} \cdot h_i = 0 \end{aligned}$$

Se saadaan helposti muotoon

$$-h_i \cdot H_A + (b_i + h_i \tan \alpha_i) \cdot V_A = \sum_{j=1}^{i-1} F_j [(b_i + h_i \tan \alpha_i - b_j) \cos \alpha_j - h_i \sin \alpha_j]. \quad (9.22)$$

⁴ Voiman F_i momentti pisteen B suhteen on muodostettu siten, että Voima F_i on ensin siirretty vaikutussuorallaan pisteen A korkeudelle.

Yhtälö (9.21) ja yhtälö (9.22) arvoilla $i=1, \dots, n$ muodostavat $n+1$ yhtälöä, jossa on tuntemattomina tuen A tukivoimat H_A ja V_A sekä pisteiden i vertikaaliasemat h_i , $i=1, \dots, n$ sitä asemaa h_r lukuunottamatta, joka tunnetaan. Näin muodostunut yhtälöryhmä voidaan ratkaista.

Köyden osan i köysivoiman määrittämiseksi muodostetaan pisteen i vasemman puoleisen köyden osan (vrt. kuva 9.11) vaaka- ja pystysuuntaiset tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned} \rightarrow -H_A + F_1 \sin \alpha_1 + \dots + F_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + H_i &= 0 \\ \rightarrow V_A - F_1 \cos \alpha_1 - \dots - F_{i-1} \cos \alpha_{i-1} - V_i &= 0 \end{aligned}$$

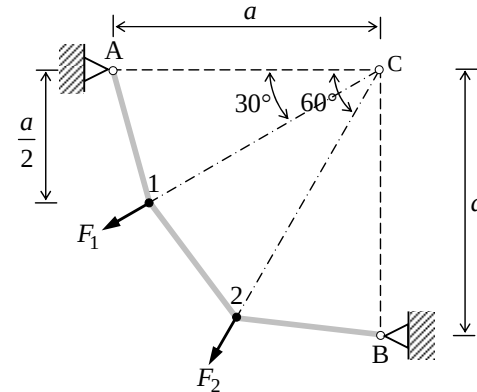
joista saadaan köysivoimien vaaka ja pystykomponenteille lausekkeet

$$H_i = H_A - \sum_{j=1}^{i-1} F_j \sin \alpha_j, \quad V_i = V_A - \sum_{j=1}^{i-1} F_j \cos \alpha_j, \quad i=1, \dots, n+1. \quad (9.23)$$

Köyden osien i köysivoimien suuruudet saadaan lopuksi kaavalla

$$T_i = \sqrt{H_i^2 + V_i^2} \quad (9.24)$$

Esimerkki 9.5: Köysi on tuettu pisteistä A ja B ja siihen vaikuttaa kaksi voimaa F_1 ja F_2 joiden vaikutussuorat kulkevat pisteen C kautta kuvan mukaisesti. Pisteen 1 korkeusasema tunnetaan. Määritä pisteen 2 korkeusasema ja köysivoimat, kun (a) $F_1 = F_2 = F$ ja (b) kun $F_1 = F$, $F_2 = 2F$.



Ratkaisu:

Nyt on: $L = a$, $h_B = a$, $b_1 = b_2 = a$, $\alpha_1 = -60^\circ$, $\alpha_2 = -30^\circ$ ja $h_1 = \frac{a}{2}$.

Yhtälö (9.21) saa muodon

$$-aH_A + aV_A = -F_1 a \sin \alpha_1 - F_2 a \sin \alpha_2 \Rightarrow \underline{-H_A + V_A = \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 + \frac{1}{2} F_2} \quad (a)$$

Kun $i = 1$ yhtälö (9.22) saa muodon

$$-h_1 H_A + (a + h_1 \tan \alpha_1) V_A = 0 \Rightarrow \underline{-h_1 H_A + (a - \sqrt{3} h_1) V_A = 0} \quad (b)$$

Kun $i = 2$ yhtälö (9.22) saa muodon

$$\begin{aligned} -h_2 H_A + (a + h_2 \tan \alpha_2) V_A &= F_1 [(b_2 + h_2 \tan \alpha_2 - b_1) \cos \alpha_1 - h_2 \sin \alpha_1] \\ \Rightarrow \underline{-h_2 H_A + (a - \frac{1}{\sqrt{3}} h_2) V_A} &= \underline{\frac{1}{\sqrt{3}} h_2 F_1} \end{aligned} \quad (c)$$

Sijoittamalla $h_1 = a/2$, yhtälöön (b) saadaan

$$H_A = (2 - \sqrt{3})V_A$$

ja tämä edelleen yhtälöön (a) saadaan

$$V_A = \frac{\sqrt{3}+1}{4}(\sqrt{3}F_1 + F_2)$$

Nyt saadaan kaavasta (d)

$$H_A = \frac{\sqrt{3}-1}{4}(\sqrt{3}F_1 + F_2).$$

Ratkaisemalla h_2 yhtälöstä (c) saadaan

$$h_2 = \frac{V_A \sqrt{3}}{F_1 + V_A + H_A \sqrt{3}} a$$

ja sijoittamalla siihen tulokset (e) ja (f)

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}F_1 + F_2)}{4(\sqrt{3}+1)F_1 + F_2} a.$$

Köysivoimien vaaka- ja pystykomponenteille saadaan

$$H_1 = H_A = \frac{\sqrt{3}-1}{4}(\sqrt{3}F_1 + F_2)$$

$$V_1 = V_A = \frac{\sqrt{3}+1}{4}(\sqrt{3}F_1 + F_2)$$

$$H_2 = H_A - F_1 \sin \alpha_1 = \frac{1}{4}[(3 + \sqrt{3})F_1 + (\sqrt{3} - 1)F_2]$$

$$V_2 = V_A - F_1 \cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{4}(F_1 + F_2)$$

$$H_3 = H_A - F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{4}(\sqrt{3}F_1 + F_2)$$

$$V_3 = V_A - F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 = \frac{1}{4}[(1 + \sqrt{3})F_1 + (1 - \sqrt{3})F_2]$$

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

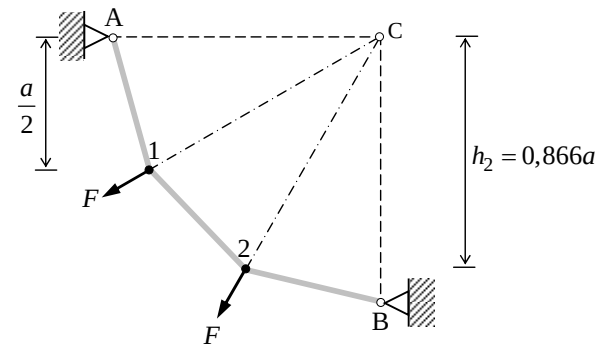
(i)

Tapaus (a): $F_1 = F_2 = F$

Pisteen 2 korkeusasema:

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a \approx 0,866a.$$

Köyden muoto:



Köysivoimat:

$$H_1 = \frac{F}{2}, V_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} F, T_1 = \sqrt{H_1^2 + V_1^2} = F\sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 1,93F$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} F, V_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} F, T_2 = \sqrt{H_2^2 + V_2^2} = F\sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 1,93F$$

$$H_3 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} F, V_3 = \frac{F}{2}, T_3 = \sqrt{H_3^2 + V_3^2} = F\sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 1,93F$$

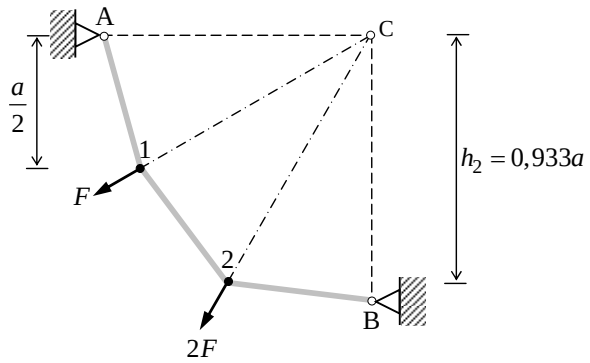
Havaitaan, että köyden nurkat asettuvat a –säteisen ympyrän kaarelle. Symmetrian vuoksi myös köysivoima on vakio.

Tapaus (b): $F_1 = F$, $F_2 = 2F$

Pisteen 2 korkeusasema:

$$h_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 2)a \approx 0,933a$$

Köyden muoto:



Köysivoimat:

$$H_1 \approx 0,683F, V_1 \approx 2,549F, T_1 = \sqrt{H_1^2 + V_1^2} \approx \underline{\underline{2,64F}}$$

$$H_2 \approx 1,549F, V_2 \approx 2,049F, T_2 = \sqrt{H_2^2 + V_2^2} \approx \underline{\underline{2,57F}}$$

$$H_3 \approx 2,549F, V_3 \approx 0,317F, T_3 = \sqrt{H_3^2 + V_3^2} \approx \underline{\underline{2,57F}}$$

10. VÄÄNTÖ

10.1 Vääntötehtävän jaottelusta

Jos kuormitus aiheuttaa sauvan poikkileikkaukseen pelkän sen akselin suuntaisen momenttiresultantin, **vääntömomentin** M_t , sauva on puhtaan väännön rasittama. Useimmiten vääntö kuitenkin esiintyy yhdessä muiden rasitustilojen, vedon tai puristuksen sekä taivutuksen ja leikkauksen, kanssa. Vääntömomentti koostuu poikkipinnan suuntaisista leikkausjännityksistä τ_{xy} ja τ_{xz} .

Väännössä sauvan poikkileikkaustasot kiertyvät ns. **vääntökeskiön** (VK) ympäri ja samalla käyristyvät. Vääntökeskiö sijaitsee poikkileikkauksen symmetria-akselilla, joten kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen tapauksessa se yhtyy poikkipinnan pintakeskiöön. Yleisesti tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa. Erityisesti ohutseinäisen avoimen poikkileikkauksen vääntökeskiö voi sijaita niin kaukana pintakeskiöstä, että tämä ero on otettava huomioon vääntömomentin arvoja laskettaessa. Tavallisimpien poikkileikkausten vääntökeskiöiden paikat löytyvät mitoituskäsikirjoista ja vääntöä käsittelevistä erikoisteoksista.

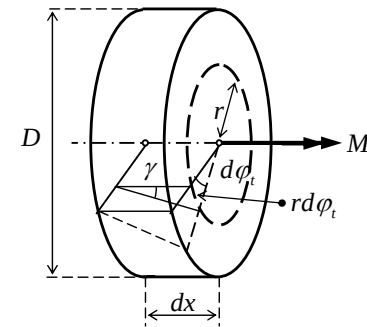
Sauvan geometrian ja reunaehtojen mukaan vääntötehtävät voidaan jaotella usealla tavoin. Tukemistavasta riippuen voi syntyä

- **vapaa vääntö**, jossa sauvan poikkileikkaustasojen käyristyminen ei ole estynyt
- **estetty vääntö**, jossa sauvan poikkileikkaustasojen käyristyminen on estynyt

Jälkimmäisessä sauvaan syntyy myös sen akselin suuntaisia normaali-jännityksiä. Poikkileikkausmuodon mukaan sauvat voidaan jakaa vääntötehtävien käsittelyä silmällä pitäen esim.

- **umpinaisen** tai **kotelomaisen** poikkileikkauksen omaaviin
- **suljetun** tai **avoimen** poikkileikkauksen omaaviin
- **paksu-** tai **ohutseinämäisiin**

10.2 Ympyräpoikkileikkauksen vääntö



Kuva 10.1: Ympyräsyntierin väännön kinematiikkaa.

Tarkastellaan ympyräsyntierin muotoisen sauvan vääntöä, jonka kinematiikkaa on havainnollistettu kuvassa 10.1 Sauvan vääntyessä sen poikkileikkaustasot kiertyvät sauvan akselin ympäri ja vakioetäisyydellä r akselista olevat materialipinnat liikkuvat toistensa suhteen. Sauvan keskeissäsymmetriasta johtuen poikkileikkaustasot eivät tällöin käyristy, vaikka vapaassa väännössä yleensä näin tapahtuu. Kun kohdissa x ja $x+dx$ olevat poikkileikkaustasot kiertyvät toistensa suhteen kulman $d\phi_t$, sauvan **vääntymä** määritellään kaavalla

$$\theta = \frac{d\phi_t}{dx} = \phi'_t. \quad (10.1)$$

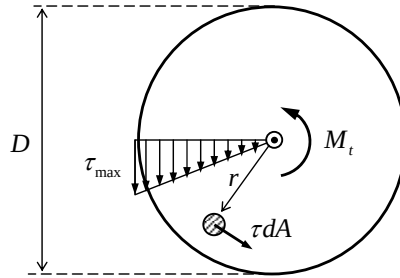
Etäisyydellä r sauvan akselista tapahtuu **liukuma**

$$\gamma(x) = \frac{rd\phi_t}{dx} = \phi'_t r = \theta r, \quad (10.2)$$

joka on siis suoraan verrannollinen etäisyyteen r sauvan akselista. Leikkauksen Hooken lain ja kaavan (10.2) perusteella saadaan leikkausjännitykselle

$$\tau = G\gamma = G\theta r. \quad (10.3)$$

Täten myös leikkausjännitys on suoraan verrannollinen etäisyyteen r poikkipinnan keskipisteestä (kuva 10.2).



