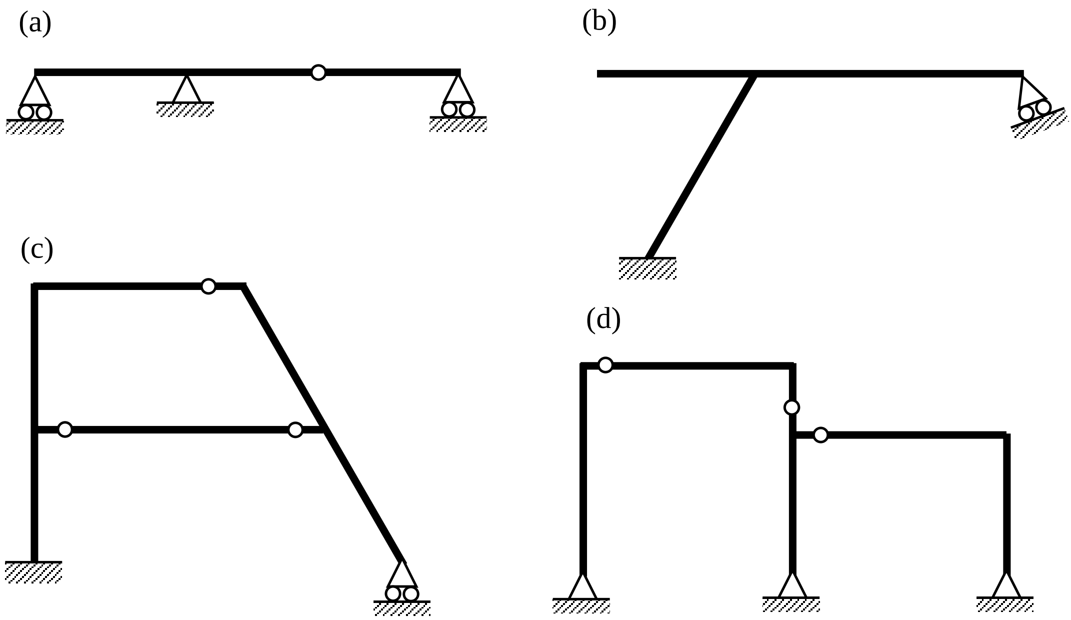
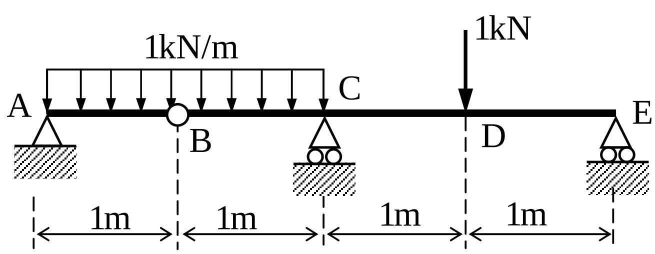
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 1:

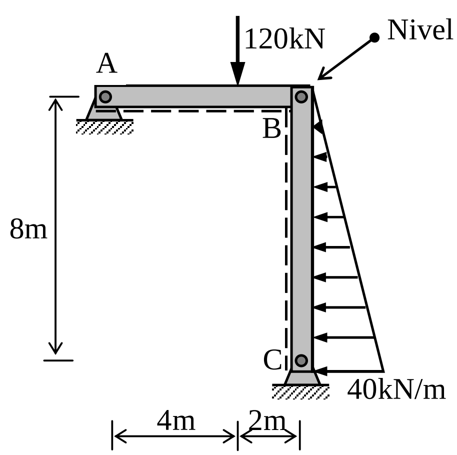
1. Määritä oheisten rakenteiden staattisen määräämättömyyden kertaluku.



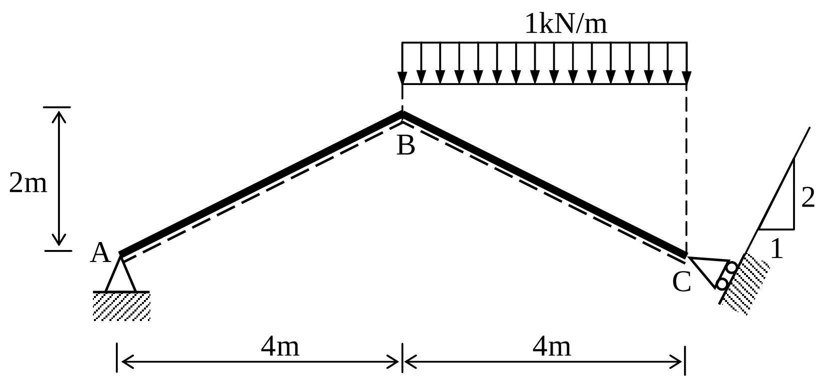
2. Määritä oheisen nivelpalkin *Q*- ja *M*-kuviot.



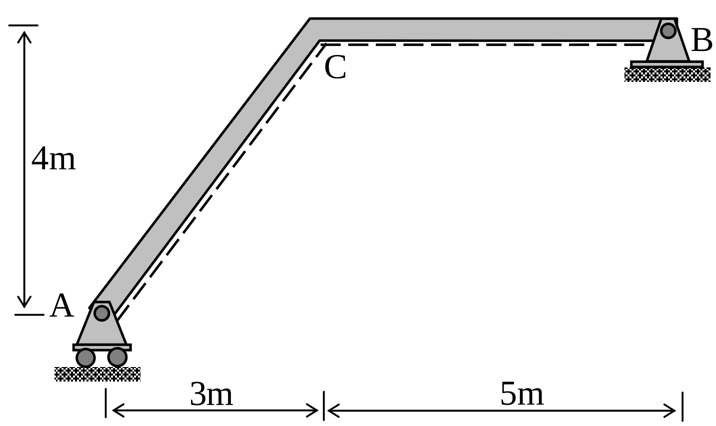
3. Määritä oheisen tasokehän *N*-, *Q*- ja *M*-kuviot.



4. Oheisen tasokehän toista sauvaa kuormittaa vaakatason pituutta kohti tasan jakautunut lumikuorma 1kN/m. Määritä *N*-, *Q*- ja *M*-kuviot.



5. Oheisen kehän sauvojen oma paino sauvan pituutta kohti on 2kN/m. Määritä kehän omasta painosta aiheutuvat normaalivoima-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot sekä taivutusmomentin maksimiarvo.

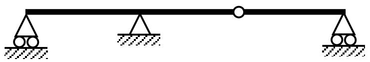


Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 1, ratkaisut

1.

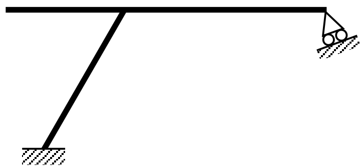
(a)



$t=4,\ r=0,\ c=1$

$n_s = t+3r-c-3 = 4+3\cdot 0-1-3 = \underline{\underline{0}}$, Staattisesti määrätty

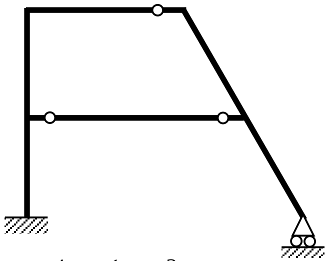
(b)



$t=4,\ r=0,\ c=0$

$n_s = t+3r-c-3 = 4+3\cdot 0-0-3 = \underline{\underline{1}}$

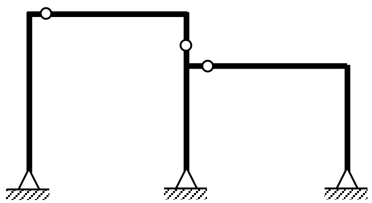
(c)



$t=4,\ r=1,\ c=3$

$n_s = t+3r-c-3 = 4+3\cdot 1-3-3 = \underline{\underline{1}}$

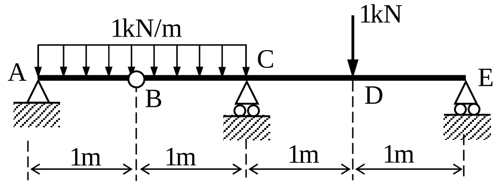
(d)



$t=6,\ r=0,\ c=3$

$n_s = t+3r-c-3 = 6+3\cdot 0-3-3 = \underline{\underline{0}}$, Staattisesti määrätty

2.

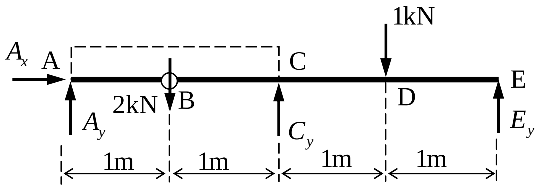


Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$n_s = t+3r-c-3 = 4+3\cdot 0-1-3 = 0 \ \Rightarrow$ Staattisesti määrätty.

Tukireaktiot:

Koko rakenteen VKK:



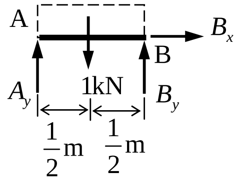
$\rightarrow\ \ \underline{A_x = 0}$

E $\ -A_y\cdot 4\text{m}+2\text{kN}\cdot 3\text{m}-C_y\cdot 2\text{m}+1\text{kN}\cdot 1\text{m}=0 \ \Rightarrow\ C_y=-2A_y+\frac{7}{2}\text{kN}$

C $\ -A_y\cdot 2\text{m}+2\text{kN}\cdot 1\text{m}-1\text{kN}\cdot 1\text{m}+E_y\cdot 2\text{m}=0 \ \Rightarrow\ E_y=A_y-\frac{1}{2}\text{kN}$

Saatiin kolme yhtälöä neljän tukireaktion määrittämiseksi. Lisäyhtälö saadaan tarkastelemalla rakenteen vasemman (tai oikean) puoleisen osan tasapainoa:

Osan AB VKK:



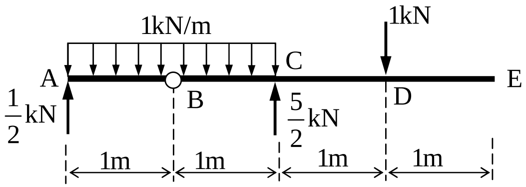
Momenttitasapainoyhtälö nivelpisteen B suhteen:

B $\ -A_y\cdot 1\text{m}+1\text{kN}\cdot\frac{1}{2}\text{m}=0 \ \Rightarrow\ \underline{A_y=\frac{1}{2}\text{kN}}$

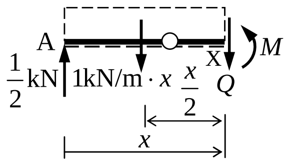
$C_y=-2\cdot\frac{1}{2}\text{kN}+\frac{7}{2}\text{kN}=\underline{\frac{5}{2}}\text{kN},\quad E_y=\frac{1}{2}\text{kN}-\frac{1}{2}\text{kN}=\underline{0}$

Leikkausrasitukset:

Koko rakenteen vapaakappalekuvio, jonka tukireaktiot tunnetaan:



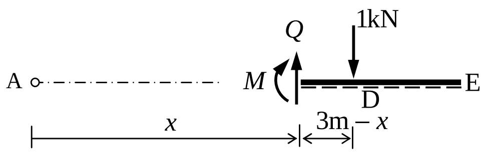
Väli AC:



$$\downarrow \quad -\frac{1}{2}\text{kN} + 1\text{kN/m}\cdot x + Q = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q = \frac{1}{2}\text{kN} - 1\text{kN/m}\cdot x}$$

$$\text{X}\circlearrowleft \; M - \frac{1}{2}\text{kN}\cdot x + 1\text{kN/m}\cdot x\cdot\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{M = \frac{1}{2}\text{kN}\cdot x - \frac{1}{2}\text{kN/m}\cdot x^2}$$

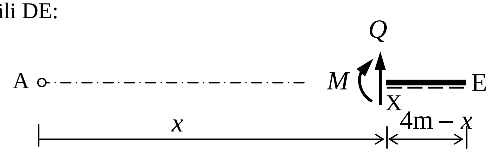
Väli CD:



$$\uparrow \quad Q - 1\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q = 1\text{kN}}$$

$$\text{X}\circlearrowright \; M + 1\text{kN}\cdot(3\text{m} - x) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{M = -1\text{kN}\cdot(3\text{m} - x)}$$

Väli DE:

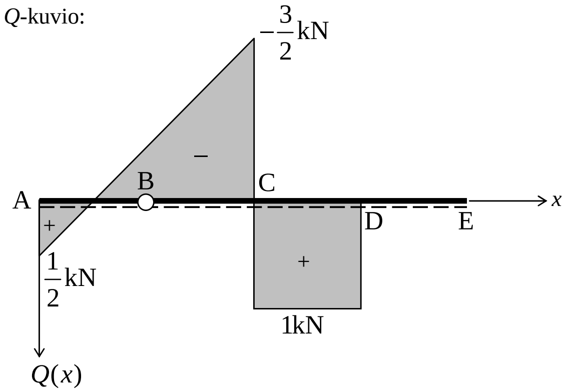


$$\uparrow \quad \underline{Q = 0}$$

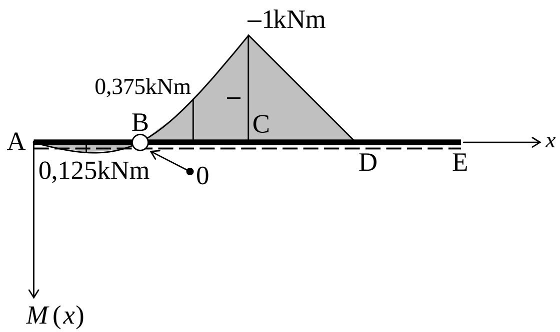
$$\text{X}\circlearrowright \; \underline{M = 0}$$

Rasituskuviot:

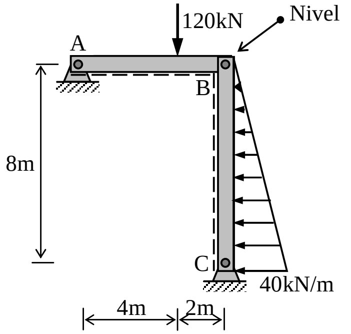
Q-kuvio:



M-kuvio:



3.



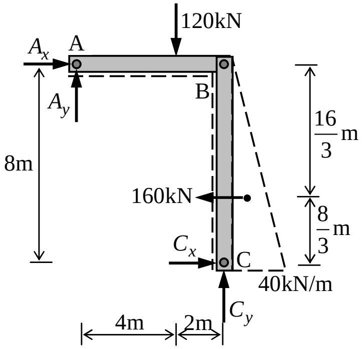
<u>Staattisen määräämättömyyden kertaluku:</u>

$n_s = t + 3r - c - 3 = 4 + 3\cdot 0 - 1 - 3 = 0,$ Staattisesti määrätty.

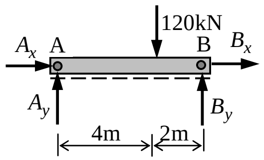
<u>Tukireaktiot:</u>

Kysymyksessä on yksinkertainen kolminivelkehä. Tukireaktiot (4 kpl) saadaan kirjoittamalla koko kehän ABC tasapainoyhtälöt (3 kpl) sekä toisen niveleen B liittyvän rakenteen osan (esim. AB) momenttitasapainoyhtälö (1 kpl) nivelen B suhteen.

Rakenteen VKK:



Osan AB VKK:



$B\circlearrowleft \quad -A_y\cdot 6\text{m} + 120\text{kN}\cdot 2\text{m} = 0$

$\Rightarrow \underline{A_y = 40\text{kN}}$

$\rightarrow \quad A_x + C_x - 160\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; C_x = 160\text{kN} - A_x$

$\uparrow \quad A_y + C_y - 120\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 120\text{kN} - A_y$

$C\circlearrowleft \quad -A_x\cdot 8\text{m} - A_y\cdot 6\text{m} + 120\text{kN}\cdot 2\text{m} + 160\text{kN}\cdot\frac{8}{3}\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -\frac{3}{4}\overbrace{A_y}^{40\text{kN}} + \frac{250}{3}\text{kN} = \underline{\frac{160}{3}\text{kN}}$

$C_x = 160\text{kN} - A_x = \underline{\frac{320}{3}\text{kN}},\; C_y = 120\text{kN} - A_y = \underline{80\text{kN}}$

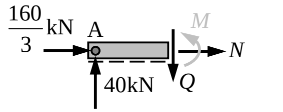
<u>Rasituskuviot:</u>

<u>Vaakasauva AB:</u>

Merkitään pistekuorman vaikutuspistettä kirjaimella D. Väleillä AD ja DB ei ole jakautunutta kuormaa, joten niillä N ja Q ovat vakioita ja M on lineaarinen. Näin riittää, kun N:n ja Q:n vakioarvot määritetään kummallakin välillä ja M:n arvot määritetään välien päissä, eli pisteissä A, D ja B.

Normaalivoima ja leikkausvoima:

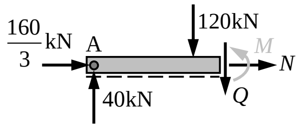
Väli AD:



$\rightarrow \quad N + \frac{160}{3}\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{N = -\frac{160}{3}\text{kN}}$

$\downarrow \quad Q - 40\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q = 40\text{kN}}$

Väli DB:

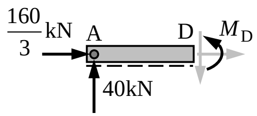


$\rightarrow \quad N + \frac{160}{3}\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{N = -\frac{160}{3}\text{kN}}$

$\downarrow \quad Q - 40\text{kN} + 120\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q = -80\text{kN}}$

Taivutusmomentti:

$\underline{M_A = 0}$ (Niveltuki)

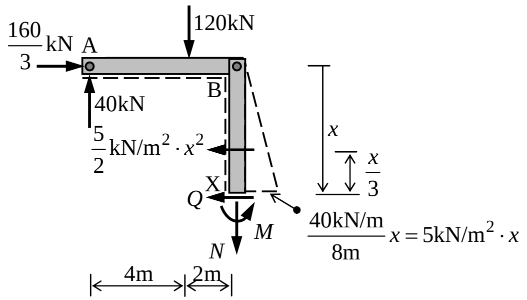


$D\circlearrowleft \quad M_D - 40\text{kN}\cdot 4\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{M_D = 160\text{kNm}}$

$\underline{M_B = 0}$ (Nivel)

Pystysauva BC:

Koska sauvaan kohdistuu lineaarinen jakautunut kuorma, valitaan muuttuja x kuvan mukaisesti ja määritetään leikkausrasitusten analyyttiset lausekkeet.



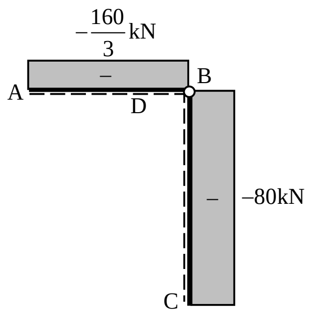
$\downarrow\; N - 40\text{kN} + 120\text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{N = -80\text{kN}}$

$\rightarrow\; -Q + \frac{160}{3}\text{kN} - \frac{5}{2}\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q = \frac{160}{3}\text{kN} - \frac{5}{2}\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot x^2}$

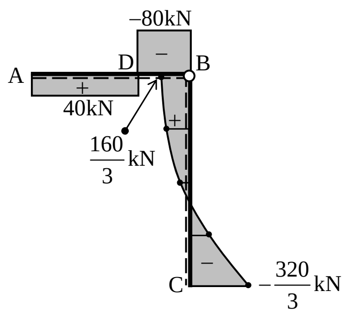
$\circlearrowleft X\; M + 120\text{kN} \cdot 2\text{m} - 40\text{kN} \cdot 6\text{m} - \frac{160}{3}\text{kN} \cdot x + \frac{5}{2}\text{kN/m}^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{3} = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{M = \frac{160}{3}\text{kN} \cdot x - \frac{5}{6}\text{kN/m}^2 \cdot x^3}$

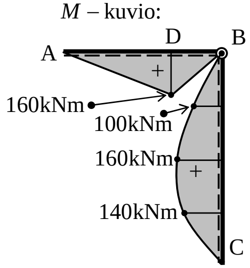
N – kuvio:



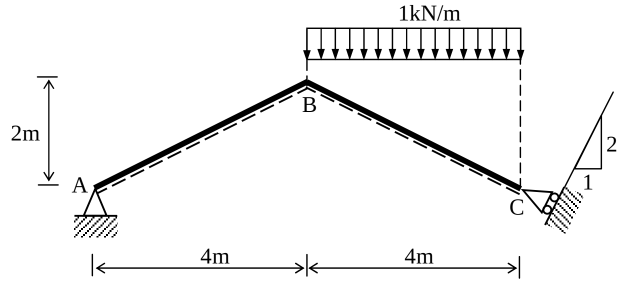
Q – kuvio:



M – kuvio:



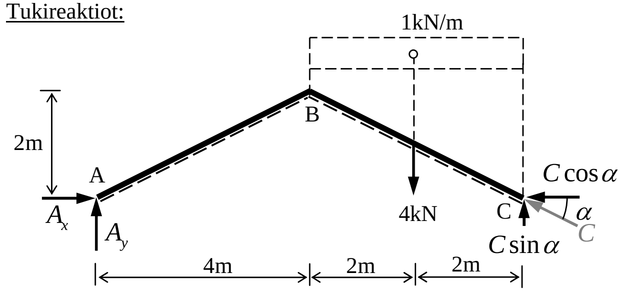
4.

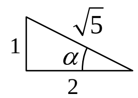


Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$n_s = t + 3r - c - 3 = 3 + 3 \cdot 0 - 0 - 3 = 0 \;\Rightarrow\;$ Staattisesti määrätty.

Tukireaktiot:





$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

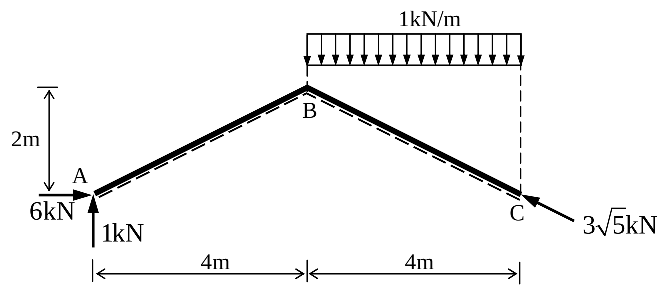
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\circlearrowleft C\; - A_y \cdot 8\text{m} + 4\text{kN} \cdot 2\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \underline{1\text{kNm}}$

$\circlearrowleft A\; C\sin\alpha \cdot 8\text{m} - 4\text{kN} \cdot 6\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{3\text{kN}}{\sin\alpha} = \underline{3\sqrt{5}\text{kN}}$

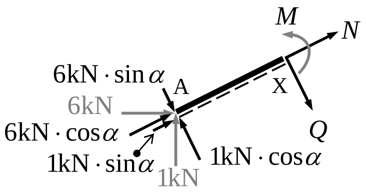
$\rightarrow\; A_x - C\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; A_x = C\cos\alpha = 3\sqrt{5}\text{kN} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{6\text{kN}}$

Koko rakenteen vapaakappalekuvio, jonka tukireaktiot tunnetaan:



Leikkausrasitukset:

Väli AB:

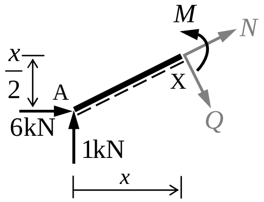


$$\nearrow\ N + 6\text{kN}\cdot\cos\alpha + 1\text{kN}\cdot\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow\ N = -\frac{13}{\sqrt{5}}\text{kN}$$

$$\searrow\ Q + 6\text{kN}\cdot\overbrace{\sin\alpha}^{1/\sqrt{5}} - 1\text{kN}\cdot\overbrace{\cos\alpha}^{2/\sqrt{5}} = 0$$

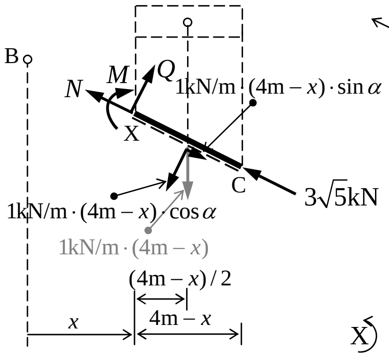
$$\Rightarrow\ Q = -\frac{4}{\sqrt{5}}\text{kN}$$



$$\circlearrowleft X\ \ M + 6\text{kN}\cdot\frac{x}{2} - 1\text{kN}\cdot x = 0$$

$$\Rightarrow\ M = -2\text{kN}\cdot x$$

Väli BC:



$$\nwarrow\ N - 1\text{kN/m}\cdot(4\text{m} - x)\cdot\sin\alpha + 3\sqrt{5}\text{kN} = 0$$

$$\Rightarrow\ N = -\frac{1}{\sqrt{5}}\text{kN/m}(11\text{m} + x)$$

$$\nearrow\ Q - 1\text{kN/m}\cdot(4\text{m} - x)\cdot\cos\alpha = 0$$

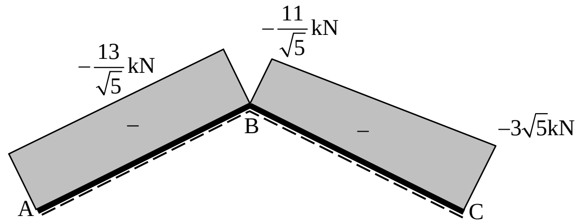
$$\Rightarrow\ Q = \frac{2}{\sqrt{5}}\text{kN/m}\cdot(4\text{m} - x)$$

$$\circlearrowleft X\ \ -M - 1\text{kN/m}\cdot(4\text{m} - x)\cdot\frac{(4\text{m} - x)}{2} = 0$$

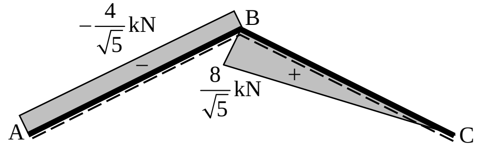
$$\Rightarrow\ M = -\frac{1}{2}\text{kN/m}\cdot(4\text{m} - x)^2$$

Rasituskuviot:

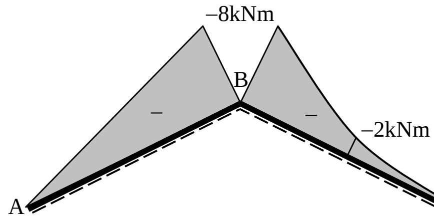
N-kuvio:



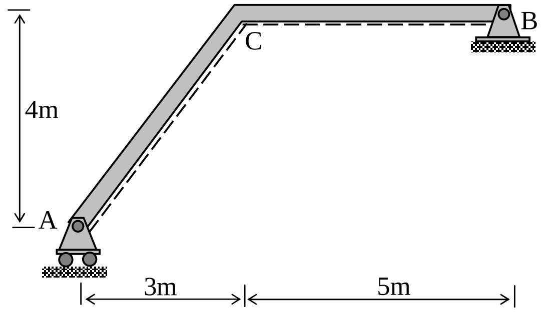
Q-kuvio:



M-kuvio:



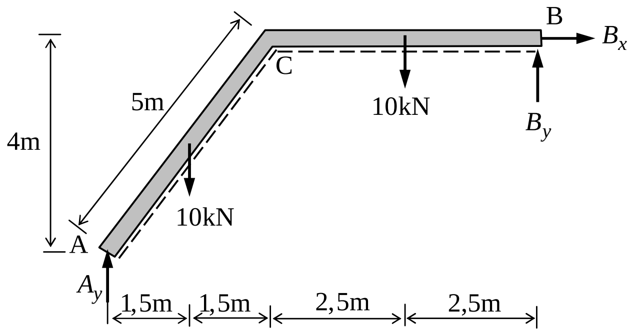
5.



Staattisen määräämättömyyden kertaluku:

$n_s = t + 3r - c - 3 = 2 + 3\cdot 0 - 0 - 3 = 0 \;\Rightarrow\;$ Staattisesti määrätty

Tukireaktiot:



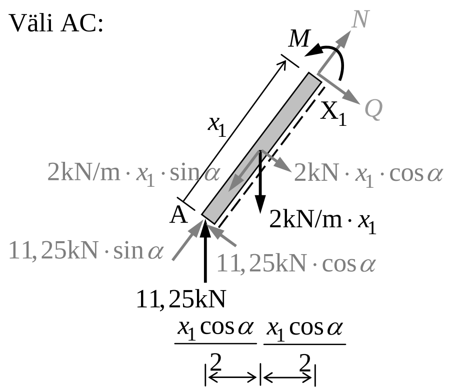
$\rightarrow \quad B_x = 0$

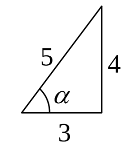
$\curvearrowleft$ B) $-A_y \cdot 8\text{m} + 10\text{kN}\cdot 6{,}5\text{m} + 10\text{kN}\cdot 2{,}5\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_y = 11{,}25\text{kN}}$

$\curvearrowleft$ A) $B_y \cdot 8\text{m} - \overbrace{B_x}^{0} \cdot 4\text{m} - 10\text{kN}\cdot 1{,}5\text{m} - 10\text{kN}\cdot 5{,}5\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{B_y = 8{,}75\text{kN}}$

Leikkausrasitukset:

Väli AC:





$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}$

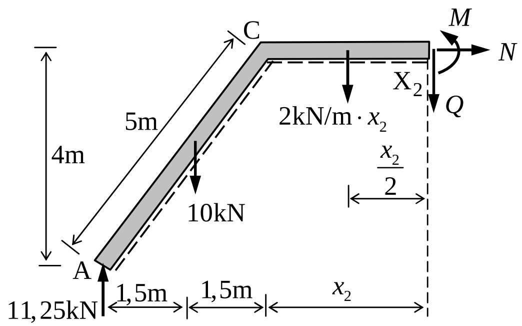
$\nearrow \; 11{,}25\text{kN}\cdot\overbrace{\sin\alpha}^{4/5} - 2\text{kN/m}\cdot x_1 \cdot \overbrace{\sin\alpha}^{4/5} + N = 0 \;\Rightarrow\; \underline{N = -9\text{kN} + 1{,}6\text{kN/m}\cdot x_1}$

$\searrow \; -11{,}25\text{kN}\cdot\overbrace{\cos\alpha}^{3/5} + 2\text{kN/m}\cdot x_1 \cdot \overbrace{\cos\alpha}^{3/5} + Q = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q = 6{,}75\text{kN} - 1{,}2\text{kN/m}\cdot x_1}$

$\curvearrowleft$ X) $-11{,}25\text{kN}\cdot x_1 \cdot \overbrace{\cos\alpha}^{3/5} + 2\text{kN/m}\cdot x_1 \cdot \frac{x_1 \overbrace{\cos\alpha}^{3/5}}{2} + M = 0$

$\Rightarrow \; \underline{M = 6{,}75\text{kN}\cdot x_1 - 0{,}6\text{kN/m}\cdot x_1^2}$

Väli CB:



$\rightarrow \quad \underline{N = 0}$

$\downarrow \quad Q + 2\text{kN/m}\cdot x_2 + 10\text{kN} - 11{,}25\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q = 1{,}25\text{kN} - 2\text{kN/m}\cdot x_2}$

$$\text{X}\; M + 2\text{kN/m}\cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} + 10\text{kN}\cdot(1{,}5 + x_2) - 11{,}25\text{kN}\cdot(3\text{m} + x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \; \underline{M = 18{,}75\text{kNm} + 1{,}25\text{kN}\cdot x_2 - 1\text{kN/m}\cdot x_2^2}$$

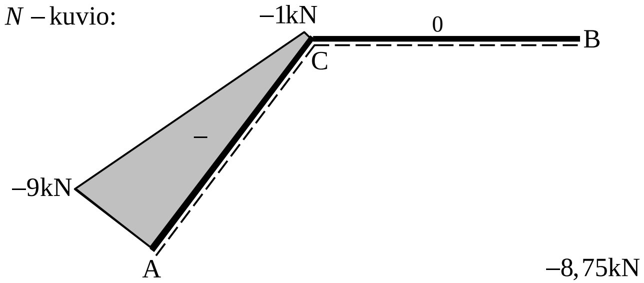
<u>Maksimi taivutusmomentti välillä CB:</u>

$$Q \equiv 1{,}25\text{kN} - 2\text{kN/m}\cdot x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{2,\max} = 0{,}625\text{m}$$

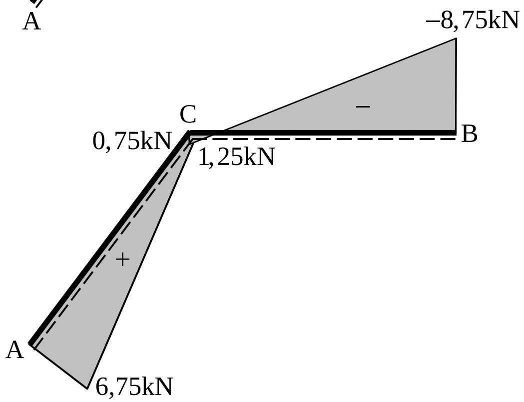
$$M_{\max} = M(x_{\max}) = 18{,}75\text{kNm} + 1{,}25\text{kN}\cdot 0{,}625\text{m} - 1\text{kN/m}\cdot(0{,}625\text{m})^2 \approx \underline{\underline{19{,}14\text{kNm}}}$$

<u>Rasituskuviot:</u>

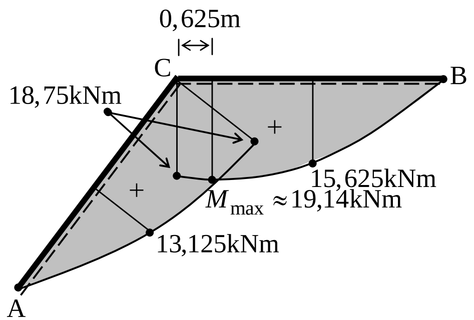
$N-$kuvio:



$Q-$kuvio:



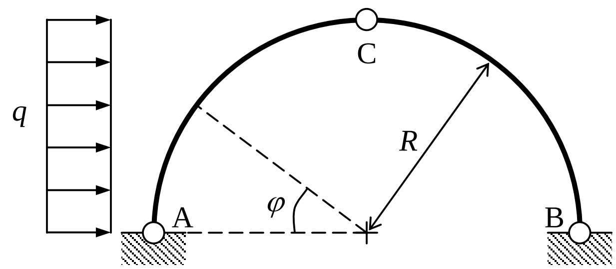
$M-$kuvio:



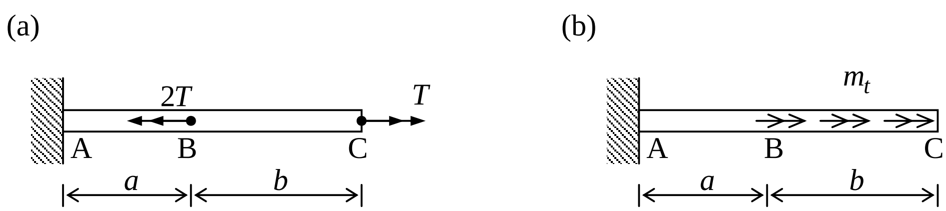
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 2:

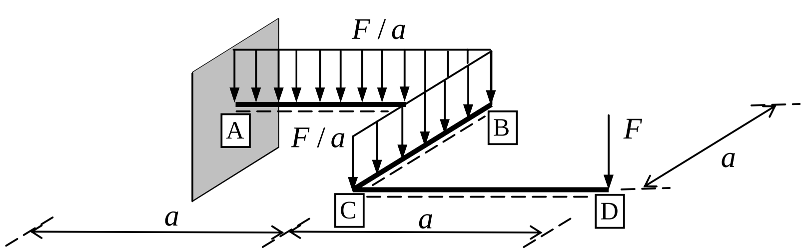
1. Määritä oheisen puoliympyränmuotoisen kolminivelkaaren normaalivoiman, leikkausvoiman ja taivutusmomentin lausekkeet kulman φ funktiona. Kaarta kuormittaa (pystysuunnan pituutta kohti) tasan jakautunut kuorma q.



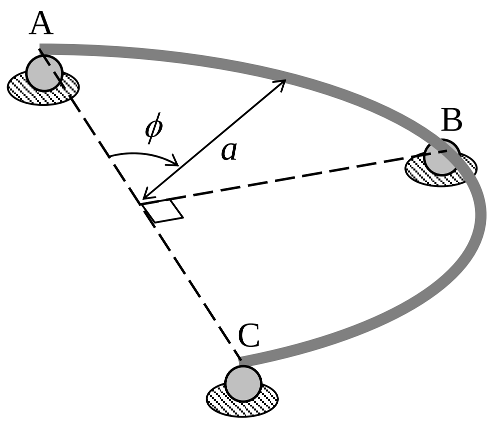
2. (a)-kohdan ulokesauvaa kuormittaa ulkoiset pistemäiset vääntömomenttikuormat pisteissä B ja C. (b)-kohdan sauvaa kuormittaa välillä BC ulkoinen tasanjakaantunut vääntömomentti m_t $(=\text{vakio})$. Määritä sauvojen vääntömomenttikuviot.

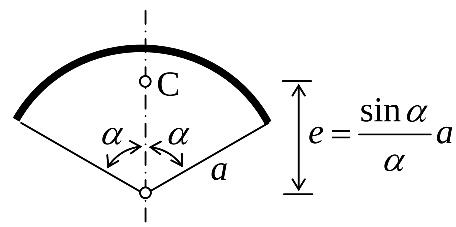


3. Määritä oheisen vaakatasossa sijaitsevan ulokkeen leikkausvoima-, taivutusmomentti- ja vääntömomenttikuviot.

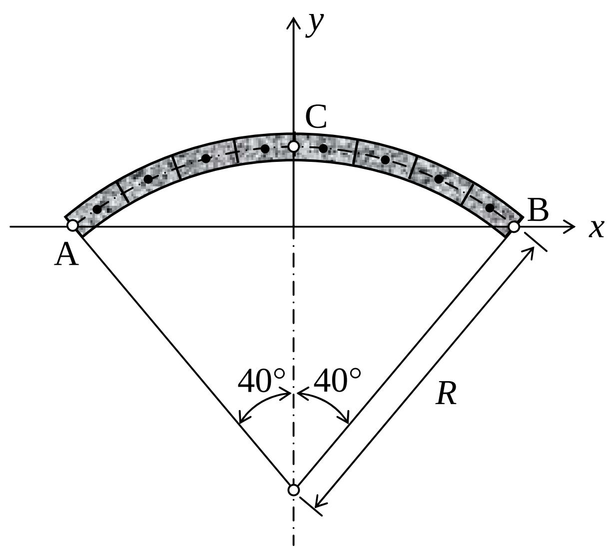


4. Oheinen vaakatasossa oleva puoliympyrän muotoinen kaari on tuettu pisteissä A, B ja C pallonivelillä siten, että pystysiirtymä on estetty. Määritä kaaren omasta painosta aiheutuvien leikkausvoiman, taivutusmomentin ja vääntömomentin lausekkeet kulman ϕ funktiona välillä AB, kun kaaren painovoima pituutta kohti on γ. Piirrä myös niiden kuvaajat. Ympyränkaaren massakeskiön asema voidaan laskea oikeanpuoleisen kuvan perusteella.





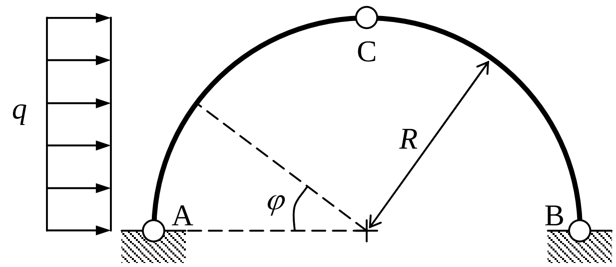
5. Oheinen ympyrän muotoinen kaari on kiveä ja se on koottu samanmuotoisiksi sahatuista osista. Määritä likimain pisteiden A, C ja B kautta kulkeva kaaren oman painon puristusviiva otaksumalla, että kunkin osan paino on keskittynyt pistekuormaksi sen akselilla olevaan keskipisteeseen. Kaaren painovoima on *G*.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 2:

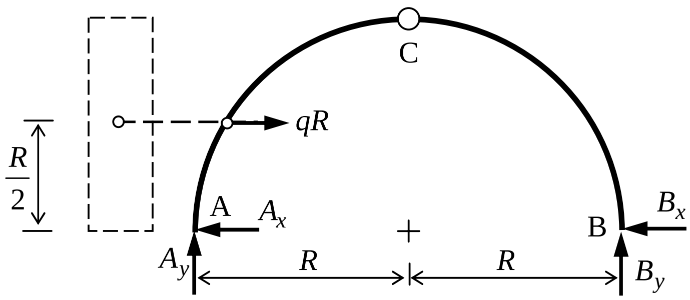
1. Määritä oheisen puoliympyränmuotoisen kolminivelkaaren normaalivoiman, leikkausvoiman ja taivutusmomentin lausekkeet kulman φ funktiona. Kaarta kuormittaa (pystysuunnan pituutta kohti) tasan jakautunut kuorma q.



Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku: $n_s = t - c - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$.

<u>Tukireaktiot:</u>



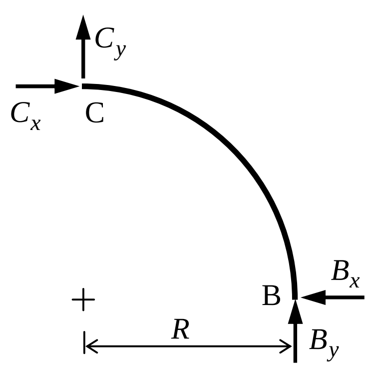
$$\text{A}\curvearrowleft \quad B_y \cdot 2R - qR \cdot \frac{R}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{B_y = \frac{qR}{4}}$$

$$\text{B}\curvearrowleft \quad -A_y \cdot 2R - qR \cdot \frac{R}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A_y = -\frac{qR}{4}}$$

$$\rightarrow \quad -A_x - B_x + qR = 0$$



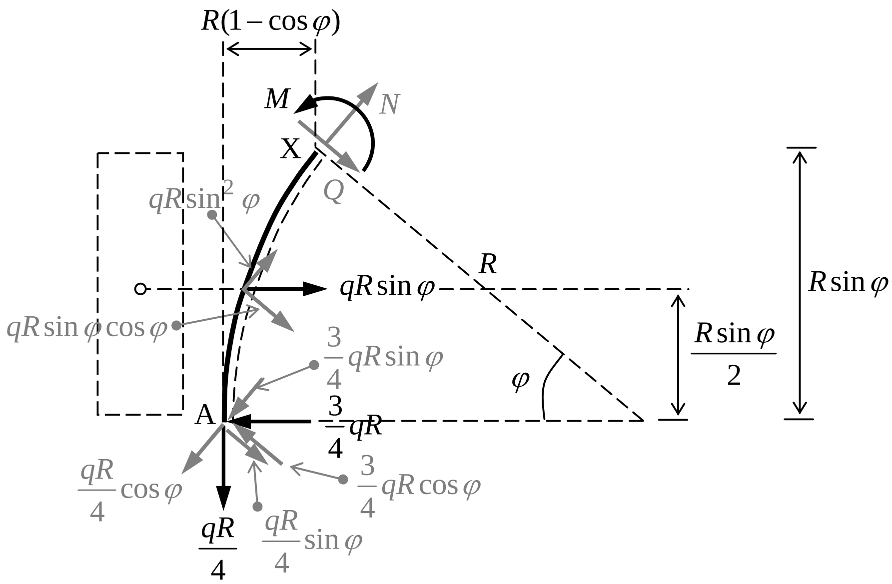
$$\text{C}\curvearrowleft \quad -B_x \cdot R + B_y \cdot R = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{B_x = B_y = \frac{qR}{4}}$$

$$\underline{A_x = qR - B_x = \frac{3}{4} qR}$$

Leikkausrasitukset:

Väli AC ($0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$), VKK:



$$\nearrow \quad N-\frac{3}{4}qR\sin\varphi-\frac{qR}{4}\cos\varphi+qR\sin^2\varphi=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{N=\frac{qR}{4}(3\sin\varphi+\cos\varphi-4\sin^2\varphi)}}$$

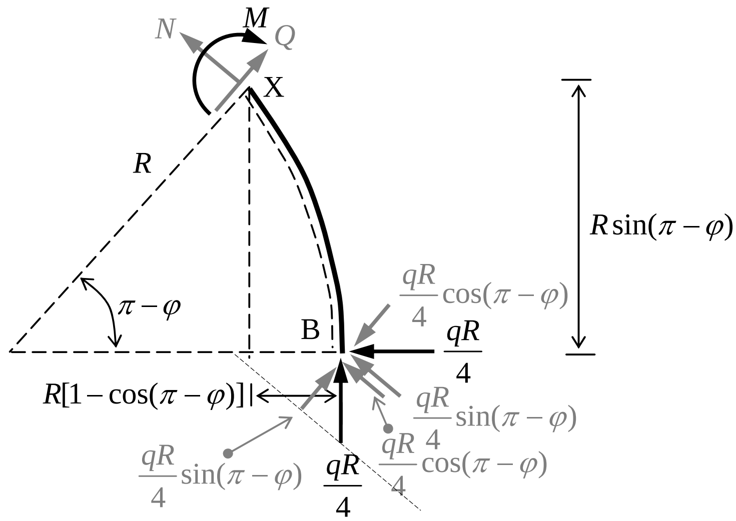
$$\searrow \quad Q-\frac{3}{4}qR\cos\varphi+\frac{qR}{4}\sin\varphi+qR\sin\varphi\cos\varphi=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{Q=\frac{qR}{4}(3\cos\varphi-\sin\varphi-4\sin\varphi\cos\varphi)}}$$

$$\mathrm{X} \quad M-\frac{3}{4}qR\cdot R\sin\varphi-\frac{qR}{4}\cdot R(1-\cos\varphi)+qR\sin\varphi\cdot\frac{R\sin\varphi}{2}=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{M=\frac{qR^2}{4}(3\sin\varphi+\cos\varphi-1-2\sin^2\varphi)}}$$

Väli CB ($\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$), VKK:



$$\nwarrow \quad N + \frac{qR}{4}\sin(\pi-\varphi) + \frac{qR}{4}\cos(\pi-\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{N = \frac{qR}{4}(\cos\varphi - \sin\varphi)}}$$

$$\nearrow \quad Q + \frac{qR}{4}\sin(\pi-\varphi) - \frac{qR}{4}\cos(\pi-\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{Q = -\frac{qR}{4}(\sin\varphi + \cos\varphi)}}$$

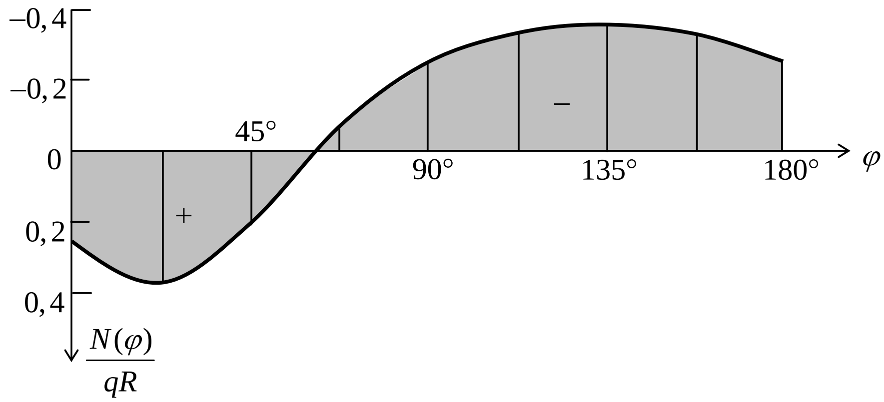
$$\text{X} \quad M + \frac{qR}{4}\cdot R\sin(\pi-\varphi) - \frac{qR}{4}\cdot R(1-\cos(\pi-\varphi)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{M = \frac{qR^2}{4}(1 - \sin\varphi + \cos\varphi)}}$$

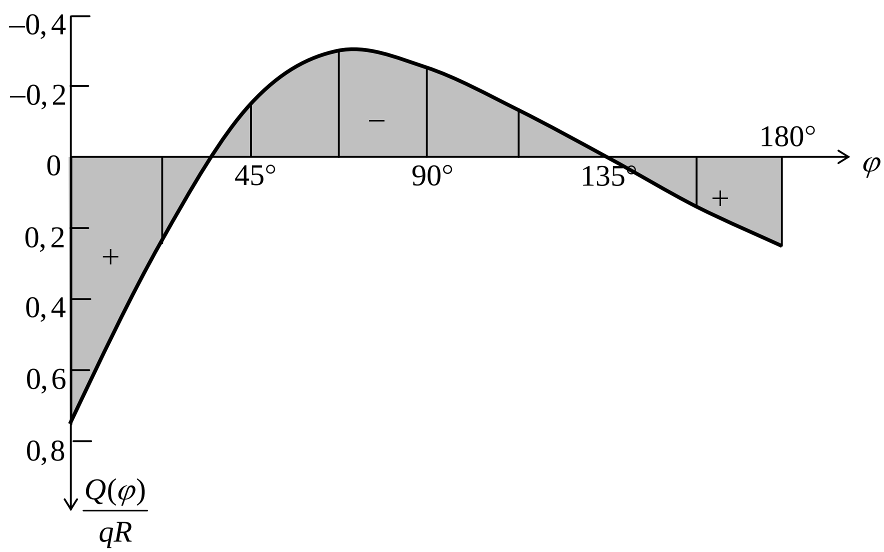
Yllä käytettiin trigonometrisiä yhteyksiä $\sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$ ja $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$.

Rasituskuviot:

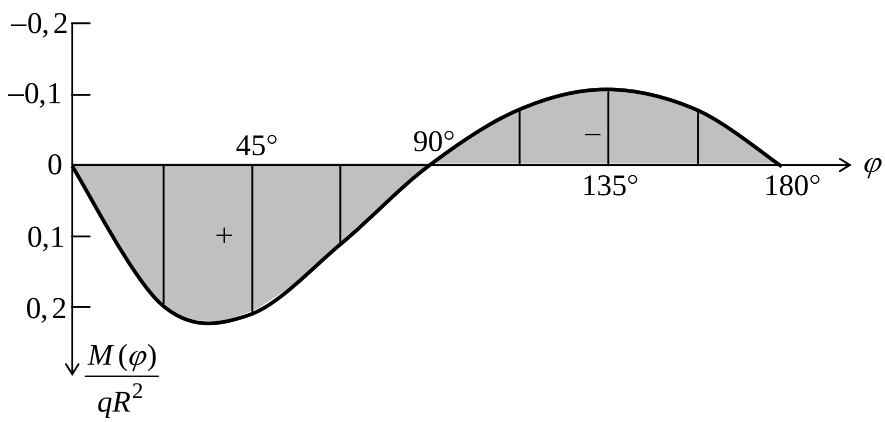
N – kuvio:



Q – kuvio:

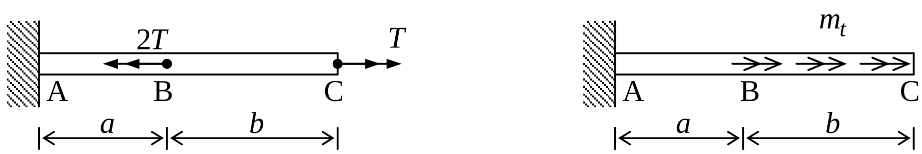


M – kuvio:



2. (a)-kohdan ulokesauvaa kuormittaa ulkoiset pistemäiset vääntömomenttikuormat pisteissä B ja C. (b)-kohdan sauvaa kuormittaa välillä BC ulkoinen tasanjakaantunut vääntömomentti $m_t \quad (=\text{vakio})$. Määritä sauvojen vääntömomenttikuviot.

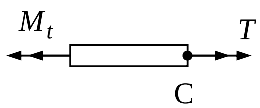
(a) (b)



Ratkaisu:

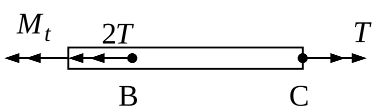
(a)

Väli BC, VKK:



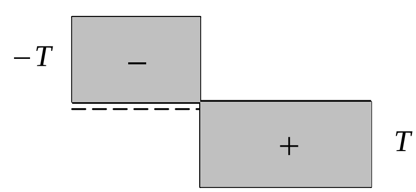
$$\twoheadleftarrow \quad M_t - T = 0 \quad \Rightarrow \quad M_t = T$$

Väli AB, VKK:



$$\twoheadleftarrow \quad M_t + 2T - T = 0 \quad \Rightarrow \quad M_t = -T$$

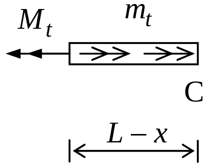
M_t – kuvio



Huom ! Pistemäisen vääntömomenttikuorman kohdalla on vääntömomenttikuviossa hyppäys ja osilla, joissa ei ole ulkoista vääntömomenttikuormaa vääntömomentti on vakio.

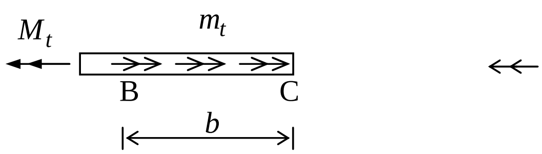
(b)

Väli BC, VKK: ($L = a + b$!)



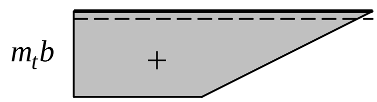
$$\twoheadleftarrow \quad M_t - m_t \cdot (L - x) = 0$$
$$\Rightarrow \quad M_t = m_t (L - x)$$

Väli AB, VKK:



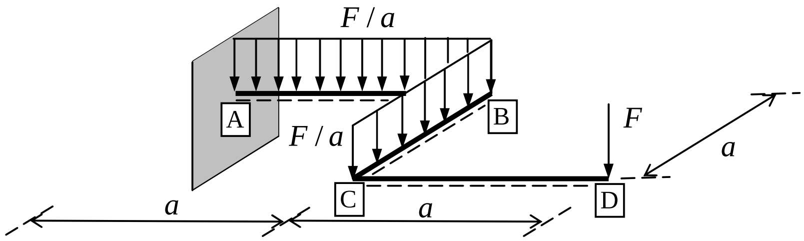
$$M_t - m_t \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad M_t = m_t b$$

M_t – kuvio



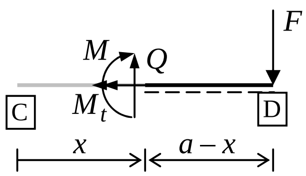
Huom ! Osalla (BC), jota kuormittaa ulkoinen tasanjakaantunut vääntömomenttikuorma muuttuu vääntömomentti lineaarisesti.

3. Määritä oheisen tasossa sijaitsevan ulokkeen leikkausvoima-, taivutusmomentti- ja vääntömomenttikuviot.



Ratkaisu:

Väli CD, VKK:

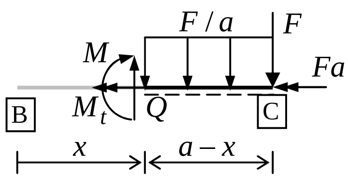


$$\uparrow \quad Q - F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = F$$

$$\circlearrowleft \quad M + F(a-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -F(a-x)$$

$$\leftleftarrows \quad M_t = 0$$

Väli BC, VKK:



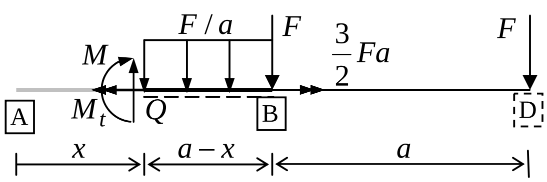
$$\uparrow \quad Q - F - \frac{F}{a}(a-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = F(2 - \frac{x}{a})$$

$$\circlearrowleft \quad M + F(a-x) + \frac{F}{a}\frac{(a-x)^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = -\frac{1}{2}F(a-x)(3 - \frac{x}{a})$$

$$\leftleftarrows \quad M_t + Fa = 0 \quad \Rightarrow \quad M_t = -Fa$$

Väli AB, VKK:



$$\uparrow \quad Q - F - F - \frac{F}{a}(a-x) = 0$$

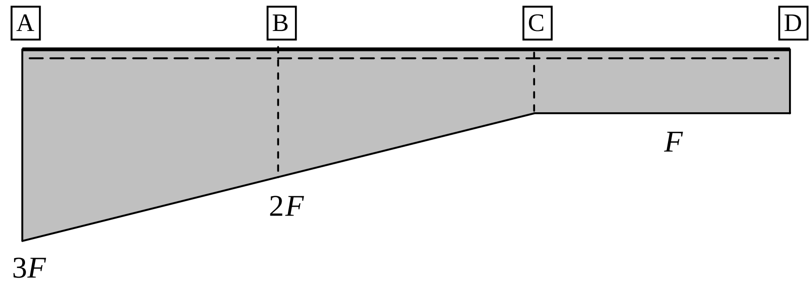
$$\Rightarrow \quad Q = F(3 - \frac{x}{a})$$

$$\circlearrowleft \quad M + F(a-x) + F(2a-x) + \frac{F}{a}\frac{(a-x)^2}{2}$$

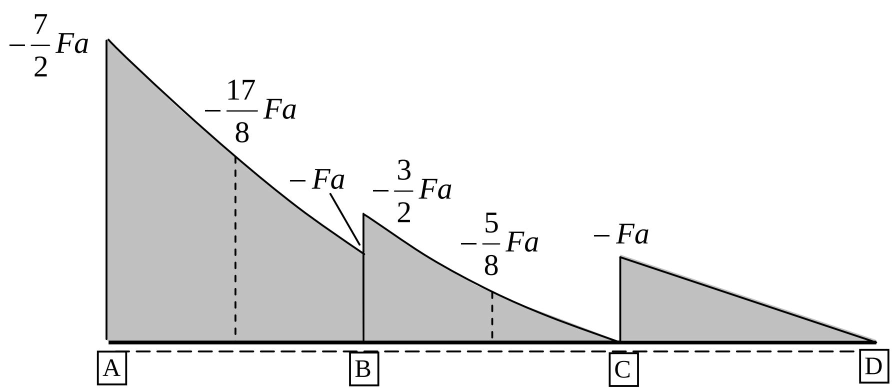
$$\Rightarrow \quad M = -F(3a-2x) - \frac{F}{a}\frac{(a-x)^2}{2}$$

$$\leftleftarrows \quad M_t - \frac{3}{2}Fa = 0 \quad \Rightarrow \quad M_t = \frac{3}{2}Fa$$

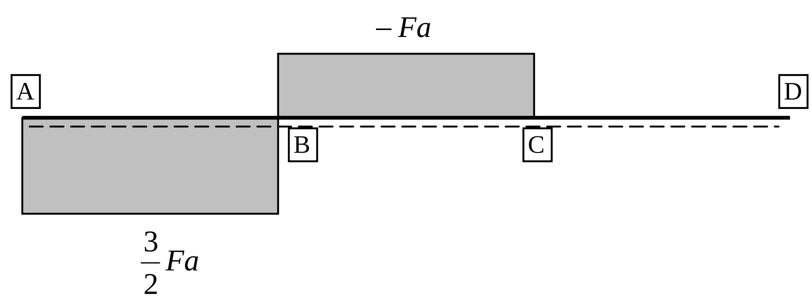
$Q-$kuvio



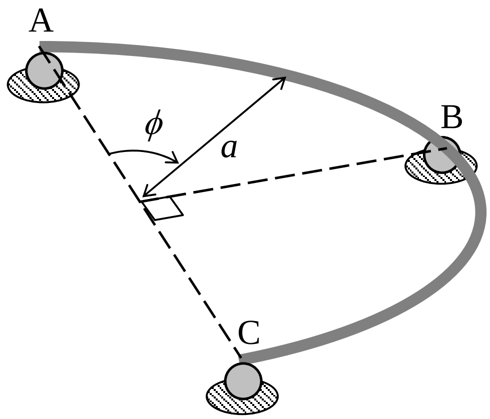
$M-$kuvio

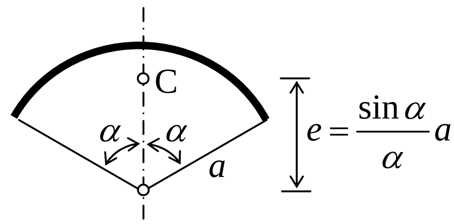


M_t-kuvio



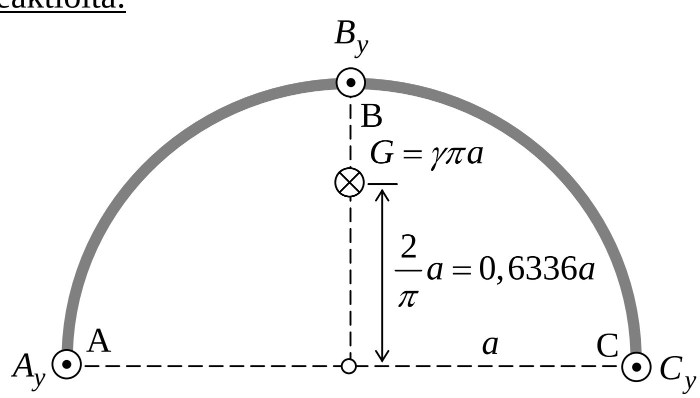
4. Oheinen vaakatasossa oleva puoliympyrän muotoinen kaari on tuettu pisteissä A, B ja C pallonivelillä siten, että pystysiirtymä on estetty. Määritä kaaren omasta painosta aiheutuvien leikkausvoiman, taivutusmomentin ja vääntömomentin lausekkeet kulman ϕ funktiona välillä AB, kun kaaren painovoima pituutta kohti on γ. Piirrä myös niiden kuvaajat. Ympyränkaaren massakeskiön asema voidaan laskea oikeanpuoleisen kuvan perusteella.





Ratkaisu:

Tukireaktioita:

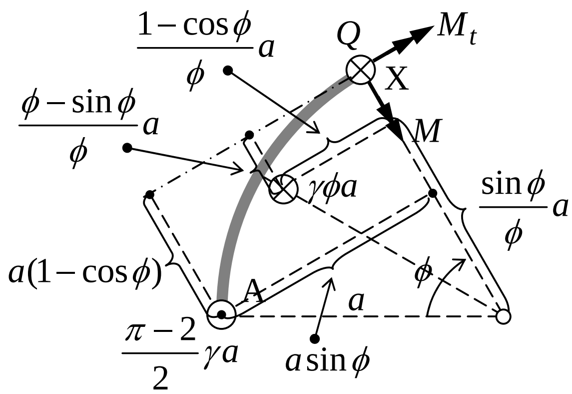


$\overrightarrow{AC}$ $$B_y \cdot a - G \cdot \frac{2}{\pi} a = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \gamma\pi a \cdot \frac{2}{\pi} = 2\gamma a$$

$A\uparrow$ $$-C_y \cdot 2a - B_y \cdot a + G \cdot a = 0 \;\Rightarrow\; C_y = \frac{\pi - 2}{2}\gamma a$$

Leikkausrasitukset:

Väli AB:



$$\otimes \quad Q - \frac{\pi-2}{2}\gamma a + \gamma\phi a = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Q = (\frac{\pi-2}{2} - \phi)\gamma a}}$$

$$\text{X}\searrow \quad M - \frac{\pi-2}{2}\gamma a \cdot a\sin\phi + \gamma\phi a \cdot \frac{1-\cos\phi}{\phi}a = 0$$

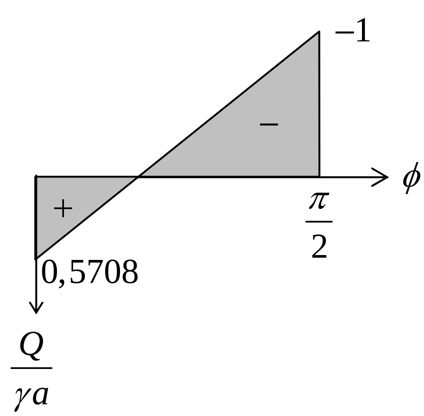
$$\Rightarrow \underline{\underline{M = (\frac{\pi-2}{2}\sin\phi + \cos\phi - 1)\gamma a^2}}$$

$$\text{X}\nearrow \quad M_t - \frac{\pi-2}{2}\gamma a \cdot a(1-\cos\phi) + \gamma\phi a \cdot \frac{\phi-\sin\phi}{\phi}a = 0$$

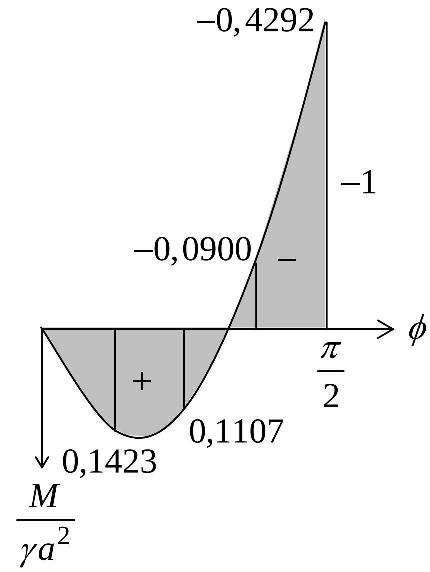
$$\Rightarrow \underline{\underline{M_t = [\frac{\pi-2}{2}(1-\cos\phi) + \sin\phi - \phi]\gamma a^2}}$$

Rasituskuviot välillä AB:

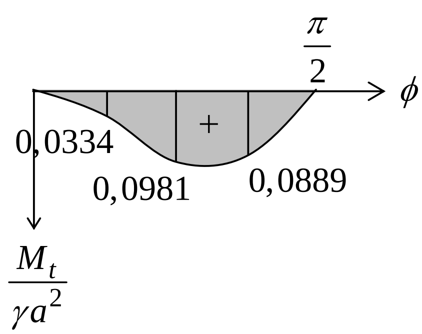
$Q-$kuvio:



M – kuvio:

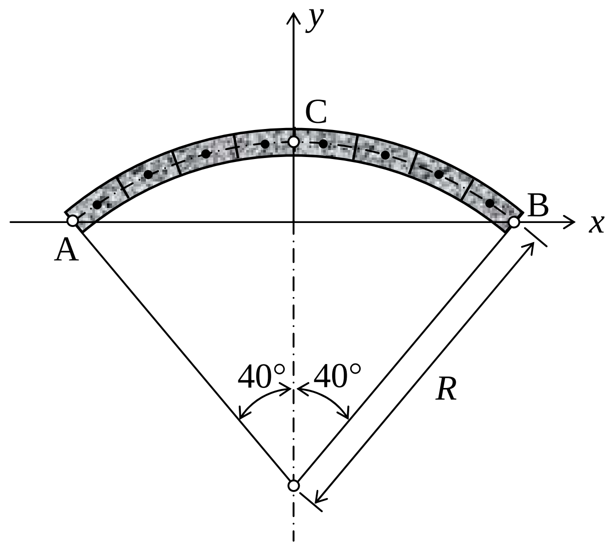


M_t – kuvio:

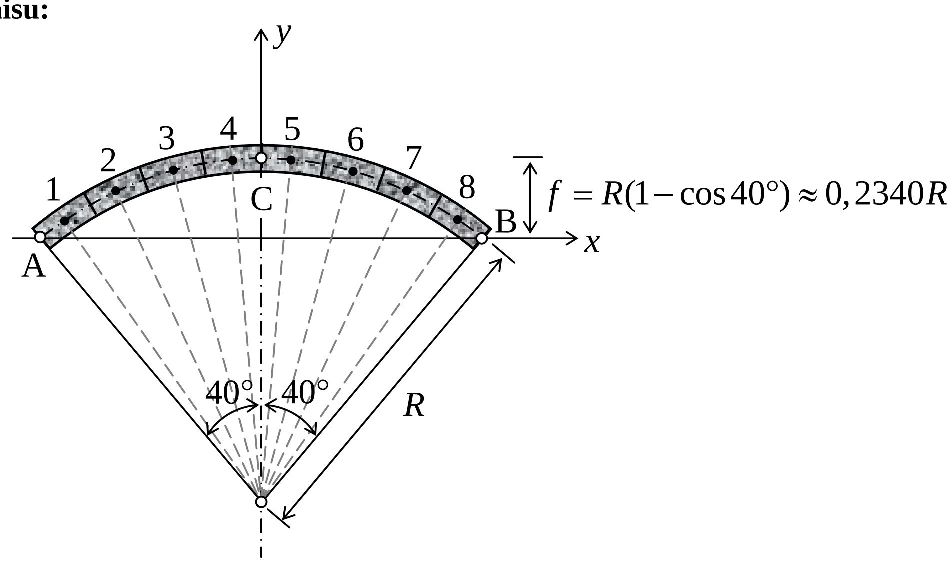


Huomautus: Symmetrian vuoksi leikkausrasitukset välillä BC ovat symmetriapisteissä suuruudeltaan yhtä suuret, mutta merkki voi vaihdella.

5. Oheinen ympyrän muotoinen kaari on kiveä ja se on koottu samanmuotoisiksi sahatuista osista. Määritä likimain pisteiden A, C ja B kautta kulkeva kaaren oman painon puristusviiva otaksumalla, että kunkin osan paino on keskittynyt pistekuormaksi sen akselilla olevaan keskipisteeseen. Kaaren painovoima on *G*.



Ratkaisu:



Numeroidaan osat kuvan mukaisesti ja lasketaan pisteiden A, B ja C sekä osien keskipisteiden $x-$koordinaatit ja sekä näitä vastaavat kaaren akselin korkeusasemat, joita merkitään symbolilla $\bar{y}$.

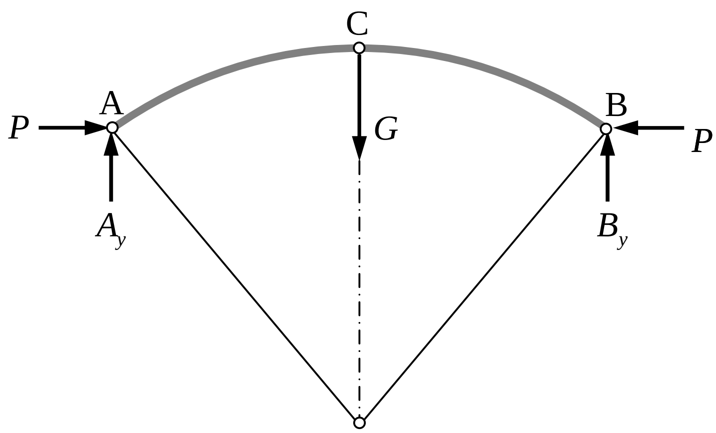
Piste	φ_i	$x_i = R\sin\varphi_i$	$\bar{y}_i = R(\cos\varphi_i - \cos 40°)$
A	$-40°$	$-0,6428R$	0
1	$-35°$	$-0,5736R$	0,0531R
2	$-25°$	$-0,4226R$	0,1403R
3	$-15°$	$-0,2588R$	0,1999R
4	$-5°$	$-0,0872R$	0,2302R
C	$0°$	0	0,2340R
5	$5°$	$0,0872R$	0,2302R

6	$15°$	$0,2588R$	0,1999R
7	$25°$	$0,4226R$	0,1403R
8	$35°$	$0,5736R$	0,0531R
B	$40°$	$0,6428R$	0

<u>Kaaren osien painot:</u>

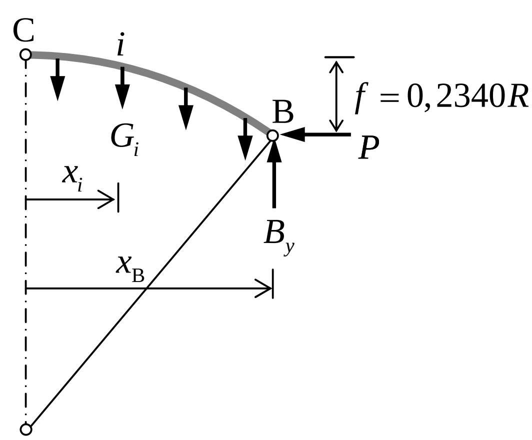
$$G_i = \frac{G}{8},\ i = 1,\cdots,8$$

<u>Tukireaktiot:</u>



$$\left.\begin{aligned} \uparrow\quad & A_y + B_y - G = 0, \\ & A_y = B_y,\ \text{Symmetria} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_y = B_y = \underline{\frac{G}{2}}$$

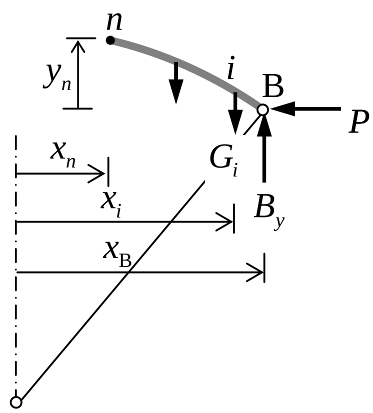
<u>Voima P:</u>



$$\circlearrowleft \mathrm{C} \quad -\sum_{i=5}^{8} G_i x_i + B_y \cdot x_B - P \cdot f = 0 \ \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{f}(B_y \cdot x_{\mathrm{B}} - \sum_{i=5}^{8} G_i x_i) \\
&= \frac{1}{0,2340R}[\frac{G}{2} \cdot 0,6428R - \frac{G}{8} \cdot (0,0872R + 0,2588R + 0,4226R + 0,5736R)] \\
&= \underline{0,6565G}
\end{aligned}
$$

Puristusviiva:



$$
n\circlearrowleft \quad -\sum_{i=n+1}^{8} G_i(x_i - x_n) + B_y \cdot (x_{\mathrm{B}} - x_n) - P \cdot y_n = 0
$$

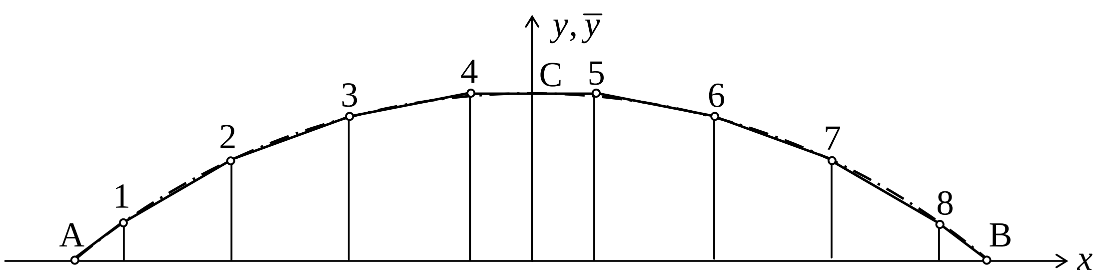
$$
\Rightarrow y_n = \frac{G}{2P} \cdot (x_{\mathrm{B}} - x_n) - \frac{G}{8P}\sum_{i=n}^{8}(x_i - x_n) = 0,7616(x_{\mathrm{B}} - x_n) - 0,1904\sum_{i=n+1}^{8}(x_i - x_n)
$$

n	x_n	$0,7616(x_{\mathrm{B}} - x_n)$	$0,1904\sum_{i=n+1}^{8}(x_i - x_n)$	y_n
1	$-0,5736R$	$0,9264R$	$0,8737R$	$0,0527R$
2	$-0,4226R$	$0,8114R$	$0,6725R$	$0,1389R$
3	$-0,2588R$	$0,6867R$	$0,4853R$	$0,2014R$
4	$-0,0872R$	$0,5560R$	$0,3220R$	$0,2340R$
5	$0,0872R$	$0,4231R$	$0,1891R$	$0,2340R$
6	$0,2588R$	$0,2925R$	$0,0911R$	$0,2014R$
7	$0,4226R$	$0,1677R$	$0,0288R$	$0,1389R$
8	$0,5736R$	$0,0527R$	0	$0,0527R$

Puristusviivan ja kaaren akselin korkeusasemien y_n ja $\bar{y}_n$ vertailu:

n	x_n	y_n	$\bar{y}_n$	$\Delta y_n = y_n - \bar{y}_n$
A		0	0	0
1	$-0,5736R$	$0,0527R$	$0,0531R$	$-0,0004R$
2	$-0,4226R$	$0,1389R$	$0,1403R$	$-0,0014R$
3	$-0,2588R$	$0,2014R$	$0,1999R$	$0,0015R$
4	$-0,0872R$	$0,2340R$	$0,2302R$	$0,0038R$
C	0	$0,2340R$	$0,2340R$	0
5	$0,0872R$	$0,2340R$	$0,2302R$	$0,0038R$
6	$0,2588R$	$0,2014R$	$0,1999R$	$0,0015R$
7	$0,4226R$	$0,1389R$	$0,1403R$	$-0,0014R$
8	$0,5736R$	$0,0527R$	$0,0531R$	$-0,0004R$
B		0	0	0

Kuvaaja:

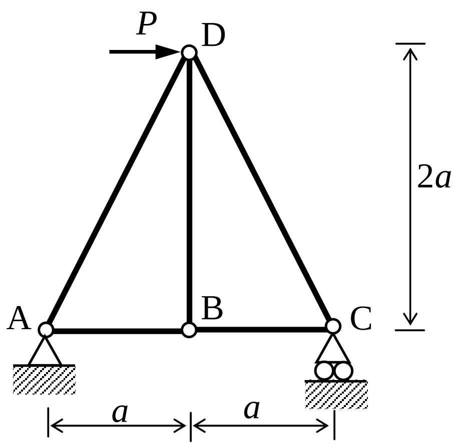


Nähdään, että yllä määritetty ympyrän muotoisen kaaren oman painon likimääräinen puristusviiva kulkee hyvin lähellä kaaren akselia. Se ei kuitenkaan yhdy kaaren akseliin. Myöskään puristusviivan tarkka analyyttinen lauseke $y(x)$, jota emme tässä määritä, ei ole ympyrä eikä siten yhdy kaaren akseliin. Joka tapauksessa, koska laakean ympyrän muotoisen kaaren oman painon puristusviiva kulkee hyvin lähellä sen akselia, aiheuttaa oma paino sen poikkileikkauksiin miltei tasan jakautuneen puristusjännityksen.

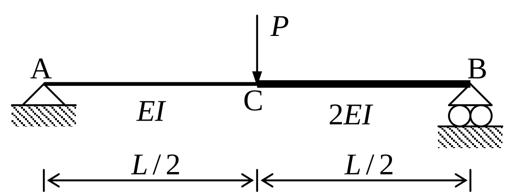
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 3:

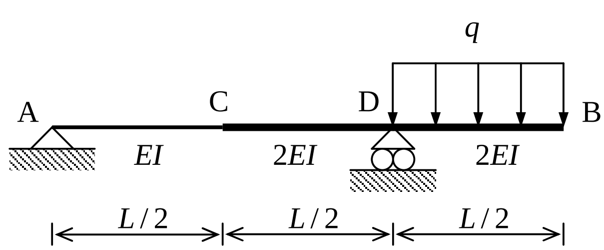
1. Määritä oheisen ristikon nivelten siirtymät ja piirrä sen siirtymäkuvio, (a) kun niveleen D kohdistuu vaakasuora pistekuorma P, sekä (b) kun sauvat AB, BC ja BD saavat lämpötilan muutoksen ΔT . Ristikon kaikkien sauvojen aksiaalinen jäykkyys on EA ja pituuden lämpötilakerroin on α .



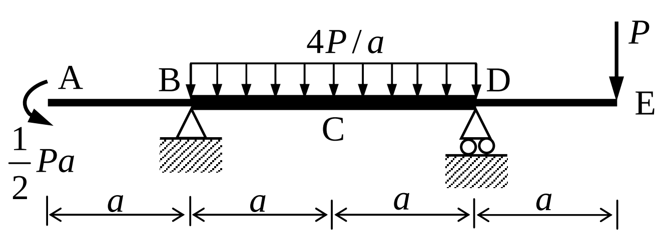
2. Määritä momenttipintamenetelmällä oheisen palkin kiertymä pisteissä A ja B sekä taipuma pisteessä C.



3. Määritä momenttipintamenetelmällä oheisen palkin pisteen B taipuma ja pisteen D kiertymä.



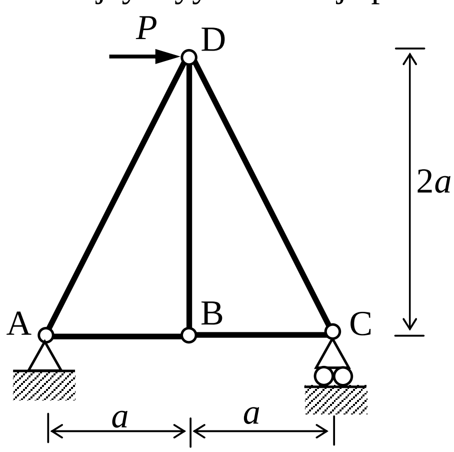
4. Määritä momenttipintamenetelmällä oheisen palkin kiertymät tuilla B ja D sekä taipumat pisteissä A, C ja E. Ulokkeiden AB ja DE taivutus-jäykkyys on EI_0 ja jänteen BD $2EI_0$.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

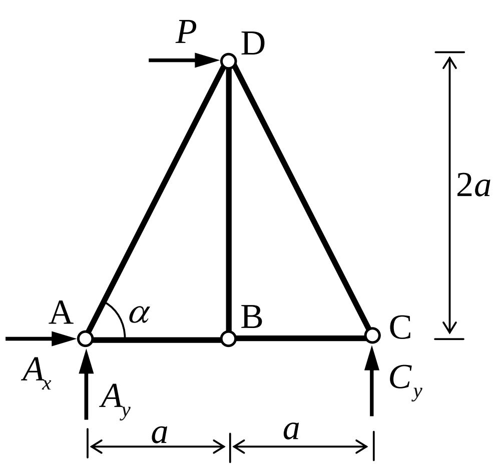
Harjoitus 3:

1. Määritä oheisen ristikon nivelten siirtymät ja piirrä sen siirtymäkuvio, (a) kun niveleen D kohdistuu vaakasuora pistekuorma P, sekä (b) kun sauvat AB, BC ja BD saavat lämpötilan muutoksen ΔT. Ristikon kaikkien sauvojen aksiaalinen jäykkyys on EA ja pituuden lämpötilakerroin on α.