Kuva 10.2: Ympyräpoikkileikkauksen leikkausjännitys ja vääntömomentti.

Vääntömomentti M_t on leikkausjännityksen momenttiresultantti, joten sille saadaan

$$M_t = \int_A \tau r dA. \quad (10.4)$$

Kun tähän sijoitetaan τ :n lauseke (10.3) saadaan edelleen

$$M_t = G\theta \int_A r^2 dA, \quad (10.5)$$

eli

$$M_t = GI_t \theta, \quad (10.6)$$

missä

$$I_t = \int_A r^2 dA = \int_0^{D/2} r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{D/2} r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{D/2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (10.7)$$

ja D on poikkileikkauksen halkaisija. Näin saatiin ympyräpoikkileikkauksisen sauvan **vääntömomentin ja vääntymän yhteys** muotoon

$$M_t = GI_t \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad (10.8)$$

missä I_t on ympyräpoikkileikkauksisen sauvan **vääntöjäyhyysmomentti** ja sille saatiin lauseke

$$I_t = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (10.9)$$

Tuloa GI_t kutsutaan sauvan **vääntöjäykkyydeksi**. Leikkausjännitykselle saadaan nyt kaavojen (10.2), (10.3) ja (10.8) perusteella kaava

$$\tau = \frac{M_t}{I_t} r. \quad (10.10)$$

Leikkausjännityksen suurin arvo saadaan sauvan pinnalla $r = D/2$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} \frac{D}{2}, \quad (10.11)$$

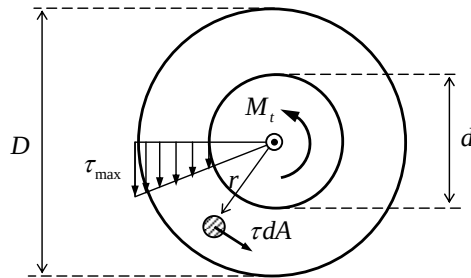
ja se voidaan esittää muodossa

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (10.12)$$

missä W_t on ympyräpoikkileikkauksen **vääntövastus**, jolla siis on lauseke

$$W_t = \frac{I_t}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (10.13)$$

10.3 Ympyrärengaspoikkileikkauksen vääntö



Kuva 10.3: Ympyrärengaspoikkipinnan leikkausjännitys ja vääntömomentti.

Tarkastellaan sauvaa, jolla on kuvan 10.3 mukainen ympyrärengaspoikki-leikkaus. Leikkausjännitykselle τ saadaan tässäkin tapauksessa lauseke (10.3) ja vääntömomentin ja vääntymän yhteys saadaan muodon (10.8), missä vääntöjäyhyysmomentille saadaan nyt

$$I_t = \int_A r^2 dA = \int_{d/2}^{D/2} r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \quad (10.14)$$

eli siis

$$I_t = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}. \quad (10.15)$$

Leikkausjännitykselle saadaan kaava (10.10) ja sen suurin arvo (10.11) on sauvan pinnalla $r = D/2$ ja se voidaan esittää muodossa

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (10.16)$$

missä W_t on ympyrärengaspoikkileikkauksen **vääntövastus**, jolla siis on lauseke

$$W_t = \frac{I_t}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \quad (10.17)$$

Huomautus: Ympyrä- ja ympyrärengaspoikkileikkauksen vääntöjäyhyysmomentti on kaavojen (10.7) ja (10.14) perusteella yhtä suuri kuin kyseisten poikkileikkausten polaarinen jäyhyysmomentti

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

Tämä yhtäsuuruus ei kuitenkaan päde muuntymisille poikkileikkauksille.

10.4 Mielivaltaisen poikkileikkauksen vapaa vääntö

10.41 Siirtymäotaksuma ja käyristymisfunktio

Yleisessä tapauksessa väännetyin sauvan poikkileikkaus ei pysy tasana, vaan käyristyy. Tämä merkitsee sitä, että sauvan yleinen piste (x, y, z) saa x -akselin suuntaisen siirtymän u , joka vaihtelee myös koordinaattien y ja z funktiona. Sille otaksutaan esitys

$$u(x, y, z) = \theta(x)\psi(y, z). \quad (10.18)$$

missä

$$\theta(x) = \varphi'_t(x) \quad (10.19)$$

on vääntymä ja funktiota $\psi(y, z)$ kutsutaan **käyristymisfunktioiksi**. Edelleen otaksutaan, että sauvan poikkileikkaus (tai itse asiassa sen projektiio y, z -tasolla) kiertyy vääntökeskiön ympäri kuin jäykkä levy. Tällöin yleisen pisteen (x, y, z) siirtymille v ja w saadaan

$$v(x, y, z) = -\varphi_t(x)z, \quad w(x, y, z) = \varphi_t(x)y. \quad (10.20)$$

Kaavojen (10.18) ja (10.20) mukaisen siirtymäotaksuman väännetyille sauvalle on ensimmäisenä esittänyt De Saint Venant vuonna 1856, ja sen vuoksi seuraavassa esitettävää vapaan väännön teoriaa kutsutaan **Saint Venant'in vääntöteoriaksi**.

10.42 Liukumien ja leikkausjännitykset

Sijoittamalla siirtymien lausekkeet (10.18) ja (10.20) kiinteän aineen mekaniikan liukumien γ_{xy} ja γ_{xz} siirtymien avulla ilmaistuihin lausekkeisiin saadaan

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi'_t z = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \quad (10.21)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \varphi'_t y = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

Sijoittamalla ne venymän ε_x lausekkeeseen saadaan vastaavasti

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta' \psi.$$

Vastaava sijoitus muiden muodonmuutoskomponenttien lausekkeisiin antaa tuloksiksi $\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = 0$ ja $\gamma_{yz} = 0$. Nähdään siis, että puhtaassa väännössä esiintyy vain liukumien γ_{xy} ja γ_{xz} sekä venymä ε_x . Leikkauksen Hooken lain perusteella saadaan leikkausjännityksille τ_{xy} ja τ_{xz}

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right). \quad (10.22)$$

Tarkastellaan nyt sauvan osaa, jolla ei ole ulkoista vääntävää jakautunutta momenttia m , eikä myöskään vääntäviä pistemomenteja. Tällöin sauva-alkion tasapainoyhtälö on $M'_t = 0$, vääntymän derivaatalle saadaan $\theta' = M'_t / GI_t = 0$ ja aksiaaliselle venymälle saadaan $\varepsilon_x = 0$. Koska tässä tapauksessa kaikki venymät ja liukuma γ_{yz} ovat nollia, ovat myös (Hooken lain perusteella) kaikki normaalijännitykset sekä leikkausjännitys τ_{yz} nollia, ts. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit ovat siis kaavan (10.22) leikkausjännitykset.

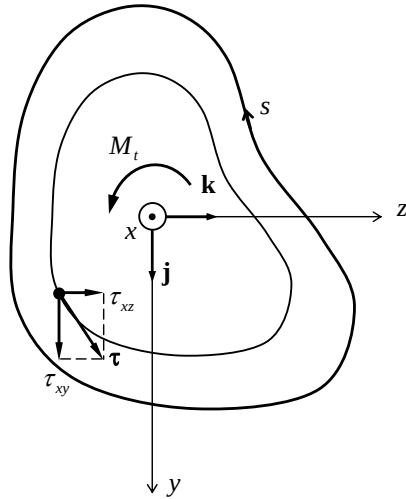
Vapaassa väännössä otaksutaan siinäkin tapauksessa, että sauvalle on ulkoista vääntävää kuormitusta, että $\varepsilon_x = 0$, jolloin ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit ovat kaavan (10.22) leikkausjännitykset. Päädyttiin siis siihen, että ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit puhtaassa väännössä ovat leikkausjännitykset τ_{xy} ja τ_{xz} . Niitä kutsutaan myös **vääntöjännityksiksi**. Ne voidaan haluttaessa esittää vääntöjännitysvektorina (kuva 10.4)

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}, \quad (10.23)$$

ja sen itseisarvoa

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (10.24)$$

voidaan kutsua **resultoivaksi vääntöjännitykseksi**.



Kuva 10.4: Poikkileikkauksen vääntöjännitykset.

10.43 Leikkausjännitysten tasapainoyhtälö

Kuvan 10.5 mukaisen sauvasta irroitettun alkion x akselin suuntaiseksi tasa-painoehdoksi saadaan

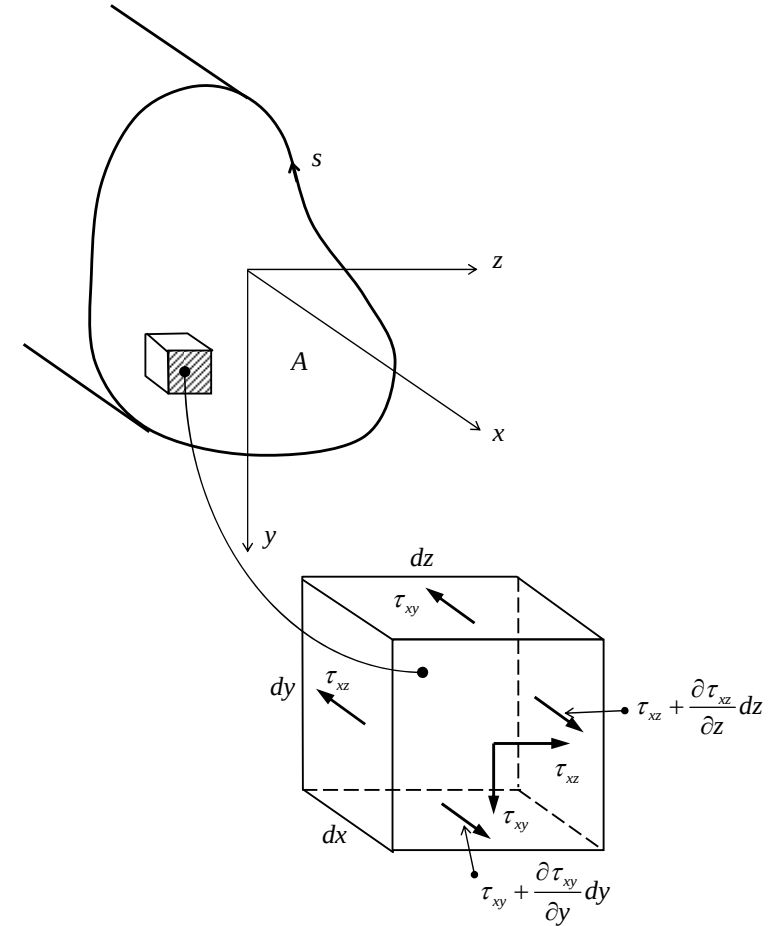
$$(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{xy} dx dz + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{xz} dx dy = 0. \quad (10.25)$$

josta saadaan edelleen

$$(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}) dx dy dz = 0. \quad (10.26)$$

Näin saimme väännetyin sauvan **leikkausjännitysten tasapainoyhtälön**

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \text{ alueessa } A. \quad (10.27)$$



Kuva 10.5: Vääntöjännitysten tasapainoyhtälön johtaminen.

10.44 Liukumien yhteensopivuusyhtälö

Muodostetaan seuraava liukumien derivaattojen erotus

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}$$

ja sijoitetaan siihen käyrästymisfunktion avulla ilmaistut liukumamat (10.21), jolloin saadaan

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -2\theta. \quad (10.28)$$

eli

$$\boxed{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = -2\theta, \text{ alueessa } A.} \quad (10.29)$$

Tätä yhtälöä voidaan kutsua **liukumien yhteensopivuusyhtälöksi**. Hooken lain perusteella se voidaan lausua leikkausjännitysten avulla muodossa

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\theta, \text{ alueessa } A. \quad (10.30)$$

10.45 Vääntöjännitysfunktio

Otetaan käyttöön ns. **vääntöjännitysfunktio** $\phi(y, z)$, jonka avulla leikkausjännitykset saadaan kaavoista

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}.} \quad (10.31)$$

Sijoittamalla leikkausjännitykset (10.31) tasapainoyhtälöön (10.27), nähdään sen toteutuvan. **Vääntöjännitysfunktion avulla lausutut leikkausjännitykset toteuttavat siis automaattisesti tasapainoyhtälön.**

Vääntöjännitysfunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

- Vääntöjännitysfunktion tasa-arvokäyrät yhtyvät resaltoivan vääntöjännityksen suuntaan.
- Resaltoiva vääntöjännitys on yhtä suuri kuin vääntöjännitysfunktion gradientin itseisarvo.

Jos siis vääntöjännitysfunktio esitetään tasa-arvokäyrinä (ikään kuin korkeuskäyrinä) voimme päätellä seuraavaa. Tasa-arvokäyrien suunta ilmaisee resaltoivan vääntöjännityksen suunnan ja mitä tiheämmässä tasa-arvokäyriä on jossain poikkipinnan kohdassa, sitä suurempi on vääntöjännitys.