Ratkaisu:

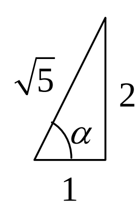
(a) <u>Tukireaktiot</u>



$$\rightarrow \quad P + A_x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_x = -P}$$

$$\text{A}\circlearrowleft \quad C_y \cdot 2a - P \cdot 2a = 0 \;\Rightarrow\; \underline{C_y = P}$$

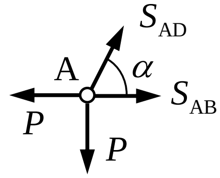
$$\text{C}\circlearrowleft \quad -A_y \cdot 2a - P \cdot 2a = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_y = -P}$$



$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

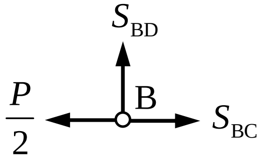
$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

<u>Sauvavoimat:</u>



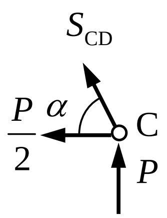
$$\uparrow \quad S_{AD}\sin\alpha - P = 0 \;\Rightarrow\; S_{AD} = \underline{\frac{P\sqrt{5}}{2}}$$

$$\rightarrow \quad S_{AB} + S_{AD}\cos\alpha - P = 0 \;\Rightarrow\; S_{AB} = P - S_{AD}\frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{P}{2}}$$



$$\rightarrow \quad S_{BC} - \frac{P}{2} = 0 \;\Rightarrow\; S_{BC} = \underline{\frac{P}{2}}$$

$$\uparrow \quad S_{BD} = \underline{0}$$



$$\uparrow \quad S_{\mathrm{CD}} \sin\alpha + P = 0 \;\Rightarrow\; \underline{S_{\mathrm{CD}} = -\frac{P\sqrt{5}}{2}}$$

<u>Sauvojen venymät:</u>

$$\varepsilon_{\mathrm{AB}} = \varepsilon_{\mathrm{BC}} = \frac{P}{2EA},\; \varepsilon_{\mathrm{AD}} = \frac{P\sqrt{5}}{2EA},\; \varepsilon_{\mathrm{BD}} = 0,\; \varepsilon_{\mathrm{CD}} = -\frac{P\sqrt{5}}{2EA}$$

Kirjoitetaan yhtälö

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2$$

kullekin sauvalle:

Sauva AB: $a \cdot (u_{\mathrm{B}} - \overbrace{u_{\mathrm{A}}}^{0}) + 0 \cdot (v_{\mathrm{B}} - \overbrace{v_{\mathrm{A}}}^{0}) = \overbrace{\varepsilon_{\mathrm{AB}}}^{P/2EA} a^2$

Sauva BC: $a \cdot (u_{\mathrm{C}} - u_{\mathrm{B}}) + 0 \cdot (\overbrace{v_{\mathrm{C}}}^{0} - v_{\mathrm{B}}) = \overbrace{\varepsilon_{\mathrm{BC}}}^{P/2EA} a^2$

Sauva AD: $a \cdot (u_{\mathrm{D}} - \overbrace{u_{\mathrm{A}}}^{0}) + 2a \cdot (v_{\mathrm{D}} - \overbrace{v_{\mathrm{A}}}^{0}) = \overbrace{\varepsilon_{\mathrm{AD}}}^{P\sqrt{5}/2EA} (a\sqrt{5})^2$

Sauva BD: $0 \cdot (u_{\mathrm{D}} - u_{\mathrm{B}}) + 2a \cdot (v_{\mathrm{D}} - v_{\mathrm{B}}) = \overbrace{\varepsilon_{\mathrm{BD}}}^{0} (2a)^2$

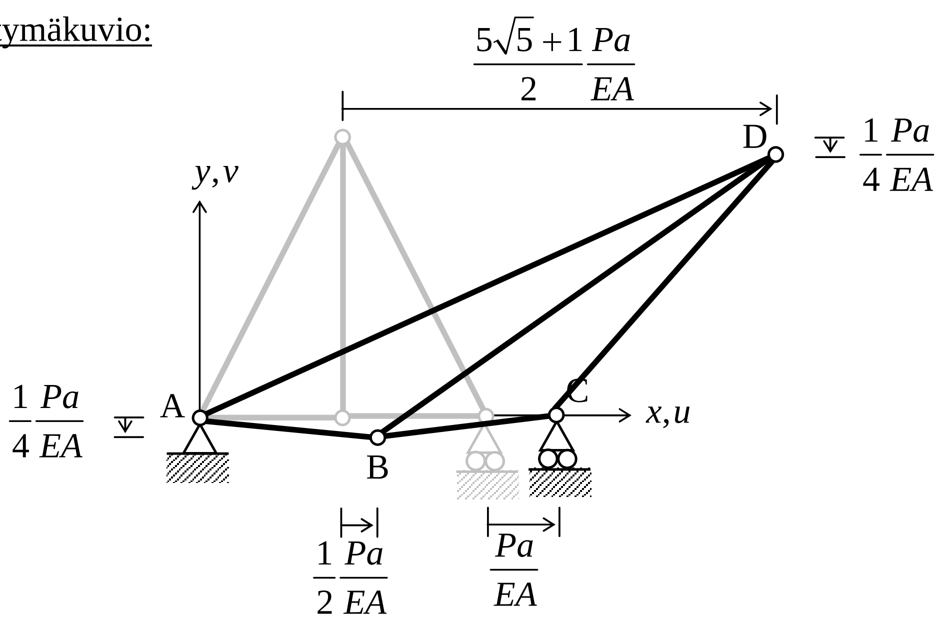
Sauva CD: $-a \cdot (u_{\mathrm{D}} - u_{\mathrm{C}}) + 2a \cdot (v_{\mathrm{D}} - \overbrace{v_{\mathrm{C}}}^{0}) = \overbrace{\varepsilon_{\mathrm{CD}}}^{-P\sqrt{5}/2EA} (a\sqrt{5})^2$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} u_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{\dfrac{Pa}{2EI}}} \\ -u_{\mathrm{B}} + u_{\mathrm{C}} = \dfrac{Pa}{2EI} \\ u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}\dfrac{Pa}{EI} \\ -v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{D}} = 0 \\ u_{\mathrm{C}} - u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = -\dfrac{5\sqrt{5}}{2}\dfrac{Pa}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{\mathrm{C}} = \dfrac{Pa}{2EI} + u_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{\dfrac{Pa}{EI}}} \\ u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}\dfrac{Pa}{EI} \\ -v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{D}} = 0 \\ -u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = -(\dfrac{5\sqrt{5}}{2} + 1)\dfrac{Pa}{EI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{\mathrm{D}} = \underline{\underline{\dfrac{5\sqrt{5}+1}{2}\dfrac{Pa}{EI}}} \\ v_{\mathrm{D}} = \underline{\underline{-\dfrac{Pa}{4EI}}} \\ v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{D}} = \underline{\underline{-\dfrac{Pa}{4EI}}} \end{cases}$$

Siirtymäkuvio:



Siirtymämittakaava rajusti liioiteltu!

(b) <u>Sauvojen venymät:</u>

$\varepsilon_{\mathrm{AB}} = \varepsilon_{\mathrm{BC}} = \varepsilon_{\mathrm{BD}} = \alpha\Delta T$, muut $\varepsilon_{ij} = 0$.

Kirjoitetaan yhtälö

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^{\;2}$$

kullekin sauvalle:

Sauva AB: $a \cdot (u_{\mathrm{B}} - \underbrace{u_{\mathrm{A}}}^{0}) + 0 \cdot (v_{\mathrm{B}} - \underbrace{v_{\mathrm{A}}}^{0}) = \underbrace{\varepsilon_{\mathrm{AB}}}^{\alpha\Delta T} a^2$

Sauva AC: $a \cdot (u_{\mathrm{C}} - u_{\mathrm{B}}) + 0 \cdot (\underbrace{v_{\mathrm{C}}}^{0} - v_{\mathrm{B}}) = \underbrace{\varepsilon_{\mathrm{BC}}}^{\alpha\Delta T} a^2$

Sauva AD: $a \cdot (u_{\mathrm{D}} - \underbrace{u_{\mathrm{A}}}^{0}) + 2a \cdot (v_{\mathrm{D}} - \underbrace{v_{\mathrm{A}}}^{0}) = \underbrace{\varepsilon_{\mathrm{AD}}}^{0} (a\sqrt{5})^2$

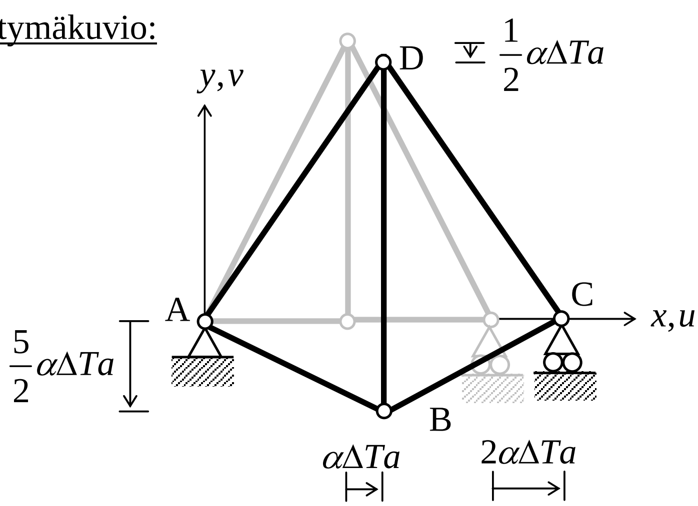
Sauva BD: $0 \cdot (u_{\mathrm{D}} - u_{\mathrm{B}}) + 2a \cdot (v_{\mathrm{D}} - v_{\mathrm{B}}) = \underbrace{\varepsilon_{\mathrm{BD}}}^{\alpha\Delta T} (2a)^2$

Sauva CD: $-a \cdot (u_{\mathrm{D}} - u_{\mathrm{C}}) + 2a \cdot (v_{\mathrm{D}} - \underbrace{v_{\mathrm{C}}}^{0}) = \underbrace{\varepsilon_{\mathrm{CD}}}^{0} (a\sqrt{5})^2$

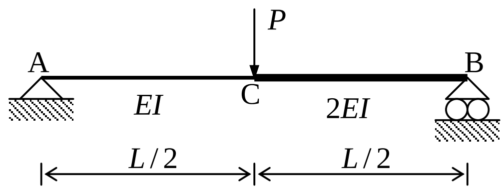
<u>Yhtälöryhmä ja ratkaisu:</u>

$$\begin{cases} u_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{\alpha\Delta T a}} \\ -u_{\mathrm{B}} + u_{\mathrm{C}} = \alpha\Delta T a \\ u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = 0 \\ -v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{D}} = 2\alpha\Delta T a \\ u_{\mathrm{C}} - u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{\mathrm{C}} = \alpha\Delta T a + u_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{2\alpha\Delta T a}} \\ u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = 0 \\ -v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{D}} = 2\alpha\Delta T a \\ -u_{\mathrm{D}} + 2v_{\mathrm{D}} = -2\alpha\Delta T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{\mathrm{D}} = \underline{\underline{-\dfrac{\alpha\Delta T a}{2}}} \\ u_{\mathrm{D}} = \underline{\underline{\alpha\Delta T a}} \\ v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{D}} - 2\alpha\Delta T a \\ \quad = \underline{\underline{-\dfrac{5}{2}\alpha\Delta T a}} \end{cases}$$

<u>Siirtymäkuvio:</u>

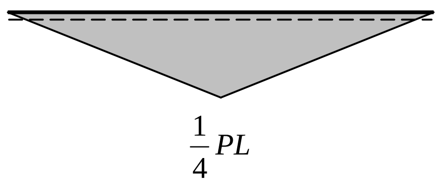


2. Määritä momenttipintamenetelmällä oheisen palkin kiertymä pisteissä A ja B sekä taipuma pisteessä C.

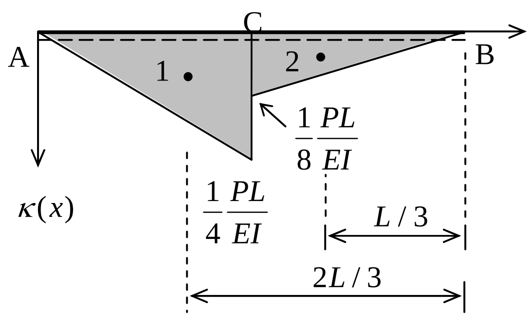


Ratkaisu:

M – kuvio (ei määritetty tässä):



κ – kuvio :



Osapintojen alat:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{PL}{EI} = \frac{1}{16}\frac{PL^2}{EI}$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{8}\frac{PL}{EI} = \frac{1}{32}\frac{PL^2}{EI}$$

Kirjoitetaan momenttipintamenetelmän peruskaava välille AB:

$$\overbrace{v_B}^{=0} - \overbrace{v_A}^{=0} = \varphi_A(\overbrace{x_B - x_A}^{=L}) - \mathcal{M}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \varphi_A = \frac{\mathcal{M}_{AB}}{L},$$

missä pisteiden A ja B välisen κ – kuvion momentti pisteen B suhteen on

$$\mathcal{M}_{AB} = \mathcal{A}_1\cdot\frac{2L}{3} + \mathcal{A}_2\cdot\frac{L}{3} = \frac{1}{16}\frac{PL^2}{EI}\cdot\frac{2L}{3} + \frac{1}{32}\frac{PL^2}{EI}\cdot\frac{L}{3} = \frac{5}{96}\frac{PL^3}{EI},$$

joten pisteen A kiertymäksi saadaan

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M}_{AB}}{L} = \frac{5}{96}\frac{PL^2}{EI}.$$

Momenttipintamenetelmän toisesta peruskaavasta saadaan

$$\varphi_B - \varphi_A = -\mathcal{A}_{AB},$$

missä A_{AB} on pisteiden A ja B välisen κ – kuvion pinta-ala. Sille saadaan

$$\mathcal{A}_{AB} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{3}{32}\frac{PL^2}{EI},$$

joten pään B kiertymäksi saadaan

$$\varphi_B = \varphi_A - \mathcal{A}_{AB} = \frac{5}{96}\frac{PL^2}{EI} - \frac{3}{32}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{1}{24}\frac{PL^2}{EI}.$$

Kirjoitetaan momenttipintamenetelmän peruskaava välille AC

$$v_C - \overbrace{v_A}^{=0} = \overbrace{\varphi_A}^{=\frac{5}{96}\frac{PL^2}{EI}}(\overbrace{x_C}^{=L/2} - \overbrace{x_A}^{=0}) - \mathcal{M}_{AC},$$

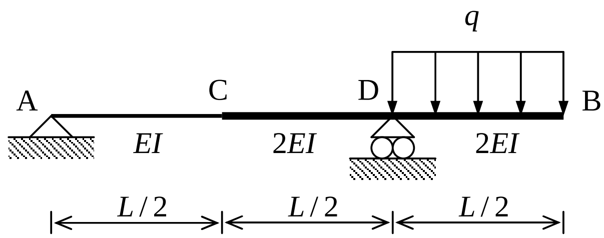
missä pisteiden A ja C välisen κ – pinnan momentti pisteen C suhteen on

$$\mathcal{M}_{AC} = \mathcal{A}_1 \cdot \frac{L}{6} = \frac{1}{96}\frac{PL^3}{EI},$$

joten pisteen C taipumaksi saadaan

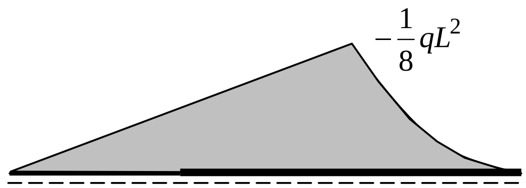
$$v_C = \frac{5}{96}\frac{PL^2}{EI}\cdot\frac{L}{2} - \frac{1}{96}\frac{PL^3}{EI} = \frac{1}{64}\frac{PL^3}{EI}.$$

3. Määritä momenttipintamenetelmällä oheisen palkin pisteen B taipuma ja pisteen D kiertymä.

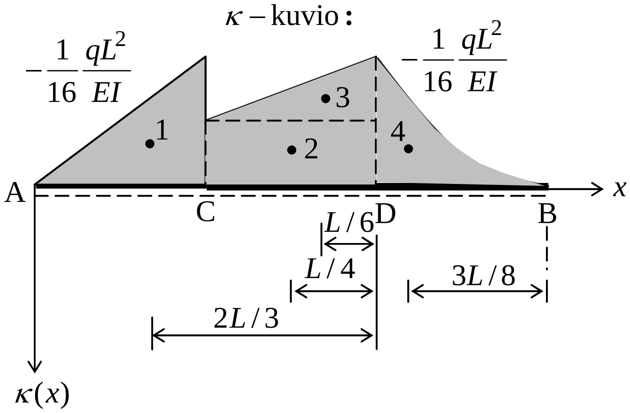


Ratkaisu:

$M-$kuvio (ei määritetty tässä):



$\kappa-$kuvio**:**



Osapintojen alat:

$$\mathcal{A}_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot(-\frac{1}{16}\frac{qL^2}{EI})=-\frac{1}{64}\frac{qL^3}{EI}, \qquad \mathcal{A}_2=\frac{L}{2}\cdot(-\frac{1}{32}\frac{qL^2}{EI})=-\frac{1}{64}\frac{qL^3}{EI},$$

$$\mathcal{A}_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot(-\frac{1}{32}\frac{qL^2}{EI})=-\frac{1}{128}\frac{qL^3}{EI}, \qquad \mathcal{A}_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\cdot(-\frac{1}{16}\frac{qL^2}{EI})=-\frac{1}{96}\frac{qL^3}{EI}.$$

Pisteiden A ja D välisen $\kappa-$kuvion pinta-ala ja momentti pisteen D suhteen:

$$\mathcal{A}_{AD}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3=(-\frac{1}{64}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128})\frac{qL^3}{EI}=-\frac{5}{128}\frac{qL^3}{EI}$$

$$\mathcal{M}_{AD}=\mathcal{A}_1\cdot\frac{2L}{3}+\mathcal{A}_2\cdot\frac{L}{4}+\mathcal{A}_3\cdot\frac{L}{6}=-(-\frac{1}{64}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{128}\cdot\frac{1}{6})\frac{qL^4}{EI}=-\frac{1}{64}\frac{qL^4}{EI},$$

Kirjoitetaan momenttipintamenetelmän peruskaavat välille AD:

$$\overbrace{v_D}^{0} - \overbrace{v_A}^{0} = \varphi_A(\overbrace{x_D - x_A}^{L}) - \mathcal{M}_{AD} \quad \Rightarrow \quad \varphi_A = \frac{\mathcal{M}_{AD}}{L} = -\frac{1}{64}\frac{qL^3}{EI}$$

$$\varphi_D - \varphi_A = -\mathcal{A}_{AD} \quad \Rightarrow \quad \varphi_D = -\mathcal{A}_{AD} + \varphi_A = \frac{5}{128}\frac{qL^3}{EI} - \frac{1}{64}\frac{qL^3}{EI} = \underline{\frac{3}{128}\frac{qL^3}{EI}}$$

Pisteen D kiertymä on siis:

$$\underline{\underline{\varphi_D = \frac{3}{128}\frac{qL^3}{EI}}}.$$

Pisteiden B ja D välisen κ – kuvion momentti pisteen B suhteen:

$$\mathcal{M}_{DB} = \mathcal{A}_4 \cdot \frac{3L}{8} = -\frac{1}{96}\frac{qL^3}{EI} \cdot \frac{3L}{8} = -\frac{1}{256}\frac{qL^4}{EI},$$

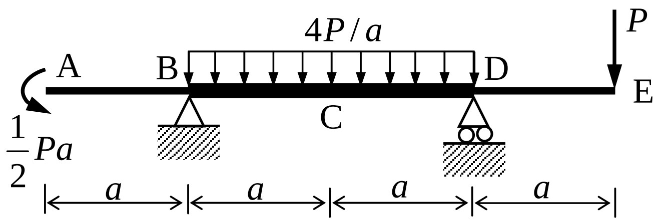
Kirjoitetaan momenttipintamenetelmän peruskaava välille BD:

$$v_B - \overbrace{v_D}^{0} = \varphi_D(\overbrace{x_B - x_D}^{L/2}) - \mathcal{M}_{DB} \quad \Rightarrow \quad v_B = \varphi_D \cdot \frac{L}{2} - \mathcal{M}_{DB} = \left(\frac{3}{128}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{256}\right)\frac{qL^4}{EI} = \underline{\frac{1}{64}\frac{qL^4}{EI}},$$

Pisteen B taipuma on siis:

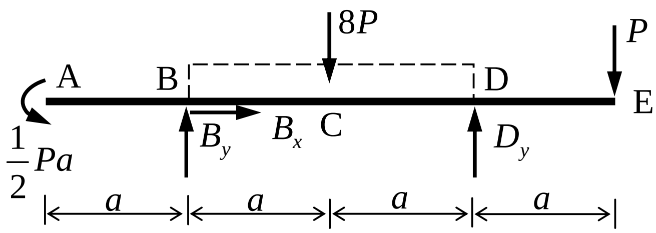
$$\underline{\underline{v_B = \frac{1}{64}\frac{qL^4}{EI}}}$$

4. Määritä momenttipintamenetelmällä oheisen palkin kiertymät tuilla B ja D sekä taipumat pisteissä A, C ja E. Ulokkeiden AB ja DE taivutus-jäykkyys on EI_0 ja jänteen BD $2EI_0$.



Ratkaisu:

<u>Tukireaktiot:</u>



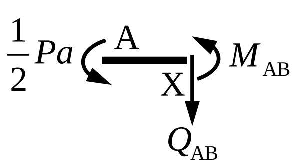
$\rightarrow \quad B_x = \underline{0}$

$$\text{D}\circlearrowleft \quad -B_y \cdot 2a + 8P \cdot a + \frac{1}{2}Pa - P \cdot a = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \underline{\frac{15}{4}P}$$

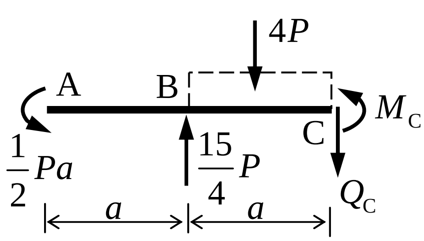
$$\text{B}\circlearrowleft \quad D_y \cdot 2a - 8P \cdot a + \frac{1}{2}Pa - P \cdot 3a = 0 \;\Rightarrow\; D_y = \underline{\frac{21}{4}P}$$

<u>Taivutusmomentit:</u>

Määritetään taivutusmomentti välillä AB (vakio), pisteissä C ja D sekä piirretään M-kuvio:

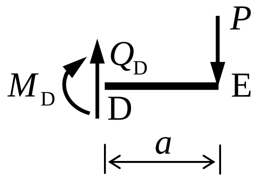


$$\text{X}\circlearrowleft \quad M_{\text{AB}} + \frac{1}{2}Pa = 0 \;\Rightarrow\; M_{\text{AB}} = \underline{-\frac{1}{2}Pa}$$



$$\text{C}\circlearrowleft \quad M_{\text{C}} + 4P \cdot \frac{a}{2} - \frac{15}{4}P \cdot a + \frac{1}{2}Pa = 0$$

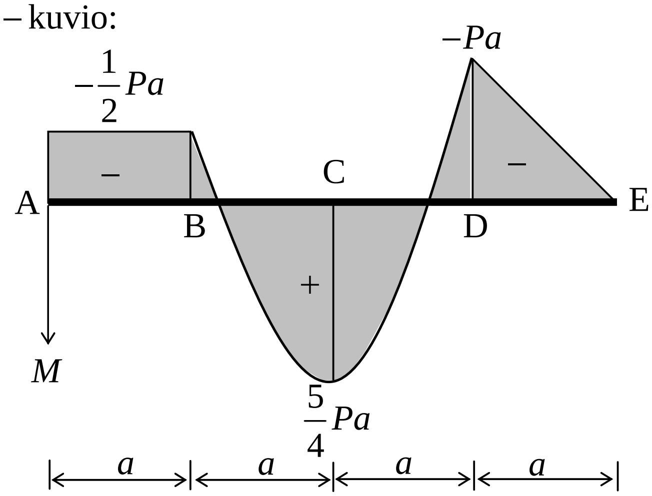
$$\Rightarrow\; M_{\text{C}} = \underline{\frac{5}{4}Pa}$$



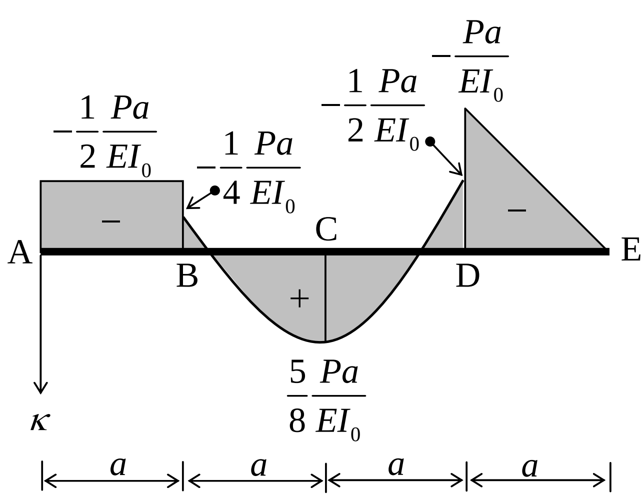
$$\text{D}\circlearrowleft \quad -M_\mathrm{D} - P\cdot a = 0$$

$$\Rightarrow \; M_\mathrm{D} = \underline{-Pa}$$

M − kuvio:

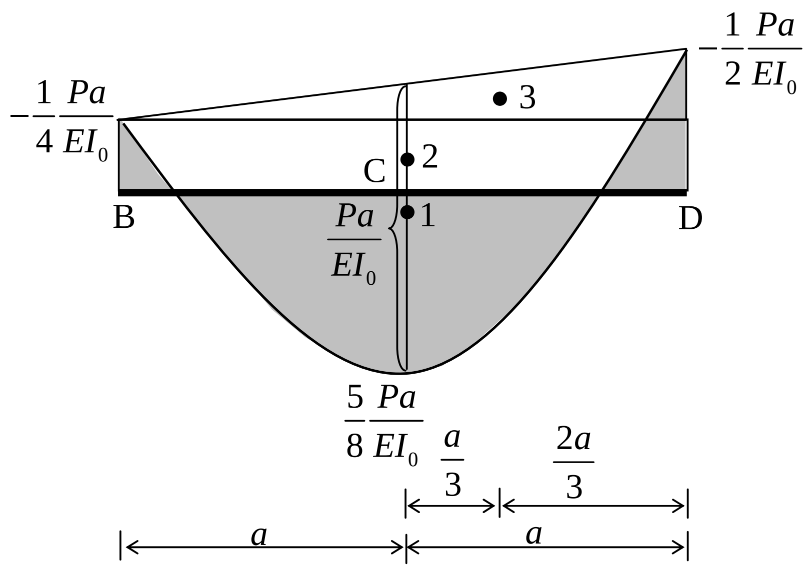


κ − kuvio:



Ensin sovelletaan momenttipinta-alamenetelmän perusyhtälöitä **tukien** B ja D **välillä** ja saadaan määritetyksi kiertymät φ_B ja φ_D :

Väli BD:



$$\mathcal{A}_1 = \frac{2}{3}\cdot 2a \cdot \frac{Pa}{EI_0} = \frac{4}{3}\frac{Pa^2}{EI_0},\ \mathcal{A}_2 = -2a\cdot\frac{1}{4}\frac{Pa}{EI_0} = -\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0},$$

$$\mathcal{A}_3 = -\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{1}{4}\frac{Pa}{EI_0} = -\frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EI_0}$$

$$\mathcal{A}_{BD} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \frac{4}{3}\frac{Pa^2}{EI_0} - \frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0} - \frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EI_0} = \frac{7}{12}\frac{Pa^2}{EI_0}$$

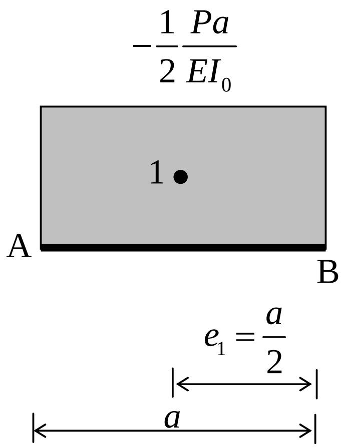
$$\mathcal{M}_{BD} = \mathcal{A}_1 e_1 + \mathcal{A}_2 e_2 + \mathcal{A}_3 e_3 = \frac{4}{3}\frac{Pa^2}{EI_0}\cdot a - \frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0}\cdot a - \frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EI_0}\cdot\frac{2a}{3} = \frac{2}{3}\frac{Pa^3}{EI_0}$$

$$\overbrace{v_D}^{0} - \overbrace{v_B}^{0} = \varphi_B(\overbrace{x_D - x_B}^{2a}) - \mathcal{M}_{BD} \ \Rightarrow\ \varphi_B = \frac{\mathcal{M}_{BD}}{2a} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{2}{3}\frac{Pa^3}{EI_0} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\frac{Pa^2}{EI_0}}}$$

$$\varphi_D - \varphi_B = -\mathcal{A}_{BD} \ \Rightarrow\ \varphi_D = \varphi_B - \mathcal{A}_{BD} = \frac{1}{3}\frac{Pa^2}{EI_0} - \frac{7}{12}\frac{Pa^2}{EI_0} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EI_0}}}$$

Sovelletaan momenttipinta-alamenetelmän perusyhtälöitä välillä AB ja saadaan määritetään kiertymä φ_{A} ja taipuma v_{A} :

Väli AB:



$$\mathcal{A}_1 = a \cdot (-\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI_0}) = -\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{AB}} = \mathcal{A}_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0},\ \mathcal{M}_{\mathrm{AB}} = \mathcal{A}_1 \cdot e_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{1}{4}\frac{Pa^3}{EI_0}$$

$$\varphi_{\mathrm{B}} - \varphi_{\mathrm{A}} = -\mathcal{A}_{\mathrm{AB}} \ \Rightarrow\ \varphi_{\mathrm{A}} = \varphi_{\mathrm{B}} + \mathcal{A}_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{3}\frac{Pa^2}{EI_0} - \frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}\frac{Pa^2}{EI_0}}}$$

$$\overbrace{v_{\mathrm{B}}}^{0} - v_{\mathrm{A}} = \varphi_{\mathrm{A}}(\overbrace{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}^{a}) - \mathcal{M}_{\mathrm{AB}}$$

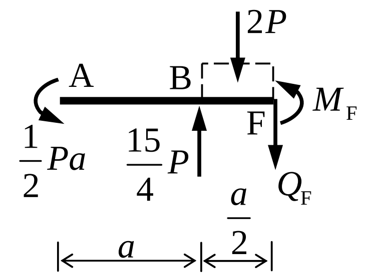
$$\Rightarrow\ v_{\mathrm{A}} = -\varphi_{\mathrm{A}} a + \mathcal{M}_{\mathrm{AB}} = -(-\frac{1}{6}\frac{Pa^2}{EI_0}) \cdot a - \frac{1}{4}\frac{Pa^3}{EI_0} = \underline{\underline{-\frac{1}{12}\frac{Pa^3}{EI_0}}}$$

Sovelletaan momenttipinta-alamenetelmän toista perusyhtälöitä välillä BC ja määritetään taipuma v_C:

Väli BC:

Seuraavassa tarvitaan vielä käyristymän arvoa välin B ja C keskellä pisteessä F:

Taivutusmomentti M_F:

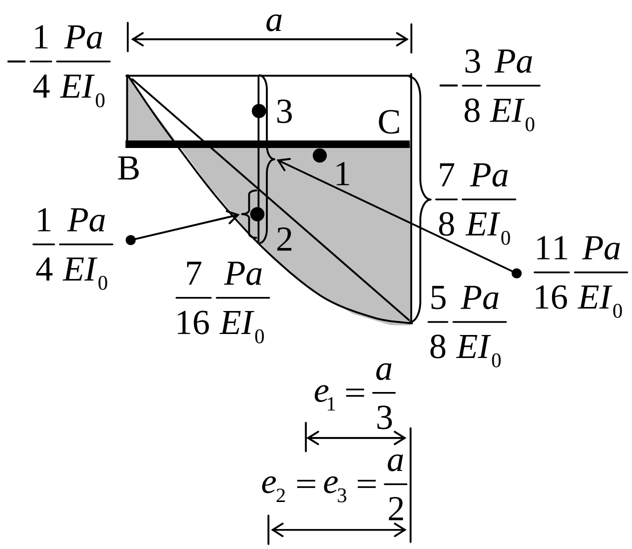


$$\mathrm{F}\circlearrowleft \; M_F + 2P\cdot\frac{a}{4} - \frac{15}{4}P\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2}Pa = 0$$

$$\Rightarrow\; M_F = \left(-\frac{1}{2} + \frac{15}{8} - \frac{1}{2}\right)Pa = \underline{\frac{7}{8}Pa}$$

Käyristymä κ_F:

$$\kappa_F = \frac{M_F}{2EI_0} = \frac{7}{16}\frac{Pa}{EI_0}$$



$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{7}{8}\frac{Pa}{EI_0} = \frac{7}{16}\frac{Pa^2}{EI_0}$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{4}\frac{Pa}{EI_0} = \frac{1}{6}\frac{Pa^2}{EI_0}$$

$$\mathcal{A}_3 = a\cdot\left(-\frac{1}{4}\frac{Pa}{EI_0}\right) = -\frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EI_0}$$

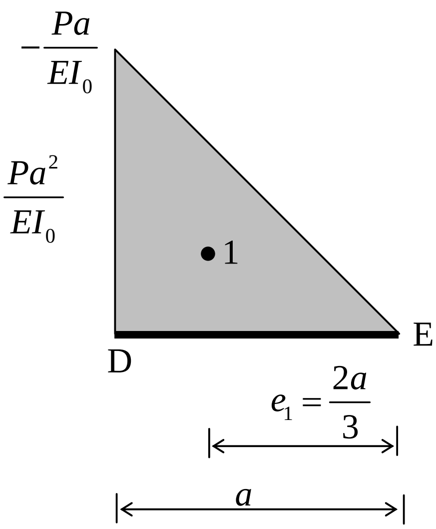
$$\mathcal{M}_{BC} = \mathcal{A}_1 e_1 + \mathcal{A}_2 e_2 + \mathcal{A}_3 e_3 = \frac{7}{16}\frac{Pa^2}{EI_0}\cdot\frac{a}{3} + \frac{1}{6}\frac{Pa^2}{EI_0}\cdot\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EI_0}\cdot\frac{a}{2} = \underline{\frac{5}{48}\frac{Pa^2}{EI_0}}$$

$$v_C - \overbrace{v_B}^{0} = \varphi_B\overbrace{(x_C - x_B)}^{a} - \mathcal{M}_{BC}$$

$$\Rightarrow\; v_C = \varphi_B a - \mathcal{M}_{BC} = \frac{1}{3}\frac{Pa^2}{EI_0}\cdot a - \frac{5}{48}\frac{Pa^3}{EI_0} = \underline{\underline{\frac{11}{48}\frac{Pa^3}{EI_0}}}$$

Sovelletaan momenttipinta-alamenetelmän toista perusyhtälöitä välillä DE ja määritetään taipuma v_{E} :

Väli DE:



$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{Pa}{EI_0}\right) = -\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0}$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{DE}} = \mathcal{A}_1 \cdot e_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI_0} \cdot \frac{2a}{3} = -\frac{1}{3}\frac{Pa^3}{EI_0}$$

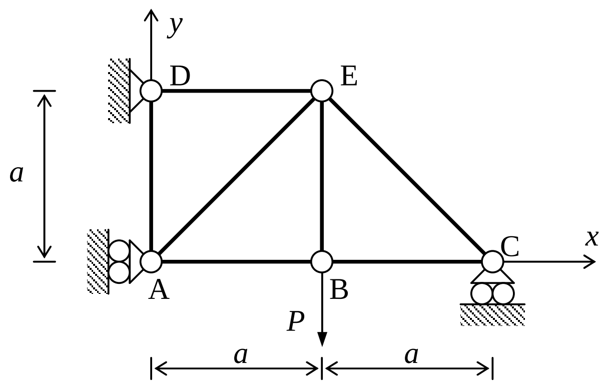
$$v_{\mathrm{E}} - \overbrace{v_{\mathrm{D}}}^{0} = \varphi_{\mathrm{D}} (\overbrace{x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{D}}}^{a}) - \mathcal{M}_{\mathrm{DE}}$$

$$\Rightarrow \; v_{\mathrm{E}} = \varphi_{\mathrm{D}} a - \mathcal{M}_{\mathrm{DE}} = -\frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EI_0} \cdot a - \left(-\frac{1}{3}\frac{Pa^3}{EI_0}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{12}\frac{Pa^3}{EI_0}}}$$

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

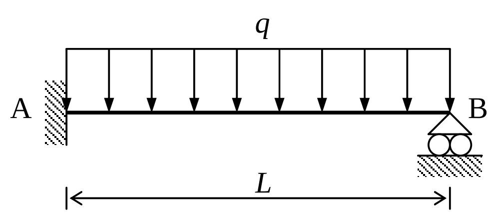
Harjoitus 4:

1. Määritä oheisen staattisesti määräämättömän ristikon sauvavoimat. Ristikon kaikkien sauvojen aksiaalijäykkyys on EA.

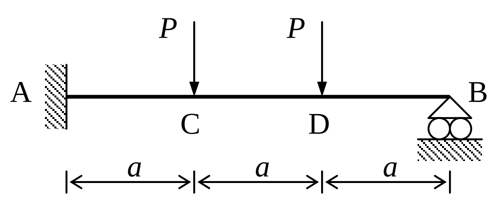


2. Määritä voimamenetelmällä oheisten palkkien tukireaktiot, taivutusmomentin lauseke ja $M-$kuvio. Palkkien taivutusjäykkyys on EI.

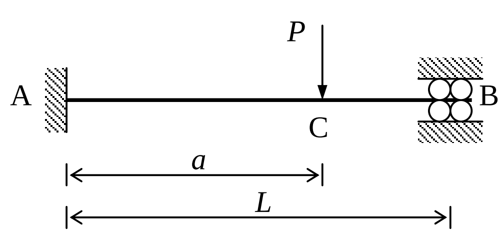
(a)



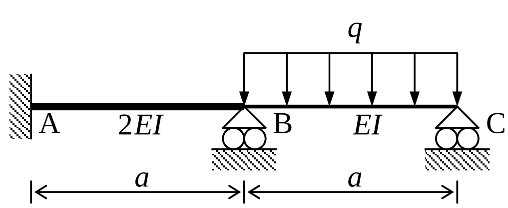
(b)



(c)



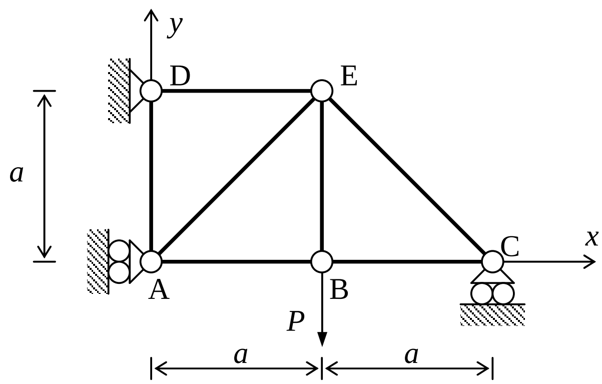
3. Määritä voimamenetelmää ja momenttipintamenetelmää käyttäen oheisen kaksiaukkoisen palkin taivutusmomenttikuvio.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 4:

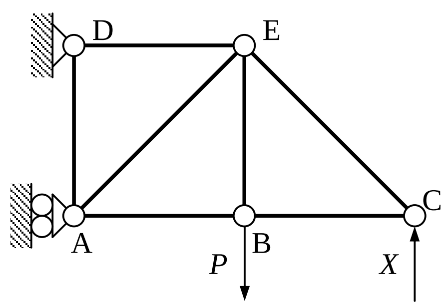
1. Määritä oheisen staattisesti määräämättömän ristikon sauvavoimat. Ristikon kaikkien sauvojen aksiaalijäykkyys on *EA*.



Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku: $n_s = t + s - 2k = 4 + 7 - 2 \cdot 5 = 1$. Valitaan staattisesti määräämättömäksi suureeksi tuen C pystytukireaktio eli $X = C_y$.

SMPM:



Yhteensopivuusehto: $v_C = 0$. Lasketaan ristikon nivelten siirtymät kaavalla:

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2 .$$

Tähän tarvitaan sauvavoimia, jotka määritetään nivelmenetelmällä.

Nivel C:

$$\uparrow \quad \frac{S_{EC}}{\sqrt{2}} + X = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{EC} = -\sqrt{2} X$$

$$\longrightarrow \quad -\frac{S_{EC}}{\sqrt{2}} - S_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{BC} = X$$

Nivel B: $S_{BE} = P$, $S_{AB} = X$

Nivel E:

$$\uparrow \quad -\frac{S_{AE}}{\sqrt{2}} - P + \frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AE} = \sqrt{2}X - \sqrt{2}P$$

$$\rightarrow \quad -S_{ED} - \frac{S_{AE}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{ED} = -2X + P$$

Nivel A:

$$\uparrow \quad S_{AD} + \frac{\sqrt{2}X - \sqrt{2}P}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AD} = P - X$$

Yhtälöt siirtymien määrittämiseksi:

Sauva AD: $$a(\overbrace{v_D}^{=0} - v_A) = S_{AD}\,\frac{a^2}{EA} = (P - X)\frac{a^2}{EA} \quad \Rightarrow \quad v_A = (X - P)\frac{a}{EA}$$

Sauva DE: $$a(u_E - \overbrace{u_D}^{=0}) = S_{DE}\,\frac{a^2}{EA} = (-2X + P)\frac{a^2}{EA} \quad \Rightarrow \quad u_E = (-2X + P)\frac{a}{EA}$$

Sauva AE: $$a(\overbrace{u_E}^{=(-2X+P)\frac{a}{EA}} - \overbrace{u_A}^{=0}) + a(v_E - \overbrace{v_A}^{=(X-P)\frac{a}{EA}}) = S_{AE}\,\frac{2a^2}{EA} = (2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}P)\frac{a^2}{EA}$$

$$\Rightarrow \quad v_E = ((3+2\sqrt{2})X - (2+2\sqrt{2})P)\frac{a}{EA}$$

Sauva AB: $$a(u_B - \overbrace{u_A}^{=0}) = S_{AB}\,\frac{a^2}{EA} = X\,\frac{a^2}{EA} \quad \Rightarrow \quad u_B = X\,\frac{a}{EA}$$

Sauva BE: $$a(v_E - v_B) = S_{BE}\,\frac{a^2}{EA} \quad \Rightarrow \quad v_B = (3+2\sqrt{2})X - (3+2\sqrt{2}P)\frac{a}{EA}$$

Sauva BC: $$a(u_C - \overbrace{u_B}^{=X\frac{a}{EA}}) = S_{BC}\,\frac{a^2}{EA} = X\,\frac{a^2}{EA} \quad \Rightarrow \quad u_C = 2X\,\frac{a}{EA}$$

Sauva EC: $$a(\overbrace{u_C}^{=2X\frac{a}{EA}} - \overbrace{u_E}^{(-2X+P)\frac{a}{EA}}) - a(\overbrace{v_C}^{=0} - \overbrace{v_E}^{\text{kts.ed}}) = S_{EC}\,\frac{2a^2}{EA} = -2\sqrt{2}X\,\frac{a^2}{EA} \quad \Big\| \cdot \frac{EA}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad (7+4\sqrt{2})X - (3+2\sqrt{2})P = 0$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{3+2\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}}P \approx 0.4605\,P$$

Sauvavoimat:

$S_{EC} = -\sqrt{2}X \approx -0.6512\,P$, $\qquad S_{BC} = X \approx 0.4605\,P$,

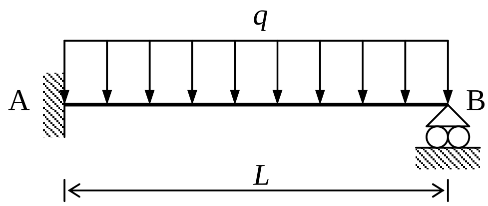
$S_{BE} = P$, $\qquad S_{AB} = X \approx 0.4605\,P$,

$S_{AE} = \sqrt{2}(X - P) \approx -0.7630\,P$, $\qquad S_{ED} = -2X + P \approx 0.079\,P$,

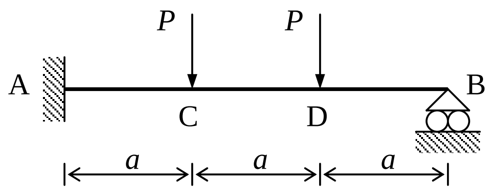
$S_{AD} = P - X \approx 0.5395\,P$.

2. Määritä voimamenetelmällä oheisten palkkien tukireaktiot, taivutusmomentin lauseke ja $M-$kuvio. Palkkien taivutusjäykkyys on EI.

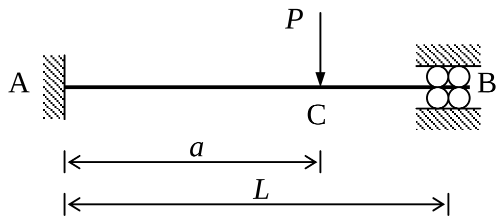
(a)



(b)



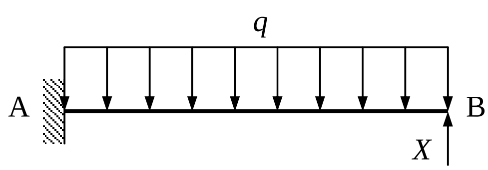
(c)



Ratkaisu:

(a) Staattisen määräämättömyyden kertaluku: $n_s = t - c - 3 = 4 - 0 - 3 = 1$. Valitaan staattisesti määräämättömäksi suureeksi tuen B pystytukireaktio eli $X = B_y$.

SMPM:

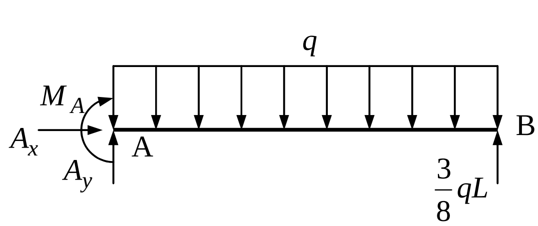


Yhteensopivuusehto: $v_B = 0$.

Pisteen B taipuma kuormasta q on: $v_B^0 = \frac{1}{8}\frac{qL^4}{EI}$ ja kuormasta X: $v_B^X = -\frac{1}{3}\frac{XL^3}{EI}$. Yhteensopivuusehdon mukaan

$$v_B = v_B^0 + v_B^X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8}\frac{qL^4}{EI} - \frac{1}{3}\frac{XL^3}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{3}{8}qL$$

Muut tukireaktiot palkin VKK:n avulla:



$$\longrightarrow \quad A_x = 0$$

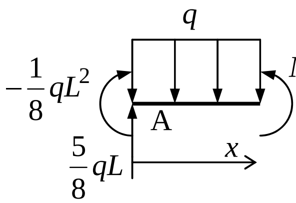
$$\uparrow \quad A_y + \frac{3}{8}qL - qL = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = \frac{5}{8}qL$$

$$\circlearrowleft \text{A} \quad M_A + \frac{1}{2}qL^2 - \frac{3}{8}qL^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -\frac{1}{8}qL^2$$

Taivutusmomentti:

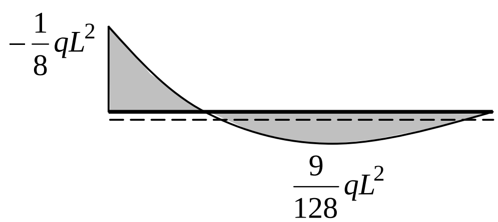
VKK, Väli AB:



$$M = \frac{5}{8}qLx - \frac{1}{8}qL^2 - \frac{1}{2}qx^2$$

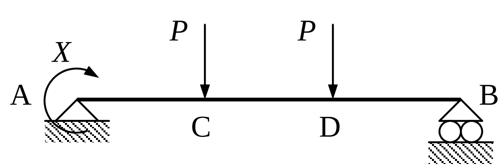
$$= qL^2(-\frac{1}{2}(\frac{x}{L})^2 + \frac{5}{8}\frac{x}{L} - \frac{1}{8})$$

$M -$ kuvio



(b) Staattisen määräämättömyyden kertaluku: $n_s = t - c - 3 = 4 - 0 - 3 = 1$. Valitaan staattisesti määräämättömäksi suureeksi tuen A tukimomentti eli $X = M_A$.

SMPM:



Yhteensopivuusehto: $\varphi_A = 0$.

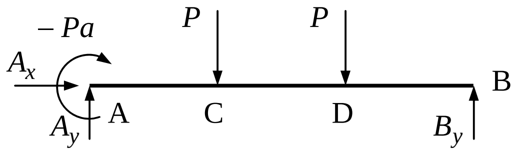
Pisteen A kiertymä pistekuormista P ja kuormasta X on:

$$\varphi_A^0 = \frac{P \cdot a \cdot 2a \cdot (3a + 2a)}{6 \cdot 3a \cdot EI} + \frac{P \cdot 2a \cdot a \cdot (3a + a)}{6 \cdot 3a \cdot EI} = \frac{Pa^2}{EI} , \qquad \varphi_A^X = \frac{Xa}{EI} .$$

Yhteensopivuusehdon mukaan

$$\varphi_A = \varphi_A^0 + \varphi_A^X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Pa^2}{EI} + \frac{Xa}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -Pa$$

Muut tukireaktiot palkin VKK:n avulla:



$\curvearrowleft A \quad -Pa + P \cdot a + P \cdot 2a - B_y \cdot 3a = 0$

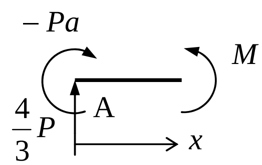
$\Rightarrow \quad B_y = \dfrac{2}{3}P$

$\longrightarrow \quad A_x = 0$

$\uparrow \quad A_y - P - P + \dfrac{2}{3}P = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \dfrac{4}{3}P$

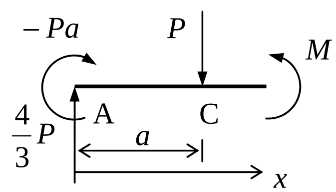
Taivutusmomentti:

VKK, Väli AC:



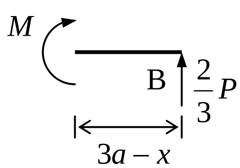
$$M = \frac{4}{3}Px - Pa$$

VKK, Väli CD:



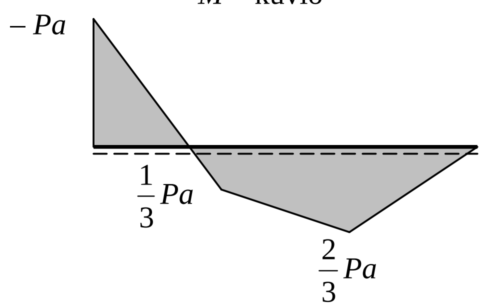
$$M = \frac{4}{3}Px - Pa - P(x-a) = \frac{1}{3}Px$$

VKK, Väli DB:



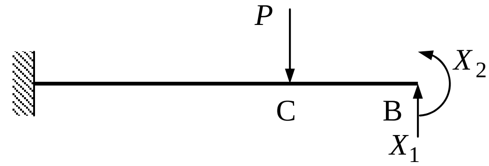
$$M = \frac{2}{3}P(3a-x) = 2Pa - \frac{2}{3}Px$$

$M -$ kuvio



(c) Staattisen määräämättömyyden kertaluku: $n_s = t - c - 3 = 5 - 0 - 3 = 2$. Valitaan staattisesti määräämättömiksi suureiksi tuen B pystytukireaktio ja tuen B tukimomentti eli $X_1 = B_y$ ja $X_2 = M_B$.

SMPM:



Yhteensopivuusehdot: $v_B = 0$ ja $\varphi_B = 0$.

Pisteen B taipuma kuormista P, X_1 ja X_2 on

$$v_B^0 = \frac{1}{6}\frac{Pa^3}{EI}(3\frac{L}{a} - 1), \qquad v_B^{X_1} = -\frac{1}{3}\frac{X_1 L^3}{EI}, \qquad v_B^{X_2} = -\frac{1}{2}\frac{X_2 L^2}{EI}.$$

Pisteen B kiertymä kuormista P, X_1 ja X_2 on

$$\varphi_B^0 = \frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI}, \qquad \varphi_B^{X_1} = -\frac{1}{2}\frac{X_1 L^2}{EI}, \qquad \varphi_B^{X_2} = -\frac{X_2 L}{EI}.$$

Yhteensopivuusehtojen mukaan

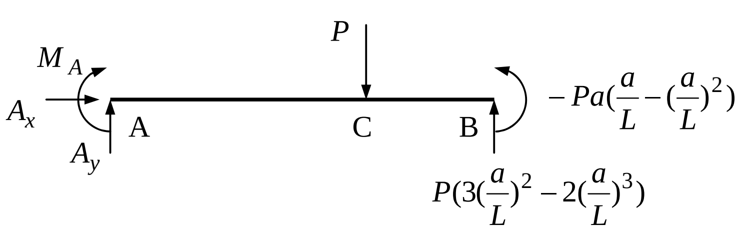
$$v_B = v_B^0 + v_B^{X_1} + v_B^{X_2} = 0$$
$$\varphi_B = \varphi_B^0 + \varphi_B^{X_1} + \varphi_B^{X_2} = 0$$

Yhtälöpari staattisesti määräämättömille suureille:

$$-\frac{1}{3}\frac{X_1 L^3}{EI} - \frac{1}{2}\frac{X_2 L^2}{EI} = -\frac{1}{6}\frac{Pa^3}{EI}(3\frac{L}{a} - 1)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{X_1 L^2}{EI} - \frac{X_2 L}{EI} = -\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI}$$

Ratkaisuna saadaan: $X_1 = P(3(\frac{a}{L})^2 - 2(\frac{a}{L})^3)$, $\qquad X_2 = -Pa(\frac{a}{L} - (\frac{a}{L})^2)$.

Muut tukireaktiot palkin VKK:n avulla:



$\longrightarrow \quad A_x = 0$

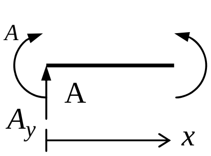
$$\curvearrowleft A \quad M_A + P\cdot a - P\left(3\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^3\right)\cdot L + Pa\left(\frac{a}{L} - \left(\frac{a}{L}\right)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_A = Pa\left(-1 + 2\frac{a}{L} - \left(\frac{a}{L}\right)^2\right)$$

$$\uparrow \quad A_y - P + P\left(3\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^3\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = P\left(1 - 3\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{L}\right)^3\right)$$

Taivutusmomentti:

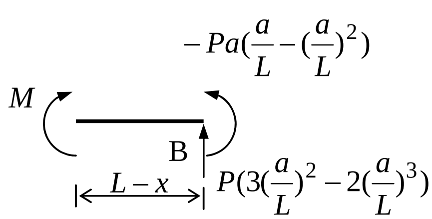
VKK, Väli AC:



$$M = M_A + A_y x$$
$$= Pa\left(-1 + 2\frac{a}{L} - \left(\frac{a}{L}\right)^2\right) + P\left(1 - 3\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{L}\right)^3\right)x$$

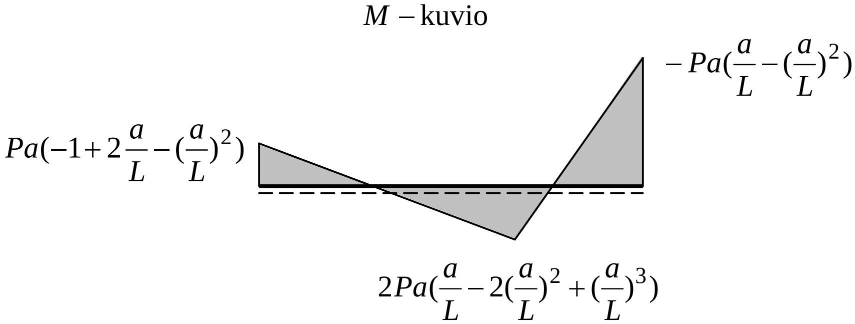
$$M_C = M(a) = 2Pa\left(\frac{a}{L} - 2\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \left(\frac{a}{L}\right)^3\right)$$

VKK, Väli CB:

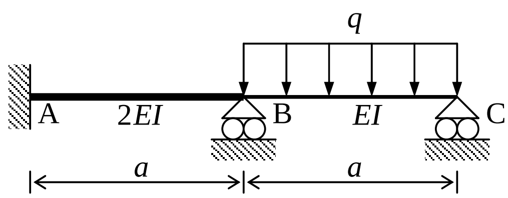


$$M = -Pa\left(\frac{a}{L} - \left(\frac{a}{L}\right)^2\right) + P\left(3\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^3\right)(L - x)$$
$$= Pa\left(2\frac{a}{L} - \left(\frac{a}{L}\right)^2\right) - Pa\left(3\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^3\right)x$$

M – kuvio



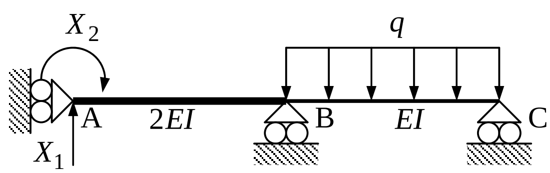
3. Määritä voimamenetelmää ja momenttipintamenetelmää käyttäen oheisen kaksiaukkoisen palkin taivutusmomenttikuvio.



Ratkaisu:

Staattisen määräämättömyyden kertaluku: $n_s = t - c - 3 = 5 - 0 - 3 = 2$. Valitaan staattisesti määräämättömiksi suureiksi tuen A pystytukireaktio ja tuen A tukimomentti eli $X_1 = A_y$ ja $X_2 = M_A$.

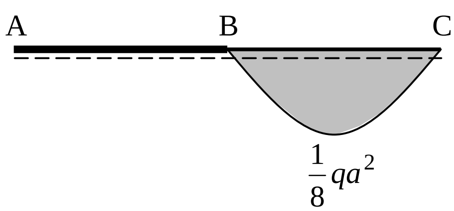
SMPM:



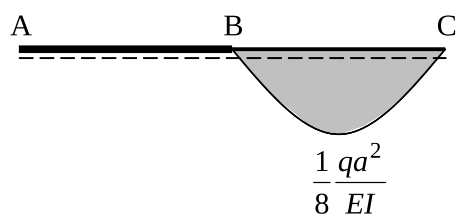
Yhteensopivuusehdot: $v_A = 0$ ja $\varphi_A = 0$.

Määritetään pisteen A taipuma ja kiertymä kuormasta q momenttipintamenetelmällä.

M – kuvio



κ – kuvio



$$\overbrace{v_C}^{=0} - \overbrace{v_B}^{=0} = \varphi_B \overbrace{(x_C - x_B)}^{=a} - M_C \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = \frac{M_{BC}}{a}$$

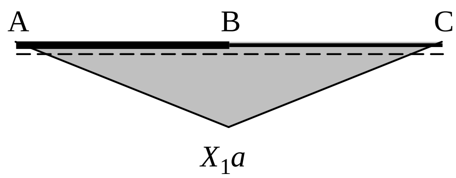
$$M_{BC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} qa^2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{24} \frac{qa^4}{EI} \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI}$$

$$\varphi_B - \varphi_A = -A_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} \equiv \varphi_A^0$$

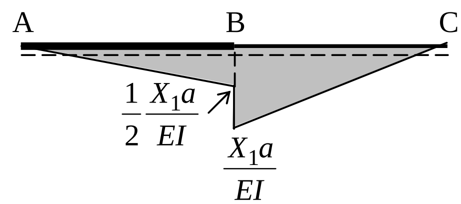
$$\overbrace{v_B}^{=0} - v_A = \overbrace{\varphi_A}^{= \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI}} \overbrace{(x_B - x_A)}^{=a} - \overbrace{M_{AB}}^{=0} \quad \Rightarrow \quad v_A = -\frac{1}{24} \frac{qa^4}{EI} \equiv v_A^0 .$$

Määritetään pisteen A taipuma ja kiertymä kuormasta X_1.

M – kuvio



κ – kuvio



$$\varphi_B = \frac{M_{BC}}{a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{X_1 a}{EI}\cdot a\cdot\frac{2a}{3} = \frac{1}{3}\frac{X_1 a^2}{EI}$$

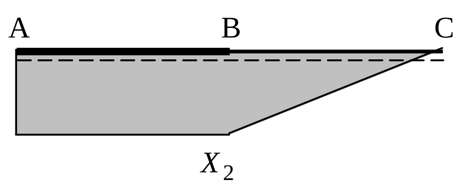
$$\varphi_B - \varphi_A = -A_{AB} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{X_1 a}{EI}\cdot a = -\frac{1}{4}\frac{X_1 a^2}{EI} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_A = (\frac{1}{4}+\frac{1}{3})\frac{X_1 a^2}{EI} = \frac{7}{12}\frac{X_1 a^2}{EI} \equiv \varphi_A^{X_1}$$

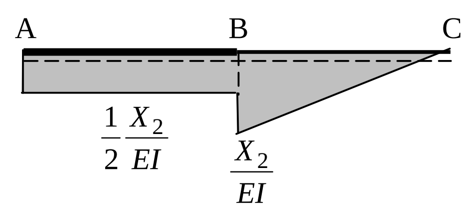
$$v_A = -\varphi_A \cdot a + M_{AB} = -\frac{7}{12}\frac{X_1 a^2}{EI}\cdot a + \frac{1}{4}\frac{X_1 a^2}{EI}\cdot\frac{a}{3} = -\frac{1}{2}\frac{X_1 a^3}{EI} \equiv v_A^{X_1}$$

Määritetään pisteen A taipuma ja kiertymä kuormasta X_2.

M – kuvio



κ – kuvio



$$\varphi_B = \frac{M_{BC}}{a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{X_2}{EI}\cdot a\cdot\frac{2a}{3} = \frac{1}{3}\frac{X_2 a}{EI}$$

$$\varphi_B - \varphi_A = -A_{AB} = -\frac{1}{2}\frac{X_2}{EI}\cdot a = -\frac{1}{2}\frac{X_2 a}{EI} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_A = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{X_2 a}{EI} = \frac{5}{6}\frac{X_2 a}{EI} \equiv \varphi_A^{X_2}$$

$$v_A = -\varphi_A \cdot a + M_{AB} = -\frac{5}{6}\frac{X_2 a}{EI}\cdot a + \frac{1}{2}\frac{X_2 a}{EI}\cdot\frac{a}{2} = -\frac{7}{12}\frac{X_2 a^2}{EI} \equiv v_A^{X_2}$$

Yhteensopivuusehtojen mukaan

$$v_A = v_A^0 + v_A^{X_1} + v_A^{X_2} = 0$$

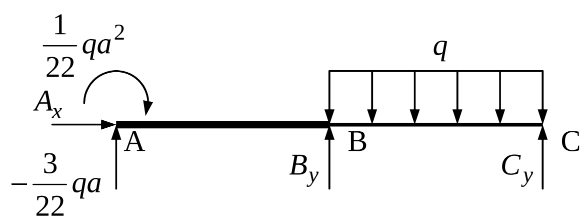
$$\varphi_A = \varphi_A^0 + \varphi_A^{X_1} + \varphi_A^{X_2} = 0$$

Yhtälöpari staattisesti määräämättömille suureille:

$$-\frac{1}{2}\frac{X_1 a^3}{EI}-\frac{7}{12}\frac{X_2 a^2}{EI}=\frac{1}{24}\frac{qa^4}{EI}$$
$$\frac{7}{12}\frac{X_1 a^2}{EI}+\frac{5}{6}\frac{X_2 a}{EI}=-\frac{1}{24}\frac{qa^3}{EI}$$

Ratkaisuna saadaan: $X_1=-\frac{3}{22}qa$, $X_2=\frac{1}{22}qa^2$.

Muut tukireaktiot palkin VKK:n avulla:



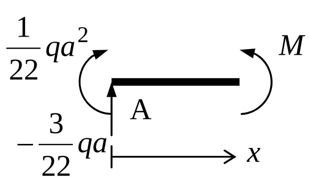
$$\longrightarrow \quad A_x=0$$

$$\curvearrowright \text{B} \quad -\frac{3}{22}qa\cdot a+\frac{1}{22}qa^2+q\cdot a\cdot\frac{a}{2}-C_y\cdot a=0 \quad\Rightarrow\quad C_y=\frac{9}{22}qa$$

$$\uparrow \quad -\frac{3}{22}qa+B_y-q\cdot a+\frac{9}{22}qa=0 \quad\Rightarrow\quad B_y=\frac{8}{11}qa$$

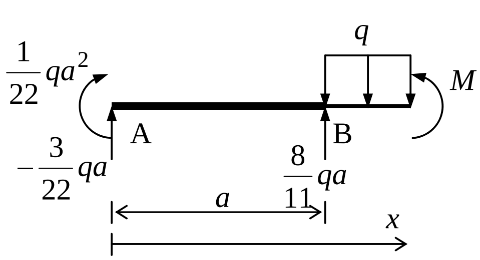
Taivutusmomentti:

VKK, Väli AB:



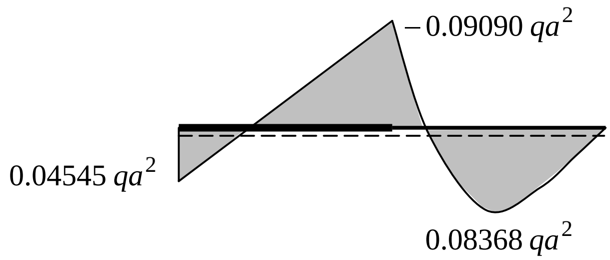
$$M=\frac{1}{22}qa^2-\frac{3}{22}qa\cdot x=\frac{qa^2}{22}(1-3\frac{x}{a})$$
$$M_B=M(a)=-\frac{1}{11}qa^2$$

VKK, Väli BC:



$$M=\frac{1}{22}qa^2-\frac{3}{22}qa\cdot x+\frac{8}{11}qa\cdot(x-a)+$$
$$-q\cdot(x-a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}$$
$$=\frac{qa^2}{22}(-26+35\frac{x}{a}-11(\frac{x}{a})^2)$$

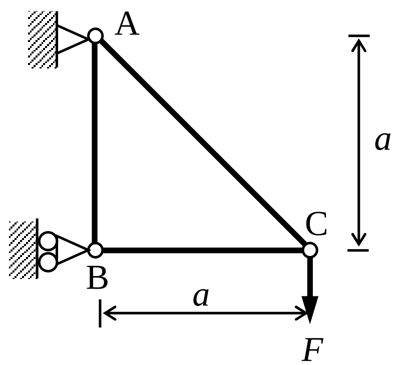
M − kuvio



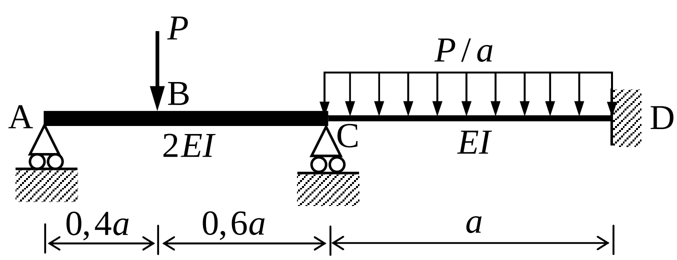
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 5:

1. Määritä elementtimenetelmällä oheisen tasoristikon nivelten siirtymät ja sauvavoimat. Ristikon sauvojen poikkipinta-ala on A ja kimmomoduuli on E.



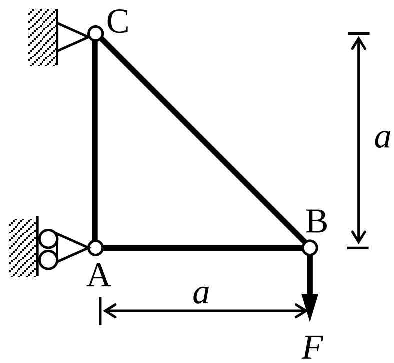
2. Määritä elementtimenetelmällä oheisen palkin kiertymät pisteissä A ja C, taivutusmomenttien arvot pisteissä A, C ja D sekä taivutusmomenttikuvio käyttäen kahta palkkielementtiä.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, 2008

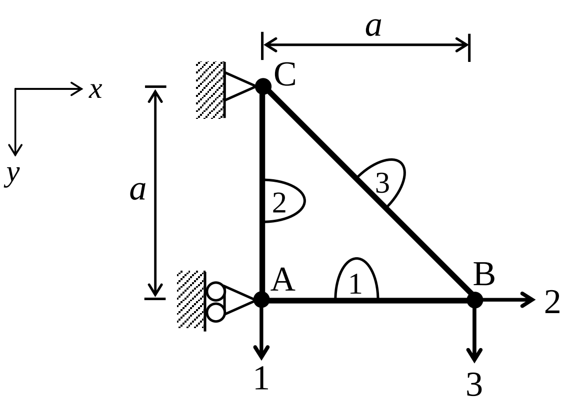
Harjoitus 5:

1. Määritä elementtimenetelmällä oheisen tasoristikon nivelten siirtymät ja sauvavoimat. Ristikon sauvojen poikkipinta-ala on A ja kimmomoduuli on E .



Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausasteet:

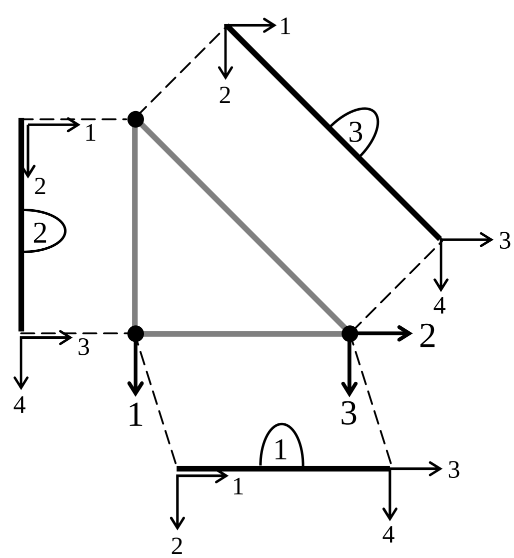


Elementtien pituudet ja kaltevuuskulmat:

$L^1 = a,\ L^2 = a,\ L^3 = a\sqrt{2},$

$\alpha^1 = 0,\ \alpha^2 = 90°,\ \alpha^3 = 45°$

Vapausasteyhteydet:



Rakenteen jäykkyysmatriisin alkioiden kokoaminen:

$$K_{11} = K_{22}^1 + K_{44}^2 = \frac{EA}{L^1}\sin^2\alpha^1 + \frac{EA}{L^2}\sin^2\alpha^2 = \frac{EA}{a}\cdot\overbrace{\sin^2 0°}^{0} + \frac{EA}{a}\overbrace{\sin^2 90°}^{1} = \underline{\frac{EA}{a}}$$

$$K_{12} = K_{23}^1 = \frac{EA}{L^1}(-\sin\alpha^1)\cos\alpha_1 = \frac{EA}{L^1}\overbrace{(-\sin 0°)}^{0}\cos 0° = \underline{0}$$

$$K_{13} = K_{24}^1 = \frac{EA}{L^1}\sin^2\alpha^1 = \frac{EA}{L^1}\overbrace{\sin^2 0°)}^{0} = \underline{0}$$

$K_{21} = K_{12} = \underline{0}$, (Rakenteen jäykkyysmatriisi on symmetrinen.)

$$K_{22} = K_{33}^1 + K_{33}^3 = \frac{EA}{L^1}\cos^2\alpha^1 + \frac{EA}{L^3}\cos^2\alpha^3 = \frac{EA}{a}\cos^2 0° + \frac{EA}{a\sqrt{2}}\cos^2 45° = \underline{\frac{EA}{a}(1+\frac{\sqrt{2}}{4})}$$

$$K_{23} = K_{34}^1 + K_{34}^3 = \frac{EA}{L^1}\sin\alpha^1\cos\alpha^1 + \frac{EA}{L^3}\sin\alpha^3\cos\alpha^3 = \frac{EA}{a}\sin 0°\cos 0° + \frac{EA}{a\sqrt{2}}\sin 45°\cos 45°$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{EA}{a}}$$

$K_{31} = K_{13} = \underline{0}$ (Rakenteen jäykkyysmatriisi on symmetrinen.)

$K_{32} = K_{23} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{EA}{a}}$ (Rakenteen jäykkyysmatriisi on symmetrinen.)

$$K_{33} = K_{44}^1 + K_{44}^3 = \frac{EA}{L^1}\sin^2\alpha^1 + \frac{EA}{L^3}\sin^2\alpha^3 = \frac{EA}{a}\sin^2 0° + \frac{EA}{a\sqrt{2}}\sin^2 45° = \underline{\frac{EA}{a}\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Rakenteen jäykkyysmatriisi:

$$[K] = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Rakenteen kuormitustermivektori:

$$FK_1 = 0,\ FK_2 = 0,\ FK_3 = 0 \ \Rightarrow\ \{FK\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vapausastekuormavektori:

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ P_3 = F \ \Rightarrow\ \{P\} = F\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$[K]\{a\}+\{FK\}=\{P\}$

$$\Leftrightarrow \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = F\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{Fa}{EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (1+\frac{\sqrt{2}}{4})a_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}a_3 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4}a_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}a_3 = \frac{Fa}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_3 = -(2\sqrt{2}+1)a_2 \\ a_2 + a_3 = 2\sqrt{2}\frac{Fa}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \underline{0} \\ a_2 = \underline{-\frac{Fa}{EA}} \\ a_3 = \underline{(2\sqrt{2}+1)\frac{Fa}{EA}} \end{cases}$$

Nivelten siirtymät:

$$v_\mathrm{A} = a_1 = \underline{\underline{0}},\ u_\mathrm{B} = a_2 = \underline{\underline{-\frac{Fa}{EA}}},\ v_\mathrm{B} = a_3 = \underline{\underline{(2\sqrt{2}+1)\frac{Fa}{EA}}}$$

Sauvavoimat:

$$S^1 = \frac{EA}{L^1}(-\cos\alpha^1 \overbrace{a_1^1}^{0} - \sin\alpha^1 \overbrace{a_2^1}^{a_1} + \cos\alpha^1 \overbrace{a_3^1}^{a_2} + \sin\alpha^1 \overbrace{a_4^1}^{a_3})$$

$$= \frac{EA}{a}(-\overbrace{\sin 0^\circ}^{0} a_1 + \overbrace{\cos 0^\circ}^{1} a_2 + \overbrace{\sin 0^\circ}^{0} a_3) = \frac{EA}{a}a_2 = \underline{-F}$$

$$S^2 = \frac{EA}{L^2}(-\cos\alpha^2 \overbrace{a_1^2}^{0} - \sin\alpha^2 \overbrace{a_2^2}^{0} + \cos\alpha^2 \overbrace{a_3^2}^{0} + \sin\alpha^2 \overbrace{a_4^2}^{a_1})$$

$$= \frac{EA}{a}\overbrace{\sin 90^\circ}^{1} a_1 = \underline{0}$$

$$S^3 = \frac{EA}{L^3}(-\cos\alpha^3 \overbrace{a_1^3}^{0} - \sin\alpha^2 \overbrace{a_2^3}^{0} + \cos\alpha^2 \overbrace{a_3^3}^{a_2} + \sin\alpha^3 \overbrace{a_4^3}^{a_3})$$

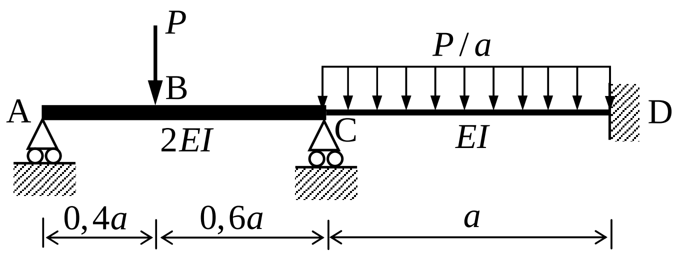
$$= \frac{EA}{a\sqrt{2}}(\cos 45^\circ a_2 + \sin 45^\circ a_3) = \frac{EA}{a\sqrt{2}}[\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{Fa}{EA}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1)\frac{Fa}{EA}] = \underline{F\sqrt{2}}$$

$$S_\mathrm{AB} = S^1 = \underline{\underline{-F}}$$

$$S_\mathrm{AC} = S^2 = \underline{\underline{0}}$$

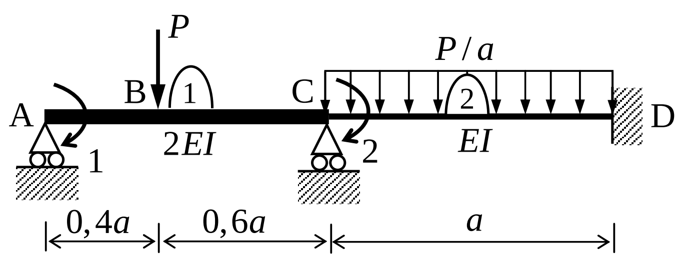
$$S_\mathrm{BC} = S^3 = \underline{\underline{F\sqrt{2}}}$$

2. Määritä elementtimenetelmällä oheisen palkin kiertymät pisteissä A ja C, taivutusmomenttien arvot pisteissä A, C ja D sekä taivutusmomenttikuviot käyttäen kahta palkkielementtiä.

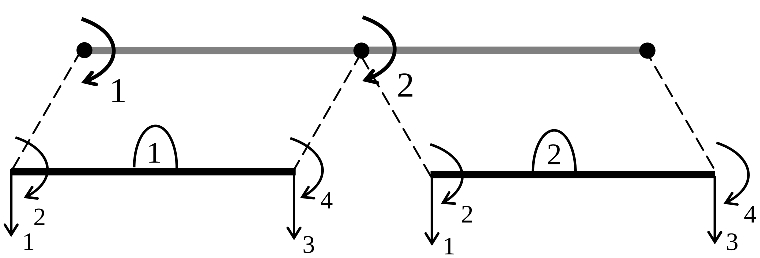


Ratkaisu:

Elementit ja systeemivapausasteet:



Vapausasteyhteydet:



Rakenteen jäykkyysmatriisin kokoaminen:

$$K_{11} = K_{22}^1 = \frac{2EI}{a^3} \cdot 4a^2 = 8\frac{EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{24}^1 = \frac{2EI}{a^3} \cdot 2a^2 = 4\frac{EI}{a}$$

$$K_{21} = K_{12} = 4\frac{EI}{a}$$

$$K_{33} = K_{44}^1 + K_{22}^2 = \frac{2EI}{a^3} \cdot 4a^2 + \frac{EI}{a^3} \cdot 4a^2 = 12\frac{EI}{a}$$

Rakenteen jäykkyysmatriisi:

$$[K] = \frac{EI}{a}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Rakenteen kuormitustermivektorin kokoaminen:

$$FK_1 = FK_2^1 = MK_1^1 = -\frac{P \cdot 0,4a \cdot (0,6a)^2}{a^2} = -\frac{18}{125} Pa$$

$$FK_2 = FK_4^1 + FK_2^2 = MK_2^1 + MK_1^2 = \frac{P \cdot (0,4a)^2 \cdot 0,6a}{a^2} - \frac{P / a \cdot a^2}{12} = (\frac{12}{125} - \frac{1}{12})Pa = \frac{19}{1500} Pa$$

Rakenteen kuormitustermivektori:

$$\{FK\} = \frac{Pa}{1500} \begin{Bmatrix} -216 \\ 19 \end{Bmatrix}$$

Vapausastekuormat:

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0$$

Vapausastekuormavektori:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{a}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \frac{Pa}{1500}\begin{Bmatrix} -216 \\ 19 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1500}\begin{Bmatrix} 216 \\ -19 \end{Bmatrix}\frac{Pa^2}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8 \cdot 12 - 4^2}\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}\frac{1}{1500}\begin{Bmatrix} 216 \\ -19 \end{Bmatrix}\frac{Pa^2}{EI} = \frac{1}{120000}\begin{Bmatrix} 2668 \\ -1016 \end{Bmatrix}\frac{Pa^2}{EI}$$

$$= \underline{\frac{1}{30000}\begin{Bmatrix} 667 \\ -254 \end{Bmatrix}\frac{Pa^2}{EI}}$$

Sauvanpäätaivutusmomentit:

Elementti 1:

Kuormitustermit:

$MK_1^1 = -\frac{18}{125} Pa,\ MK_2^1 = \frac{12}{125} Pa$ (Laskettin edellä.)