Todistetaan edellä mainitut vääntöjännitysfunktion ominaisuudet:

Vääntöjännitysvektorille τ saadaan

$$\tau = \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{k} \quad (10.32)$$

ja vääntöjännitysfunktion gradientti on

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (10.33)$$

Edellisten pistetuloiksi saadaan

$$\tau \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (10.34)$$

Resaltoiva vääntöjännitys siis kohtisuorassa jännitysfunktion gradienttia vastaan ja sen tasa-arvokäyrän suuntainen.

Resaltoivalle vääntöjännitykselle saadaan

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} = |\nabla \phi|. \quad (10.35)$$

Se on siis vääntöjännitysfunktion gradientin itseisarvon suuruinen.

10.46 Vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälö ja reunaehto

Sijoittamalla leikkausjännitykset (10.31) yhteensopivuusyhtälöön (10.30) saadaan

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta, \text{ alueessa } A.} \quad (10.36)$$

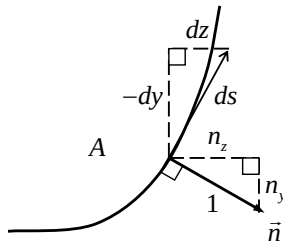
Tämä on **vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälö**.

Tarkastellaan poikkipinnan reunaa. Olkoon reunan yksikönormaali-vektori $\mathbf{n} = n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$. Reunaa vastaan kohtisuoralle leikkausjännitys-komponentille τ_{xn} saadaan

$$\tau_{xn} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial s}. \quad (10.37)$$

Kaavassa (10.37) käytettiin reunan yksikönormaalivektorin komponenttien lausekkeita

$$n_y = \frac{dz}{ds}, \quad n_z = -\frac{dy}{ds}, \quad (10.38)$$



Kuva 10.6: Reunan yksikönormaalien komponentit.

jotka voidaan nähdä oikeaksi kuvan 10.6 perusteella. Koska poikkipinnan reuna on jännityksetön, on reunapinnan leikkausjännitys $\tau_{nx} = 0$. Kiinteän aineen momenttitasapainoyhtälön $\tau_{xn} = \tau_{nx}$ perusteella täytyy siis myös poikkipinnan leikkausjännityksen τ_{xn} poikkipinnan reunalla hävitä. Näin saadaan yhtälö

$$\tau_{xn} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0, \quad (10.39)$$

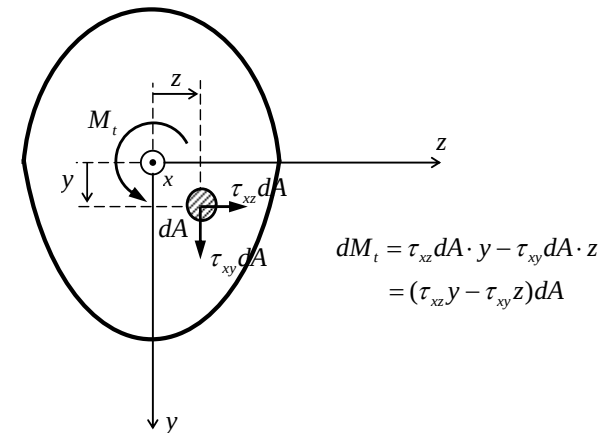
josta seuraa, että jännitysfunktion tulee reunaviivalla olla vakio. Tämän vakion arvolla ei ole fysikaalisen probleeman kannalta merkitystä, joten

sen arvoksi voidaan ottaa nolla, joten **vääntöjännitysfunktiolle** saadaan yksinkertainen **reunaehto**

$$\phi = 0, \quad \text{reunalla } s. \quad (10.40)$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälö (10.36) ja reunaehto (10.40) muodostavat **reuna-arvoprobleeman** jännitysfunktion $\phi(y, z)$ määrittämiseksi. Yleensä sille ei löydy analyyttistä ratkaisua, mutta nykyaikaisia numeerisia laskenta-menetelmiä (esim. elementtimetelmää) käyttäen voidaan aina löytää riittävän tarkka likiratkaisu. Kun ratkaisu tunnetaan, voidaan tulosta havainnollistaa tasa-arvokäyriä. Kun jännitysfunktion $\phi(y, z)$ on tunnettu voidaan myös leikkausjännityskomponentit $\tau_{xy}(y, z)$ ja $\tau_{xz}(y, z)$ määrittää kaavoihin (10.31) perustuen. Tulosta voidaan jälleen havainnollistaa määrittämällä esimerkiksi resaltoivan leikkausjännityksen tasa-arvokäyriä tms.

10.47 Vääntömomentti ja vääntöjäyhyysmomentti



Kuva 10.7: Vääntömomentin määrittely.

Vääntömomentille saadaan kuvan 10.7 perusteella lauseke

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA. \quad (10.41)$$

Sijoittamalla tähän jännitysfunktion avulla lausutut leikkausjännitykset (10.31) saadaan

$$M_t = \int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z \right) dA. \quad (10.42)$$

Tämä lauseke voidaan saattaa muotoon (johto sivuutetaan tässä)

$$M_t = 2 \int_A \phi dA. \quad (10.43)$$

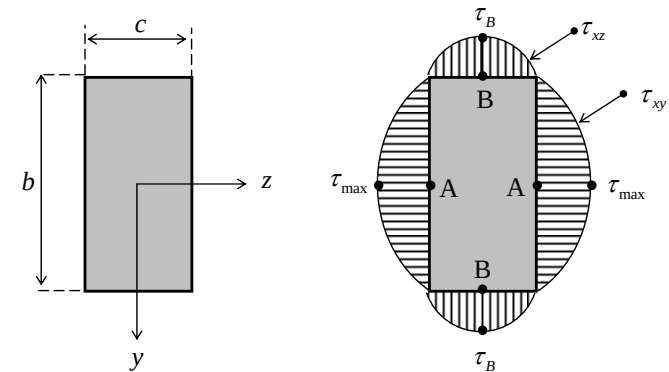
Käyttämällä vielä hyväksi vääntömomentin ja vääntymän yhteyttä $M_t = GI_t \theta$ saadaan **vääntöjäyhyysmomentille** tulos

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_A \phi dA. \quad (10.44)$$

Kun vääntöjännitysfunktio $\phi(y, z)$ on saatu differentiaaliyhtälön (10.36) ja reunaehdon (10.40) muodostaman reuna-arvoprobleeman ratkaisuna, saadaan poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentti kaavasta (10.44). Pintaintegraali lausekkeissa (10.43) ja (10.44) on yksinkertaisesti vääntöjännitysfunktion ja poikkipinnan (y, z -tason) välinen tilavuus.

10.5 Suorakaidepoikkipinnan vääntö

Suorakaidepoikkipinnan vääntötehtävä voidaan ratkaista kohdassa 10.4 esitetyn perustein käyttäen esimerkiksi Fourier-sajakehittelmiin perustuva menetelmä. Kuvassa 10.8 on kuvattu leikkausjännitysten τ_{xy} ja τ_{xz} jakautumista poikkipinnan reunoilla.



Kuva 10.8: Vääntöjännitykset suorakaidepoikkipinnan reunoilla.

Poikkileikkauksen suurin leikkausjännitys $\tau_{\max}$ vaikuttaa pidempien sivujen keskipisteissä A. Seuraavien kaavojen sekä taulukon 10.1 avulla voidaan määrittää suorakaidepoikkipinnan vääntöjäyhyysmomentti I_t , vääntövastus W_t , maksimi leikkausjännitys $\tau_{\max}$ sekä leikkausjännitys τ_B lyhyemmän sivun keskipisteissa B sivusuhteen b/c (>1) funktiona.

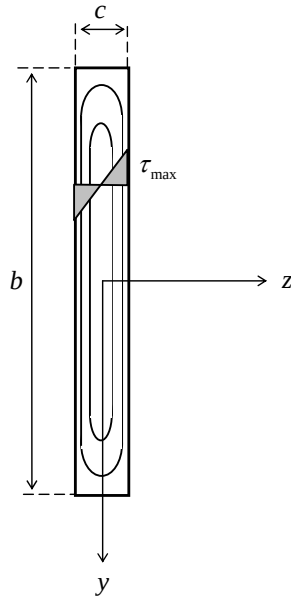
$$I_t = \alpha bc^3, \quad W_t = \beta bc^2, \quad (10.45)$$

$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{M_t}{W_t}, \quad \tau_B = \eta \tau_A = \eta \tau_{\max}.$$

Taulukko 10.1: Suorakaidepoikkipinnan vääntö.

b/c	1	1,5	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	1/3
β	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,311	1/3
η	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

10.6 Avoimen ohuen profiilin vääntö



Kuva 10.9: Kapean suorakaidepoikkipinnan vääntö.

10.61 Kapea suorakaidepoikkipinta

Tarkastellaan aluksi kuvan 10.9 **kapeaa suorakaidepoikkipintaa**. Voidaan otaksua, että kaikkialla paitsi poikkipinnan päissä vääntöjännitysfunktiolle on likimain voimassa $\phi \approx \phi(z)$. Tämän vuoksi vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälön (10.36) vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \approx \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (10.46)$$

ja yhtälöstä tulee tavallinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = -2G\theta. \quad (10.47)$$

Sen yleinen ratkaisu saadaan seuraavasti

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = -2G\theta \Rightarrow \frac{d\phi}{dz} = -2G\theta z + C_1 \Rightarrow \phi = -G\theta z^2 + C_1 z + C_2. \quad (10.48)$$

Reunaehdot ovat $\phi(-c/2) = 0$ ja $\phi(+c/2) = 0$, ja niistä seuraa

$$\left. \begin{aligned} \phi(-c/2) &\equiv -G\theta \frac{c^2}{4} - C_1 \frac{c}{2} + C_2 = 0, \\ \phi(+c/2) &\equiv -G\theta \frac{c^2}{4} + C_1 \frac{c}{2} + C_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = G\theta \frac{c^2}{4}. \end{cases} \quad (10.49)$$

Vääntöjännitysfunktiolle saadaan näin tulos

$$\phi = G\theta \left(\frac{c^2}{4} - z^2 \right). \quad (10.50)$$

Vääntöjäyhyysmomentille saadaan

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_A \phi dA = \frac{2}{G\theta} \int_{-c/2}^{c/2} G\theta \left(\frac{c^2}{4} - z^2 \right) b dz = 2b \left[\frac{c^2}{4} z - \frac{z^3}{4} \right]_{-c/2}^{c/2} \quad (10.51)$$

ja lopuksi

$$I_t = \frac{1}{3} b c^3. \quad (10.52)$$

Vääntöjännityksille saadaan

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2G\theta z, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx 0, \quad (10.53)$$

joten suurin jännitys on

$$\tau_{\max} = 2G\theta \frac{c}{2} = G\theta c = \frac{M_t}{I_t} c \quad (10.54)$$

Näin voimme kirjoittaa

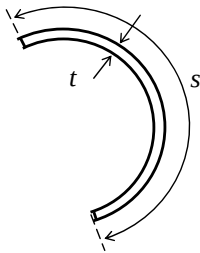
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (10.55)$$

missä vääntövastus on

$$W_t = \frac{I_t}{c} = \frac{1}{3}bc^2. \quad (10.56)$$

10.62 Ohutseinäinen avoin poikkipinta

Tarkastellaan aluksi kuvan 10.10 ohutseinästä avointa poikkipintaa, jonka seinämän paksuus t on vakio. Jos t on sekä poikkipinnan pituuteen s että sen keskiviivan kaarevuussäteeseen nähden pieni, voidaan poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentin ja vääntövastuksen määrittämisessä soveltaa kapean suorakaidepoikkipinnan kaavoja (10.52) ja (10.56).



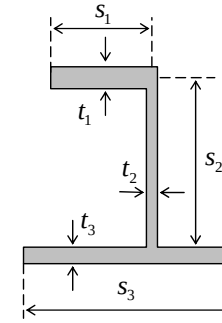
Kuva 10.10: Ohutseinäinen avoin poikkipinta, jonka paksuus on vakio.

Poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentille ja vääntövastukselle saadaan näin tulokset

$$I_t = \frac{1}{3}st^3 \quad (10.57)$$

ja

$$W_t = \frac{I_t}{t} = \frac{1}{3}st^2. \quad (10.58)$$



Kuva 10.11: Ohutseinäinen avoin poikkipinta, jonka paksuus on paloittain vakio.