Vapausastevoimat:

Matriisilausekkeen

$$\{F\}^1 = [K]^1\{a\}^1 + \{FK\}^1$$

toisesta ja neljännestä yhtälöstä saadaan

$$F_2^1 = \frac{2EI}{a^3}(6a\cdot \overbrace{a_1^1}^{0} + 4a^2\cdot \overbrace{a_2^1}^{a_1} - 6a\cdot \overbrace{a_3^1}^{0} + 2a^2\cdot \overbrace{a_4^1}^{a_2}) + \overbrace{FK_2^1}^{MK_1^1} = \frac{EI}{a}(8\cdot a_1 + 4\cdot a_2) + MK_1^1$$

$$= 2(4\cdot\frac{667}{30000} - 2\cdot\frac{254}{30000})Pa - \frac{18}{125}Pa = \frac{4\cdot 667 - 2\cdot 254 - 120\cdot 18}{15000}Pa = \underline{0}$$

$$F_4^1 = \frac{2EI}{a^3}(6a\cdot \overbrace{a_1^1}^{0} + 2a^2\cdot \overbrace{a_2^1}^{a_1} - 6a\cdot \overbrace{a_3^1}^{0} + 4a^2\cdot \overbrace{a_4^1}^{\grave{a}_2}) + \overbrace{FK_4^1}^{MK_2^1} = \frac{EI}{a}(4\cdot a_1 + 8\cdot a_2) + MK_2^1$$

$$= 2(2\cdot\frac{667}{30000} - 4\cdot\frac{254}{30000})Pa + \frac{12}{125}Pa = \frac{2\cdot 667 - 4\cdot 254 + 120\cdot 12}{15000}Pa = \underline{\frac{293}{2500}Pa}$$

Sauvanpäätaivutusmomentit:

$$M_1^1 = F_2^1 = \underline{\underline{0 = M_\mathrm{A}}},\ M_2^1 = -F_4^1 = -\frac{293}{2500}Pa \approx \underline{\underline{-0{,}1172Pa = M_\mathrm{C}}}$$

<u>Elementti 2:</u>

Kuormitustermit:

$$MK_1^2 = -\frac{P/a\cdot a^2}{12} = -\frac{Pa}{12},\ MK_2^2 = \frac{P/a\cdot a^2}{12} = \frac{Pa}{12}$$

Vapausastevoimat:

Matriisilausekkeen

$$\{F\}^2 = [K]^2\{a\}^2 + \{FK\}^2$$

toisesta ja neljännestä yhtälöstä saadaan

$$F_2^2 = \frac{EI}{a^3}(6a\cdot \overbrace{a_1^2}^{0} + 4a^2\cdot \overbrace{a_2^2}^{a_2} - 6a\cdot \overbrace{a_3^2}^{0} + 2a^2\cdot \overbrace{a_4^2}^{0}) + \overbrace{FK_2^2}^{MK_1^1} = \frac{EI}{a}\cdot 4\cdot a_2 + MK_1^2$$

$$= -\frac{4\cdot 254}{30000}Pa - \frac{1}{12}Pa = -\frac{254 + 625}{7500}Pa = \underline{-\frac{293}{2500}Pa}$$

$$F_4^2 = \frac{EI}{a^3}(6a\cdot \overbrace{a_1^2}^{0} + 2a^2\cdot \overbrace{a_2^2}^{a_2} - 6a\cdot \overbrace{a_3^2}^{0} + 4a^2\cdot \overbrace{a_4^2}^{0}) + \overbrace{FK_4^1}^{MK_2^1} = \frac{EI}{a}\cdot 2\cdot a_2 + MK_2^2$$

$$= -2\cdot\frac{254}{30000}Pa + \frac{1}{12}Pa = \frac{-127 + 625}{7500}Pa = \underline{\frac{166}{2500}Pa}$$

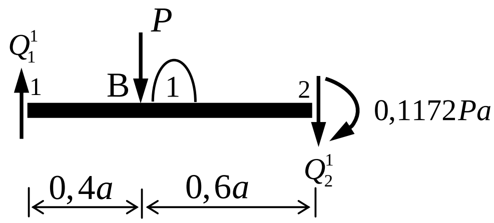
Sauvanpäätaivutusmomentit:

$$M_1^2 = F_2^2 = -\frac{293}{2500}Pa \approx \underline{\underline{-0{,}1172Pa = M_\mathrm{C}}},\ M_2^2 = -F_4^2 = -\frac{166}{2500}Pa \approx \underline{\underline{-0{,}0664Pa = M_\mathrm{D}}}$$

Taivutusmomentin määritys:

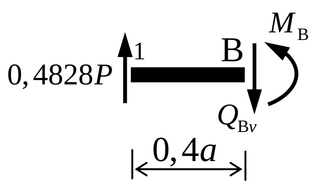
Koska määritimme edellä sauvanpäätaivutusmomenttien arvot, mutta emme sauvanpää-leikkausvoimia, voimme määrittää taivutusmomenttikuviot seuraavasti:

Määritetään sauvanpääleikkausvoima elementin 1 vasemmassa päässä:



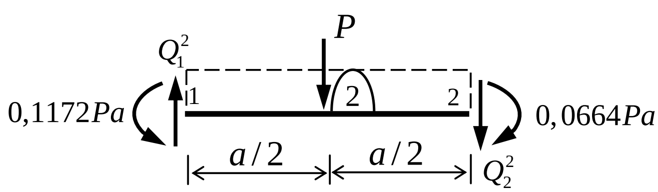
$$2 \quad Q_1^1 \cdot a - P \cdot 0,6a + 0,1772Pa = 0 \;\Rightarrow\; Q_1^1 = \underline{0,4828P}$$

Määritetään taivutusmomentin arvo pistekuorman P vaikutuskohdassa B:



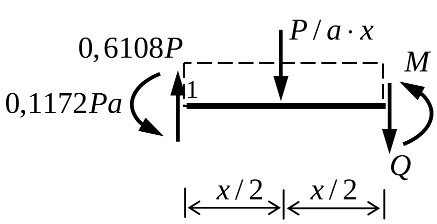
$$\mathrm{B} \quad M_{\mathrm{B}} - 0,4828P \cdot 0,4a = 0$$
$$\Rightarrow M_{\mathrm{B}} = \underline{0,1931Pa}$$

Määritetään sauvanpääleikkausvoima elementin 2 vasemmassa päässä:



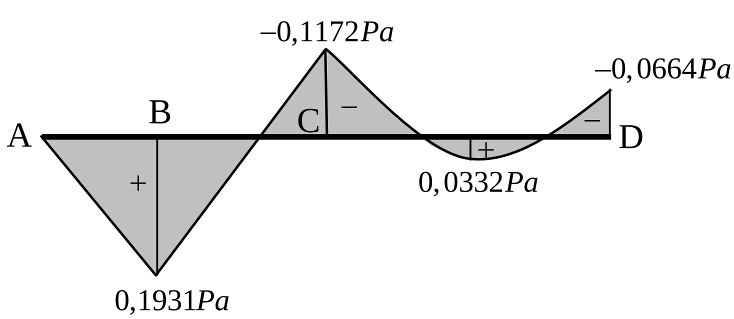
$$2 \quad Q_1^2 \cdot a - P \cdot 0,5a - 0,1172Pa + 0,0664Pa = 0 \;\Rightarrow\; Q_1^2 = \underline{0,5508P}$$

Määritetään taivutusmomentin lauseke välillä CD:



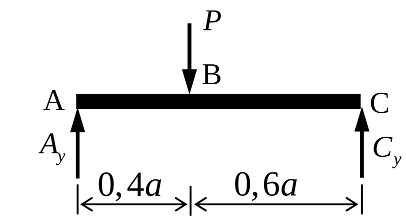
$$\mathrm{X} \quad M + 0,1172Pa - 0,5508P \cdot x + \frac{P}{a} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{M = -0,1172Pa + 0,5508Px - 0,5\frac{P}{a}x^2}$$

Taivutusmomenttikuvio:

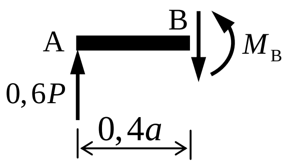


Toinen mahdollisuus määrittää taivutusmomenttikuvio on käyttää superpositioperiaatetta siten, että määritetään kummallekin sauvalle ensin pelkistä sauvanpäämomenteista aiheutuva (suoraviivainen) taivutusmomenttikuvio ja lisätään siihen vapaasti tuetun palkin taivutusmomenttikuvio:

Vapaasti tuetun sauvan AC taivutusmomentti pisteessä B:

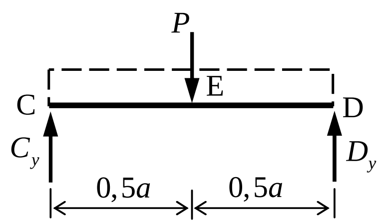


C: $-A_y \cdot a + P \cdot 0,6a = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 0,6P$

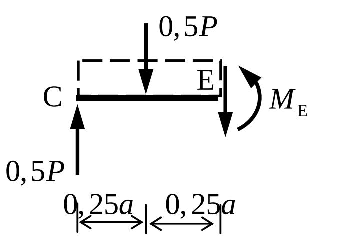


B: $M_B - 0,6P \cdot 0,4a = 0 \;\Rightarrow\; \underline{M_B = 0,24Pa}$

Vapaasti tuetun sauvan CD taivutusmomentti keskipisteessä E:



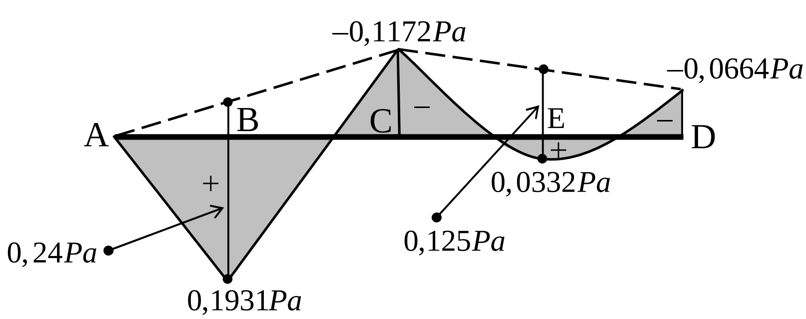
C: $-C_y \cdot a + P \cdot 0,5a = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 0,5P$



E: $M_E - 0,5P \cdot 0,5a + 0,5P \cdot 0,25a = 0$

$\Rightarrow\; \underline{M_E = 0,125Pa}$

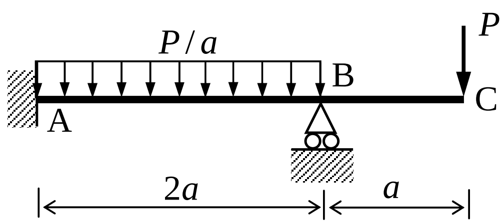
<u>Taivutusmomenttikuvio:</u>



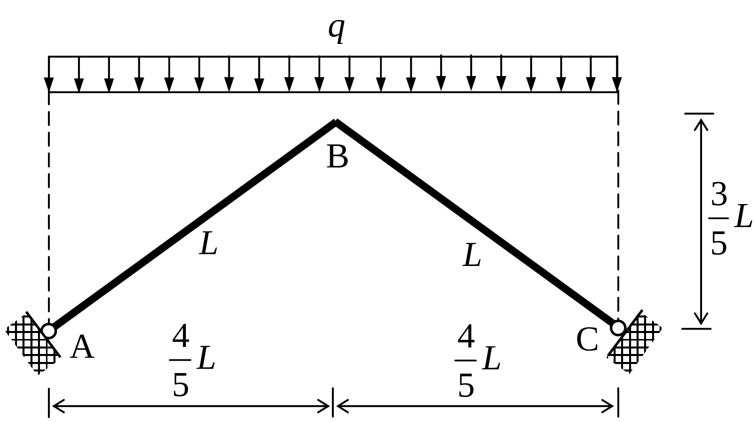
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 6:

1. Määritä elementtimenetelmällä oheisen palkin kiertymä pisteissä B, taipuma ja kiertymä pisteessä C sekä taivutusmomentti ja leikkausvoima pisteessä A. Palkin taivutusjäykkyys on EI .



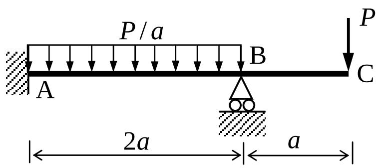
2. Oheista kehää ABC kuormittaa vaakatason pituutta kohti tasan jakautunut lumikuorma q. Sauvojen taivutusjäykkyys on EI ja aksiaalijäykkyys $EA = 2EI / L^2$. Määritä elementtimenetelmällä pystysiirtymä pisteissä B, normaalivoima ja leikkausvoima pisteessä A sekä taivutusmomentti pisteessä B.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

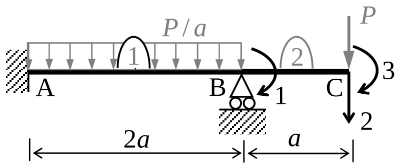
Harjoitus 6:

1. Määritä elementtimenetelmällä oheisen palkin kiertymä pisteissä B, taipuma ja kiertymä pisteessä C sekä taivutusmomentti ja leikkausvoima pisteessä A. Palkin taivutusjäykkyys on EI .

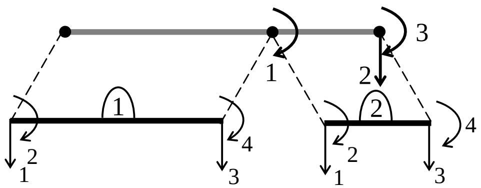


Ratkaisu:

<u>Elementit ja systeemivapausasteet:</u>



<u>Vapausasteyhteydet:</u>



<u>Rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin kokoaminen:</u>

$$K_{11} = K_{44}^1 + K_{22}^2 = \frac{EI}{(2a)^3} \cdot 4 \cdot (2a)^2 + \frac{EI}{a^3} \cdot 4a^2 = 6\frac{EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{23}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot (-6a) = -6\frac{EI}{a^2} = K_{21},\ K_{13} = K_{24}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot 2a^2 = 2\frac{EI}{a} = K_{31}$$

$$K_{22} = K_{33}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot 12 = 12\frac{EI}{a^3},\ K_{23} = K_{34}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot (-6a) = -6\frac{EI}{a^2} = K_{32}$$

$$K_{33} = K_{44}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot 4a^2 = 4\frac{EI}{a}$$

$$FK_1 = FK_4^1 + FK_2^2 = MK_2^1 + 0 = \frac{P / a \cdot (2a)^2}{12} = \frac{1}{3}Pa$$

$$FK_2 = FK_3^2 = 0$$

$$FK_3 = FK_4^2 = 0$$

<u>Rakenteen jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori:</u>

$$[K] = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 6a^2 & -6a & 2a^2 \\ -6a & 12 & -6a \\ 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix},\ \{FK\} = \frac{Pa}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

<u>Vapausastekuormavektori:</u>

$$P_1 = 0,\ P_2 = P,\ P_3 = 0 \ \Rightarrow\ \{P\} = P\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

<u>Yhtälöryhmä ja ratkaisu:</u>

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 6a^2 & -6a & 2a^2 \\ -6a & 12 & -6a \\ 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} + P\begin{Bmatrix} a/3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 6a^2 & -6a & 2a^2 \\ -6a & 12 & -6a \\ 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -a/3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases} 6aa_1 - 6a_2 + 2aa_3 = -\frac{1}{3}\frac{Pa^3}{EI} \\ -6aa_1 + 12a_2 - 6aa_3 = \frac{Pa^3}{EI} \\ 20aaa_1 - 6a_2 + 2aa_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} aa_1 \\ a_2 \\ aa_3 \end{Bmatrix} = \frac{Pa^3}{EI}\begin{Bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix} aa_1 \\ a_2 \\ aa_3 \end{Bmatrix} = \underline{\begin{Bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 5/6 \end{Bmatrix}\frac{Pa^3}{EI}}$$

<u>Kiertymät ja taipuma:</u>

$$\varphi_B = a_1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\frac{Pa^2}{EI}}},\ v_C = a_2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}\frac{Pa^3}{EI}}},\ \varphi_C = a_3 = \underline{\underline{\frac{5}{6}\frac{Pa^2}{EI}}}$$

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, harjoitukset

<u>Elementin 1 vapausastevoimat:</u>

$$F_1^1 = \frac{EI}{(2a)^3}(12\cdot\overbrace{a_1^1}^{0} + 6\cdot 2a\cdot\overbrace{a_2^1}^{0} - 12\cdot\overbrace{a_3^1}^{0} + 6\cdot 2a\cdot\overbrace{a_4^1}^{a_1}) + \overbrace{FK_1^1}^{VK_1^1} = \frac{EI}{8a^3}\cdot 12a\cdot a_1 - \frac{P/a\cdot 2a}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{EI}{a^2}\cdot\frac{1}{3}\frac{Pa^2}{EI} - P = -\frac{P}{\underline{2}}$$

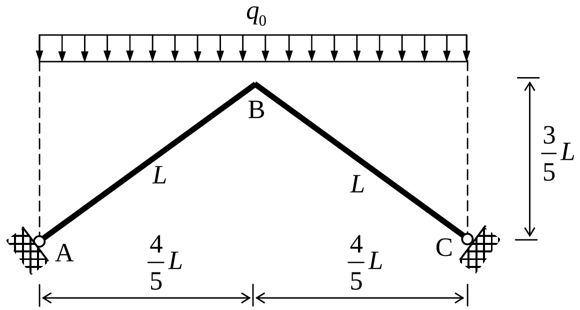
$$F_2^1 = \frac{EI}{(2a)^3}[6\cdot 2a\cdot\overbrace{a_1^1}^{0} + 4\cdot(2a)^2\cdot\overbrace{a_2^1}^{0} - 6\cdot 2a\cdot\overbrace{a_3^1}^{0} + 2\cdot(2a)^2\cdot\overbrace{a_4^1}^{a_1}] + \overbrace{FK_2^1}^{MK_1^1}$$

$$= \frac{EI}{8a^3}\cdot 8a^2\cdot a_1 - \frac{P/a\cdot(2a)^2}{12} = \frac{EI}{a}\cdot\frac{1}{3}\frac{Pa^2}{EI} - \frac{1}{3}Pa = \underline{0}$$

<u>Leikkausvoima ja taivutusmomentti pisteessä A:</u>

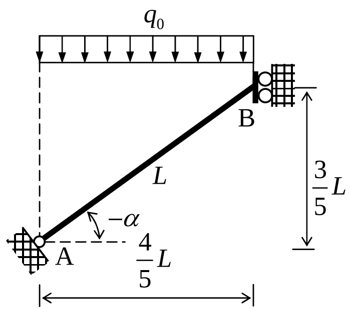
$$Q_A = Q_1^1 = -F_1^1 = \frac{P}{\underline{\underline{2}}},\quad M_A = M_1^1 = F_2^1 = \underline{\underline{0}}$$

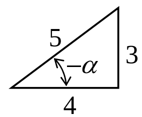
2. Oheista kehää ABC kuormittaa vaakatason pituutta kohti tasan jakautunut lumikuorma q_0. Sauvojen taivutusjäykkyys on EI ja aksiaalijäykkyys $EA = 2EI/L^2$. Määritä elementtimenetelmällä pystysiirtymä pisteissä B, normaalivoima ja leikkausvoima pisteessä A sekä taivutusmomentti pisteessä B.



Ratkaisu:

Koska rakenne ja kuormitus on keskipisteen kautta kulkevan pystyakselin suhteen symmetrinen, voidaan tarkastelu rajoittaa rakenteen vasempaan puoleen, joka on tuettu kuvan mukaisesti.

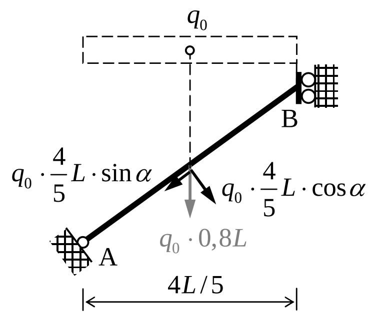




$$s = \sin\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$c = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

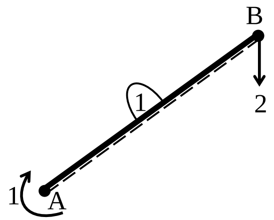
<u>Lumikuorman pitkittäis- ja poikittaiskomponentit *p* ja *q* sauvan pituutta kohti:</u>



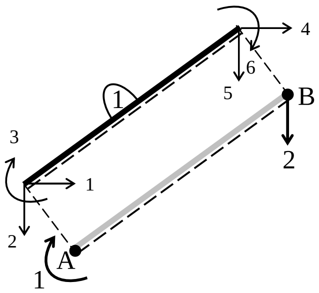
$$p = \frac{q_0\cdot 4L/5\cdot\sin\alpha}{L} = -\frac{12}{25}q_0$$

$$q = \frac{q_0\cdot 4L/5\cdot\cos\alpha}{L} = \frac{16}{25}q_0$$

Elementit (1 kpl) ja systeemivapausasteet:



Vapausasteyhteydet:



Rakenteen jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori:

$$K_{11} = K_{33}^1 = F = \underline{\frac{4EI}{L}}$$

$$K_{12} = K_{35}^1 = -E = -\frac{6EI}{L^2}c = -\frac{6EI}{L^2}\frac{4}{5} = \underline{-\frac{24}{5}\frac{EI}{L^2}} = K_{21}$$

$$K_{22} = K_{55}^1 = D = \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 = \frac{2EI}{L^3}(-\frac{3}{5})^2 + \frac{12EI}{L^3}(\frac{4}{5})^2 = \underline{\frac{42}{5}\frac{EI}{L^3}}$$

$\Rightarrow$

$$[K] = \frac{EI}{5L^3}\begin{bmatrix} 20L^2 & -24L \\ -24L & 42 \end{bmatrix}$$

$$FK_1 = FK_3^1 = MK_1 = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{16q_0/25}{12}L^2 = \underline{-\frac{4}{75}q_0L^2}$$

$$FK_2 = FK_5^1 = sUK_2 + cVK_2 = s(-\frac{pL}{2}) + c(-\frac{qL}{2})$$

$$= -\frac{3}{5}\frac{12q_0/25}{2}L + \frac{4}{5}(-\frac{16q_0/25}{2}L) = -\frac{18}{125}q_0L - \frac{32}{125}q_0L = \underline{-\frac{2}{5}q_0L}$$

$\Rightarrow$

$$\{FK\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{75}L \\ -\frac{2}{5} \end{Bmatrix} q_0L = -\frac{1}{75}\begin{Bmatrix} 4L \\ 30 \end{Bmatrix} q_0L$$

Vapausastekuormavektori:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\} \Leftrightarrow \frac{EI}{5L^3}\begin{bmatrix} 20L^2 & -24L \\ -24L & 42 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{75}\begin{Bmatrix} 4L \\ 30 \end{Bmatrix} q_0L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 20 & -24 \\ -24 & 42 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} La_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{Bmatrix} 4 \\ 30 \end{Bmatrix}\frac{q_0L^4}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} La_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{20\cdot 42 - 24^2}\begin{bmatrix} 42 & 24 \\ 24 & 20 \end{bmatrix}\frac{1}{15}\begin{Bmatrix} 4 \\ 30 \end{Bmatrix}\frac{q_0L^4}{EI} = \frac{1}{15\cdot 11}\begin{Bmatrix} 37 \\ 29 \end{Bmatrix}\frac{q_0L^4}{EI} = \frac{1}{165}\begin{Bmatrix} 37 \\ 29 \end{Bmatrix}\frac{q_0L^4}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{37}{165}\frac{q_0L^3}{EI} \approx 0{,}22424\frac{q_0L^3}{EI} \\ a_2 = \frac{29}{165}\frac{q_0L^4}{EI} \approx 0{,}17576\frac{q_0L^4}{EI} \end{cases}$$

Pisteen B pystysiirtymä:

$$v_{\mathrm{B}} = a_2 = \underline{\underline{\frac{29}{165}\frac{q_0L^4}{EI} \approx 0{,}1757\frac{q_0L^4}{EI}}}$$

Elementin 1 vapausastevoimia:

$$F_1^1 = \sum_{i=1}^{6} K_{1j}^1 a_j^1 + FK_1^1 = K_{13}^1 \overbrace{a_3^1}^{a_1} + K_{15}^1 \overbrace{a_5^1}^{a_2} + FK_1^1 = Ca_1 - Ba_2 + cUK_1 - sVK_1$$

$$= -\frac{6EI}{L^2}s\frac{37}{165}\frac{q_0L^3}{EI} - (\overbrace{\frac{EA}{L}}^{2EI/L^2} - \frac{12EI}{L^3})sc\frac{29}{165}\frac{q_0L^4}{EI} + c(-\frac{pL}{2}) - s(-\frac{qL}{2})$$

$$= (\frac{6\cdot 37}{5^2\cdot 11} - \frac{8\cdot 29}{5^2\cdot 11})q_0L = \frac{6\cdot 37 - 8\cdot 29}{11\cdot 5^2}q_0L = -\frac{2}{55}q_0L$$

$$F_2^1 = \sum_{i=1}^{6} K_{2j}^1 a_j^1 + FK_2^1 = K_{23}^1 \overbrace{a_3^1}^{a_1} + K_{25}^1 \overbrace{a_5^1}^{a_2} + FK_2^1 = Ea_1 - Da_2 + sUK_1 + cVK_1$$

$$= \frac{6EI}{L^2} c \frac{37}{165} \frac{q_0 L^3}{EI} - (\frac{\overbrace{EA}^{2EI/L^2}}{L} s^2 + \frac{12EI}{L^3} c^2) \frac{29}{165} \frac{q_0 L^4}{EI} + s(-\frac{pL}{2}) + c(-\frac{qL}{2})$$

$$= (\frac{8 \cdot 37}{5^2 \cdot 11} - \frac{14 \cdot 29}{5^2 \cdot 11} - \frac{10}{5^2}) q_0 L = \frac{8 \cdot 37 - 14 \cdot 29 - 11 \cdot 10}{11 \cdot 5^2} q_0 L = -\frac{4}{5} q_0 L$$

$$F_6^1 = \sum_{i=1}^{6} K_{6j}^1 a_j^1 + FK_6^1 = K_{63}^1 \overbrace{a_3^1}^{a_1} + K_{65}^1 \overbrace{a_5^1}^{a_2} + FK_6^1 = Ga_1 - Ea_2 + MK_2$$

$$= \frac{2EI}{L} a_1 - \frac{6EI}{L^2} ca_2 + \frac{qL^2}{12} = \frac{2EI}{L} \cdot \frac{37}{165} \frac{q_0 L^3}{EI} - \frac{6EI}{L^2} c \cdot \frac{29}{165} \frac{q_0 L^4}{EI} + \frac{16}{25} q_0 \frac{L^2}{12}$$

$$= (\frac{74}{3 \cdot 5 \cdot 11} - \frac{8 \cdot 29}{5^2 \cdot 11} + \frac{4}{3 \cdot 5^2}) q_0 L^2 = \frac{5 \cdot 74 - 3 \cdot 8 \cdot 29 + 4 \cdot 11}{3 \cdot 5^2 \cdot 11} q_0 L^2 = \underline{-\frac{94}{275} q_0 L}$$

<u>Etsityt leikkausrasitukset:</u>

$$N_{\mathrm{A}} = N_1^1 = -cF_1^1 - sF_2^1 = -\frac{4}{5} \cdot (-\frac{2}{55} q_0 L) + \frac{3}{5} (-\frac{4}{5} q_0 L) = \frac{8 - 11 \cdot 12}{5^2 \cdot 11} q_0 L$$

$$= \underline{\underline{-\frac{124}{275} q_0 L \approx -0,4509 q_0 a}}$$

$$Q_{\mathrm{A}} = Q_1^1 = sF_1^1 - cF_2^1 = -\frac{3}{5} \cdot (-\frac{2}{55} q_0 L) - \frac{4}{5} (-\frac{4}{5} q_0 L) = \frac{6 + 11 \cdot 16}{5^2 \cdot 11} q_0 L$$

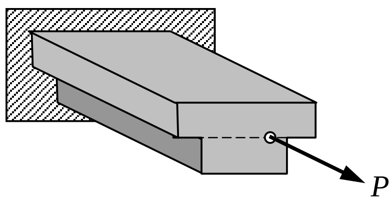
$$= \underline{\underline{\frac{182}{275} q_0 L \approx 0,6618 q_0 L}}$$

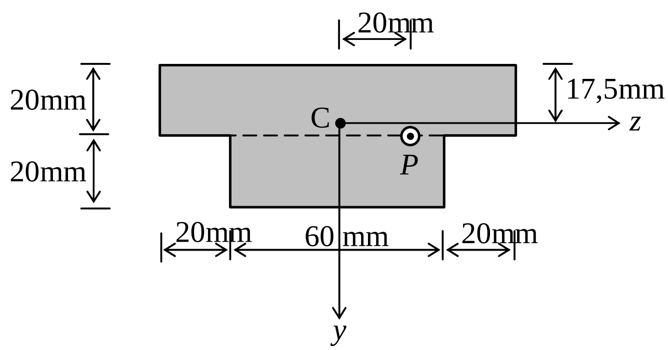
$$M_{\mathrm{B}} = -F_6^1 = \underline{\underline{\frac{94}{275} q_0 L^2 \approx 0,3418 q_0 L^2}}$$

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

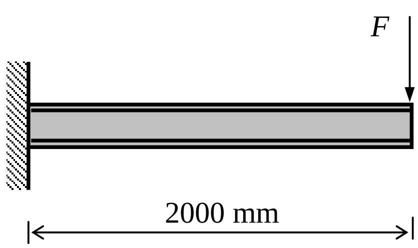
Harjoitus 7:

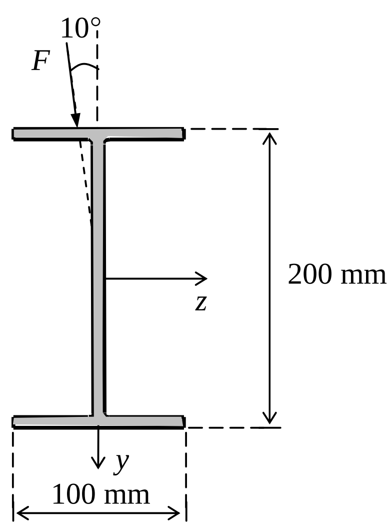
1. Oheiseen ulokepalkkiin vaikuttaa aksiaalinen vetovoima P kuvan mukaisesti. Määritä suurin sallittu voima P, jos vetojännitys palkissa ei saa ylittää 75MPa. Poikkileikkauksen pinta-ala ja jäyhyysmomentit ovat $A = 3200\text{mm}$, $I_y = 2,0267 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$ ja $I_z = 0,40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$



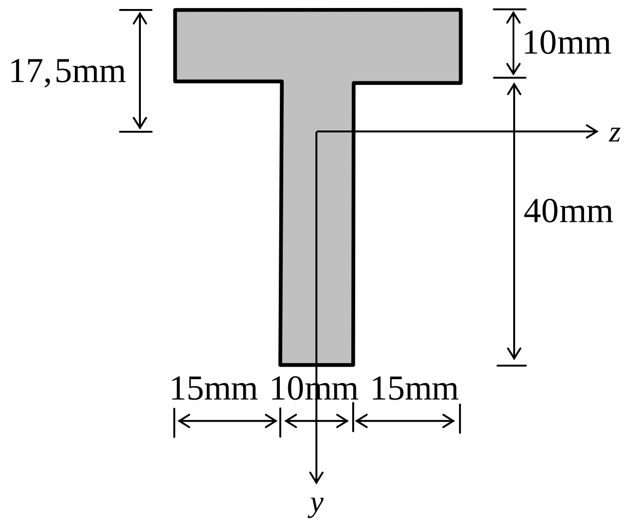


2. Kuumavalssatusta I-tangosta IPE200, jonka jäyhyysmomentit ovat $I_z = 19,4 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$ ja $I_y = 1,42 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$ on tehty uloke, jonka pituus on 2 m. Ulokkeen päässä on pistekuorma F. Määritä sallittu kuorma F_{sall} olettaen, että F on poikkileikkauksen symmetriatasossa, käyttäen varmuuslukua 2 myötöön nähden. Myötöraja on $\sigma_m = 340\ \text{N/mm}^2$. Mikä on varmuusluku, jos kuorma kääntyy 10° oheisen kuvan esittämällä tavalla ?





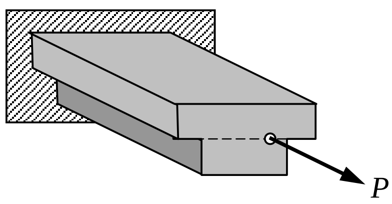
3. Määritä oheisen poikkileikkauksen sydänkuvio. Poikkileikkauksen pinta-ala ja jäyhyysmomentit ovat $A = 800\text{mm}^2$, $I_z = 18{,}167 \cdot 10^4\,\text{mm}^4$ ja $I_y = 5{,}667 \cdot 10^4\,\text{mm}^4$.

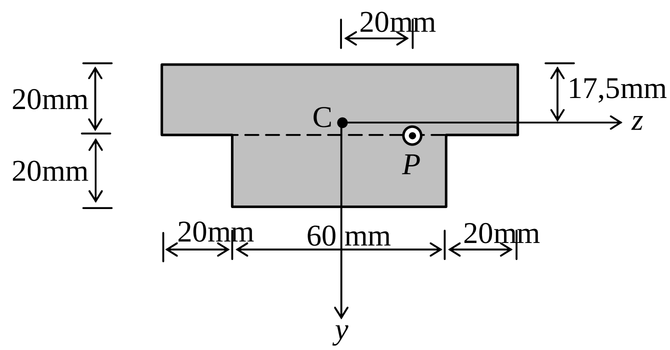


Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 7:

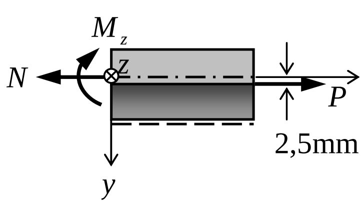
1. Oheiseen ulokepalkkiin vaikuttaa aksiaalinen vetovoima P kuvan mukaisesti. Määritä suurin sallittu voima P, jos vetojännitys palkissa ei saa ylittää 75MPa. Poikkileikkauksen pinta-ala ja jäyhyysmomentit ovat $A = 3200\text{mm}$, $I_y = 2,0267 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$ ja $I_z = 0,40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$

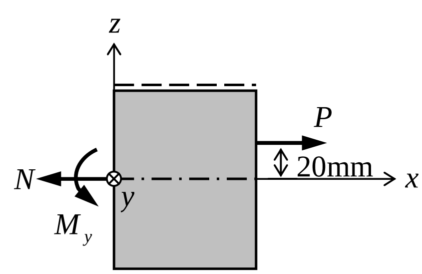




Ratkaisu:

Leikkausrasitukset:





$$\rightarrow \quad N - P = 0 \qquad \Rightarrow \quad N = P$$

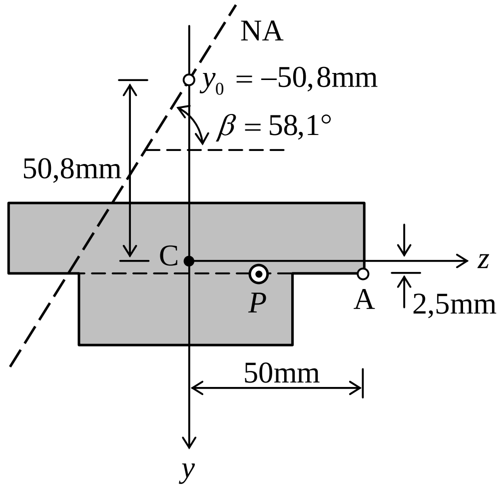
$$\otimes z \quad M_z - P \cdot 2,5\text{mm} = 0 \qquad \Rightarrow \quad M_z = P \cdot 2,5\text{mm}$$

$$\otimes y \quad -M_y + P \cdot 20\text{mm} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y = P \cdot 20\text{mm}$$

Neutraaliakseli:

$$y_0 = -\frac{I_y I_z - \overbrace{I_{yz}^2}^{0}}{M_z I_y - M_y \underbrace{I_{yz}}_{0}} \frac{N}{A} = -\frac{I_z}{M_z} \frac{N}{A} = -\frac{0,40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^4}{P \cdot 2,5\text{mm}} \frac{P}{3200\text{mm}^2} = -50,8\text{mm}$$

$$\beta = \arctan \frac{M_y I_z - M_z \overbrace{I_{yz}}^{0}}{M_z I_y - M_y \underbrace{I_{yz}}_{0}} = \arctan \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \arctan \frac{P \cdot 20\text{mm} \cdot 0,40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^4}{P \cdot 2,5\text{mm} \cdot 2,0267 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} = 58,1°$$



Itseisarvoltaan suurin normaalijännitys on pisteessä A, joka etäisyys neutraaliakselista on suurin:

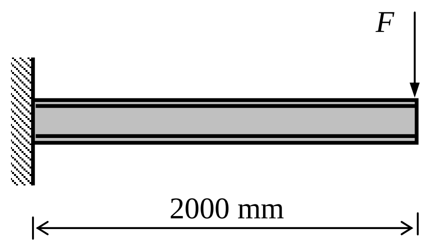
$$\sigma_{\max} \equiv \sigma_{\text{A}} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_{\text{A}} + \frac{M_y}{I_y} z_{\text{A}}$$

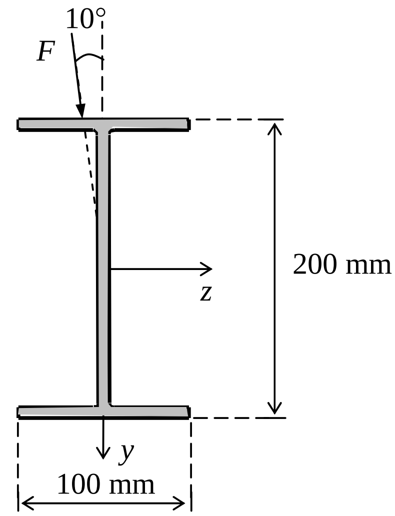
$$= \frac{P}{3200\text{mm}^2} + \frac{P \cdot 2,5\text{mm}}{0,40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^2} 2,5\text{mm} + \frac{P \cdot 20\text{mm}}{2,0267 \cdot 10^6\,\text{mm}^2} 50\text{mm} = \underline{8,213 \cdot 10^{-4}\,\frac{P}{\text{mm}^2}}$$

Suurin sallittu kuorma P:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{sall}} \iff 8,213 \cdot 10^{-4}\,\frac{P}{\text{mm}^2} = 75\,\frac{N}{\text{mm}^2} \Rightarrow P = \frac{75}{8,213} \cdot 10^4 N = 9,132 \cdot 10^4\,\text{N} = \underline{\underline{91,3\text{kN}}}$$

2. Kuumavalssatusta I-tangosta IPE200, jonka jäyhyysmomentit ovat $I_z = 19{,}4 \cdot 10^6$ mm^4 ja $I_y = 1{,}42 \cdot 10^6$ mm^4 on tehty uloke, jonka pituus on 2 m. Ulokkeen päässä on pistekuorma F. Määritä sallittu kuorma F_{sall} olettaen, että F on poikkileikkauksen symmetriatasossa, käyttäen varmuuslukua 2 myötöön nähden. Myötöraja on $\sigma_m = 340$ N/mm^2. Mikä on varmuusluku, jos kuorma kääntyy 10° oheisen kuvan esittämällä tavalla ?





Ratkaisu:

<u>Sallittu jännitys:</u>

$$\sigma_{\text{sall}} = \frac{\sigma_m}{n} = \frac{340}{2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 170 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} .$$

<u>Kuorma on symmetriatasossa eli F vaikuttaa y-akselin suuntaan:</u>

Taivutusmomentin arvo tuella on: $M_z = -F \cdot 2000\,\text{mm}$, $(M_y = 0)$

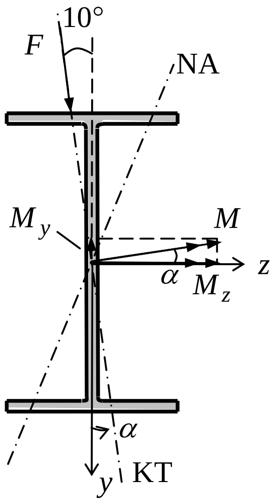
Reunajännitys:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\text{ylä}} = \frac{-F \cdot 2000 \text{ mm}}{19{,}4 \cdot 10^6 \text{mm}^4} \cdot (-100 \text{ mm}) = 0{,}010309 \cdot F \frac{1}{\text{mm}^2} \quad \text{(veto yläpinn.)}$$

Suurin sallittu kuorma:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{sall}} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{sall}} = F = \frac{170}{0{,}010309} \text{N} = \underline{\underline{16{,}49 \text{ kN}}} .$$

Kuormitus on kääntynyt $10°$ kuvan esittämällä tavalla:



Kuormitustason suuntakulma: $\alpha = 10°$

Taivutusmomentit: ($F = 16,49$ kN)

$M = -F \cdot 2000 \text{ mm} = -32,98 \text{ kNm}$

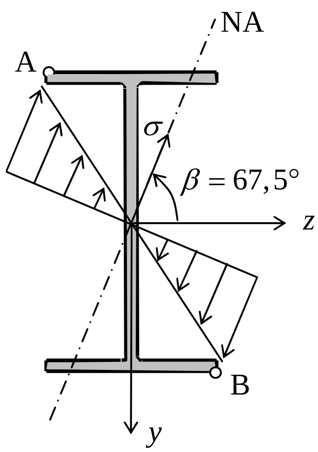
$M_z = M \cos\alpha = -32,98 \cdot \cos(10°)$

$= -32,48 \text{ kNm}$

$M_y = M \sin\alpha = -32,98 \cdot \sin(10°)$

$= -5,73 \text{ kNm}$

Neutraaliakselin suuntakulma: $\beta = \arctan \dfrac{M_y I_z}{M_z I_y} = \arctan \dfrac{-5,73 \cdot 19,4 \cdot 10^6}{-32,48 \cdot 1,42 \cdot 10^6} = 67,5°$



Kauimpana neutraaliakselista ovat pisteet A ja B.