Myös avoimille ohuille poikkipinnoille, joiden paksuus vaihtelee voidaan johtaa vääntömomentin ja vääntövastuksen lausekkeita. Tässä rajoitutaan poikkipintoihin, joiden paksuus on paloittain vakio. Kuvassa 10.11 on esitetty tyypillinen poikkileikkaus. Tarkasteluissa jätetään luonnollisesti nurkkahäiriöt huomioon ottamatta. Koska vääntöjäyhyysmomentti on suoraan verrannollinen vääntöjännitysfunktion ja poikkipinnan väliseen tilavuuteen, voidaan tämä tilavuus määrittää kullekin poikkipinnan vakio-paksuiselle osalle erikseen ja laskea näin saadut tilavuudet yhteen. Tästä seuraa että, poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentti saadaan suoraan summaamalla sen vakiopaksuisten osien vääntöjäyhyysmomentit. Näin vääntöjäyhyysmomentille saadaan kaava

$$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3. \quad (10.59)$$

Jos ajatellaan y, z -koordinaatisto asetetuksi tarkasteltavaan poikkipinnan osaan i siten, että y -akseli yhtyy osan keskiviivaan, on leikkausjännityksellä lauseke (10.53). Leikkausjännitys osan i reunoilla on nyt

$$\tau_{xy}(\pm \frac{t_i}{2}) = \mp 2G\theta \frac{t_i}{2} = \mp \frac{M_t}{I_t} t_i. \quad (10.60)$$

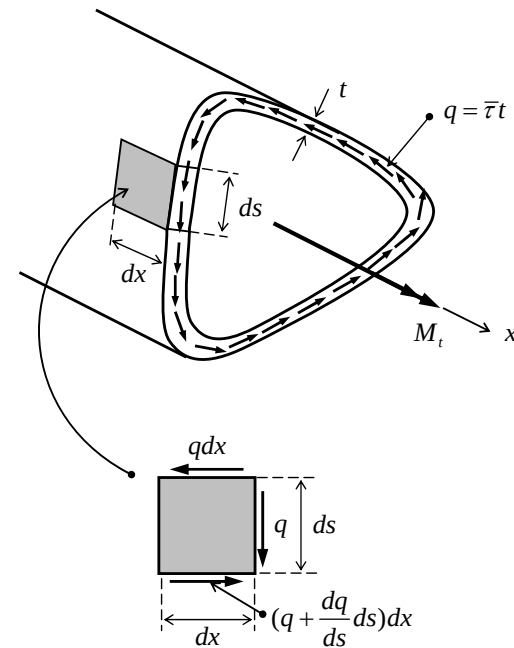
Nähdään siis, että osan i suurin leikkausjännitys on suoraan verrannollinen osan paksuuteen t_i . Näin koko poikkipinnan suurin leikkausjännitys esiintyy sen poikkipinnan osan reunalla, jonka paksuus on suurin ja se on

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} t_{\max}. \quad (10.61)$$

Näin vääntövastukselle saadaan tulos

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}}. \quad (10.62)$$

10.7 Ohutseinäisen suljetun profiilin vääntö



Kuva 10.12: Leikkausvuo ohutseinäisellä suljetulla poikkipinnalla.

Tarkastellaan kuvan 10.12 puhtaan väännön alaista sauvaa, jolla on ohutseinäinen suljettu poikkipinta. Poikkileikkauspinnalla vaikuttavaa sen keskiviivan suuntaista leikkausvoimaa pituutta kohti merkitään symbolilla q ja kutsutaan **leikkausvuoksi**. Vastaava keskiviivan suuntainen **keskimääräinen leikkausjännitys** on täten $\bar{\tau} = q/t$.

Sauvasta irroitettun harmaan differentiaalisen suorakaiteen x -akselin suuntainen tasapainoehto on

$$-qdx + \left(q + \frac{dq}{ds} ds\right)dx = 0, \quad (10.63)$$

Siitä seuraa

$$\frac{dq}{ds} = 0 \quad (10.64)$$

Tämä tulos merkitsee sitä, että leikkausvuolle pätee

$$q \equiv \bar{\tau}t = \text{vakio.} \quad (10.65)$$

Kuvan 10.12 perusteella saadaan poikkipinnan pieneen osaan vaikuttavan voiman qds osuudeksi vääntömomentista

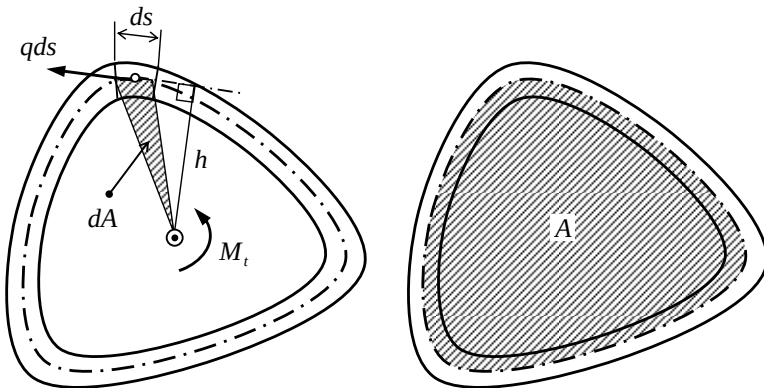
$$dM_t = qds \cdot h = 2qdA. \quad (10.66)$$

Tässä käytettiin hyväksi kuvasta 10.13 näkyvää yhteyttä $ds \cdot h = 2dA$. Vääntömomentiksi tulee näin

$$M_t = \oint 2qdA = 2q \oint dA = 2qA, \quad (10.67)$$

missä A on profiilin keskiviivan rajaaman alueen pinta-ala (vrt. kuva 10.13). Näin saadaan poikkileikkauksen leikkausvuolle kaava

$$q = \frac{M_t}{2A} \quad (10.68)$$



Kuva 10.13: Vääntömomentin laskeminen.

ja keskimääräiselle leikkausjännitykselle $\bar{\tau} = q/t$ kaava

$$\bar{\tau} = \frac{q}{t} = \frac{M_t}{2At}. \quad (10.69)$$

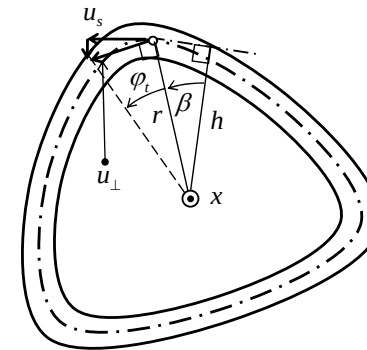
Tätä kaavaa kutsutaan kehittäjänsä mukaan **Bredt'in ensimmäiseksi kaavaksi**.

Koska keskimääräinen leikkausjännitys on kääntäen verrannollinen profiilin paksuuteen, on sen suurin arvo poikkipinnan ohuimmassa kohdassa ja sille saadaan

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{M_t}{2At_{\min}}. \quad (10.70)$$

Poikkileikkauksen vääntövastukselle saadaan näin tulos

$$W_t = 2At_{\min}. \quad (10.71)$$



Kuva 10.14: Ohutseinäisen suljetun profiilin kinematiikkaa.

Koska väännetyin sauva poikkipinta kiertyy vääntökeskiön ympäri kuin jäykkä kappale, saadaan kuvan 10.14 sädettä r vastaan kohtisuoralle siirtymälle

$$u_{\perp} \approx r\varphi_t. \quad (10.72)$$

Profiilin keskiviivan suuntaiselle siirtymälle saadaan

$$u_s = u_{\perp} \cos \beta = r \varphi_t \cos \beta = h \varphi_t. \quad (10.73)$$

Liukumalle $\gamma = \gamma_{xs}$ saadaan

$$\gamma = \gamma_{xs} = \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (10.74)$$

Ratkaisemalla tästä $\partial u / \partial s$ saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \gamma - \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{\tau}{G} - h \frac{d\varphi_t}{dx} \approx \frac{\bar{\tau}}{G} - h\theta. \quad (10.75)$$

Tässä käytettiin hyväksi leikkauksen Hooken lakia ja kaavaa (10.1).

Koska profiili on suljettu, täytyy siirtymän $u(s)$ olla jatkuva. Tämä merkitsee sitä, että siirtymällä poikkipinnan keskiviivan tietystä pisteestä A tulee olla yksikäsitteinen arvo. Lähtien pisteestä A saamme yleisen pisteen s siirtymälle

$$\begin{aligned} u(s) &= u_A + \int_{s_A}^s du = u_A + \int_{s_A}^s \frac{\partial u}{\partial s} ds = u_A + \int_{s_A}^s \left(\frac{\bar{\tau}}{G} - h\theta \right) ds \\ &= u_A + \int_{s_A}^s \left(\frac{q}{Gt} - h\theta \right) ds \end{aligned} \quad (10.76)$$

Pisteen A siirtymälle saamme tästä kaavasta

$$u_A = u(s_A) = u_A + \oint \left(\frac{q}{Gt} - h\theta \right) ds, \quad (10.77)$$

missä integrointi tapahtuu profiilin keskiviivan ympäri. Yhtälöstä (10.77) seuraa

$$\oint \left(\frac{q}{Gt} - h\theta \right) ds = 0 \Rightarrow \oint \frac{q}{Gt} ds = \theta \oint h ds \Rightarrow \frac{q}{G} \oint \frac{ds}{t} = 2\theta A. \quad (10.78)$$

Tässä käytettiin hyväksi kaavan (10.65) tulosta, jonka mukaan leikkausvuo on vakio ja voidaan ottaa integraalin ulkopuolelle, sekä yhteyttä $h ds = 2dA$. Leikkausvuolle saadaan nyt

$$q = \frac{2G\theta A}{\oint \frac{ds}{t}}. \quad (10.79)$$

Sijoittamalla tämä vääntömomentin yhtälöön (10.67) saadaan

$$M_t = 2qA = \frac{4G\theta A^2}{\oint \frac{ds}{t}}. \quad (10.80)$$

Tätä kaavaa kutsutaan Bredt'in toiseksi kaavaksi. Käyttäen hyväksi vääntömomentin ja vääntymän yhteyttä $M_t = GI_t\theta$ saadaan vääntöjäyhyysmomentille lopulta tulos

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}. \quad (10.81)$$

Jos poikkipinta muodostuu tasapaksuista osista kaavan, viivaintegraali saa muodon

$$\oint \frac{ds}{t} = \sum \frac{s_i}{t_i}. \quad (10.82)$$

10.8 Sauvan vääntökulman määrittäminen

Tarkastellaan väännettyä sauvaa tai sauvarakenteen osasauvaa **staattisesti määrättyssä tehtävässä**, jossa sauvan vääntömomentti $M_t(x)$ on määritettävissä statiikan keinoin etukäteen. Se siis on tehtävässämme tunnettu. Tällöin myös sauvan vääntymä $\theta(x)$ voidaan laskea kaavasta

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}. \quad (10.83)$$

10.81 Sauvan vääntökulma muutos

Sauvan tai sauvan osan AB **vääntökulman muutos** on **sauvan päiden vääntökulmien erotus** eli

$$\Delta\varphi_t = \varphi_{tB} - \varphi_{tA}. \quad (10.84)$$

Integroimalla vääntymän lauseke (10.1) välin AB yli saadaan vääntökulmien erotukselle

$$\int_{x_A}^{x_B} \varphi'_t(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} \theta(x) dx \Rightarrow \varphi_{tB} - \varphi_{tA} = \int_{x_A}^{x_B} \theta(x) dx. \quad (10.84)$$

Näin saamme sauvan tai sen osan AB **vääntökulman muutokselle** lausekkeen

$$\Delta\varphi_t = \varphi_{tB} - \varphi_{tA} = \int_{x_A}^{x_B} \theta(x) dx. \quad (10.85)$$

Jos sauvan vääntymä $\theta = \text{vakio}$, kuten kuormittamattomalla sauvan osalla, saadaan

$$\Delta\varphi_t = \theta L. \quad (10.86)$$

10.82 Sauvan vääntökulma

Kaavasta (10.1) ja seuraa sauvan **vääntökulmalle** $\varphi_t(x)$ differentiaaliyhtälö

$$\varphi'_t(x) = \theta(x), \quad (10.87)$$

jonka ratkaisu on muotoa

$$\varphi_t(x) = \int \theta(x) dx + C, \quad (10.88)$$

missä C on integrointivakio, joka määräytyy vääntökulmalle asetettavasta reunaehdosta. Ratkaisu voidaan myös esittää esimerkiksi muodossa

$$\varphi_t(x) = \varphi_t(0) + \int_0^x \theta(x) dx, \quad (10.89)$$

missä $\varphi_t(0)$ on vääntökulman arvo pisteessä $x = 0$.

10.83 Väännetyin sauvan vääntökulman differentiaaliyhtälö

Käyttämällä vääntymän ja vääntökulman yhteyttä (10.1) sekä lineaarisesti kimmoisen sauvan vääntömomentin ja vääntymän yhteyttä (10.8) saadaan akselin suhteen muodostettu momenttitasapainoyhtälö (1.15) lausutuksi vääntökulman avulla. Tulos on

$$(GI_t \varphi'_t)' = -m \quad \text{eli} \quad \frac{d}{dx} (GI_t \frac{d\varphi_t}{dx}) = -m. \quad (10.90)$$

Tämä on väännetyin **sauvan vääntökulman differentiaaliyhtälö**. Jos kyseessä on tasajäykkä sauva ($GI_t = \text{vakio}$), yhtälö (10.90) saa hieman yksinkertaisemman muodon

$$\varphi''_t = -\frac{m}{GI_t}. \quad (10.91)$$

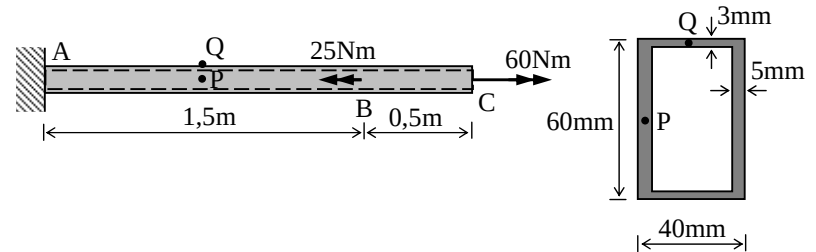
Yhtälö (10.90) on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka on helppo ratkaista. Ratkaisuun tulee kaksi integrointivakiota, jotka määräytyvät vääntökulmalle tai vääntökulman avulla ilmaistulle vääntömomentille

$$M_t = GI_t \varphi'_t \quad (10.92)$$

asetettavista reunaehdoista.

Väännetty sauva voidaan ratkaista vääntökulman differentiaaliyhtälöä (10.90) käyttäen oli probleema **staattisesti määrätty** tai **staattisesti määräämätön**. Kun vääntökulma $\varphi_t(x)$ on ensin ratkaistu, saadaan kaavan (10.92) avulla vääntömomentti $M_t(x)$ ja lopuksi vääntöjännitykset tämän luvun alussa esitettyjä menettelytapoja soveltaen.

Esimerkki 10.1: Oheinen putki on tehty pronssista, jonka liukumoduuli on 38GPa, ja sillä on suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus. Siihen vaikuttaa kaksi vääntävää momenttia. Määritä keskimääräinen leikkausjännitys putken pisteissä P ja Q. Määritä myös vääntökulman arvo päässä C, kun putki on kiinnitetty päästä A.



Vääntömomentti välillä AB:

$$\leftarrow M_{tAB} + 25\text{Nm} - 60\text{Nm} = 0 \Rightarrow \underline{M_{tAB} = 35\text{Nm}}$$

Vääntömomentti välillä BC:

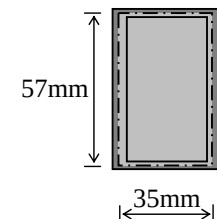
$$\leftarrow M_{tBC} - 60\text{Nm} = 0 \Rightarrow \underline{M_{tBC} = 50\text{Nm}}$$

Profiilin keskiviivan sisäpuolelle jäävän pinnan ala:

$$A = 35\text{mm} \cdot 57\text{mm} = 1995\text{mm}^2$$

Leikkausvuo:

$$q = \frac{M_t}{2A} = \frac{35 \cdot 10^3 \text{Nmm}}{2 \cdot 1995\text{mm}^2} = 8,772 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$



Keskimääräinen leikkausjännitys pisteissä P ja Q:

$$\bar{\tau}_P = \frac{q}{t_P} = \frac{8,772 \text{ N/mm}}{5 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{1,75 \text{ MPa}}}$$

$$\bar{\tau}_Q = \frac{q}{t_Q} = \frac{8,772 \text{ N/mm}}{3 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{2,92 \text{ MPa}}}$$

Vääntöjäyhyysmomentti:

$$\oint \frac{ds}{t} = \sum \frac{s_i}{t_i} = 2 \cdot \frac{57}{5} + 2 \cdot \frac{35}{3} = 46,1333$$

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot (1995 \text{ mm}^2)^2}{46,1333} = \underline{\underline{3,4509 \cdot 10^5 \text{ mm}^4}}$$

Vääntökulman muutokset väleillä AB ja BC:

$$\Delta\varphi_{tAB} = \theta_{AB} L_{AB} = \frac{M_{tAB}}{GI_t} L_{AB} = \frac{35 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \text{ mm}}{38 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,4509 \cdot 10^5 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{0,00400}}$$

$$\Delta\varphi_{tBC} = \theta_{BC} L_{BC} = \frac{M_{tBC}}{GI_t} L_{BC} = \frac{60 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 0,5 \cdot 10^3 \text{ mm}}{38 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,4509 \cdot 10^5 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{0,00229}}$$

Vääntökulma pisteessä C:

$$\varphi_{tC} = \Delta\varphi_{tAB} + \Delta\varphi_{tBC} = 0,00400 + 0,00229 = \underline{\underline{6,29 \cdot 10^{-3} \text{ rad}}}$$

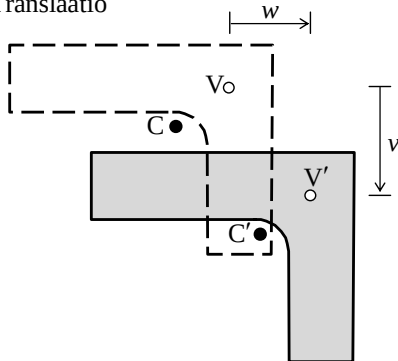
10.9 Taivutuksen ja väännön yhteisvaikutus

10.91 Johdanto

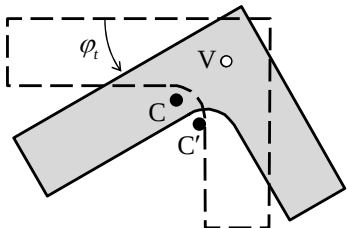
Sauvarakenteisiin kohdistuvat kuormat ovat yleensä sellaisia, että niistä aiheutuu sekä vetoa/puristusta ja taivutusta että vääntöä. Puhtaan väännön alaiset rakenteet ovat, erityisesti rakennustekniikassa, harvinaisia. Yleisessä tapauksessa edessämme on siten tilanne, jossa poikkileikkaukseen vaikuttavat normaalivoima N , taivutusmomentit M_y ja M_z , vääntömomentti M_t sekä leikkausvoimat $Q_y = M'_z$ ja $Q_z = M'_y$. Periaatteessa yhdistetyn vedon/puristuksen sekä taivutuksen osuus poikkileikkauksen jännityksiin voidaan määrittää erikseen käyttäen luvussa 5 esitettyjä periaatteita. Vastaavasti väännön osuus poikkileikkauksen jännityksiin voidaan arvioida tässä luvussa esitetyillä keinoilla. Rakenteeseen kohdistuvasta kuormituksesta sen poikkileikkauksiin syntyvän vääntömomentin M_t määrittäminen ei kuitenkaan onnistu, ellei **vääntökeskiön** V ja sen määrittelemän vääntökeskiöakselin asemaa tunneta.

10.92 Vääntökeskiön käsite ja merkitys

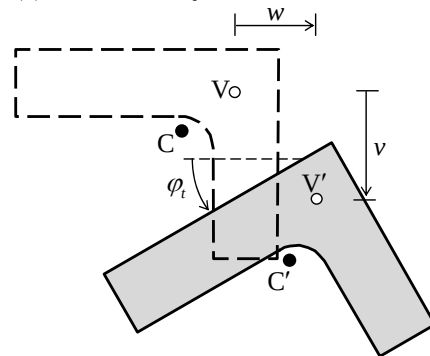
(a) Translaatio



(b) Rotaatio vääntökeskiön ympäri



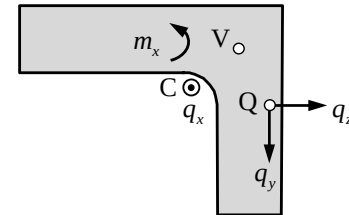
(c) Kokonaissiirtymä



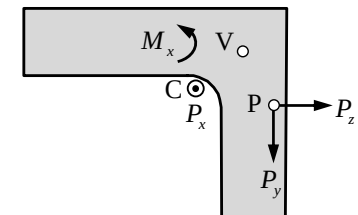
Kuva 10.15: Taivutetun ja väännetyin poikkileikkauksen kinematiikkaa

Kuvassa 10.15 on esitetty, kuinka taivutetun ja väännetyin palkin poikkileikkaus siirtyy. Puhtaassa taivutuksessa (kuva 10.15 (a)) poikkileikkauksen jokainen piste saa samat poikittaiset siirtymät v ja w eikä se kierry, eli liike on translaatio. Puhtaassa väännössä (kuva 10.15 (b)) poikkileikkaus kiertyy jäykkänä kappaleena vääntökulman φ_t suuruiseen kiertymän vääntökeskiön V ympäri eikä vääntökeskiö siirry, eli poikkileikkaus saa rotaation vääntökeskiön suhteen. Yhdistetyssä taivutuksessa ja väännössä (kuva 10.15 (c)) poikkileikkaus saa sekä translaation että rotaation. Poikkileikkauksen siirtymätila siis määräytyy **vääntökeskiön taipumien** v , w ja **vääntökulman** φ_t avulla.

(a) Jakautuneet kuormat



(b) Pistekuormat



Kuva 10.16: Väännetyin ja taivutetun palkin kuormitus

Kuvassa 10.16 (a) on esitetty, palkkiin kohdistuva sen pituutta kohti jakautunut kuormitus. Pitkittäisen jakautuneen kuorman $q_x(x)$ otaksutaan kuvan 10.16 (a) mukaisesti vaikuttavan pintakeskiöakselilla C ja jakautuneen poikittaisen kuorman $q_y(x)$ ja $q_z(x)$ otaksutaan vaikuttavan akselilla Q . Lisäksi palkkiin voi kohdistua jakautunut voimaparikuorma $m_x(x)$. Kuvassa 10.16 (b) on esitetty, palkin tiettyyn poikkileikkaukseen kohdistuvat pistekuormat. Pitkittäisen pistekuorman P_x otaksutaan kuvan 10.16 (b) mukaisesti vaikuttavan poikkileikkauksen pintakeskiössä C ja poikittaisten pistekuormien P_y ja P_z otaksutaan vaikuttavan pisteessä P . Lisäksi poikkileikkaukseen voi kohdistua jakautunut pistemäinen voimaparikuorma M_x .

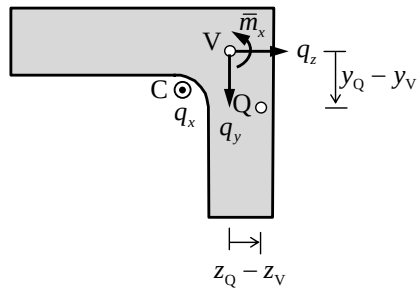
Jos palkin poikittaiset jakautuneet voimat $q_y(x)$, $q_z(x)$ ja momentti $m_x(x)$ redusoidaan vääntökeskiöakselille V , syntyy kuvan 10.17 (a) voimasysteemi, jossa voimat $q_y(x)$ ja $q_z(x)$ vaikuttavat vääntökeskiöakselilla ja sen ympäri vääntävä jakautunut momentti on

$$\bar{m}_x = m_x + q_y(z_Q - z_V) - q_z(y_Q - y_V). \quad (10.93)$$

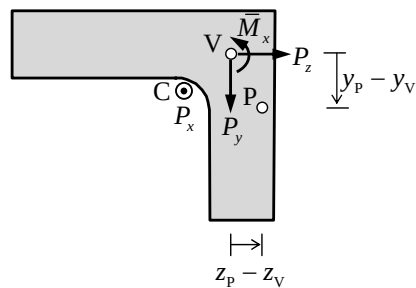
Jos poikkileikkauksen pistevuimat P_y , P_z ja voimapari M_x redusoidaan vääntökeskiöön V , syntyy kuvan 10.17 (b) voimasysteemi, jossa voimat P_y ja P_z vaikuttavat vääntökeskiöakselilla ja sen ympäri vääntävä momentti on

$$\bar{M}_x = M_x + P_y(z_P - z_V) - P_z(y_P - y_V). \quad (10.94)$$

(a) Vääntökeskiöakselille redusoidut jakautuneet kuormat



(b) Vääntökeskiöakselille redusoidut pistekuormat



Kuva 10.17: Väännetyt ja taivutetun palkin poikittaisen kuormituksen redusointi

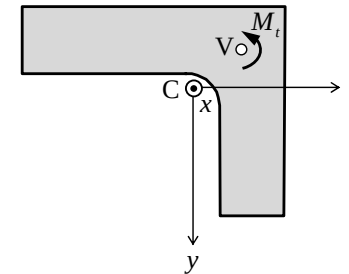
Jos palkin kuormitus muodostuu akselilla vaikuttavasta pitkittäisestä jakautuneen kuormasta $q_x(x)$ ja vääntökeskiöakselilla vaikuttavista poikittaista kuormista $q_y(x)$ ja $q_z(x)$ sekä pintakeskiössä vaikuttavista pitkittäisistä pistekuormista P_x ja vääntökeskiöstä vaikuttavista poikittaisista kuormista P_y ja P_z , palkin akseli saa aksiaalisen siirtymän $u(x)$ ja poikkileikkaukset saavat poikittaisen siirtymän, jonka komponentit ovat taipumat $v(x)$ ja $w(x)$. Palkin poikkileikkaukset saavat siis kuvan 10.15 (a) poikittaisen translaation, mutta eivät kierry. Tästä kuormituksesta aiheutuu edelleen jännitysresultantit $N(x)$, $M_y(x)$ ja $M_z(x)$ sekä $Q_y(x) = M'_z(x)$ ja $Q_z(x) = M'_y(x)$, mutta ei vääntömomenttia $M_t(x)$.