Normaalijännitys saadaan lausekkeesta:

$$\sigma(y,z) = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Piste A $(y_A, z_A) = (-100 \text{ mm}, -50 \text{ mm})$:

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A = \frac{-32,48 \cdot 10^6}{19,4 \cdot 10^6} \cdot (-100) + \frac{-5,73 \cdot 10^6}{1,42 \cdot 10^6} \cdot (-50) = 369,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

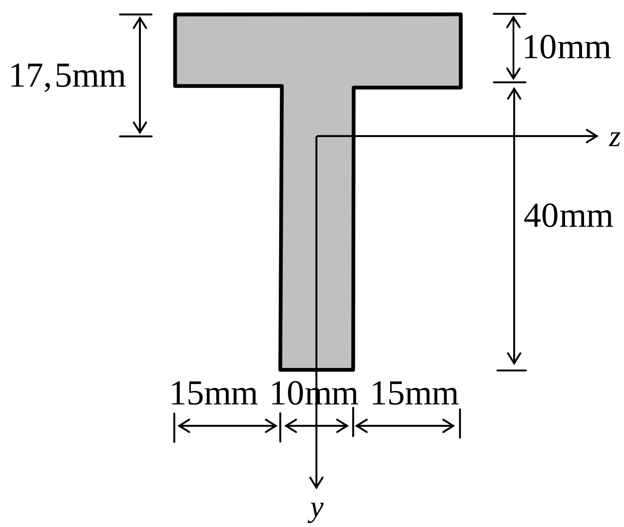
Piste B $(y_B, z_B) = (100 \text{ mm}, 50 \text{ mm})$:

$$\sigma_B = \frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B = \frac{-32,48 \cdot 10^6}{19,4 \cdot 10^6} \cdot 100 + \frac{-5,73 \cdot 10^6}{1,42 \cdot 10^6} \cdot 50 = -369,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -\sigma_A$$

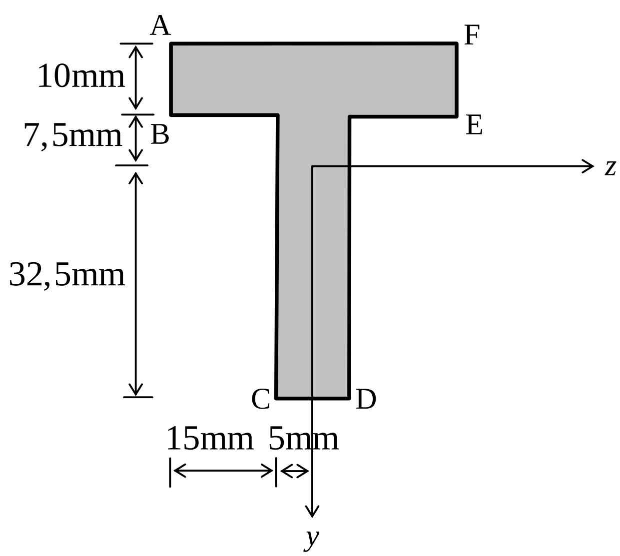
Varmuusluku:

$$n = \frac{\sigma_m}{\sigma_A} = \frac{340}{369,2} = 0,92 < 1 \quad \text{(Rakenne myötää !)}$$

3. Määritä oheisen poikkileikkauksen sydänkuvio. Poikkileikkauksen pinta-ala ja jäyhyysmomentit ovat $A = 800\text{mm}^2$, $I_z = 18{,}167 \cdot 10^4\,\text{mm}^4$ ja $I_y = 5{,}667 \cdot 10^4\,\text{mm}^4$.



Ratkaisu:



Nurkkien koordinaatteja:

$y_{\text{F}} = -17{,}5\text{mm},\ z_{\text{F}} = 20\text{mm}$

$y_{\text{A}} = -17{,}5\text{mm},\ z_{\text{A}} = -20\text{mm}$

$y_{\text{B}} = -7{,}5\text{mm},\ z_{\text{B}} = -20\text{mm}$

$y_{\text{C}} = 32{,}5\text{mm},\ z_{\text{C}} = -5\text{mm}$

$y_{\text{D}} = 32{,}5\text{mm},\ z_{\text{D}} = 5\text{mm}$

Neutraaliakselin yhtälö:

$$1 + \frac{y_{\text{P}}y}{I_z / A} + \frac{z_{\text{P}}z}{I_y / A} = 0 \;\Rightarrow\; 1 + \frac{y_{\text{P}}y}{18{,}167 \cdot 10^4\,\text{mm}^2 / 800} + \frac{z_{\text{P}}z}{5{,}667 \cdot 10^4\,\text{mm}^2 / 800} = 0$$

$$\Rightarrow\; 1 + \frac{y_{\text{P}}y}{227{,}083\text{mm}^2} + \frac{z_{\text{P}}z}{70{,}833\text{mm}^2} = 0$$

Pisteiden F ja A kautta kulkevaa neutraaliakselia vastaava sydänkuvion nurkkapiste 1:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{y_{\mathrm{F}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{F}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \\ 1+\dfrac{y_{\mathrm{A}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{-17,5\mathrm{mm}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{20\mathrm{mm}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \\ 1+\dfrac{-17,5\mathrm{mm}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{-20\mathrm{mm}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,07706y_{\mathrm{P}}-0,2823z_{\mathrm{P}}=1\mathrm{mm} \\ 0,07706y_{\mathrm{P}}+0,2823z_{\mathrm{P}}=1\mathrm{mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{\mathrm{P1}}\approx \underline{\underline{13,0\mathrm{mm}}} \\ z_{\mathrm{P1}}=\underline{\underline{0}} \end{cases}$$

Pisteiden A ja B kautta kulkevaa neutraaliakselia vastaava sydänkuvion nurkkapiste 2:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{y_{\mathrm{A}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \\ 1+\dfrac{y_{\mathrm{B}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \end{cases} \Rightarrow \text{ jne. } \Rightarrow \begin{cases} y_{\mathrm{P2}}=\underline{\underline{0}} \\ z_{\mathrm{P2}}\approx \underline{\underline{3,5\mathrm{mm}}} \end{cases}$$

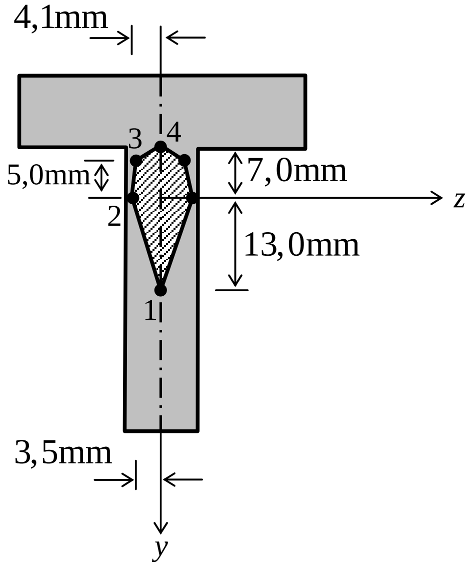
Pisteiden B ja C kautta kulkevaa neutraaliakselia vastaava sydänkuvion nurkkapiste 3:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{y_{\mathrm{B}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \\ 1+\dfrac{y_{\mathrm{C}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{C}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \end{cases} \Rightarrow \text{ jne. } \Rightarrow \begin{cases} y_{\mathrm{P3}}\approx \underline{\underline{-5,0\mathrm{mm}}} \\ z_{\mathrm{P3}}\approx \underline{\underline{4,1\mathrm{mm}}} \end{cases}$$

Pisteiden C ja D kautta kulkevaa neutraaliakselia vastaava sydänkuvion nurkkapiste 3:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{y_{\mathrm{C}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{C}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \\ 1+\dfrac{y_{\mathrm{D}}}{227,083\mathrm{mm}^2}y_{\mathrm{P}}+\dfrac{z_{\mathrm{D}}}{70,833\mathrm{mm}^2}z_{\mathrm{P}}=0 \end{cases} \Rightarrow \text{ jne. } \Rightarrow \begin{cases} y_{\mathrm{P4}}=\underline{\underline{-7,0\mathrm{mm}}} \\ z_{\mathrm{P4}}=\underline{\underline{0}} \end{cases}$$

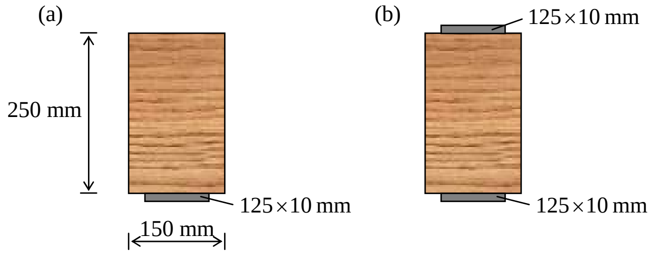
Sydänkuvio:



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

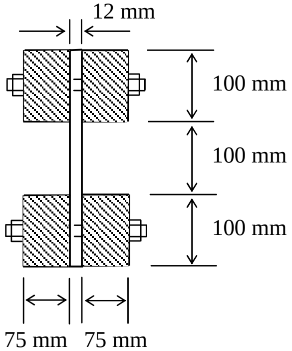
Harjoitus 8:

1. Puupalkkeja on vahvistettu (a) yhdellä ja (b) kahdella teräskappaleella oheisten kuvien osoittamalla tavalla. Määritä poikkileikkausten normaalijännitysjakaumat, kun poikkileikkauksiin kohdistuu 50 kNm:n suuruinen taivutusmomentti. Teräksen kimmomoduli on $200\,\text{GPa}$ ja puun $13\,\text{GPa}$.

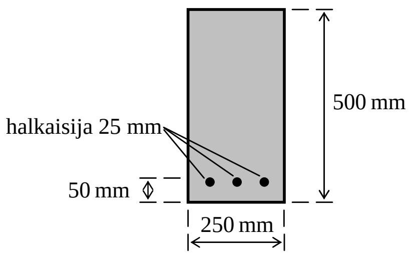


2. Oheinen palkki valmistetaan kiinnittämällä 75 x 100 mm^2 puurimat kiinni pulteilla 12 mm:n paksuiseen teräslevyyn. Pultteja, joiden halkaisija on 16 mm, on palkin pituussuunnassa 200 mm:n välein. Poikkileikkausta kuormittaa leikkausvoima $Q_y = 18\,\text{kN}$.

   Määritä (a) keskimääräinen leikkausjännitys pulteissa sekä (b) leikkausjännitys uuman keskikohdassa (*z*-akselilla). Puun kimmomoduli on 13 GPa ja teräksen 200 GPa.



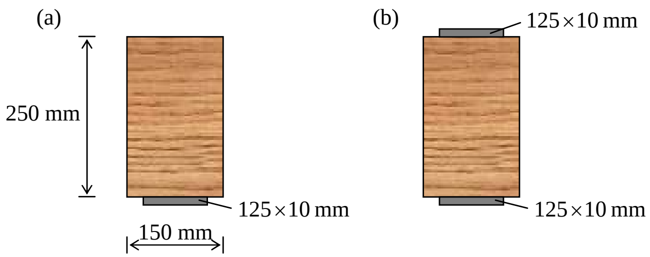
3. Tarkastellaan oheista teräsbetonipalkin poikkileikkausta. Betonin kimmomoduli on $20\,\text{GPa}$ ja teräksen 200 GPa. Betonin suurin sallittu jännitys on 10 MPa ja teräksen 150 MPa. Määritä suurin taivutusmomentti, joka poikkileikkaukseen voi kohdistua, kun betoni oletetaan vetoa kestämättömäksi.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 8:

1. Puupalkkeja on vahvistettu (a) yhdellä ja (b) kahdella teräskappaleella oheisten kuvien osoittamalla tavalla. Määritä poikkileikkausten normaalijännitysjakaumat, kun poikkileikkauksiin kohdistuu 50 kNm:n suuruinen taivutusmomentti. Teräksen kimmomoduuli on $200\,\mathrm{GPa}$ ja puun $13\,\mathrm{GPa}$.



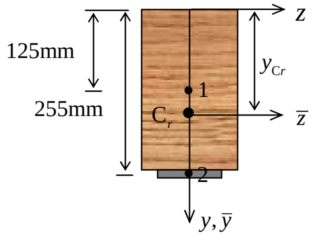
Ratkaisu:

(a) Yksi teräskappale:

Merkitään puuta numerolla 1 ja terästä numerolla 2.

Kimmomoduulisuhde:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = 15,38$$



Muunnetun poikkipinnan pinta-ala ja pintakeskiö:

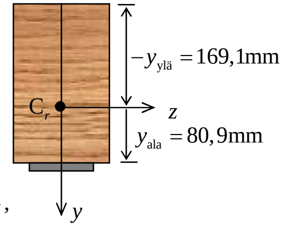
$$A_1 = 150 \cdot 250\ \mathrm{mm}^2 = 37500\ \mathrm{mm}^2$$
$$A_2 = 125 \cdot 10\ \mathrm{mm}^2 = 1250\ \mathrm{mm}^2$$
$$A_r = A_1 + nA_2 = 37500\ \mathrm{mm}^2 + 15{,}38 \cdot 1250\ \mathrm{mm}^2 = 56725\ \mathrm{mm}^2$$
$$y_{Cr} = \frac{A_1 y_1 + nA_2 y_2}{A_r} = \frac{37500\ \mathrm{mm}^2 \cdot 125\ \mathrm{mm} + 15{,}38 \cdot 1250\ \mathrm{mm}^2 \cdot 255\ \mathrm{mm}}{56725\ \mathrm{mm}^2} = 169{,}06\mathrm{mm}$$

Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti z-akselin suhteen:

$$I_1 = (\frac{150 \cdot 250^3}{12} + 37500 \cdot 125^2)\ \mathrm{mm}^4 = 7{,}8125 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4,$$
$$I_2 = (\frac{125 \cdot 10^3}{12} + 125 \cdot 10 \cdot 255^2)\ \mathrm{mm}^4 = 0{,}8129 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4,$$
$$I_{zr} = (7{,}8125 \cdot 10^8 + 15{,}38 \cdot 0{,}8129 \cdot 10^8)\ \mathrm{mm}^4 = 20{,}315 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4.$$

Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti muunnetun poikkipinnan pintakeskiöakselin ($\bar{z}$ – akselin) suhteen:

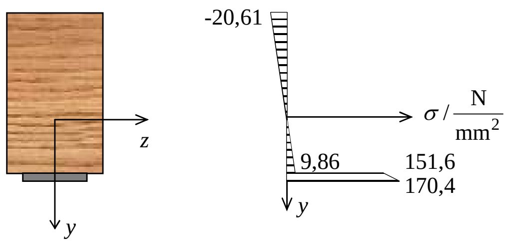
$$I_r \equiv I_{\bar{z}r} = I_{zr} - A_r y_{Cr}^2 = (20{,}315 \cdot 10^8 - 56725 \cdot 169{,}06^2)\mathrm{mm}^4 = 4{,}102 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4$$



Reunajännitykset puussa ja teräksessä:

$$\sigma_{1,ala} = \frac{M}{I_r} y_{1,ala} = \frac{50 \cdot 10^6 \mathrm{Nmm}}{4{,}102 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4} \cdot 80{,}9\ \mathrm{mm} = 9{,}86 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},$$
$$\sigma_{1,ylä} = \frac{M}{I_r} y_{1,ylä} = \frac{50 \cdot 10^6 \mathrm{Nmm}}{4{,}102 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4} \cdot (-169{,}1\ \mathrm{mm}) = -20{,}6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},$$
$$\sigma_{2,ala} = n\frac{M}{I_r} y_{2,ala} = 15{,}38 \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \mathrm{Nmm}}{4{,}102 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4} \cdot 90{,}9\ \mathrm{mm} = 170{,}4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},$$
$$\sigma_{2,ylä} = n\frac{M}{I_r} y_{2,ylä} = 15{,}38 \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \mathrm{Nmm}}{4{,}102 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4} \cdot 80{,}9\ \mathrm{mm} = 151{,}6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}.$$

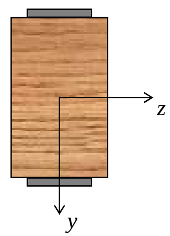
Normaalijännitysjakaumat puussa ja teräksessä:



(b) Kaksi teräskappaletta:

Pintakeskiö on poikkileikkauksen keskellä.

Jäyhyysmomentit:



$$I_1 = \frac{150 \cdot 250^3}{12} \mathrm{mm}^4 = 1.9531 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4,$$
$$I_2 = 2 \cdot (\frac{125 \cdot 10^3}{12} + 125 \cdot 10 \cdot 130^2)\ \mathrm{mm}^4 = 4.2271 \cdot 10^7 \mathrm{mm}^4,$$
$$I_r = (1.9531 \cdot 10^8 + 15.38 \cdot 4.2271 \cdot 10^7)\ \mathrm{mm}^4 = 8.4544 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4.$$

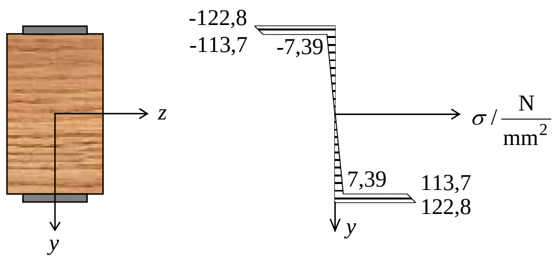
Reunajännitykset puussa ja teräksessä:

$$\sigma_{1,\text{ala}} = \frac{M}{I_r} y_{1,\text{ala}} = \frac{50 \cdot 10^6 \mathrm{Nmm}}{8{,}4544 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4} \cdot 125\ \mathrm{mm} = 7{,}39 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

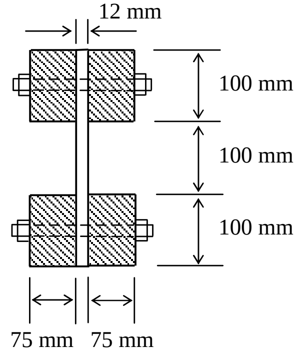
$$\sigma_{1,\text{ylä}} = \frac{M}{I_r} y_{1,\text{ylä}} = \frac{50 \cdot 10^6 \text{Nmm}}{8{,}4544 \cdot 10^8 \text{mm}^4} \cdot (-125 \text{ mm}) = -7{,}39 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{2,\text{ala}} = n \frac{M}{I_r} y_{2,\text{ala}} = 15{,}38 \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \text{Nmm}}{8{,}4544 \cdot 10^8 \text{mm}^4} \cdot 135 \text{ mm} = 122{,}8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{2,\text{ylä}} = n \frac{M}{I_r} y_{2,\text{ylä}} = 15{,}38 \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \text{Nmm}}{8{,}4544 \cdot 10^8 \text{mm}^4} \cdot 125 \text{ mm} = 113{,}7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$



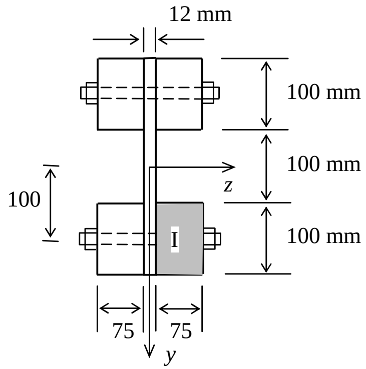
2. Oheinen palkki valmistetaan kiinnittämällä 75 x 100 mm^2 puurimat kiinni pulteilla 12 mm:n paksuiseen teräslevyyn. Pultteja, joiden halkaisija on 16 mm on palkin pituussuunnassa 200 mm:n välein. Poikkileikkausta kuormittaa leikkausvoima $Q_y = 18 \text{ kN}$. Määritä (a) keskimääräinen leikkausjännitys pulteissa sekä (b) leikkausjännitys uuman keskikohdassa (z-akselilla). Puun kimmomoduli on 13 GPa ja teräksen 200 GPa.



Ratkaisu:

Kimmomoduulisuhde:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{200}{13} = 15{,}38$$



Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti:

$$I_1 = 4 \cdot \left(\frac{75 \cdot 100^3}{12} + 75 \cdot 100 \cdot 100^2\right) \text{mm}^4 = 3.250 \cdot 10^8 \text{mm}^4,$$

$$I_2 = \frac{12 \cdot 300^3}{12} \text{mm}^4 = 2.700 \cdot 10^7 \text{mm}^4,$$

$$I_r = I_1 + nI_2 = 3{,}250 \cdot 10^8 \text{mm}^4 + 15{,}38 \cdot 2{,}700 \cdot 10^7 \text{mm}^4 = 7{,}4026 \cdot 10^8 \text{mm}^4.$$

(a) Keskimääräinen leikkausjännitys pulteissa:

Yhden (viivoitetun) puuosan staattinen momentti z-akselin suhteen (katso oheista kuvaa):

$$S_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{I}} y_{\mathrm{I}} = 75\mathrm{mm} \cdot 100\mathrm{mm} \cdot 100\mathrm{mm} = 7,5 \cdot 10^5 \mathrm{mm}^3 .$$

Leikkausvuo puun ja teräksen välissä:

$$q = \frac{QS_{r\mathrm{I}}}{I_r} = \frac{18 \cdot 10^3 \mathrm{N} \cdot 7,5 \cdot 10^5 \mathrm{mm}^3}{7,4026 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4} = 18.24 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} .$$

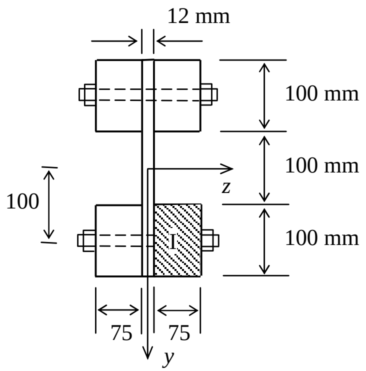
Pultille tuleva leikkausvoima ja pultin poikkipinnan pinta-ala:

$$Q_p = ql = 18,24 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \cdot 200\mathrm{mm} = 3647\mathrm{N} ,$$

$$A_p = \frac{\pi (16\mathrm{mm})^2}{4} = 201,1\mathrm{mm}^2 ,$$

Pultissa vaikuttava keskimääräinen leikkausjännitys:

$$\bar{\tau}_p = \frac{Q_p}{A_p} = \frac{3647\mathrm{N}}{201,1\mathrm{mm}^2} = 18,14 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 18,14\mathrm{MPa} .$$



(b) Leikkausjännitys uuman keskikohdassa:

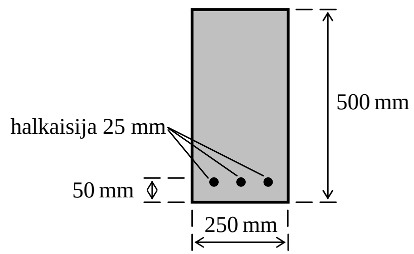
Staattinen momentti z-akselilla

$$S_r(0) = S_1 + nS_2 = (2 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 100 + 15.38 \cdot 12 \cdot 150 \cdot 75)\mathrm{mm}^3 = 3.576 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^3 ,$$

joten leikkausjännitys uuman keskikohdassa on

$$\tau(0) = \frac{Q_y S_r(0)}{I_r b} = \frac{18 \cdot 10^3 \mathrm{N} \cdot 3.576 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^3}{7.4026 \cdot 10^8 \mathrm{mm}^4 \cdot 12\,\mathrm{mm}} = 7.25 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} .$$

3. Tarkastellaan oheista teräsbetonipalkin poikkileikkausta. Betonin kimmomoduli on 20 GPa ja teräksen 200 GPa. Betonin suurin sallittu jännitys on 10 MPa ja teräksen 150 MPa. Määritä suurin taivutusmomentti, joka poikkileikkaukseen voi kohdistua, kun betoni oletetaan vetoa kestämättömäksi.



Ratkaisu:

Betoni oletetaan *vetoa kestämättömäksi* joten teräkset ottavat vastaan poikkileikkaukseen kohdistuvat vetojännitykset. Poikkileikkauksessa on 3 terässauvaa (halkaisija 25 mm), joten terästen yhteenlaskettu poikkipinta-ala on

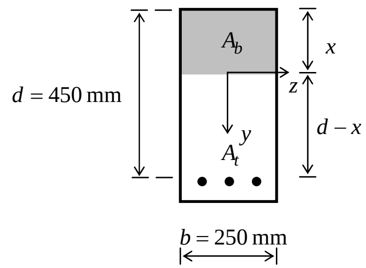
$$A_t = 3 \cdot \pi \cdot (12.5\,\mathrm{mm})^2 = 1472.6\,\mathrm{mm}^2 .$$

Terästen ja betonin kimmomoduulien suhde on (redusointi betonin suhteen)

$$n = \frac{E_t}{E_b} = \frac{200\,\mathrm{GPa}}{20\,\mathrm{GPa}} = 10.$$

Koska redusoitu staattinen momentti S_r häviää neutraaliakselilla, saadaan yhtälö

$$S_r = S_b + nS_t = 0 ,$$



missä

$$S_b = A_b y_b = bx \cdot (-\frac{x}{2}) = -\frac{1}{2} bx^2 ,$$

$$S_t = A_t y_t = A_t (d - x),$$

joten neutraaliakselin sijainnin x määritteleväksi yhtälöksi saadaan

$$S_r = -\frac{1}{2} bx^2 + nA_t (d - x) = 0 .$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$x=\frac{nA_t\pm\sqrt{(-nA_t)^2-4\cdot(-\frac{1}{2}b)\cdot nA_t d}}{2\cdot(-\frac{1}{2}b)}$$

eli

$$x=\frac{14726\,\mathrm{mm}^2\pm\sqrt{(-14726\,\mathrm{mm}^2)^2-4\cdot(-112.5\,\mathrm{mm})\cdot 14726\,\mathrm{mm}^2\cdot 450\,\mathrm{mm}}}{2\cdot(-112.5\,\mathrm{mm})}=185.9\,\mathrm{mm}\,.$$

Suurimmat betonissa ja teräksissä vaikuttavat jännitykset saadaan lausekkeista

$$\sigma_b=\frac{M}{I_r}x,\qquad \sigma_t=n\frac{M}{I_r}(d-x)\,,$$

missä betonin suhteen redusoitu jäyhyysmomentti on $I_r=I_b+nI_t$, missä

$$\begin{aligned}I_b&=\frac{bx^3}{12}+bx\cdot(-\frac{x}{2})^2\\&=\frac{250\,\mathrm{mm}\cdot(185.9\,\mathrm{mm})^3}{12}+250\,\mathrm{mm}\cdot 185.9\,\mathrm{mm}\cdot(-\frac{185.9\,\mathrm{mm}}{2})^2=5.3537\cdot 10^8\,\mathrm{mm}^4,\\I_t&=3\cdot\frac{\pi D^4}{64}+A_t(d-x)^2\\&=3\cdot\frac{\pi\cdot(25\,\mathrm{mm})^4}{64}+1472.6\,\mathrm{mm}^2\cdot(450\,\mathrm{mm}-185.9\,\mathrm{mm})^2=1.0277\cdot 10^8\,\mathrm{mm}^4,\end{aligned}$$

joten

$$I_r=I_b+nI_t=(5.3537+10\cdot 1.0277)\cdot 10^8\ \mathrm{mm}^4=1.5631\cdot 10^9\ \mathrm{mm}^4\,.$$

Suurin sallittu taivutusmomentti betonin suhteen on

$$M_{\mathrm{sall},b}=\frac{\sigma_b I_r}{x}=\frac{10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot 1.5631\cdot 10^9\,\mathrm{mm}^4}{185.9\,\mathrm{mm}}=84.08\,\mathrm{kNm}$$

ja terästen suhteen

$$M_{\mathrm{sall},t}=\frac{\sigma_t I_r}{n(d-x)}=\frac{150\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot 1.5631\cdot 10^9\,\mathrm{mm}^4}{10\cdot 264.1\,\mathrm{mm}}=88.78\,\mathrm{kNm}\,.$$

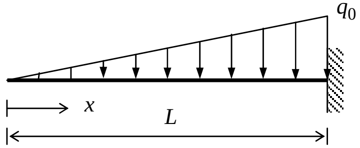
Pienempi edellisistä on määräävä eli suurin sallittu taivutusmomentti on

$$M_{\mathrm{sall}}=84.08\,\mathrm{kNm}.$$

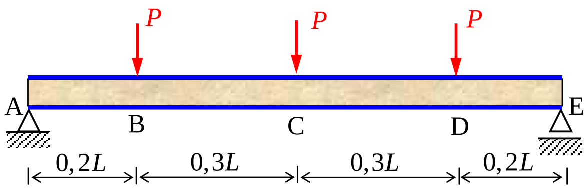
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

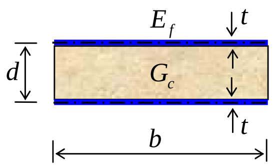
Harjoitus 9:

1. Määritä oheisen ulokepalkin taipuman lauseke $v(x)$, kun leikkausvoiman vaikutus palkin taipumaan otetaan huomioon. Palkin taivutusjäykkyys on EI, leikkausjäykkyys GA ja poikkileikkauksen siirtymäkerroin on ζ.



2. Oheista sandwich palkkia AE kuormittaa pistekuormat pisteissä B, C ja D. Määritä momenttipintamenetelmällä palkin taipuma sen keskipisteessä C. *Ohje:* Pintakerroksen paksuus t on niin pieni, että muunnetun poikkileikkauksen jäyhyysmomentti I_r ja taivutusjäykkyys B voidaan laskea luentomonisteen kaavoilla (8.33) ja (8.34) sekä leikkausjäykkyys S lasketaan kaavalla (8.29).



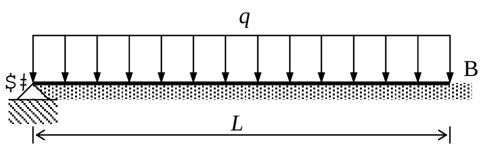


$L = 4000\text{mm},\ b = 300\text{mm},$

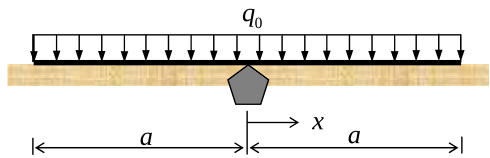
$d = 100\text{mm},\ t = 0{,}5\text{mm},$

$P = 1\text{kN},\ E_f = 210\text{GPa},\ G_c = 3\text{MPa}.$

3. Oheisen tasajäykän palkin taivutusjäykkyys on EI. Se on vasemmasta päästään tuettu kiinteällä niveltuella ja lepää kimmoisalla alustalla, jonka alustaluku on k. Määritä palkin taipuman ja taivutusmomentin jakautuma, kun on voimassa $\beta L = 10\ (>5)$, jolloin voit soveltaa puoliäärettömän kimmoisella alustalla olevan palkin mallia. Piirrä kuvaajat.



4. Oheinen palkki lepää maa-alustalla, mutta sen keskipisteen alla on kivi. Maan otaksutaan toimivan Winklerin alustana ja kiven otaksutaan olevan liikkumaton. Palkkia kuormittaa tasan jakautunut kuorma q_0, sen taivutusjäykkyys on EI ja alustaluku on $k = 100EI/a^4$. Symmetrian vuoksi voit rajoittaa tarkastelun palkin oikean puoleiseen osaan, jolloin symmetriasta aiheutuva reunaehto palkin keskipisteessä on $\varphi(0) = 0$. Määritä kosketuspaineen $r(x)$ ja taivutusmomentin $M(x)$ lausekkeet, kun $0 \le x \le a$. Määritä myös kosketuspaineen arvo palkin päässä ja taivutusmomentin arvo palkin keskellä. Piirrä lopuksi kosketuspaineen ja taivutusmomentin kuvaajat.

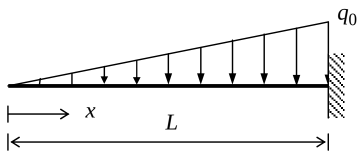


Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, harjoitukset

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoituksen 9 ratkaisut:

1.



Kuorman lauseke on $q(x) = \dfrac{q_0}{L}x$, taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeiksi saadaan

$$M = -\frac{1}{2}\cdot q(x)\cdot x\cdot\frac{x}{3} = -\frac{1}{6}\frac{q_0x^3}{L}, \qquad Q = -\frac{1}{2}\cdot q(x)\cdot x = -\frac{1}{2}\frac{q_0x^2}{L}.$$

Kiertymän differentiaaliyhtälöstä saadaan integroimalla

$$\varphi' = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{6}\frac{q_0x^3}{EIL} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \frac{1}{24}\frac{q_0x^4}{EIL} + C_1.$$

Reunaehto: $\varphi(L) = 0 \quad\Rightarrow\quad C_1 = -\dfrac{1}{24}\dfrac{q_0L^3}{EI}$. Taipuman differentiaaliyhtälölle saadaan nyt

$$v' = \varphi + \zeta\frac{Q}{GA} = \frac{1}{24}\frac{q_0L^3}{EI}\left[(\frac{x}{L})^4 - 1\right] - \frac{\zeta}{2GA}\frac{q_0x^2}{L} \quad\Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{24}\frac{q_0L^3}{EI}\left[\frac{x^5}{5L^4} - x\right] - \frac{\zeta}{6GA}\frac{q_0x^3}{L} + C_2.$$

Reunaehto: $v(L) = 0 \quad\Rightarrow\quad C_2 = \dfrac{1}{30}\dfrac{q_0L^4}{EI} + \dfrac{1}{6}\dfrac{\zeta q_0L^2}{GA}$.

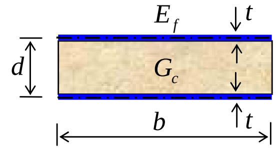
Taipuman lauseke on

$$v(x) = \frac{1}{120}\frac{q_0L^4}{EI}\left[(\frac{x}{L})^5 - 5\frac{x}{L} + 4\right] + \frac{\zeta}{6}\frac{q_0L^2}{GA}\left[-(\frac{x}{L})^3 + 1\right],$$

missä lausekkeen ensimmäinen termi on taivutusmomentin aiheuttama taipuma ja jälkimmäinen termi on leikkausvoiman aiheuttama taipuma.

2.

<u>Taivutusjäykkyys ja leikkausjäykkyys:</u>

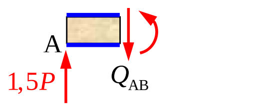


$$I_r = \frac{btd^2}{2} = \frac{0{,}3\text{m}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\text{m}\cdot(0{,}1\text{m})^2}{2}$$
$$= 0{,}75\cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$$
$$B = E_fI_r = 210\cdot 10^6\,\text{kN/m}^2\cdot 0{,}75\cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$$
$$= 157{,}5\,\text{kN/m}^2$$
$$S = G_cbd = 3\cdot 10^3\,\text{kN/m}^2\cdot 0{,}3\text{m}\cdot 0{,}1\text{m} = 90\text{kN}$$

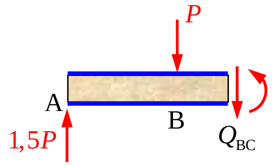
<u>Leikkausrasitukset:</u>

Symmetrian ja pystysuuntaisen tasapainon vuoksi tukireaktiot ovat $1{,}5P$.

Leikkausvoima:

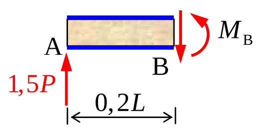


$$\downarrow\; Q_{\text{AB}} - 1{,}5P = 0$$
$$\Rightarrow\; Q_{\text{AB}} = 1{,}5P$$

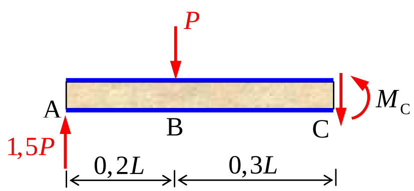


$$\downarrow\; Q_{\text{BC}} - 1{,}5P + P = 0$$
$$\Rightarrow\; Q_{\text{AB}} = 0{,}5P$$

Taivutusmomentti:



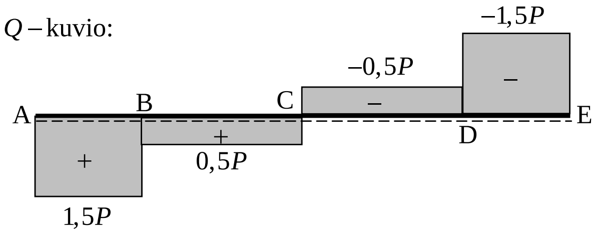
$$\text{B})\; M_{\text{B}} - 1{,}5P\cdot 0{,}2L = 0$$
$$\Rightarrow\; M_{\text{B}} = 0{,}3PL$$



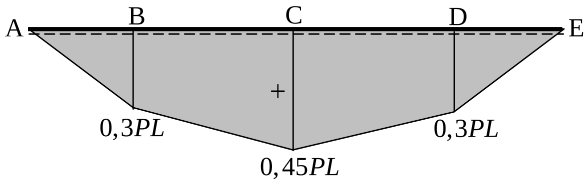
$$\text{C})\; M_{\text{C}} - 1{,}5P\cdot 0{,}5L - P\cdot 0{,}3L = 0$$
$$\Rightarrow\; M_{\text{C}} = 0{,}45PL$$

Rasituskuviot:

$Q-$kuvio:

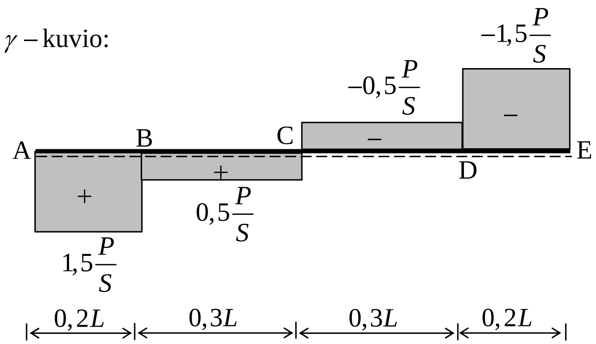


$M-$kuvio:

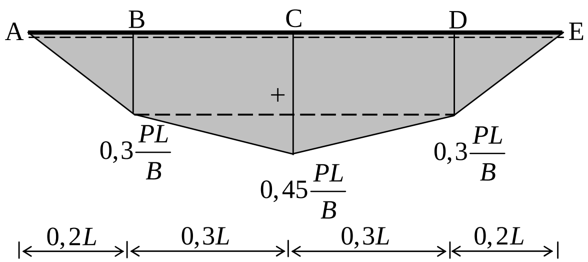


Liukumakulma- ja käyristymäkuviot:

$\gamma-$kuvio:



$\kappa-$kuvio:



Taipuma pisteessä C:

Momenttipintamenetelmä välillä AE:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{AE}}^{\gamma}=0,2L\cdot 1,5\frac{P}{S}+0,3L\cdot 0,5\frac{P}{S}-0,3L\cdot 0,5\frac{P}{S}-0,2L\cdot 1,5\frac{P}{S}=\underline{0}$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}^{\kappa}=\frac{1}{2}\cdot 0,2L\cdot 0,3\frac{PL}{B}\cdot(0,8+\frac{0,2}{3})L+0,6L\cdot 0,3\frac{PL}{B}\cdot 0,5L$$
$$+\frac{1}{2}\cdot 0,6L\cdot 0,15\frac{PL}{B}\cdot 0,5L+\frac{1}{2}\cdot 0,2L\cdot 0,3\frac{PL}{B}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0,2L=\underline{\frac{57}{400}\frac{PL^2}{B}}$$

$$\overbrace{v_{\mathrm{D}}}^{0}-\overbrace{v_{\mathrm{A}}}^{0}=\varphi_{\mathrm{A}}\overbrace{(x_{\mathrm{E}}-x_{\mathrm{A}})}^{L}-\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}^{\kappa}+\overbrace{\mathcal{A}_{\mathrm{AE}}^{\gamma}}^{0}\;\Rightarrow\;\varphi_{\mathrm{A}}=\frac{\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}^{\kappa}}{L}=\underline{\frac{57}{400}\frac{PL}{B}}$$

Momenttipintamenetelmä välillä AC:

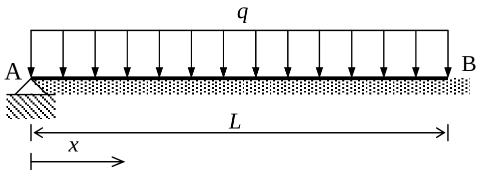
$$\mathcal{A}_{\mathrm{AC}}^{\gamma}=0,2L\cdot 1,5\frac{P}{S}+0,3L\cdot 0,5\frac{P}{S}=\underline{\frac{9}{20}\frac{PL}{S}}$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{AC}}^{\kappa}=\frac{1}{2}\cdot 0,2L\cdot 0,3\frac{PL}{B}\cdot(0,3+\frac{0,2}{3})L+0,3L\cdot 0,3\frac{PL}{B}\cdot 0,15L$$
$$+\frac{1}{2}\cdot 0,3L\cdot 0,15\frac{PL}{B}\cdot 0,1L=\underline{\frac{107}{4000}\frac{PL^3}{B}}$$

$$v_{\mathrm{C}}-\overbrace{v_{\mathrm{A}}}^{0}=\varphi_{\mathrm{A}}\overbrace{(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{A}})}^{L/2}-\mathcal{M}_{\mathrm{AC}}^{\kappa}+\mathcal{A}_{\mathrm{AC}}^{\gamma}$$
$$\Rightarrow\; v_{\mathrm{C}}=\frac{\varphi_{\mathrm{A}}L}{2}-\mathcal{M}_{\mathrm{AC}}^{\kappa}+\mathcal{A}_{\mathrm{AC}}^{\gamma}=\frac{57}{400}\frac{PL}{B}\cdot\frac{L}{2}-\frac{107}{4000}\frac{PL^2}{B}+\frac{9}{20}\frac{PL}{S}$$
$$=\underline{\frac{89}{2000}\frac{PL^3}{B}+\frac{9}{20}\frac{PL}{S}}=\frac{89}{2000}\frac{1\mathrm{kN}\cdot(4\mathrm{m})^3}{157,5\mathrm{kN/m}^2}+\frac{9}{20}\frac{1\mathrm{kN}\cdot 4\mathrm{m}}{90\mathrm{kN}}$$
$$=(0,01808+0,02)\mathrm{m}\approx\underline{\underline{38,1\mathrm{mm}}}$$

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, harjoitukset

3.