Jos palkin kuormitus muodostuu pelkästään jakautuneesta vääntävästä momentista $\bar{m}_x(x)$ sekä pistemomenteista $\bar{M}_x$, sen poikkileikkaukset saavat kiertymän $\varphi_t(x)$ eli palkki kiertyy vääntökeskiöakselin ympäri. Palkin poikkileikkaukset saavat siis kuvan 10.15 (b) rotaation, mutta pintakeskiöakseli ei veny eikä vääntökeskiöakseli taivu. Tästä kuormituksesta aiheutuu pelkkä vääntömomentti $M_t(x)$.

Jos palkin kuormitus muodostuu kaikista kuvassa 10.17 esitetyistä kuormista, sen akseli saa siirtymän $u(x)$, vääntökeskiö saa taipumat $v(x)$ ja $w(x)$ sekä poikkileikkaukset saavat kiertymän $\varphi_t(x)$. Palkin poikkileikkaukset siis siirtyvät kuvan 10.15 (c) mukaisesti. Tästä kuormituksesta aiheutuvat kaikki jännitysresultantit $N(x)$, $M_y(x)$, $M_z(x)$, $Q_y(x) = M'_z(x)$, $Q_z(x) = M'_y(x)$ ja $M_t(x)$. Tällöin on kysymyksessä yhdistetty veto/puristus, taivutus ja vääntö. Näin kuormitettu palkki voidaan edellä esitetyn perusteella ratkaista kahdessa vaiheessa. Ensin se ratkaistaan kaikille muille kuormille paitsi vääntävälle jakautuneelle momentille $\bar{m}_x(x)$ ja vääntäville pistemomenteille $\bar{M}_x$ käyttäen taivutusteoriaa ja sitten näille kuormille käyttäen vääntöteoriaa. Saadut tulokset lasketaan lopuksi yhteen.

10.93 Väännön yhtälöt pintakeskiökoordinaatistossa ja käyritysfunktion määrittäminen

Kun edellä (kohdassa 10.41) tarkasteltiin väännön siirtymäotaksumaa, poikkileikkaukskoordinaatiston origo sijoitettiin vääntökeskiöön ja vääntökeskiön V asema oletettiin siten tunnetuksi. Yleisessä tapauksessa vääntökeskiön asemaa ei kuitenkaan tunneta, vaan sen koordinaatit y_v ja z_v joudutaan ensin määrittämään. Tällöin tarkastelu on tarkoituksenmukaista suorittaa y, z -koordinaatistossa (vrt. kuva 10.18), jonka origo sijaitsee pintakeskiössä C.



Kuva 10.18: Puhtaan väännön alainen poikkileikkaus

Saint-Venantin väännön siirtymäotaksuma (10.18) ja (10.20) on tällöin

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \theta(x) \bar{\psi}(y, z), \\ v(x, y, z) &= -\varphi_t(x)(z - z_v), \\ w(x, y, z) &= \varphi_t(x)(y - y_v), \end{aligned} \quad (10.95)$$

missä $\bar{\psi}(y, z)$ on tähän koordinaatistoon liittyvä käyritysfunktio. Vastaavaan tapaan kuin kohdassa 10.2 leikkausjännityksille saadaan nyt lausekkeet

$$\tau_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - z + z_v \right), \quad \tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + y - y_v \right). \quad (10.96)$$

Näiden lausekkeiden ongelmana on se, että niissä esiintyvät vääntökeskiön koordinaatit y_v ja z_v ovat tuntemattomia. Tämän vuoksi otetaan käyttöön uusi käyritysfunktio $\psi(y, z)$ siten, että

$$\bar{\psi}(y, z) = \psi(y, z) + \psi_0 - z_v y + y_v z, \quad (10.97)$$

missä ψ_0 on vakio. Nyt leikkausjännitysten lausekkeet (10.96) saavat muodon

$$\tau_{xy} = G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right), \quad \tau_{xz} = G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right). \quad (10.98)$$

ja vääntökeskiön koordinaatteja ei lausekkeissa ole. Ne ovat myös identtiset lausekkeiden (10.22) kanssa. Tästä voidaan päätellä, että edellä kohdassa 10.4 esitetyt tulokset pätevät soveltuvin osin myös pintakeskiöön C sijoitetussa koordinaatistossa.

Jotta voisimme määrittää vääntökeskiön koordinaatit, meidän täytyy tuntea käyritysmisfunktio $\psi(y, z)$. Tämän vuoksi johdetaan sille reuna-arvoprobleema seuraavasti. Sijoittamalla leikkausjännitykset (10.98) tasapainoyhtälöön (10.27) saadaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{alueessa } A.} \quad (10.99)$$

Tämä on reuna-arvoprobleeman kenttäyhtälö, jonka tulee olla voimassa jokaisessa alueen A (poikkileikkauksen) pisteessä. Reunaa vastaan kohtisuoralle leikkausjännityskomponentille τ_{xn} saadaan

$$\tau_{xn} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = n_y G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right) + n_z G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right) \quad (10.100)$$

ja reunaehto sille on $\tau_{xn} = 0$ (vrt. kohta 10.46), joten reuna-arvoprobleeman reunaehtoyhtälöksi tulee

$$\boxed{n_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + n_z \frac{\partial\psi}{\partial z} = n_y z - n_z y \quad \text{reunalla } s.} \quad (10.101)$$

Tämä on reuna-arvoprobleeman reunaehtoyhtälö, jonka tulee olla voimassa jokaisessa poikkileikkauksen reunan s pisteessä. Reuna-arvoprobleema (10.99) ja (10.101) mahdollistaa käyritysmisfunktion $\psi(y, z)$ määrittämisen mielivaltaisen muotoiselle poikkileikkaukselle. Probleeman ratkaiseminen voidaan suorittaa numeerisesti käyttäen elementtimenetelmää.

10.93 Vääntökeskiön määrittäminen mielivaltaiselle poikkileikkaukselle

Puhtaan väännön siirtymäotaksuman perusteella normaalijännitykselle saadaan

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E\theta'(x)\bar{\psi}(y, z) = E\theta'(x)[\psi(y, z) + \psi_0 - z_v y + y_v z]. \quad (10.102)$$

Koska kysymyksessä on puhdas vääntö, poikkileikkauksessa tulee vaikuttaa pelkkä vääntömomentti. Siksi leikkausrasitusten N , M_y ja M_z tulee hävitä. Saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} N &\equiv \int_A \sigma_x dA = E\theta' \left(\int_A \psi dA + \psi_0 \int_A dA - z_v \int_A y dA + y_v \int_A z dA \right) = 0, \\ M_y &\equiv \int_A \sigma_x z dA = E\theta' \left(\int_A \psi z dA + \psi_0 \int_A z dA - z_v \int_A y z dA + y_v \int_A z^2 dA \right) = 0, \\ M_z &\equiv \int_A \sigma_x y dA = E\theta' \left(\int_A \psi y dA + \psi_0 \int_A y dA - z_v \int_A y^2 dA + y_v \int_A y z dA \right) = 0. \end{aligned} \quad (10.103)$$

Ottamalla käyttöön tavanomaiset poikkileikkaussuureet

$$A = \int_A dA, \quad S_y = \int_A z dA, \quad S_z = \int_A y dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_{yz} = \int_A y z dA \quad (10.104)$$

ja seuraavat uudet poikkileikkaussuureet

$$S_\psi = \int_A \psi dA, \quad I_{y\psi} = \int_A y \psi dA, \quad I_{z\psi} = \int_A z \psi dA \quad (10.105)$$

sekä huomioimalla, että kysymyksessä on pintakeskiökoordinaatisto, jolloin $S_y = 0$ ja $S_z = 0$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} S_\psi + A\psi_0 &= 0, \\ I_y y_v - I_{yz} z_v &= -I_{z\psi}, \\ -I_{yz} y_v + I_z z_v &= I_{y\psi}, \end{aligned} \quad (10.106)$$

jonka ratkaisu vakiolle ψ_0 on

$$\psi_0 = -\frac{S_\psi}{A} \quad (10.107)$$

ja vääntökeskiön koordinaateille

$$\boxed{y_v = \frac{-I_z I_{z\psi} + I_{yz} I_{y\psi}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad z_v = \frac{-I_{yz} I_{z\psi} + I_y I_{y\psi}}{I_y I_z - I_{yz}^2}.} \quad (10.108)$$

Kun poikkileikkaussuureet (10.104) ja (10.105) on ensin määritetty, voidaan vääntökeskiön koordinaatit y_v ja z_v laskea kaavalla (10.108). Yleisen poikkileikkauksen tapauksessa käyritysmisfunktion poikkileikkaussuureiden (10.105) määrittäminen edellyttää elementtimenetelmään perustuvaa numeerista käsittelyä. Jos poikkileikkaus on symmetrinen ja y - tai z -akseli yhtyy symmetria-akseliin, tai yleisemminkin, jos koordinaattiakselien suunnat yhtyvät poikkileikkauksen pääjähyysuuntiin, jolloin $I_{yz} = 0$, ja vääntökeskiö V on symmetria-akselilla ja sen toinen koordinaatti saadaan toisella kaavoista

$$y_V = -\frac{I_{zy}}{I_y}, z_V = \frac{I_{zy}}{I_z}.$$

(10.109)

Jos poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen, vääntökeskiö V yhtyy symmetria-akselien leikkauspisteeseen ja siten myös pintakeskiöön C.

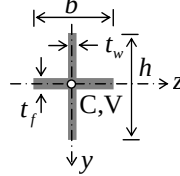
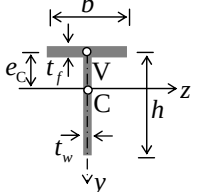
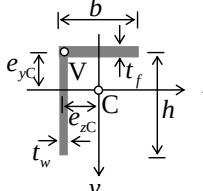
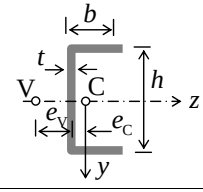
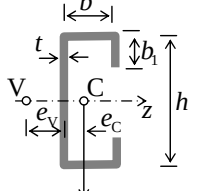
10.94 Ohutseinämäisen poikkileikkauksen vääntökeskiö

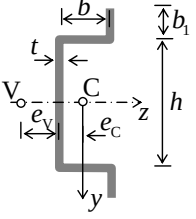
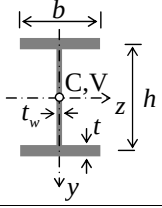
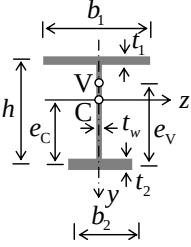
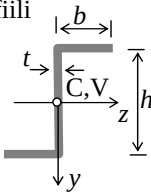
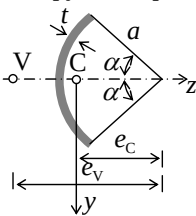
Massiivisten poikkileikkausten vääntökeskiön määrittämistä ei oppikirjoissa yleensä juurikaan käsitellä. Tämä johtuu siitä, että palkkien poikkileikkaukset ovat yleensä pystytason suhteen symmetrisiä ja niiden kuormitus on pystysuuntainen. Tällöin vääntökeskiö on symmetria-akselilla ja sen korkeusasemaa y_V ei laskelmissa tarvitse tuntea. Toinen syy on se, että massiivisten poikkileikkausten vääntökeskiö on usein hyvin lähellä pintakeskiötä, joten suurta virhettä ei tehdä, jos sen otaksutaan sijaitsevan pintakeskiössä. Ohutseinämäisten palkkien tapauksessa epäsymmetrisiä poikkileikkauksia esiintyy yleisemmin ja vääntökeskiön voi sijaita kaukana pintakeskiöstä. Näin vääntökeskiön aseman tunteminen on erityisen tärkeää.

Myös ohutseinämäisten sauvojen vääntökeskiö voidaan määrittää ylläesitettyjä yhtälöitä ja numeerisia menetelmiä hyväksi käyttäen. Näin ei kuitenkaan perinteisesti ole menetelty, vaan systemaattinen analyttinen menettely ohutseinämäisten poikkileikkausten vääntökeskiön määrittämiseksi saadaan ohutseinämäisten sauvojen ns. osittain estetyn väännön teorian sivutuotteena. Tämä teoria on tärkeä erityisesti teräsrakenteiden suunnittelussa ja siksi sitä on perinteisesti käsitelty rakenteiden mekaniikan pidemmälle menevissä kursseissa.

Taulukossa 10.2 on esitetty taivutuksen ja vapaan väännön poikkileikkaussuureita ohutseinämäisille poikkileikkauksille. Siinä on esitetty myös vääntökeskiön asema.