Yksityisratkaisu: $v_0(x) = \dfrac{q}{k}$.

Taipuman lauseke ($x \geq 0$):

$$v(x) = e^{-\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + \frac{q}{k}.$$

Derivaatat:

$$\begin{aligned}
v' &= -\beta e^{-\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(-C_1 \beta \sin \beta x + C_2 \beta \cos \beta x) \\
&= \beta e^{-\beta x}(-C_1(\sin \beta x + \cos \beta x) + C_2(-\sin \beta x + \cos \beta x)), \\
v'' &= -\beta^2 e^{-\beta x}(-C_1(\sin \beta x + \cos \beta x) + C_2(-\sin \beta x + \cos \beta x)) + \\
&\quad \beta e^{-\beta x}(-C_1 \beta(\cos \beta x - \sin \beta x) - C_2 \beta(\cos \beta x + \sin \beta x)) \\
&= 2\beta^2 e^{-\beta x}(C_1 \sin \beta x - C_2 \cos \beta x).
\end{aligned}$$

Reunaehdot:

$$\begin{aligned}
&v(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_1 + \frac{q}{k} = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = -\frac{q}{k}, \\
&M(0) = -EIv''(0) = 0 \ \Rightarrow \ v''(0) = -2\beta^2 C_2 = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = 0.
\end{aligned}$$

Taipuman ja taivutusmomentin lausekkeet:

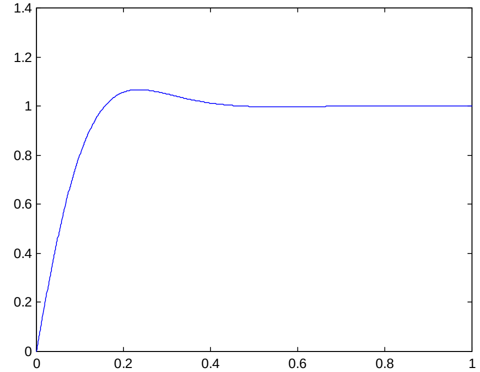
$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{q}{k}(1 - e^{-\beta x}\cos \beta x) \overset{k=4\beta^4 EI}{=} \frac{q}{4\beta^4 EI}(1 - e^{-\beta x}\cos \beta x), \\
M(x) &= -EIv''(x) = \frac{2EI\beta^2 q}{k} e^{-\beta x}\sin \beta x \overset{k=4\beta^4 EI}{=} \frac{q}{2\beta^2} e^{-\beta x}\sin \beta x.
\end{aligned}$$

Ottamalla huomioon, että $\beta L = 10$ eli $\beta = 10/L$, voidaan taipuman ja taivutusmomentin lausekkeet kirjoittaa muotoon

$$\left.\begin{aligned}
v(x) &= \frac{qL^4}{4 \cdot 10^4 EI}[1 - e^{-10 \cdot x/L}\cos(10 \cdot \frac{x}{L})], \\
M(x) &= \frac{qL^2}{2 \cdot 10^2} e^{-10 \cdot x/L}\sin(10 \cdot \frac{x}{L})
\end{aligned}\right. ,$$

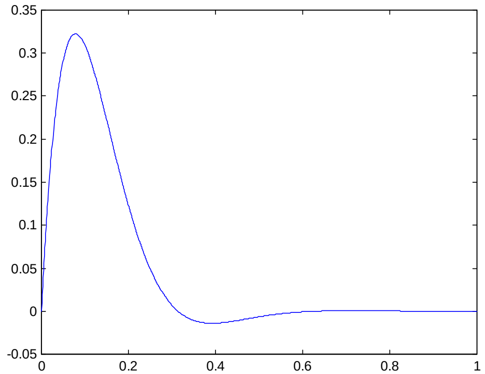
Kuvaajat:

Dimensioton taipuma: $\dfrac{4 \cdot 10^4 EI}{qL^4}$



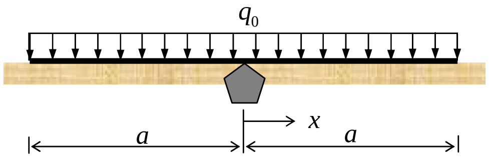
x/L

Dimensioton taivutusmomentti: $\dfrac{2 \cdot 10^2}{qL^2} M(x)$



x/L

4.



Yksityisratkaisu:

$$v_0 = \frac{q_0}{k}.$$

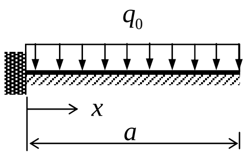
Vaimennusluku:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \frac{2,2361}{a} \;\Rightarrow\; \beta a = 2,2361 < 5 \;\Rightarrow\; \text{Äärellinen palkki}$$

Taipuma, kiertymä, taivutusmomentti ja leikkausvoima integrointi-vakioiden avulla:

$$v(x) = C_1Y_1(\beta x) + C_2Y_2(\beta x) + C_3Y_3(\beta x) + C_4Y_4(\beta x) + \frac{q_0}{k},$$
$$\varphi(x) \equiv v' = \beta[-4C_1Y_4(\beta x) + C_2Y_1(\beta x) + C_3Y_2(\beta x) + C_4Y_3(\beta x)],$$
$$M(x) \equiv -EIv''(x) = EI\beta^2[4C_1Y_3(\beta x) + 4C_2Y_4(\beta x) - C_3Y_1(\beta x) - C_4Y_2(\beta x)],$$
$$Q(x) \equiv M'(x) = EI\beta^3[4C_1Y_2(\beta x) + 4C_2Y_3(\beta x) + 4C_3Y_4(\beta x) - C_4Y_1(\beta x)].$$

Reunaehdot:



$$v(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad M(a) = 0, \quad Q(a) = 0$$

Integrointivakioiden määritys:

$$v(0) \equiv C_1\overbrace{Y_1(0)}^{1} + C_2\overbrace{Y_2(0)}^{0} + C_3\overbrace{Y_3(0)}^{0} + C_4\overbrace{Y_4(0)}^{0} + \frac{q_0}{k} = 0 \;\Rightarrow \underline{C_1 = -\frac{q_0}{k}}$$

$$\varphi(0) \equiv \beta[-4C_1\overbrace{Y_4(0)}^{0} + C_2\overbrace{Y_1(0)}^{1} + C_3\overbrace{Y_2(0)}^{0} + C_4\overbrace{Y_3(0)}^{0}] = 0$$
$$\Rightarrow\; \beta C_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{C_2 = 0}$$
$$M(a) \equiv EI\beta^2[4\overbrace{C_1}^{-q_0/k}\overbrace{Y_3(\beta a)}^{\bar{Y}_3} + 4\overbrace{C_2}^{0}Y_4(\beta a) - C_3\overbrace{Y_1(\beta a)}^{\bar{Y}_1} - C_4\overbrace{Y_2(\beta a)}^{\bar{Y}_4}] = 0$$
$$\Rightarrow\; \bar{Y}_1C_3 + \bar{Y}_2C_4 = -4\bar{Y}_3\frac{q_0}{k}$$
$$Q(a) \equiv EI\beta^3[4\overbrace{C_1}^{-q_0/k}\overbrace{Y_2(\beta a)}^{\bar{Y}_2} + 4\overbrace{C_2}^{0}Y_3(\beta a) + 4C_3\overbrace{Y_4(\beta a)}^{\bar{Y}_4} - C_4\overbrace{Y_1(\beta a)}^{\bar{Y}_1}] = 0$$
$$\Rightarrow\; 4\bar{Y}_4C_3 - \bar{Y}_1C_4 = 4\bar{Y}_2\frac{q_0}{k}$$

Funktioiden arvot $\bar{Y}_i = Y_i(\beta a)$:

$$\bar{Y}_1 \equiv Y_1(\beta a) = \cosh(\beta a)\cos(\beta a) = -2,92073$$
$$\bar{Y}_2 \equiv Y_2(\beta a) = \frac{1}{2}[\cosh(\beta a)\sin(\beta a) + \sinh(\beta a)\cos(\beta a)] = 0,433940$$
$$\bar{Y}_3 \equiv Y_3(\beta a) = \frac{1}{2}\sinh(\beta a)\sin(\beta a) = 1,81928$$
$$\bar{Y}_4 \equiv Y_4(\beta a) = \frac{1}{4}[\cosh(\beta a)\sin(\beta a) - \sinh(\beta a)\cos(\beta a)] = 1,64435$$

Yhtälöryhmä integrointivakioille C_3 ja C_4:

$$\begin{cases} \bar{Y}_1C_3 + \bar{Y}_2C_4 = -4\bar{Y}_3\dfrac{q_0}{k} \\ 4\bar{Y}_4C_3 - \bar{Y}_1C_4 = 4\bar{Y}_2\dfrac{q_0}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2,92073C_3 + 0,43394C_4 = -7,27712\dfrac{q_0}{k} \\ 6,5774C_3 + 2,92073C_4 = 1,73576\dfrac{q_0}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{q_0}{k}},\; \underline{C_2 = 0},\; \underline{C_3 = 1,93307\frac{q_0}{k}},\; \underline{C_4 = -3,75893\frac{q_0}{k}}$$

Alustapaine:

$$r(x) \equiv kv(x) = kC_1Y_1(\beta x) + kC_2Y_2(\beta x) + kC_3Y_3(\beta x) + kC_4Y_4(\beta x) + q_0$$
$$= \underline{\underline{[1 - Y_1(\beta x) + 1,93307Y_3(\beta x) - 3,75893Y_4(\beta x)]q_0}}$$

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, harjoitukset

Taivutusmomentti:

$$M(x) = EI\beta^2[4C_1Y_3(\beta x) + 4C_2Y_4(\beta x) - C_3Y_1(\beta x) - C_4Y_2(\beta x)]$$

$$= \underline{\underline{-\frac{q_0}{\beta}[Y_3(\beta x) - 1{,}93307Y_1(\beta x) + 3{,}75893Y_2(\beta x)]}}$$

Kosketuspaine palkin päässä:

$$r(a) = (1 - \overline{Y}_1 + 1{,}93307\overline{Y}_3 - 3{,}75893\overline{Y}_4)q_0 = \underline{\underline{1{,}257q_0}}$$

Taivutusmomentti palkin keskellä:

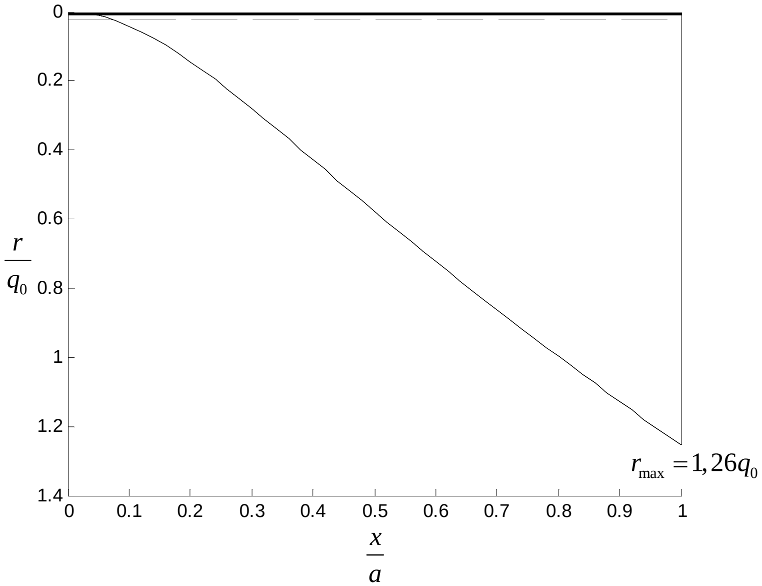
$$M(0) = EI\beta^2[4C_1Y_3(0) + 4C_2Y_4(0) - C_3Y_1(0) - C_4Y_2(0)] = -EI\beta^2 C_3$$

$$= -EI\beta^2 1{,}93307\frac{q_0}{k} = -EI\cdot(\frac{2{,}2361}{a})^2\cdot 1{,}93307\frac{q_0}{100EI/a^4}$$

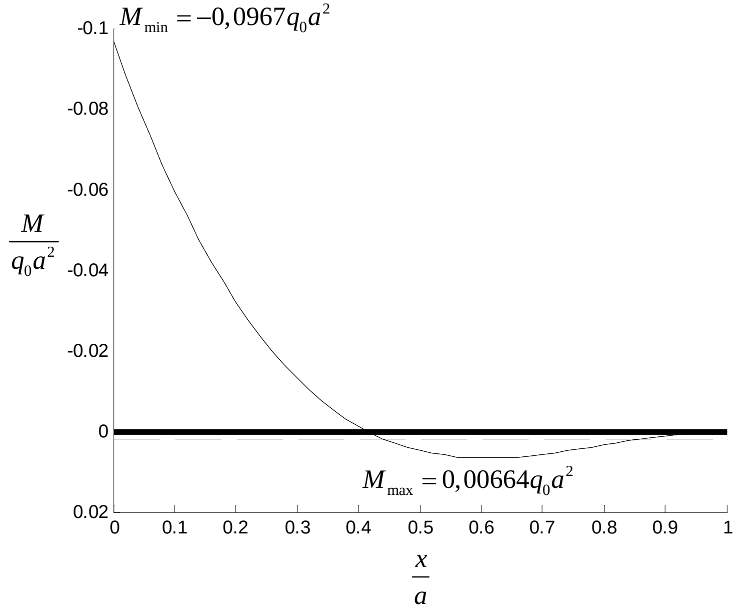
$$= \underline{\underline{-0{,}0967q_0a^2}}$$

Kuvaajat:

Kosketuspaine r/q_0:



Taivutusmomentti $M/(q_0a^2)$:

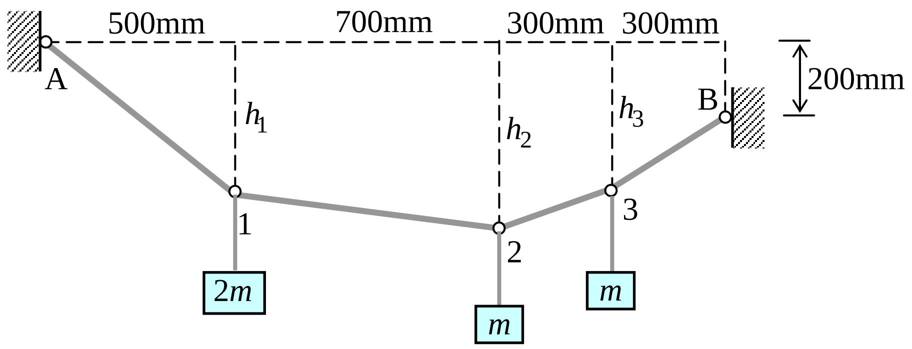


Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, harjoitukset

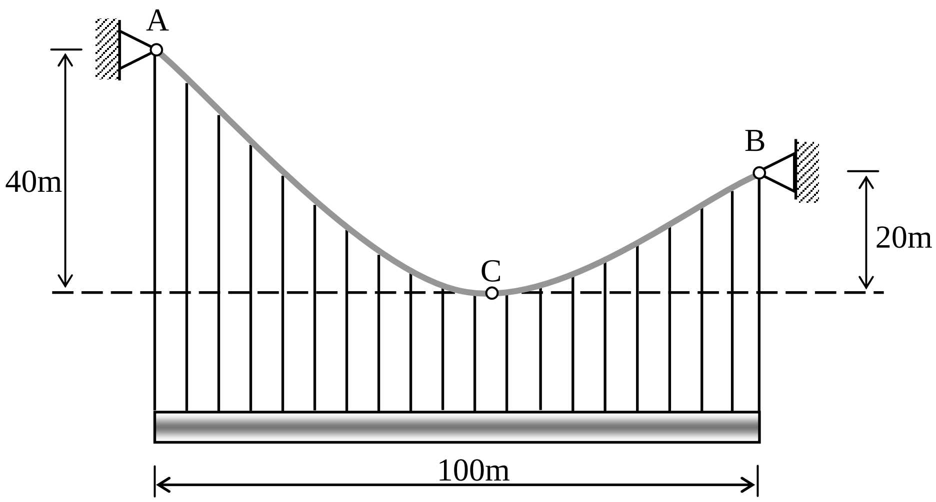
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 10:

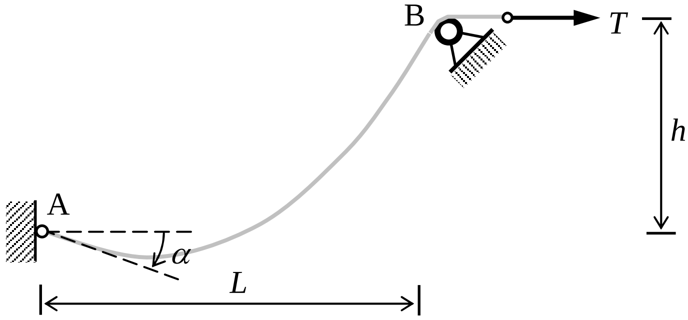
1. Kuvan köysi kannattaa kolmea massaa. Köyden massa on $m = 30\text{kg}$ ja pisteen 1 pystyasema $h_1 = 400\text{mm}$. Määritä pystysuorat etäisyydet h_2 ja h_3. Mikä on köyden suurin vetovoima ja missä se vaikuttaa?



2. Köysi kannattaa palkkia, joka painaa 850kN/m. Määritä köysivoimat pisteissä A, B ja C. Otaksutaan, että palkista köyteen kohdituva voima jakautuu tasan vaakatason pituutta kohti.



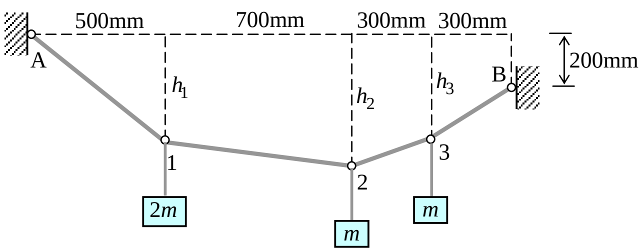
3. Köyttä, joka kulkee yli kitkattoman väkipyörän, vedetään voimalla *T*. Kun voima $T = 48\text{kN}$, niin kulma $\alpha = 0^\circ$. Määritä köyden painon pituustiheus w_0 ja vaakakiristys sekä suurin köysirasitus. $L = 400\text{m}$ ja $h = 200\text{m}$.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

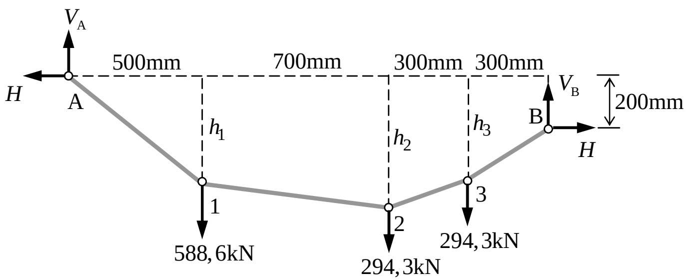
Harjoituksen 10 ratkaisu:

1.



Tukireaktiot:

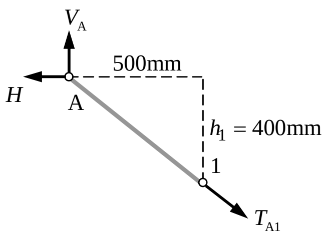
VKK:



$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{B}}\quad -V_A \cdot 1800\text{mm} + H \cdot 200\text{mm} + 588{,}6\text{kN} \cdot 1300\text{mm} + 294{,}3\text{kN} \cdot 600\text{mm} + 294{,}3\text{kN} \cdot 300\text{mm} = 0$$

$$\Rightarrow\ 1{,}8 \cdot V_A - 0{,}2 \cdot H = 1030\text{kN}$$

VKK A1:



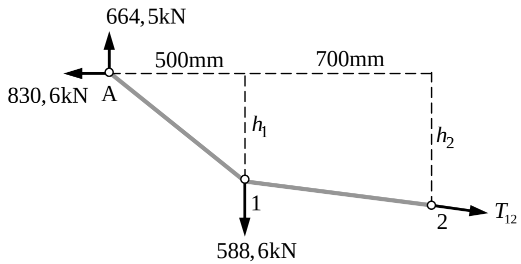
$$\overset{\curvearrowleft}{1}\quad -V_A \cdot 500\text{mm} + H \cdot 400\text{mm} = 0 \ \Rightarrow\ V_A = \frac{4}{5} H$$

Saadaan

$$1{,}8 \cdot \frac{4}{5} H - 0{,}2 \cdot H = 1030\text{kN} \ \Rightarrow\ H = \frac{1030}{1{,}24} = \underline{830{,}6\text{kN}},\ V_A = \frac{4}{5} H = \underline{664{,}5\text{kN}}$$

Pisteiden 2 ja 3 korkeusasemat:

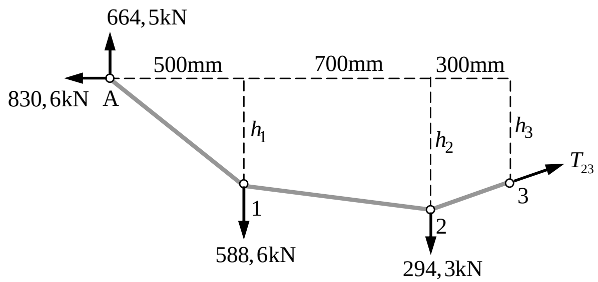
VKK A2:



$$\overset{\curvearrowleft}{2}\quad 830{,}6\text{kN} \cdot h_2 - 664{,}5\text{kN} \cdot 1200\text{mm} + 588{,}5\text{kN} \cdot 700\text{mm} = 0$$

$$\Rightarrow\ h_2 = \frac{664{,}5 \cdot 1200\text{mm} - 588{,}5 \cdot 700\text{mm}}{830{,}6} \approx \underline{\underline{464{,}1\text{mm}}}$$

VKK A3:



$$\overset{\curvearrowleft}{3}\quad 830{,}6\text{kN} \cdot h_3 - 664{,}5\text{kN} \cdot 1500\text{mm} + 588{,}5\text{kN} \cdot 1000\text{mm} + 294{,}3\text{kN} \cdot 300\text{mm} = 0$$

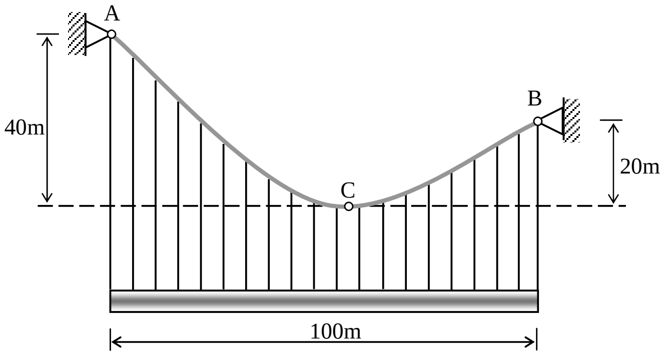
$$\Rightarrow\ h_3 = \frac{664{,}5 \cdot 1500\text{mm} - 588{,}5 \cdot 1000\text{mm} - 294{,}3\text{kN} \cdot 300\text{mm}}{830{,}6} \approx \underline{\underline{385{,}2\text{mm}}}$$

Suurin köysivoima:

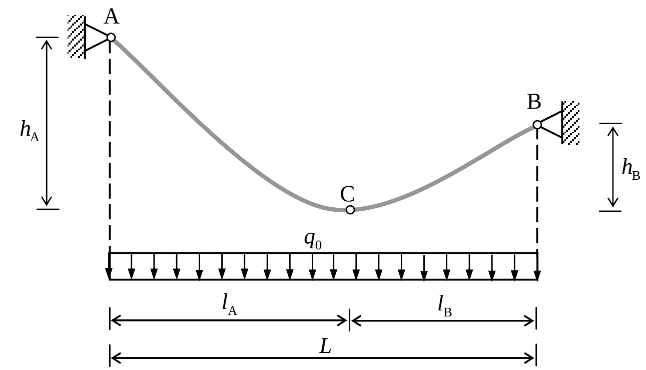
Helposti nähdään, että köyden kaltevuus on suurin välillä A1:

$$T_{\max} = T_{A1} = H\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_{A1}} = 830{,}6\text{kN}\sqrt{1 + \left(\frac{400\text{mm}}{500\text{mm}}\right)^2} = \underline{\underline{1064\text{kN}}}$$

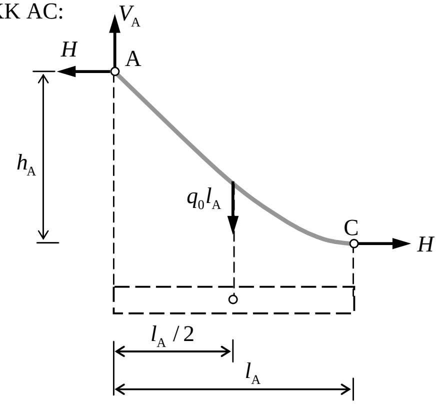
2.



Ratkaistaan tehtävä oheisin merkinnöin ja sijoitetaan lopuksi numeroarvot.



VKK AC:



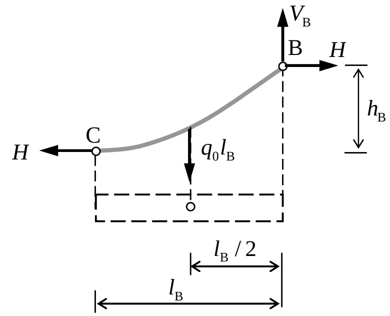
$$\text{A}\circlearrowleft \quad H \cdot h_A - q_0 l_A \cdot \frac{l_A}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{q_0 l_A^2}{2h_A} \qquad \text{(a)}$$

$$\uparrow \quad V_A - q_0 l_A = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{V_A = q_0 l_A} \qquad \text{(b)}$$

VKK CB:



$$\text{B}\circlearrowleft \quad -H \cdot h_B + q_0 l_B \cdot \frac{l_B}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{q_0 l_B^2}{2h_B} \qquad \text{(c)}$$

$$\uparrow \quad V_B - q_0 l_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{V_B = q_0 l_B} \qquad \text{(d)}$$

Merkitsemällä saadut vaakakiristyksen arvot (a) ja (c) yhtäsuuriksi saadaan

$$\frac{q_0 l_A^2}{2h_A} = \frac{q_0 l_B^2}{2h_B} \quad \Rightarrow \quad l_A = l_B \sqrt{\frac{h_A}{h_B}}\,. \qquad \text{(e)}$$

Pituuksille on voimassa

$$l_A + l_B = L\,. \qquad \text{(f)}$$

Sijoittamalla tulos (e) yhtälöön (f) saadaan

$$l_B \left(\sqrt{\frac{h_A}{h_B}} + 1\right) = L \quad \Rightarrow \quad \underline{l_B = \frac{\sqrt{h_B}}{\sqrt{h_A} + \sqrt{h_B}} L} \qquad \text{(g)}$$

ja sijoittamalla tämä lausekkeeseen (e) saadaan

$$\underline{l_A = \frac{\sqrt{h_A}}{\sqrt{h_A} + \sqrt{h_B}} L}\,. \qquad \text{(h)}$$

Sijoitamalla tämä lausekkeeseen (a) saadaan vaakakiristyksella tulos

$$H = \frac{q_0 l_A^2}{2h_A} = \underline{\frac{q_0 L^2}{2(\sqrt{h_A} + \sqrt{h_B})^2}}\,. \qquad \text{(i)}$$

Nyt köysivoimille pisteissä A, B ja C saadaan kaavat

$$T_A = \sqrt{V_A^2 + H^2} = H\sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H}\right)^2} = H\sqrt{1 + 4\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^2}$$

$$T_B = \sqrt{V_B^2 + H^2} = H\sqrt{1 + \left(\frac{V_B}{H}\right)^2} = H\sqrt{1 + 4\left(\frac{h_B}{l_B}\right)^2} \qquad \text{(j)}$$

$$T_C = H$$

Lasketaan numeroarvot:

$$l_{\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{h_{\mathrm{A}}}}{\sqrt{h_{\mathrm{A}}}+\sqrt{h_{\mathrm{B}}}}L = \frac{\sqrt{40\mathrm{m}}}{\sqrt{40\mathrm{m}}+\sqrt{20\mathrm{m}}}\cdot 100\mathrm{m} \approx \underline{58{,}58\mathrm{m}}$$

$$l_{\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{h_{\mathrm{B}}}}{\sqrt{h_{\mathrm{A}}}+\sqrt{h_{\mathrm{B}}}}L = \frac{\sqrt{20\mathrm{m}}}{\sqrt{40\mathrm{m}}+\sqrt{20\mathrm{m}}}\cdot 100\mathrm{m} \approx \underline{41{,}42\mathrm{m}}$$

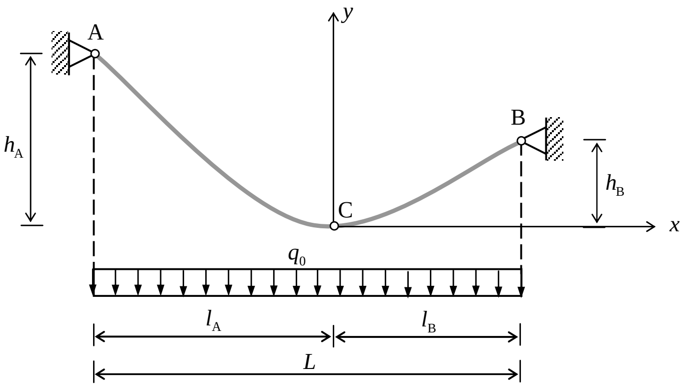
$$H = \frac{q_0 L^2}{2(\sqrt{h_{\mathrm{A}}}+\sqrt{h_{\mathrm{B}}})^2} = \frac{850\mathrm{kN/m}(100\mathrm{m})^2}{2(\sqrt{40\mathrm{m}}+\sqrt{20\mathrm{m}})^2} \approx 36,46\cdot 10^3\,\mathrm{kN} = \underline{36,46\mathrm{MN}}$$

$$T_{\mathrm{A}} = H\sqrt{1+4(\frac{h_{\mathrm{A}}}{l_{\mathrm{A}}})^2} = 36,46\mathrm{MN}\sqrt{1+4(\frac{40\mathrm{m}}{58{,}58\mathrm{m}})^2} \approx \underline{\underline{61,7\mathrm{MN}}}$$

$$T_{\mathrm{B}} = H\sqrt{1+4(\frac{h_{\mathrm{B}}}{l_{\mathrm{B}}})^2} = 36,46\mathrm{MN}\sqrt{1+4(\frac{20\mathrm{m}}{41{,}42\mathrm{m}})^2} \approx \underline{\underline{50,7\mathrm{MN}}}$$

$$T_{\mathrm{C}} = H = \underline{\underline{36,5\mathrm{MN}}}$$

Vaihtoehtoinen ratkaisu:



Kuvan koordinaatistossa köyden yhtälö on

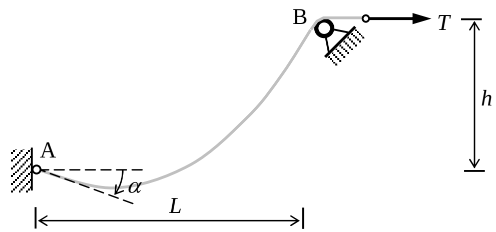
$$y = \frac{q_0 x^2}{2H} \tag{k}$$

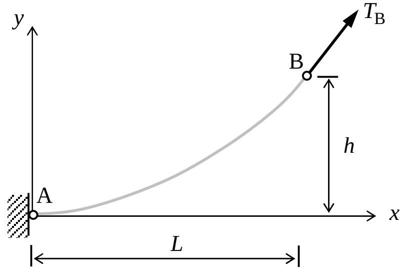
Ehdoista $y(-l_{\mathrm{A}}) = h_{\mathrm{A}}$ ja $y(l_{\mathrm{B}}) = h_{\mathrm{B}}$ seuraa

$$\frac{q_0 l_{\mathrm{A}}{}^2}{2H} = h_{\mathrm{A}} \;\Rightarrow\; \underline{H = \frac{q_0 l_{\mathrm{A}}{}^2}{2h_{\mathrm{A}}}} \quad \text{ja} \quad \frac{q_0 l_{\mathrm{B}}{}^2}{2H} = h_{\mathrm{B}} \;\Rightarrow\; \underline{H = \frac{q_0 l_{\mathrm{B}}{}^2}{2h_{\mathrm{B}}}}$$

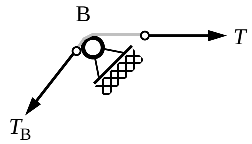
Saatiin siis yhtälöt (a) ja (c). Tästä eteenpäin ratkaisu etenee kuten edellä.

3.





Väkipyörä:



$T_{\mathrm{B}} = T$

Koska $\alpha = 0$, origo voidaan sijoitta pisteeseen A.

Pisteessä B saadaan ehto:

$$y(L) \equiv \frac{H}{w_0}(\cosh\frac{w_0 L}{H} - 1) = h \;\Rightarrow\; \cosh\frac{w_0 L}{H} - 1 = \frac{w_0 h}{H}$$

$$\Rightarrow\; \cosh\frac{w_0 L}{H} - 1 = \frac{1}{2}\frac{w_0 L}{H}$$

Käytettiin hyväksi tietoa, että esimerkkimme tapauksessa $h = L/2$. Merkitään $z = w_0 L / H$, jolloin yhtälömme saa muodon

$$\cosh z - 1 - z/2 = 0$$

Yhtälö on epälineaarinen. Sille saadaan likiratkaisu määrittämällä kokeilemalla funktion $f(z) \equiv \cosh z - 1 - z/2$ nollakohta.

z	$f(z)$
0	0
0,2	-0,0799
0,4	-0,1180
0,6	-0,1145
0,8	-0,0626
1,0	0,0430
0,9	-0,0169
0,91	-0,0116
0,92	-0,0061
0,93	-0,0004
0,94	0,0053

$$\Rightarrow\; z \approx 0,93 \;\Leftrightarrow\; \frac{w_0 L}{H} = 0,93$$

Köysivoima pisteessä B:

$$T_B = T(L) = H\cosh(\frac{w_0 L}{H}) = H\cosh(0,93) = 1,465H$$

Ehdosta $T_B = T$ (kitkaton väkipyörä) seuraa horisontaalivoimalle:

$$H = \frac{T}{1,465} = \underline{\underline{32,76\text{kN}}}$$

Köyden painon pituustiheys:

$$w_0 = 0,93\frac{H}{L} = 0,93 \cdot \frac{32,76\text{kN}}{400\text{m}} = \underline{\underline{0,0762\text{kN/m}}}$$

<u>Suurin köysivoima:</u>

Köysivoiman lauseke on:

$$T(x) = H\cosh(\frac{w_0 x}{H})$$

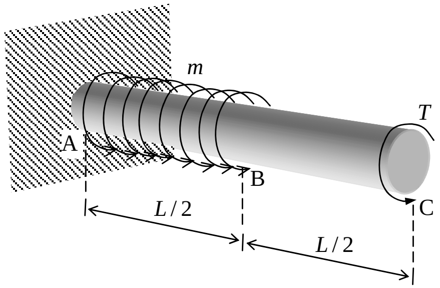
Koska funktio $\cosh x$ saa pienimmän arvonsa 1, kun $x = 0$, ja se on monotoonisesti kasvava kun $x > 0$, saa köysivoima suurimman arvonsa pisteessä B. Saadaan:

$$T_{\max} = T_B = 1,465H = 1,465 \cdot 32,76\text{kN} \approx \underline{\underline{48,0\text{kN}}}$$

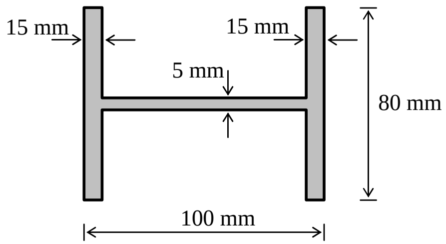
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 11:

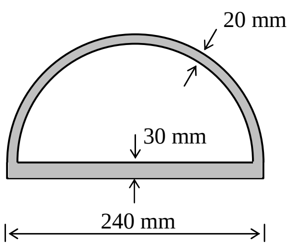
1. Oheinen ympyräpoikkileikkauksinen sauva AC on jäykästä kiinnitetty toisesta päästä ja toinen pää on vapaa. Vapaata päätä C kuormittaa vääntömomenttikuorma $T = 3\,\text{kNm}$. Lisäksi välillä AB on kuormituksena tasanjakaantunut vääntömomenttikuorma $m = 200\,\text{Nm/m}$. Määritä sauvan suurin leikkausjännitys ja leikkausjännityksen arvo tuella sijaitsevassa poikkileikkauksessa pisteessä, joka on etäisyydellä $D/4$ poikkileikkauksen keskipisteestä, missä $D = 60\,\text{mm}$ on sauvan halkaisija. Sauvan pituus on $L = 1000\,\text{mm}$.



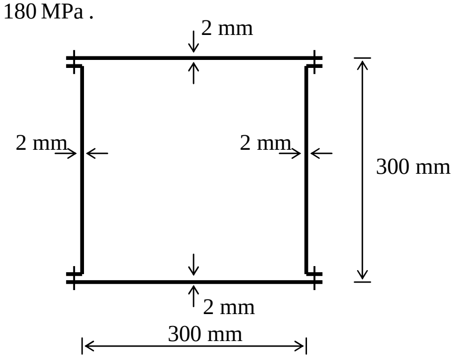
2. Oheista poikkileikkausta rasittaa 100 Nm:n vääntömomentti. Laske poikkileikkauksessa vaikuttava suurin leikkausjännitys sekä poikkileikkauksen vääntymä. Materiaalin $G = 80\,\text{GPa}$.



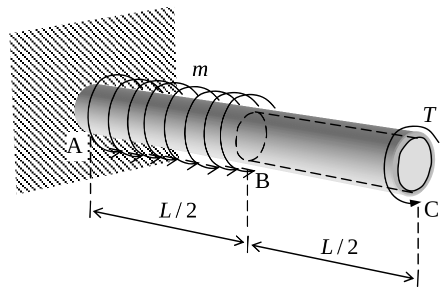
3. Määritä oheiselle puoliympyrän muotoiselle ohutseinäiselle suljetulle poikkileikkaukselle sallittu suurin vääntömomentti, kun suurin sallittu leikkausjännitys on $70\,\text{MPa}$. Mikä on tällöin vääntymä ? Materiaalin $G = 80\,\text{GPa}$.



4. Oheinen putki on tehty niittaamalla kahdesta suorasta ja kahdesta taivutetusta kevytmetallilevystä. Määritä pitkittäissaumojen suurin mahdollinen niittien välimatka, kun poikkileikkausta rasittaa vääntömomentti 6 kNm. Niitin halkaisija on $d = 6\,\text{mm}$ ja niitin suurin sallittu leikkausjännitys $\tau_{\text{sall}} = 90\,\text{MPa}$. Niitinreiän reunan suurin sallittu pintapaine on $p_{\text{sall}} = 180\,\text{MPa}$.



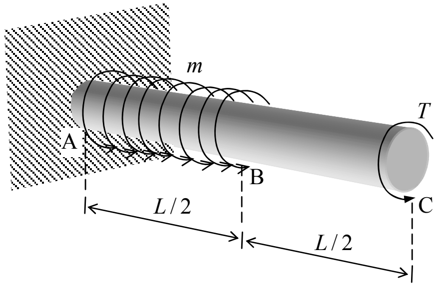
5. Oheisen sauvan AC poikkileikkaus on ympyrä, jonka halkaisija on 30 mm. Osa BC on porattu ontoksi, ja sen seinämän paksuus on $t = 3\,\text{mm}$. Sauvaa kuormittaa ulkoinen vääntömomentti $T = 50\,\text{Nm}$ akselin vapaassa päässä C sekä tasanjakaantunut vääntömomenttikuorma $m = 100\,\text{Nm/m}$ sauvan osalla AB. Määritä sauvan vapaan pään vääntökulma, kun $G = 80\,\text{GPa}$ ja $L = 400\,\text{mm}$.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoituksen 11 ratkaisut:

1.



Suurin leikkausjännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t},$$

missä vääntömomentin suurin arvo on tuella sijaitsevassa poikkileikkauksessa. Sille saadaan

$$M_t = T + m \cdot \frac{L}{2} = 3 \cdot 10^6\,\text{Nmm} + 200\,\frac{\text{Nmm}}{\text{mm}} \cdot \frac{1000\,\text{mm}}{2} = 3.100 \cdot 10^6\,\text{Nmm}.$$

Vääntöjäyhyysmomentti ja vääntövastus ovat (ympyräpoikkileikkaukselle)

$$I_t = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (60\,\text{mm})^4}{32} = 1.2723 \cdot 10^6\,\text{mm}^4,$$

$$W_t = \frac{I_t}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi (60\,\text{mm})^3}{16} = 42412\,\text{mm}^3.$$

Suurimmalle leikkausjännitykselle saadaan näin

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3.100 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{42412\,\text{mm}^3} = 73.09\,\text{MPa}.$$

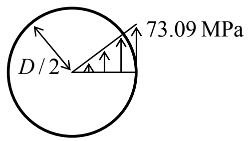
Leikkausjännitysjakauma poikkileikkauksessa on

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_t} r,$$

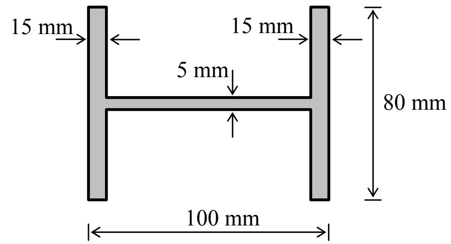
joten leikkausjännitys etäisyydellä $D/4$ poikkileikkauksen keskipisteestä tuella sijaitsevassa poikkileikkauksessa on

$$\tau = \frac{M_t}{I_t}\frac{D}{4} = \frac{3.100 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{1.2723 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} \cdot \frac{60\,\text{mm}}{4} = 36.55\,\text{MPa}.$$

Leikkausjännitysjakauma tuella:



2.



Suurin leikkausjännitys ja vääntövastus ohutseinäiselle avoimelle poikkipinnalle ovat:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad W_t = \frac{I_t}{t_{\max}},$$

missä vääntöjäyhyysmomentti on

$$I_t = \frac{1}{3}\sum_i s_i t_i^3 = \frac{1}{3}[2 \cdot 80\,\text{mm} \cdot (15\,\text{mm})^3 + 85\,\text{mm} \cdot (5\,\text{mm})^3] = 1.835 \cdot 10^5\,\text{mm}^4,$$

joten vääntövastukselle ja suurimmalle leikkausjännitykselle saadaan

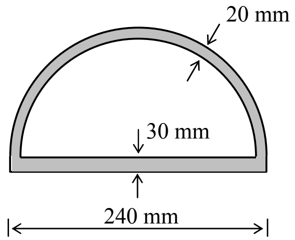
$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{1.835 \cdot 10^5\,\text{mm}^4}{15\,\text{mm}} = 12233\,\text{mm}^3,$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{100 \cdot 10^3\,\text{Nmm}}{12233\,\text{mm}^3} = 8.17\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Vääntymä:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{100 \cdot 10^3\,\text{Nmm}}{80 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1.835 \cdot 10^5\,\text{mm}^4} = 6.812 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\text{mm}}.$$

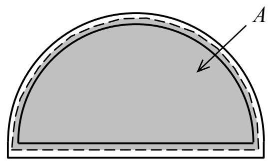
3.



Ehto suurimmalle leikkausjännitykselle:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \tau_{\text{sall}} = 70\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

missä vääntövastus on $W_t = 2At_{\min}$, missä A on profiilin keskilinjan rajaaman alueen pinta-ala (kts. kuva), jolle saadaan



$$A = \frac{1}{2}\cdot\pi(110\text{ mm})^2 = 19006\text{ mm}^2$$

ja $t_{\min} = 20\text{ mm}$ on pienin seinämän paksuus.
Vääntövastus on näin

$$W_t = 2\cdot 19006\text{ mm}^2\cdot 20\text{ mm} = 760240\text{ mm}^3.$$

Suurin sallittu vääntömomentti on siten

$$M_t = W_t\tau_{\text{sall}} = 760240\text{ mm}^3\cdot 70\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 53.22\text{ kNm}.$$

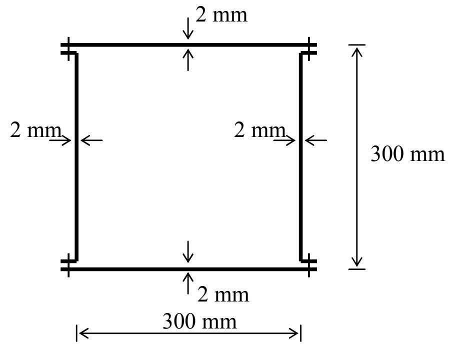
Vääntymä on $\theta = M_t / GI_t$, missä vääntöjäyhyysmomentti on

$$I_t = \frac{4A^2}{\sum \frac{s_i}{t_i}} = \frac{4\cdot(19006\text{ mm}^2)^2}{\frac{\pi\cdot 110\text{ mm}}{20\text{ mm}} + \frac{220\text{ mm}}{30\text{ mm}}} = 5.871\cdot 10^7\text{ mm}^4.$$

Suurinta sallittua vääntömomenttia vastaava vääntymä on

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{53.22\cdot 10^6\text{ Nmm}}{80\cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot 5.871\cdot 10^7\text{ mm}^4} = 1.133\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\text{mm}}.$$

4.



Suurin leikkausjännitys

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t},$$

missä vääntövastus on

$$W_t = 2At_{\min} = 2\cdot(300\text{ mm})^2\cdot 2\text{ mm} = 3.60\cdot 10^5\text{ mm}^3,$$

joten suurimmalle leikkausjännitykselle saadaan

$$\tau_{\max} = \frac{6\cdot 10^6\text{ Nmm}}{3.60\cdot 10^5\text{ mm}^3} = 16.66\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Leikkausvuo liitettävien osien välillä on

$$q = \tau_{\max}t = 16.66\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot 2\text{ mm} = 33.33\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Suurin niitille sallittu leikkausvoima on

$$Q_n = A_n\tau_{\text{sall}} = \pi\cdot(3\text{ mm})^2\cdot 90\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2544\text{ N}.$$

Niitti ottaa leikkausvoimallaan vastaan väännöstä aiheutuvan leikkausvuon. Tästä seuraa yhtälö

$$q\cdot l = Q_n,$$

josta saadaan ratkaistua niittien välimatka l

$$l = \frac{Q_n}{q} = \frac{2544\text{ N}}{33.33\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}} = 76.3\text{ mm}.$$

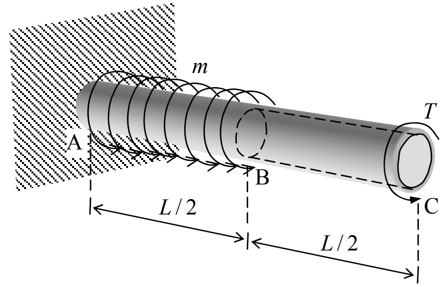
Tarkistetaan ettei reiän suurin sallittu pintapaine ylity. Kun niittien välimatka on edellä laskettu, on niitinreiän pintapaine

$$p = \frac{Q_n}{t \cdot d} = \frac{q \cdot l}{t \cdot d} = \frac{33.33\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \cdot 76.3\,\mathrm{mm}}{2\,\mathrm{mm} \cdot 6\,\mathrm{mm}} = 211.9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} > p_{\mathrm{sall}} = 180\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

eli pintapaine ylittyy ja suurin sallittu pintapaine määrää suurimman niittien välimatkan, jolle saadaan

$$l = \frac{t \cdot d}{q}\,p_{\mathrm{sall}} = \frac{2\,\mathrm{mm} \cdot 6\mathrm{mm}}{33.33\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}} \cdot 180\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 64.8\,\mathrm{mm}.$$

5.

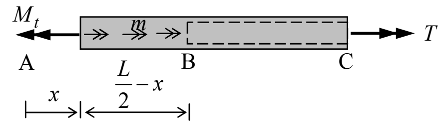


Vääntömomentti:

Väli AB:

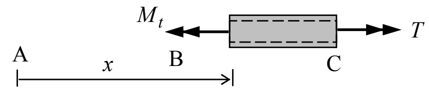
$$\twoheadrightarrow \quad -M_t + m(\frac{L}{2} - x) + T = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_t = m(\frac{L}{2} - x) + T$$

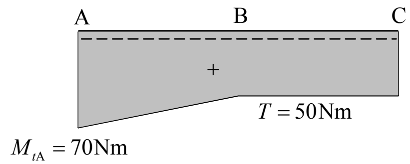


Väli BC:

$$\twoheadrightarrow \quad -M_t + T = 0 \;\Rightarrow\; M_t = T\,.$$



M_t – kuvio:



Osien vääntöjäykkyydet:

$$GI_{t\mathrm{AB}} = G \cdot \frac{\pi D^4}{32} = 80 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot \frac{\pi \cdot 30^4\mathrm{mm}^4}{32} = 6{,}362 \cdot 10^9\,\mathrm{Nmm}^2\,,$$

$$GI_{t\mathrm{BC}} = G \cdot \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = 80 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot \frac{\pi \cdot (30^4 - 24^4)\mathrm{mm}^4}{32} = 3{,}756 \cdot 10^9\,\mathrm{Nmm}^2\,.$$

Vääntökulman muutokset:

Väli AB:

$$\Delta\varphi_{t\mathrm{AB}} = \int_0^{L/2} \theta\,dx = \int_0^{L/2} \frac{M_t}{GI_{t\mathrm{AB}}}\,dx = \frac{1}{GI_{t\mathrm{AB}}} \int_0^{L/2} [m(\frac{L}{2} - x) + T]\,dx = \frac{1}{GI_{t\mathrm{AB}}} \Big|_0^{L/2} [m(\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2}) + Tx]$$

$$= \frac{1}{GI_{t\mathrm{AB}}}(m\frac{L^2}{8} + \frac{TL}{2})$$

Väli BC:

$$\Delta\varphi_{t\mathrm{BC}} = \int_{L/2}^{L} \theta dx = \int_{L/2}^{L} \frac{M_t}{GI_{t\mathrm{BC}}} dx = \frac{T}{GI_{t\mathrm{BC}}} \int_{L/2}^{L} dx = \frac{1}{GI_{t\mathrm{BC}}} \frac{TL}{2}$$

<u>Vääntökulma pisteessä C:</u>

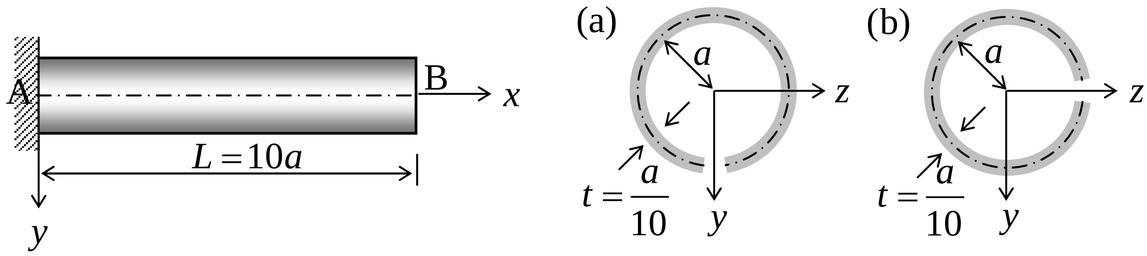
$$\varphi_{t\mathrm{C}} = \Delta\varphi_{t\mathrm{AB}} + \Delta\varphi_{t\mathrm{BC}} = \frac{TL}{2}\left(\frac{1}{GI_{t\mathrm{AB}}} + \frac{1}{GI_{t\mathrm{AB}}}\right) + \frac{1}{8}\frac{m \cdot L^2}{GI_{t\mathrm{AB}}}$$

$$= \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 400}{2}\left(\frac{1}{6,362 \cdot 10^9} + \frac{1}{3,756 \cdot 10^9}\right) + \frac{1}{8}\frac{100 \cdot 400^2}{6,362 \cdot 10^9} = 4,549 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} \approx 0,26°.$$

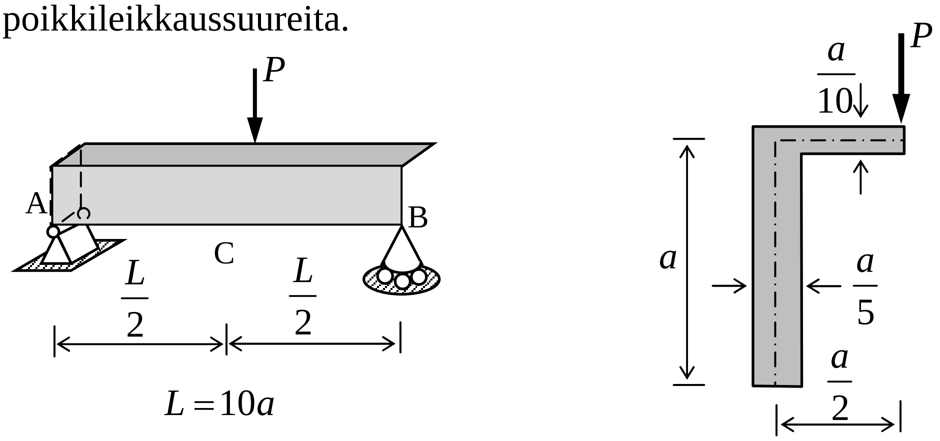
Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoitus 12:

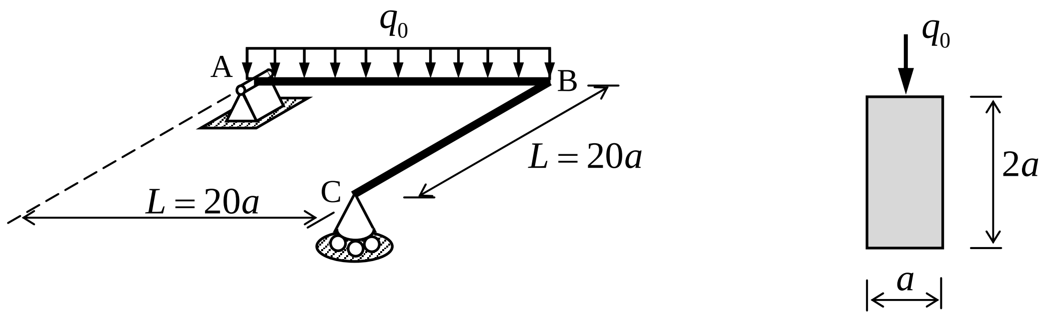
1. Halkaistun ympyräputken muotoista ulokepalkkia AB rasittaa sen oma paino. Tarkastellaan kahta tapausta, joissa putken halkaisukohta on (a) pystytasossa ja (b) vaakatasossa oheisten kuvien mukaisesti. Määritä suurin palkissa vaikuttava normaalijännitys ja leikkausjännitys molemmissa tapauksissa.



2. Oheisen kaksitukisen palkin vasemman pään A sarananivel mahdollistaa kiertymisen vaakasuoran poikittaisen akselin ympäri ja oikean pään B liikkuva niveltuki mahdollistaa liikkeen vaakatasossa. Palkin keskellä laipan reunassa vaikuttaa pistekuorma P. Määritä palkin suurin ja pienin normaalijännitys sekä suurin leikkausjännitys sekä niiden vaikutuspisteet. Määritä tulokset likimääräisesti käyttäen ohutseinämäisten poikkileikkausten poikkileikkaussuureita.



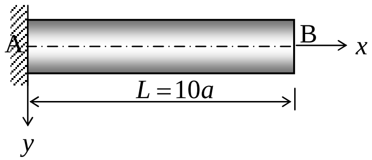
3. Arinarakenteen sauvaa AB kuormittaa pystysuuntainen tasainen kuorma q_0. Molempien sauvojen poikkileikkaus on kuvan suorakaide. Määritä suurin rakenteessa vaikuttava normaalijännitys ja leikkausjännitys.



Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet

Harjoituksen 12 ratkaisut:

1.



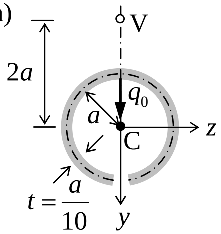
Tasan jakautunut kuorma:

$$q_0 = 2\pi a \cdot t \cdot \rho g = \frac{\pi}{5}\rho g a^2$$

Pintakeskiö ja vääntökeskiö:

$$e_V = 2a\frac{\overbrace{\sin\pi}^{0} - \pi\overbrace{\cos\pi}^{-1}}{\pi - \underbrace{\sin\pi}_{0}\cos\pi} = 2a$$

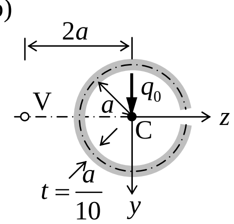
(a)



$y_V = -2a$

$z_V = 0$

(b)



$y_V = 0$

$z_V = -2a$

Poikkileikkaussuureet:

$$I_z = ta^3(\pi - \overbrace{\sin\pi}^{0}\cos\pi) = \pi t a^3 = \frac{\pi}{10}a^4,$$

$$I_t = \frac{2}{3}t^3 a\pi = \frac{2\pi}{3000}a^4$$

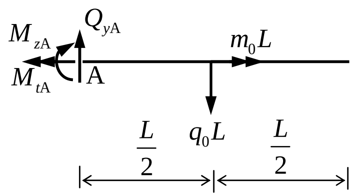
Tasan jakautunut vääntävä momenttikuorma: Omasta painosta aiheutuva kuorma q_0 kohdistuu pintakeskiöön. Siitä aiheutuu tapauksessa (b) vääntökeskiöön tasan jakautunut momenttikuorma.

$$m_0 = -q_0 \cdot 2a = -\frac{2\pi}{5}\rho g a^3.$$

Leikkausrasitukset:

Koska $q_0 = \text{vakio}$, Q_y on lineaarinen ja M_z on kvadraatinen.
Koska $m_0 = \text{vakio}$, M_t on lineaarinen.

Piste A:

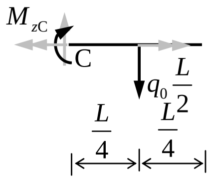


$$Q_{yA} - q_0 L = 0 \;\Rightarrow\; Q_{yA} = q_0 L$$

$$M_{tA} + m_0 L = 0 \;\Rightarrow\; M_{tA} = -m_0 L$$

$$M_{zA} + q_0 L \cdot \frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; M_{zA} = -\frac{q_0 L^2}{2}$$

Keskipiste C:



$$M_{zC} + \frac{q_0 L}{2}\cdot\frac{L}{4} = 0 \;\Rightarrow\; M_{zA} = -\frac{q_0 L^2}{8}$$

Itseisarvoltaan suurimmat arvot ovat kaikki pisteessä A.

$$Q_{y,\max} = Q_{yA} = q_0 L = \frac{\pi}{5}\rho g a^2 \cdot 10a = 2\pi\rho g a^3$$

$$M_{z,\min} = M_{zA} = -\frac{q_0 L^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\rho g a^2\cdot(10a)^2 = -10\pi\rho g a^4$$

$$M_{t,\min} = M_{tA} = -m_0 L = -\frac{2\pi}{5}\rho g a^3 \cdot 10a = -4\pi\rho g a^4 \text{ (tapaus (b))}$$

Tapauksessa (a) $m_0 = 0$ ja siis $M_t = 0$

Suurin normaalijännitys:

Tapaukset (a) ja (b):

Suurin normaalijännitys on yläreunassa ($y=-a$)

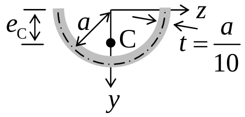
$$\sigma_{x,\max}=\frac{M_{z,\min}}{I_z}\cdot(-a)=\frac{-10\pi\rho g a^4}{\frac{\pi}{10}a^4}\cdot(-a)=\underline{\underline{100\rho g a}}$$

Suurin leikkausjännitys:

Tapaus (a):

Suurin leikkausvoimasta aiheutuva leikkausjännitys on $z-$akselilla

$$S_z(0)=\pi a t\cdot e_{\mathrm{C}}=\pi\frac{a^2}{10}\cdot\frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}}{\frac{\pi}{2}}a=\frac{1}{5}a^3$$



$$\tau_{Q,\max}=\frac{Q_{y,\max}S_z(0)}{I_z\cdot 2t}=\frac{2\pi\rho g a^3\cdot\frac{1}{5}a^3}{\frac{\pi}{10}a^4\cdot 2\cdot\frac{a}{10}}=20\rho g a$$

Suurin vääntömomentista aiheutuva leikkausjännitys $\tau_{M_t,\max}=0$

Suurin kokonaisleikkausjännitys

$$\tau_{\max}=\tau_{Q,\max}+\tau_{M_t,\max}=\underline{\underline{20\rho g a}}$$

Tapaus (b):

Suurin leikkausvoimasta aiheutuva leikkausjännitys on $z-$akselilla

$$\tau_{Q,\max}=\frac{Q_{y,\max}S_z(0)}{I_z\cdot t}=\frac{2\pi\rho g a^3\cdot\frac{1}{5}a^3}{\frac{\pi}{10}a^4\cdot\frac{a}{10}}=40\rho g a$$

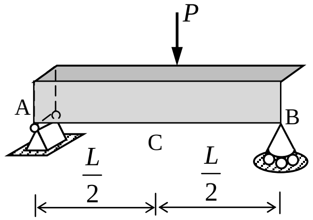
Suurin vääntömomentista aiheutuva leikkausjännitys

$$\tau_{M_t,\max}=\frac{|M_{t,\min}|}{W_t}=\frac{|M_{t,\min}|}{I_t/t}=\frac{4\pi\rho g a^4}{\frac{2\pi}{3000}a^4\cdot\frac{10}{a}}=600\rho g a$$

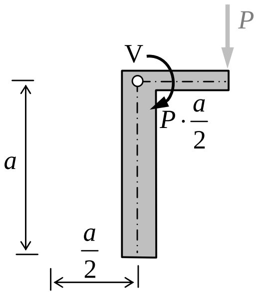
Suurin kokonaisleikkausjännitys

$$\tau_{\max}=\tau_{Q,\max}+\tau_{M_t,\max}=\underline{\underline{640\rho g a}}$$

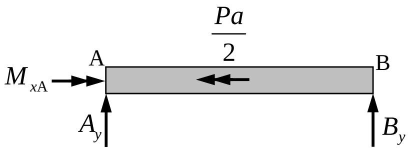
2.



Kuormitus:



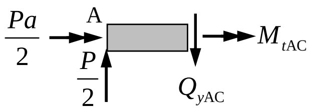
Tukireaktiot:



$$A_y = B_y = \frac{P}{2} \text{ (Symmetria)}$$

$$M_{xA} - \frac{Pa}{2} = 0 \;\Rightarrow\; M_{xA} = \frac{Pa}{2}$$

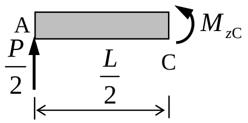
Suurin leikkausvoima ja vääntömomentti ovat välillä AC:



$$Q_{yAC} - \frac{P}{2} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{yAC} = \frac{P}{2}$$

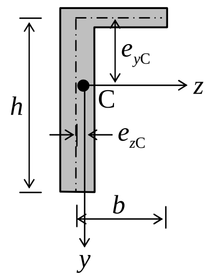
$$M_{tAC} + \frac{Pa}{2} = 0 \;\Rightarrow\; M_{tAC} = -\frac{Pa}{2}$$

Suurin taivutusmomentti on palkin keskellä:



$$M_{zC} - \frac{P}{2}\cdot\frac{L}{2} \;\Rightarrow\; M_{zC} = \frac{PL}{4} = \frac{5}{2}Pa$$

Pintakeskiö:



$$e_{yC} \approx \frac{1}{2}\frac{t_w h^2}{t_w h + t_f b} = \frac{1}{2}\frac{\frac{a}{5}\cdot a^2}{\frac{a}{5}\cdot a + \frac{a}{10}\cdot\frac{a}{2}} = \frac{2}{5}a$$

$$e_{zC} \approx \frac{1}{2}\frac{t_f b^2}{t_w h + t_f b} = \frac{1}{2}\frac{\frac{a}{10}\cdot(\frac{a}{2})^2}{\frac{a}{5}\cdot a + \frac{a}{10}\cdot\frac{a}{2}} = \frac{a}{20}$$

Poikkileikkaussuureet:

$$I_y \approx \frac{t_f b^3}{12} + t_w h e_{zC}^2 = \frac{\frac{a}{10}\cdot(\frac{a}{2})^3}{12} + \frac{a}{5}\cdot a\cdot(\frac{a}{20})^2 = \frac{37}{24000}a^4$$

$$I_z \approx \frac{t_w h^3}{12} + t_f b e_{yC}^2 = \frac{\frac{a}{5}\cdot a^3}{12} + \frac{a}{10}\cdot\frac{a}{2}\cdot(\frac{2}{5}a)^2 = \frac{17}{75}a^4$$

$$I_{yz} \approx -t_f b e_{yC}(\frac{b}{2} - e_{zC}) - t_w h(\frac{h}{2} - e_{yC})e_{zC}$$

$$= -\frac{a}{10}\frac{a}{2}\frac{2a}{5}(\frac{a}{2\cdot 2} - \frac{a}{20}) - \frac{a}{5}a\frac{a}{20}(\frac{a}{2} - \frac{2a}{5}) = -\frac{a^4}{200}$$

$$I_t \approx \frac{1}{3}(bt_f^3 + ht_w^3) = \frac{1}{3}[\frac{a}{2}(\frac{a}{10})^2 + a(\frac{a}{5})^2] = \frac{3}{200}a^4$$

<u>Suurimman ja pienimmän normaalijännityksen määrittäminen:</u>

Normaalijännityksen lauseke:

$$\sigma_x = \frac{M_{zC}I_y - \overbrace{M_{yC}}^{0} I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}y + \frac{\overbrace{M_{yC}}^{0} I_z - M_{zC}I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}z = \frac{M_{zC}}{I_y I_z - I_{yz}^2}(I_y y - I_{yz}z)$$

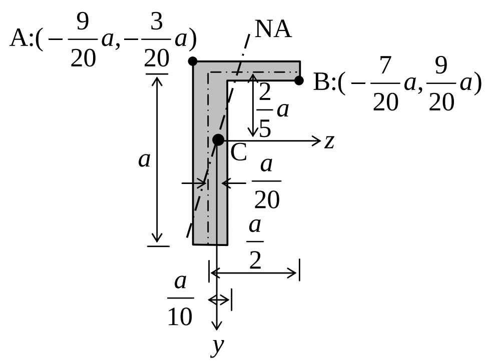
$$= \frac{\frac{5}{2}Pa}{\frac{37}{24000}a^4\frac{17}{75}a^4 - (\frac{a^4}{200})^2}(\frac{37}{24000}a^4 y + \frac{a^4}{200})z$$

$$= (11{,}88y + 38{,}53z)\frac{P}{a^3}$$

Neutraaliakseli:

$$\sigma_x \equiv (11{,}88y + 38{,}53z)\frac{P}{a^3} = 0 \;\Rightarrow\; z = -0{,}3083y$$

Suurin ja pienin normaalijännitys:



$$\sigma_{x\mathrm{A}} = (11{,}88 y_\mathrm{A} + 38{,}53 z_\mathrm{A})\frac{P}{a^3} = \underline{\underline{-11{,}13\frac{P}{a^2}}} \approx \sigma_{\min}$$

$$\sigma_{x\mathrm{B}} = (11{,}88 y_\mathrm{B} + 38{,}53 z_\mathrm{B})\frac{P}{a^3} = \underline{\underline{13{,}18\frac{P}{a^2}}} \approx \sigma_{\max}$$

<u>Suurimman leikkausjännityksen arviointi:</u>

Leikkausvoimasta aiheutuvan leikkausvuon lauseke:

$$q_Q = \frac{Q_y I_y - Q_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} S_{z\mathrm{I}} + \frac{Q_z I_z - Q_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} S_{y\mathrm{I}} = \frac{Q_{y\mathrm{AC}}}{I_y I_z - I_{zy}^2}(I_y S_{z\mathrm{I}} - I_{zy} S_{y\mathrm{I}})$$

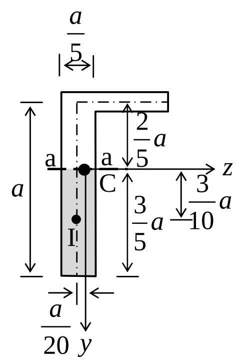
$$= \frac{\frac{P}{2}}{\frac{37}{24000}a^4 \frac{17}{75}a^4 - (\frac{a^4}{200})^2}\left(\frac{37}{24000}a^4 S_{z\mathrm{I}} + \frac{a^4}{200} S_{y\mathrm{I}}\right)$$

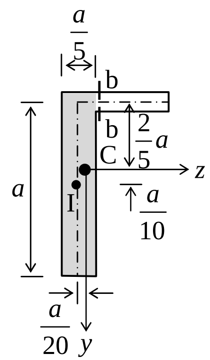
$$= (2{,}376 S_{z\mathrm{I}} + 7{,}705 S_{y\mathrm{I}})\frac{P}{a^4}$$

Tutkittavat leikkaukset:

Leikkausvoiman aiheuttama leikkausvuo poikkileikkauksen vaakaleikkauksessa on suurin pintakeskiön kohdalla (leikkaus a-a) ja siellä on myös leikkausjännitys suurin. Leikkausvoiman aihettama leikkauvuo poikkileikkauksen pystyleikkauksessa on myös suurin pintakeskiön kohdalla, mutta leikkauspinnan korkeus on suuri siellä pienentäen leikkausjännitystä. Tämän perusteella on ilmeistä, että suurin leikkausjännitys on laipan ja uuman yhtymäkohdassa (leikkaus b-b).

Leikkauksiin liittyvät staattiset momentit:





$$S_{y\mathrm{I}}^\mathrm{a} = \frac{a}{5}\cdot\frac{3}{5}a\cdot(-\frac{a}{20}) = -\frac{3}{500}a^3, \qquad S_{y\mathrm{I}}^\mathrm{b} = \frac{a}{5}\cdot a\cdot(-\frac{a}{20}) = -\frac{a^3}{100},$$

$$S_{z\mathrm{I}}^\mathrm{a} = \frac{a}{5}\cdot\frac{3}{5}a\cdot\frac{3}{10}a = \frac{9}{250}a^3, \qquad S_{z\mathrm{I}}^\mathrm{b} = \frac{a}{5}\cdot a\cdot\frac{a}{10} = \frac{a^3}{50}.$$

Leikkausvoimasta aiheutuvat leikkausvuot leikkauksissa a-a ja b-b:

$$q_Q^\mathrm{a} = [2{,}376\cdot\frac{9}{250}a^3 + 7{,}705(-\frac{3}{500}a^3)]\frac{P}{a^4} = 0{,}03931\frac{P}{a}$$

$$q_Q^\mathrm{b} = [2{,}376\cdot\frac{a^3}{50} + 7{,}705(-\frac{a^3}{100})]\frac{P}{a^4} = -0{,}02953\frac{P}{a}$$

Leikkausvoimasta aiheutuvat leikkausjännitykset leikkauksissa a-a ja b-b:

$$\tau_Q^\mathrm{a} = \frac{q_Q^\mathrm{a}}{\frac{a}{5}} = \frac{0{,}03931\frac{P}{a}}{\frac{a}{5}} = \underline{0{,}1955\frac{P}{a^2}}, \quad \tau_Q^\mathrm{b} = \frac{q_Q^\mathrm{b}}{\frac{a}{10}} = \frac{-0{,}02953\frac{P}{a}}{\frac{a}{10}} = \underline{-0{,}2953\frac{P}{a^2}}$$

Kalvoanalogiaan perustuen voidaan päätellä (jos uuman ja laipan liitoksen sisänurkka on riittävästi pyöristetty) että suurimmat väännöstä aiheutuvat leikkausjännitykset uumassa ja laipassa esiintyvät niiden keskialueilla molemmissa reunoissa. Arvioidaan ne ohutseinämäisen poikkileikkauksen kaavoilla.

$$\tau_{M_t}^w \approx \pm\frac{M_{t\mathrm{AC}}}{I_t}t_w = \frac{-\frac{Pa}{2}}{\frac{3}{200}a^4}\frac{a}{5} = \underline{\mp\frac{20}{3}\frac{P}{a^2}}, \quad \tau_{M_t}^f \approx \pm\frac{M_{t\mathrm{AC}}}{I_t}t_f = \pm\frac{-\frac{Pa}{2}}{\frac{3}{200}a^4}\frac{a}{10} = \underline{\mp\frac{10}{3}\frac{P}{a^2}}$$

Leikkausvoiman ja vääntömomentin aiheuttamien suurinten leikkausjännitysten vaikutuskohdat sekä uumassa että laipassa ovat lähellä toisiaan. Tämän vuoksi voidaan suurimmat kokonaisleikkausjännitykset arvioida laskemalla leikkausvoiman ja vääntömomentin aiheuttamien leikkausjännitykset yhteen. Saadaan

$$\tau^w_{\max} = \tau^{\mathrm{a}}_Q + \tau^w_{M_t,\max} \approx 0{,}1955\frac{P}{a^2} + \frac{20}{3}\frac{P}{a^2} \approx \underline{\underline{6{,}86\frac{P}{a^2}}},$$

$$\tau^f_{\max} = \tau^{\mathrm{b}}_Q + \tau^f_{M_t,\max} = 0{,}2953\frac{P}{a^2} + \frac{10}{3}\frac{P}{a^2} \approx \underline{\underline{3{,}63\frac{P}{a^2}}}.$$

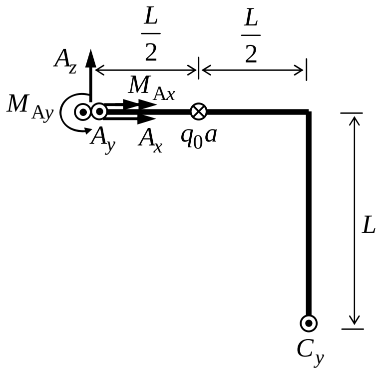
Suurin palkilla vaikuttava leikkausjännitys on

$$\tau_{\max} = \tau^w_{\max} \approx \underline{\underline{6{,}86\frac{P}{a^2}}}.$$

Sen vaikutuskohta on likimain $z-$akselin ja uuman oikean sivun leikkauspisteessä. Siellä sekä τ_Q että τ_{M_t} vaikuttavat samaan suuntaan ja tarkemmin alaspäin.

3.

<u>Tukireaktiot:</u>



$$\rightarrow \quad \underline{A_x = 0}$$

$$\odot \quad A_y + C_y - q_0 L = 0$$

$$\uparrow \quad \underline{A_z = 0}$$

$$\twoheadrightarrow \quad M_{\mathrm{A}x} - C_y \cdot L = 0$$

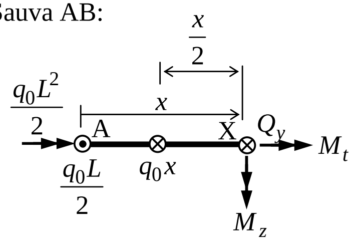
$$\underline{M_{\mathrm{A}y} = 0}$$

$$-C_y \cdot L + q_0 L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{C_y = \frac{q_0 L}{2}}, \quad A_y = q_0 L - C_y = \underline{\frac{q_0 L}{2}}, \quad M_{\mathrm{A}x} = C_y \cdot L = \underline{\frac{q_0 L^2}{2}}$$

<u>Leikkausrasitukset:</u>

Sauva AB:



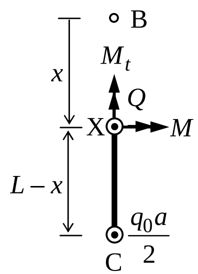
$$\odot \quad -Q_y + \frac{q_0 L}{2} - q_0 x = 0$$

$$\mathrm{AX} \twoheadrightarrow \quad M_t + \frac{q_0 L^2}{2} = 0$$

$$\mathrm{X} \quad -M_z - q_0 x \cdot \frac{x}{2} + \frac{q_0 L}{2} x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Q_y = q_0(\frac{L}{2} - x)}, \quad \underline{M_t = -\frac{q_0 L^2}{2}}, \quad \underline{M_z = \frac{q_0}{2} x(L-x)}$$

Sauva BC:



$$\odot \quad Q_y + \frac{q_0 L}{2} = 0$$

$$\mathrm{BX} \quad M_t = 0$$

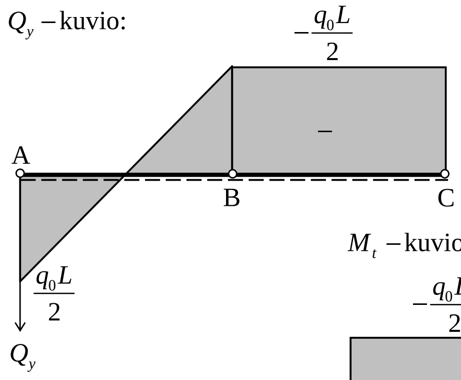
$$\mathrm{X} \twoheadrightarrow \quad M_z - \frac{q_0 L}{2}(L-x) = 0$$

Rak-54.1300 Rakenteiden mekaniikan perusteet, harjoitukset

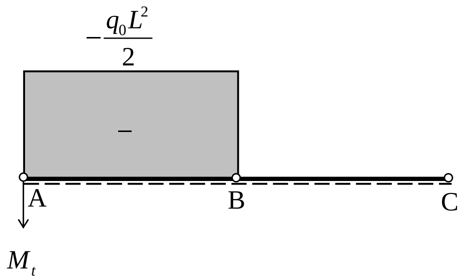
$$\Rightarrow\ Q_y = -\frac{q_0 L}{2},\ M_t = 0,\ M_z = \frac{q_0 L}{2}(L-x)$$

Rasituskuviot:

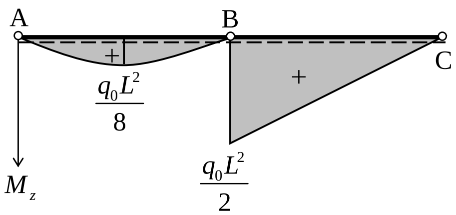
Q_y – kuvio:



M_t – kuvio:



M_z – kuvio:



Johtopäätöksia leikkausrasituksista:

Itseisarvoltaan suurin leikkausvoima ja vääntömomentti sauvan AB päissä:

$$Q_{y\mathrm{A}} = -Q_{y\mathrm{B}} = \frac{q_0 L}{2} = 10 q_0 a,\ M_{t\mathrm{A}} = M_{t\mathrm{B}} = -\frac{q_0 L^2}{2} = -200 q_0 a^2$$

Itseisarvoltaan suurin taivutusmomentti sauvan BC päässä B:

$$M_{z\mathrm{B}} = \frac{q_0 L^2}{2} = 200 q_0 a^2$$

Suurin normaalijännitys:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}a^4$$

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_{z\mathrm{B}}}{I_z} y_{\mathrm{ala}} = \frac{200 q_0 a^2}{\frac{2}{3}a^4} \cdot a = 300 \frac{q_0}{a}$$

Suurin leikkausjännitys:

Leikkausvoimasta:

$$S_z(0) = a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}$$

$$\tau^{Q}_{xy,\max} = \frac{Q_{y\mathrm{A}} S_z(0)}{I_z a} = \frac{10 q_0 a \cdot \frac{a^3}{2}}{\frac{2}{3}a^3 \cdot a} = \frac{15}{2}\frac{q_0}{a}$$

Vääntömomentista:

$$W_t = \beta \cdot 2a \cdot a^2 = 0{,}246 \cdot 2a \cdot a^2 = 0{,}492 a^3$$

$$\tau^{M_t}_{xy,\max} = \pm \frac{M_{t\mathrm{B}}}{W_t} = \pm \frac{-200 q_0 a^2}{0{,}492 a^3} = \mp 406{,}5 \frac{q_0}{a}$$

Suurin kokonaisleikkausjännitys:

$$\tau_{xy,\max} = \tau^{Q}_{xy,\max} + \tau^{M_t}_{xy,\max} = \frac{15}{2}\frac{q_0}{a} + 406{,}5\frac{q_0}{a} = 414\frac{q_0}{a}$$