Taukukko 10.2: Ohutseinämäisen avoimen poikkipinnan poikkileikkaussuureita

Poikkileikkaus	Poikkileikkaussuureita
1. + -profiili 	$I_y = \frac{t_f b^3}{12}, I_z = \frac{t_w h^3}{12}$ $I_t = \frac{1}{3}(b t_f^3 + h t_w^3)$
2. T-profiili 	$e_C = \frac{1}{2} \frac{t_w h^2}{t_w h + t_f b}$ $I_y = \frac{t_f b^3}{12}, I_z = \frac{t_w h^3}{12} + t_f b e_C^2$ $I_t = \frac{1}{3}(b t_f^3 + h t_w^3)$
3. Γ -profiili 	$e_{yC} = \frac{1}{2} \frac{t_w h^2}{t_w h + t_f b}, e_{zC} = \frac{1}{2} \frac{t_f b^2}{t_w h + t_f b}$ $I_y = \frac{t_f b^3}{12} + t_w h e_{zC}^2, I_z = \frac{t_w h^3}{12} + t_f b e_{yC}^2$ $I_{yz} = -t_f b e_{yC} \left(\frac{b}{2} - e_{zC} \right) - t_w h \left(\frac{h}{2} - e_{yC} \right) e_{zC}, I_t = \frac{1}{3}(b t_f^3 + h t_w^3)$
4. [-profiili 	$e_C = \frac{b^2}{h + 2b}, e_V = \frac{3b^2}{h + 6b}$ $I_y = \frac{t b^3}{6} + 2b t \cdot \left(\frac{b}{2} - e_C \right)^2 + t h e_C^2, I_z = \frac{t h^3}{12} + 2b t \left(\frac{h}{2} \right)^2$ $I_t = \frac{t^3}{3}(h + 2b)$
5. C-profiili 	$e_C = \frac{b^2 + 2b b_1}{h + 2b + 2b_1}, e_V = b \frac{3h^2 b + 6h^2 b_1 - 8b_1^3}{h^3 + 6h^2 b + 6h^2 b_1 + 8b_1^3 - 12h b_1^2}$ $I_y = \frac{t b^3}{6} + 2b t \cdot \left(\frac{b}{2} - e_C \right)^2 + t h e_C^2 + 2t b_1 (b - e_C)^2$ $I_z = \frac{t h^3}{12} + \frac{t b_1^3}{6} + 2t b_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{b_1}{2} \right)^2 + 2t b \left(\frac{h}{2} \right)^2$ $I_t = \frac{t^3}{3}(h + 2b + 2b_1)$

Poikkileikkaus	Poikkileikkaussuureita
6. Hattuprofiili 	$e_c = \frac{b^2 + 2bb_1}{h + 2b + 2b_1}, \quad e_v = b \frac{3h^2b + 6h^2b_1 - 8b_1^3}{h^3 + 6h^2b + 6h^2b_1 + 8b_1^3 + 12hb_1^2}$ $I_y = \frac{tb^3}{6} + 2tb \cdot \left(\frac{b}{2} - e_c\right)^2 + t h e_c^2 + 2tb_1(b - e_c)^2$ $I_z = \frac{th^3}{12} + \frac{tb_1^3}{6} + 2tb_1\left(\frac{h}{2} + \frac{b_1}{2}\right)^2 + 2tb\left(\frac{h}{2}\right)^2$ $I_t = \frac{t^3}{3}(h + 2b + 2b_1)$
7. I-profiili 	$I_y = \frac{tb^3}{6}$ $I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{tbh^2}{2}$ $I_t = \frac{1}{3}(2t^3b + t_w^3h)$
8. I-profiili 	$e_c = \frac{t_w h^2 / 2 + t_1 b_1 h}{t_w h + t_1 b_1 + t_2 b_2}, \quad e_v = \frac{t_1 b_1^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3}$ $I_y = \frac{t_1 b_1^3}{12} + \frac{t_2 b_2^3}{12}$ $I_z = \frac{t_w h^3}{12} + t_w h \left(e_c - \frac{h}{2}\right)^2 + t_1 b_1 (h - e_c)^2 + t_2 b_2 e_c^2$ $I_t = \frac{1}{3}(t_1^3 b_1 + t_2^3 b_2 + t_w^3 h)$
9. Z-profiili 	$I_y = \frac{2}{3}tb^3, \quad I_z = \frac{th^3}{12} + \frac{tbh^2}{2}$ $I_{yz} = -\frac{tb^2h}{2}$ $I_t = \frac{t^3}{3}(2b + h)$
10. Ympyräkaariprofiili 	$e_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} a, \quad e_v = 2a \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ $I_y = ta^3 \left(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right)$ $I_z = ta^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$ $I_t = \frac{2}{3}t^3 a \alpha$

11. Kaareva sauva

11.1 Kinematiikkaa

Tarkastellaan kaarevaan tasosauvaan sen valitulla akselilla olevaan pisteeseen P liittyvässä napakoordinaatistossa r, θ , jonka napapiste yhtyy akselin kaarevuuskeskipisteeseen O (vrt. kuva 11.1). Olkoon $R(\theta)$ akselin kaarevuussäde pisteessä θ . Sauvan yleisen pisteen Q (r, θ) venymälle ε_θ voidaan kirjoittaa

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad (11.1)$$

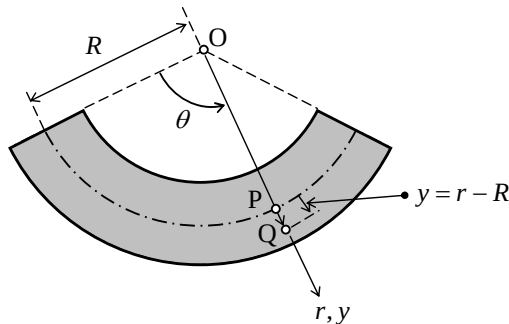
(vrt. Rakenteiden lujuusoppi, osa I, kaava (3.63)) missä siirtymäkomponentit u_r ja u_θ yhtyvät sauvan normaalin ja akselin suuntiin. Merkitään pisteestä P lähtevää akselia vastaan kohtisuoraa koordinaattia symbolilla y . Ottamalla huomioon, että $r = R + y$, saadaan venymä muotoon

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R+y} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad (11.2)$$

Tehdään siirtymäkomponenteille u_r ja u_θ tyypillinen teknillisen taivutusteorian mukainen otaksumat

$$u_\theta(\theta, y) = u(\theta) - \varphi(\theta)y, \quad u_r(\theta, y) = v(\theta), \quad (11.3)$$

jolloin venymän lauseke (11.2) saa muodon



Kuva 11.1: Kaareva tasosauva

$$\varepsilon_\theta(y) = \frac{R}{R+y} (\varepsilon + \kappa y) \quad (11.4)$$

missä

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\theta} + v \right), \quad \kappa = -\frac{1}{R} \frac{d\varphi}{d\theta} \quad (11.5)$$

ovat sauvan akselin venymä ja käyristymä. Kaavoissa (11.4) ja (11.5) tarkastellaan tiettyä kulmaa θ vastaavaa poikkileikkausta ja riippuvuus muuttujasta θ on jätetty merkitsemättä.

11.2 Kaarevan sauvan normaalijännitys

Venymää ε_θ vastaavalle normaalijännitykselle $\sigma = \sigma_\theta$ saadaan Hooken lain perusteella

$$\sigma = E\varepsilon_\theta = \frac{ER}{R+y} (\varepsilon + \kappa y). \quad (11.6)$$

Tarkasteltavan poikkileikkauksen normaalivoimalle ja taivutusmomentille saadaan nyt

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = \int_A \frac{ER}{R+y} (\varepsilon + \kappa y) dA = E \left(\int_A \frac{R}{R+y} dA \cdot \varepsilon + \int_A \frac{Ry}{R+y} dA \cdot \kappa \right) \\ &= EA'\varepsilon + S'\kappa \end{aligned} \quad (11.7)$$

ja

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma y dA = \int_A \frac{ERY}{R+y} (\varepsilon + \kappa y) dA = E \left(\int_A \frac{Ry}{R+y} dA \cdot \varepsilon + \int_A \frac{Ry^2}{R+y} dA \cdot \kappa \right) \\ &= ES'\varepsilon + EI'\kappa \end{aligned} \quad (11.8)$$

Missä suureita

$$A' = \int_A \frac{R}{R+y} dA, \quad S' = \int_A \frac{Ry}{R+y} dA, \quad I' = \int_A \frac{Ry^2}{R+y} dA \quad (11.9)$$

kutsutaan tässä **kaarevan sauvan poikkileikkauksen yleistetyiksi** pinta-alaksi, staattiseksi momentiksi ja jäyhyysmomentiksi.

Asetetaan nyt poikkileikkauskoordinaatisto y, z siten, että poikkileikkauksen yleistetty staattinen momentti S' häviää, ja kutsutaan koordinaatiston origoa poikkileikkauksen yleistetyksi pintakeskiöksi C' . Tällöin saadaan

$$S' \equiv \int_A \frac{Ry}{R+y} dA = 0 \Rightarrow \int_A \left(R - \frac{R^2}{R+y} \right) dA = 0 \Rightarrow \int_A dA = R \int_A \frac{dA}{R+y} \quad (11.9)$$

$$\Rightarrow A = A'$$

Näin valitussa koordinaatistossa poikkileikkauksen yleistetty pinta-ala A' on yhtäsuuri kuin sen todellinen pinta-ala A ja tästä yhtäsuuruudesta seuraa yleistetyn pintakeskiön C' etäisyydelle kaarevuuskeskipisteestä O tulos

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{R+y}} \equiv \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}. \quad (11.10)$$

Nyt poikkileikkauksen normaalivoiman ja akselin venymän sekä taivutusmomentin ja käyrityksen yhteyksiksi saadaan

$$N = EA\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA} \quad (11.11)$$

ja

$$M' = EI'\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M'}{EI'}. \quad (11.12)$$

Tässä poikkileikkauksen yleistetyn pintakeskiön O' kautta kulkevan akselin suhteen määritetylle taivutusmomentille on käytetty merkintää M' , jotta se eroaisi pintakeskiön O kautta kulkevan akselin suhteen määritetystä taivutusmomentista M . Sijoittamalla tulokset (11.11) ja (11.12) normaalijännityksen lausekkeeseen (11.6) saadaan poikkileikkauksen normaalijännitykselle

$$\sigma = \frac{R}{R+y} \left(\frac{N}{A} \varepsilon + \frac{M'}{I'} y \right). \quad (11.13)$$

Poikkipinnan yleistetty jähyysmomentti voidaan vielä ilmaista tavanomaisten poikkileikkaussuureiden avulla seuraavasti

$$I' = \int_A \frac{Ry^2}{R+y} dA = \int_A Ry \frac{y}{R+y} dA = R \int_A \left(y - \frac{Ry}{R+y} \right) dA \quad (11.14)$$

$$= R \left(\int_A y dA - \int_A \frac{Ry}{R+y} dA \right) = R(S - S') = RS,$$

missä S on poikkipinnan tavanomainen staattinen momentti poikkipinnan yleistetyn pintakeskiön kautta kulkevan akselin (z -akselin) suhteen. Koska sille voidaan kirjoittaa $S = y_c A$, missä y_c on poikkipinnan todellisen pintakeskiön y -koordinaatti, saadaan poikkipinnan yleistetylle jähyysmomentille yksinkertainen tulos

$$I' = ARy_c. \quad (11.15)$$

Näin normaalijännityksen lauseke voidaan vielä esittää muodossa

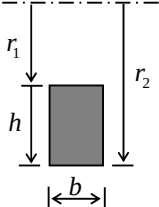
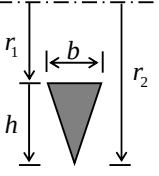
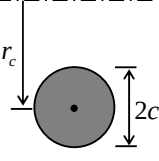
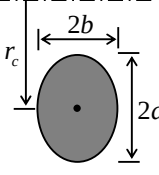
$$\sigma = \frac{R}{R+y} \left(\frac{N}{A} + \frac{M'}{ARy_c} y \right) \quad (11.16)$$

Jos kysymyksessä on puhdas taivutus ($N = 0$, $M' = M$) normaalijännityksen kaava saa muodon

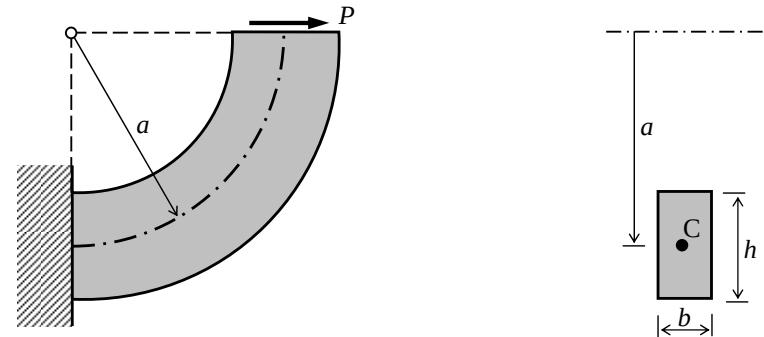
$$\sigma = \frac{y}{R+y} \frac{M}{Ay_c} = \frac{M}{Ay_c} \frac{y}{r} \quad (11.17)$$

Kaarevan poikkipinnan analysoinnissa tarvittava uusi geometrinen suure on integraali $\int_A dA/r$. Sen arvoja eräille poikkileikkauksille on esitetty taulukossa 11.1.

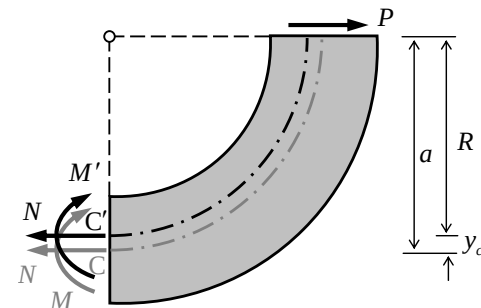
Taulukko 11.1: Integraalin $\int_A \frac{dA}{r}$ arvoja eri poikkipinnoille

Poikkipinta	A	$\int_A \frac{dA}{r}$
	bh	$b \ln \frac{r_2}{r_1}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{br_2}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - b$
	πc^2	$2\pi(r_c - \sqrt{r_c^2 - c^2})$
	πab	$2\pi \frac{b}{a} (r_c - \sqrt{r_c^2 - a^2})$

Esimerkki 11.1: Tarkastellaan kuvan kaarevaa ulokesauvaa sauvaa, jonka poikkileikkaus on suorakaide ja jota kuormittaa pistekuorma P. Määritetään sen normaalijännityksen jakautuma tuella, kun (a) $a = 2h$ ja (b) $a = h$.



Ratkaisu:



Leikkausrasitukset tuella:

Tavanomaiset (ei tarvita tässä):

$$\rightarrow -N + P = 0 \Rightarrow N = P$$

$$C \quad M + Pa = 0 \Rightarrow M = -Pa$$

Yleistettyyn pintakeskiöön redusoidut leikkausrasitukset:

$$\rightarrow -N + P = 0 \Rightarrow N = P$$

$$C \quad M' + PR = 0 \Rightarrow M' = -PR$$

Yleistetyn pintakeskiön etäisyys kaarevuuskeskipisteestä ja pintakeskiön y-koordinaatti:

(a) $a = 2h$:

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{b \ln \frac{a + \frac{h}{2}}{a - \frac{h}{2}}} = \frac{h}{\ln \frac{2h + \frac{h}{2}}{2h - \frac{h}{2}}} = \frac{h}{\ln \frac{5}{3}} = 1,95762h$$

$$y_c = a - R = 2h - 1,95762h = 0,04238h$$

(b) $a = h$:

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{b \ln \frac{a + \frac{h}{2}}{a - \frac{h}{2}}} = \frac{bh}{\ln \frac{h + \frac{h}{2}}{h - \frac{h}{2}}} = \frac{h}{\ln 3} = 0,91024h$$

$$y_c = a - R = h - 0,91024h = 0,08976h$$

Normaalijännitys:

$$\sigma = \frac{R}{R+y} \left(\frac{N}{A} + \frac{M'}{ARy_c} y \right) = \frac{R}{R+y} \left(\frac{P}{A} + \frac{-PR}{ARy_c} y \right) = \frac{R}{R+y} \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{y}{y_c} \right)$$

(a) $a = 2h$:

$$\sigma = \frac{R}{R+y} \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{y}{y_c} \right) = \frac{1,95762}{1,95762 + \frac{y}{h}} \left(1 - \frac{1}{0,04238} \frac{y}{h} \right) \frac{P}{bh}$$

(b) $a = h$:

$$\sigma = \frac{R}{R+y} \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{y}{y_c} \right) = \frac{0,91024}{0,91024 + \frac{y}{h}} \left(1 - \frac{1}{0,08976} \frac{y}{h} \right) \frac{P}{bh}$$

Poikkileikkauksen ylä- ja alapinnan y-koordinaatti:

(a) $a = 2h$:

$$y_{ylä} = y_c - \frac{h}{2} = -0,45762h, y_{ala} = y_c + \frac{h}{2} = 0,54238h$$

(b) $a = h$:

$$y_{ylä} = y_c - \frac{h}{2} = -0,41024h, y_{ala} = y_c + \frac{h}{2} = 0,58976h$$

Jännitysakaumalaskelma:

(a) $a = 2h$		(b) $a = h$	
$\frac{y}{h}$	$\frac{\sigma bh}{P}$	$\frac{y}{h}$	$\frac{\sigma bh}{P}$
-0,45762	15,40	-0,41024	10,14
-0,20762	6,60	-0,16024	3,38
0,04238	0	0,08976	0
0,29238	-5,13	0,33976	-2,03
0,54238	-9,24	0,58976	-3,38

Reunajännitykset suoran palkin teorialla (vertailun vuoksi):

(a) $a = 2h$:

$$\sigma_{ylä} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_{ylä} = \frac{P}{bh} + \frac{-Pa}{bh^3} y_{ylä} = 13 \frac{P}{bh}$$

$$\sigma_{ala} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_{ala} = \frac{P}{bh} + \frac{-Pa}{bh^3} y_{ala} = -11 \frac{P}{bh}$$

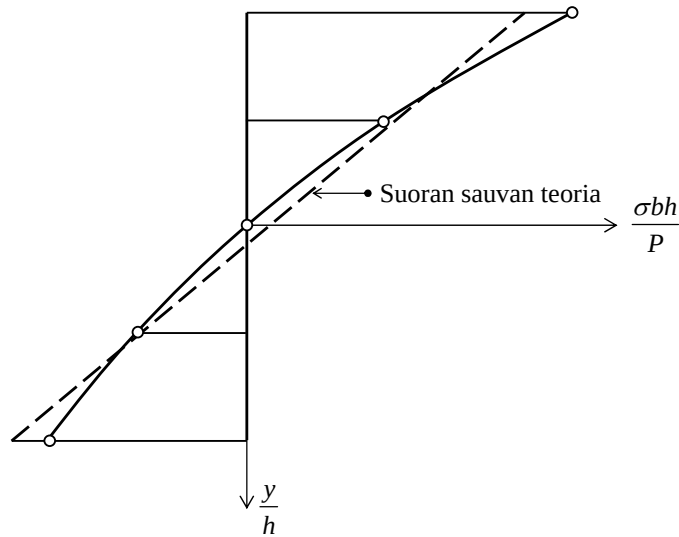
(b) $a = h$:

$$\sigma_{ylä} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_{ylä} = \frac{P}{bh} + \frac{-Pa}{bh^3} y_{ylä} = 7 \frac{P}{bh}$$

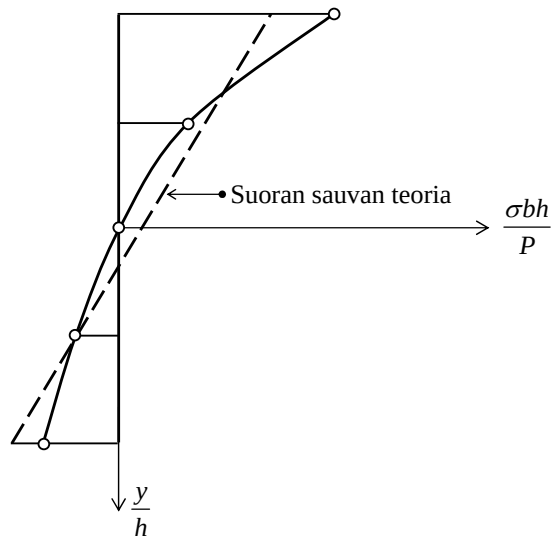
$$\sigma_{ala} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_{ala} = \frac{P}{bh} + \frac{-Pa}{bh^3} y_{ala} = -5 \frac{P}{bh}$$

Jännitysjaakauma:

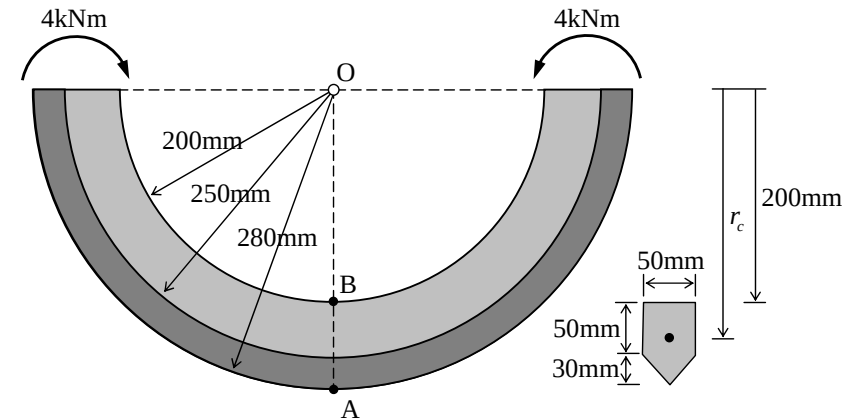
(a) $a = 2h$:



(b) $a = h$:



Esimerkki 11.2: Kaarevaan sauvaan, jonka poikkileikkaus on kuvan mukainen vaikuttaa 4kNm suuruinen taivutusmomentti. Määritetään suurin ja pienin sauvassa vaikuttava normaalijännitys.



Ratkaisu:

Taivutusmomentti:

$$M - 4\text{kNm} = 0 \Rightarrow M = 4\text{kNm}$$

Taivutusmomentti on siis sauvan kaikissa poikkileikkauksissa vakio.

Poikkileikkauksen ominaisuuksia:

Pinta-ala:

$$A_1 = 50 \cdot 50 = 2500\text{mm}^2, A_2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 30 = 750\text{mm}^2, A = A_1 + A_2 = 3250\text{mm}^2$$

Pintakeskiön etäisyys kaarevuuskeskipisteestä:

$$r_c = \frac{A_1 r_1 + A_2 r_2}{A} = \frac{2500 \cdot 225 + 750 \cdot 260}{3250} = 233,08\text{mm}$$

Integraali $\int_A dA/r$:

$$\int_{A_1} \frac{dA}{r} = 50 \cdot \ln \frac{250}{200} = 11,157 \text{ mm}, \quad \int_{A_2} \frac{dA}{r} = \frac{50 \cdot 280}{30} \ln \frac{280}{250} - 50 = 2,887 \text{ mm}$$

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int_{A_1} \frac{dA}{r} + \int_{A_2} \frac{dA}{r} = 11,157 \text{ mm} + 2,887 \text{ mm} = 14,044 \text{ mm}$$

Poikkileikkauksen yleistetyn pintakeskiön etäisyys kaarevuuskeskipisteestä:

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{3250 \text{ mm}^2}{14,044 \text{ mm}} = 231,42 \text{ mm}$$

Normaalijännitys pisteessä A:

$$y_A = r_A - R = 280 \text{ mm} - 231,42 \text{ mm} = 48,58 \text{ mm},$$

$$y_c = r_c - R = 233,08 \text{ mm} - 231,42 \text{ mm} = 1,66 \text{ mm}$$

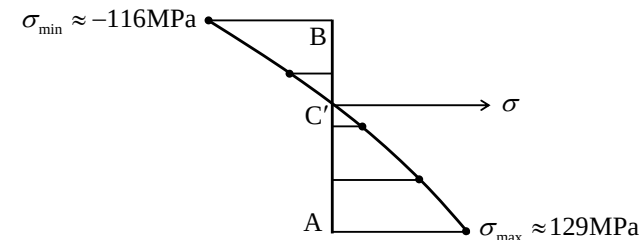
$$\sigma_A = \frac{y_A}{r_A} \frac{M}{Ay_c} = \frac{48,58 \text{ mm}}{280 \text{ mm}} \frac{4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{3250 \text{ mm}^2 \cdot 1,66 \text{ mm}} \approx 129 \text{ MPa} = \sigma_{\max}$$

Normaalijännitys pisteessä B:

$$y_B = r_B - R = 200 \text{ mm} - 231,42 \text{ mm} = -31,42 \text{ mm}$$

$$\sigma_B = \frac{y_B}{r_B} \frac{M}{Ay_c} = \frac{-31,42 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} \frac{4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{3250 \text{ mm}^2 \cdot 1,66 \text{ mm}} \approx -116 \text{ MPa} = \sigma_{\min}$$

Jännitysjakama:



11.5 Hoikka kaareva sauva

Usein rakennustekniikassa kaareva sauva on **hoikka**, eli sen korkeus h on pieni verrattuna kaarevuussäteeseen R . Käytännössä, jos $R > 5h$, voidaan otaksua, että $h/R \ll 1$, jolloin myös $y/R \ll 1$. Tällöin sauvan yleistetyt poikkileikkaussuureet (11.9) yhtyvät todellisiin poikkileikkaussuureisiin A , S ja I sekä poikkileikkauksen yleistetty pintakeskiö C' sen todelliseen pintakeskiöön C . Tässä tapauksessa päädytään siis siihen, että staattisesti määrätyn kaarevan sauvan **jännitystilän määrittäminen** tapahtuu täysin samaan tapaan kuin **suoran sauvan**. Kaarevan sauvan siirtymien määrittäminen on kuitenkin suoran sauvan käsittelyyn nähden erilaista. Tehokkaimmat keinot kaarevan sauvan siirtymien määrittämiseen perustuvat rakenteiden mekaniikan energiamenetelmiin, joita käsitellään Rakenteiden mekaniikka I kurssissa.